Kai Hebeler, Jan Hoppe, Lars Zurek
Achim Schwenk
Institut für Kernphysik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Wintersemester 2021/22

Übungsblatt 8

Abgabe der mit (∗) gekennzeichneten Aufgaben: Dienstag, 7. Dezember, Anfang der Vorlesung

30. November 2021

Aufgabe P7: Zwei-Minuten-Fragen

1. Das System befinde sich im Zustand $|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$, wobei $\{|n\rangle\}$ Energieeigenzustände sind. Sie messen die Energie E_i. In welchem Zustand ist das System unmittelbar nach der Messung? Was sind mögliche Messwerte für die Energie wenn die Messung danach wiederholt wird?

2. Eine Messung der Observablen $\widehat{A}$ in einem Zustand $|\psi\rangle$ ergebe a. Danach werde die Observable $\widehat{B}$ und dann wieder $\widehat{A}$ gemessen. Was können Sie über das Ergebnis der zweiten Messung von $\widehat{A}$ aussagen?

3. Zeigen Sie, dass für ein symmetrisches Potential $V(x) = V(-x)$
$$[\widehat{H}, \widehat{\mathcal{P}}] = 0$$
gilt, wobei $\widehat{\mathcal{P}}$ den Paritätsoperator bezeichnet. Was folgt daraus, wenn wir Ansätze für Eigenzustände eines symmetrischen Potentials aufstellen wollen?

4. Welche der folgenden Operatoren entsprechen dem Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators?
   a) $\widehat{H} = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2} m\hbar^2\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2}$
   b) $\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$
   c) $\widehat{H} = \hbar\omega\left(\widehat{a}^\dagger \widehat{a} + \frac{1}{2}\right)$ mit $[\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger] = 1$

5. Was sind die Eigenschaften von $\widehat{a}^\dagger$ bzw. $\widehat{a}$, so dass wir diese als Auf- bzw. Absteigeoperatoren bezeichnet haben?

6. Warum ist das Spektrum des harmonischen Oszillators in der Herleitung mit Leiteroperatoren nach unten begrenzt? Vergleichen Sie das Spektrum mit dem Spektrum des unendlichen Potentialtopfes.

Aufgabe H21: Der harmonische Oszillator (4 Punkte) $(*)$
In dieser Aufgabe behandeln wir eine zur Vorlesung alternative Herleitung der Wellenfunktionen des eindimensionalen harmonischen Oszillators mittels eines Potenzreihenansatzes. Eine Darstellung des Hamilton-Operators des harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$\widehat{H} = \hbar\omega \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} y^2 \right) . \tag{1}$$

Betrachtet man die zeitunabhängige Schrödingergleichung, so ist ein möglicher Ansatz für die Wellenfunktion

$$\psi(y) = u(y) e^{-y^2/2} . \tag{2}$$

1. Leiten Sie eine Differentialgleichung für $u(y)$ her.

LÖSUNG: Ausgehend von der zeitunabhängigen Schrödingergleichung $\widehat{H}\psi = E\psi$, berechnen wir die erste und zweite Ableitung von $\psi(y)$ und setzen diese in die Schrödingergleichung ein:

$$\hbar\omega \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} y^2 \right) u(y) e^{-y^2/2} = E u(y) e^{-y^2/2} \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow \hbar\omega \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(y)}{\partial y^2} e^{-y^2/2} + \frac{\partial u(y)}{\partial y} y e^{-y^2/2} + \frac{1}{2} u(y) e^{-y^2/2} \right) = E u(y) e^{-y^2/2} \ . \tag{4}$$

Teilen durch $e^{-y^2/2}$ und umformen ergibt die Differentialgleichung

$$0 = u'' - 2u'y + 2ku \quad \text{mit} \quad k = \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \ , \tag{5}$$

wobei u' und u'' die erste und zweite Ableitung von $u(y)$ nach y bezeichnen.

2. Für die Lösungen $u_+(y)$ und $u_-(y)$ kann man einen Potenzreihenansatz wählen mit

$$u_+(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} y^{2n} \ , \quad u_-(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} y^{2n-1} \ , \tag{6}$$

wobei wir gerade und ungerade Funktionen unterscheiden. Begründen Sie, warum diese Darstellung sinnvoll ist.

LÖSUNG: Bei dem harmonischen Oszillator handelt es sich um ein symmetrisches Potenzial mit $V(x) = m\omega^2 x^2/2 = V(-x)$. Daher kommutiert der Paritätsoperator und der Hamilton-Operator $[\widehat{H}, \widehat{P}] = 0$ und die Parität ist eine gute Quantenzahl. Die Funktion $u(y = \sqrt{m\omega/\hbar} x)$ ist daher gerade oder ungerade. Die Summe läuft jeweils über $n \geqslant 0$, so dass ψ normierbar ist.

3. Berechnen Sie daraus eine Rekursionsformel für a_{2n} und a_{2n-1} und ermitteln Sie die möglichen Energieeigenwerte.

LÖSUNG: Betrachte zunächst die gerade Lösung $u_+(y)$. Für die erste und zweite Ableitung ergibt sich

$$-2yu'_+ = -2y\sum_{n=0}^{\infty} 2na_{2n}y^{2n-1} = -2\sum_{n=0}^{\infty} 2na_{2n}y^{2n} \ , \tag{7}$$

$$u''_+ = \sum_{n=0}^{\infty} 2n(2n-1)a_{n2}y^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)(2n+1)a_{n2+2}y^{2n} \ . \tag{8}$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung Gl. (5) ergibt sich

$$0 = (2n+2)(2n+1)a_{2n+2} - (4n-2k)a_{2n} \ , \tag{9}$$

und somit für die Rekursionsformel

$$a_{2n+2} = \frac{4n-2k}{(2n+2)(2n+1)}a_{2n} \ . \tag{10}$$

Diese Reihe bricht nur für gerade Werte von k ab. Damit ergeben sich Energieeigenwerte von

$$\frac{E}{\hbar\omega} = k + \frac{1}{2} = \frac{1}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{9}{2},\ \ldots \ . \tag{11}$$

Für die ungeraden Lösungen gehen wir analog vor. Die Rekursionsformel ergibt sich zu

$$a_{2n+1} = \frac{2(2n-1)-2k}{2n(2n+1)}a_{2n-1} \ , \tag{12}$$

woraus sich aus dem Zähler ablesen lässt, dass diese Reihe nur für ungerade k abbricht. Damit erhält man als Energieeigenwerte

$$\frac{E}{\hbar\omega} = k + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{11}{2},\ \ldots \ , \tag{13}$$

womit sich mit den geraden Lösungen die bekannten äquidistanten Energieeigenwerte ergeben.

Aufgabe H22: Kohärente Zustände (6 Punkte) $(*)$

Betrachten Sie einen Zustand $|\varphi(t)\rangle$, dessen Ortsraumdarstellung zum Zeitpunkt $t = 0$ durch

$$\varphi(y, t = 0) = \pi^{-1/4}e^{-(y-y_0)^2/2} \tag{14}$$

gegeben ist. Solch ein Zustand wird kohärenter Zustand genannt.

1. Stellen Sie $|\varphi(t = 0)\rangle$ in der Eigenbasis des harmonischen Oszillators dar. Zeigen Sie dazu zunächst, dass

$$e^{-(y-y_0/2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{y_0}{2}\right)^n H_n(y)e^{-y^2} \tag{15}$$

gilt, wobei $H_n(y)$ die Hermiteschen Polynome sind, und berechnen Sie die Entwicklungskoeffizienten $c_n(t = 0)$.

LÖSUNG: Um Gl. (15) zu zeigen, starten wir mit einer Taylorentwicklung von der Funktion $f(z) = e^{-z^2}$ um y:

$$f(z) = e^{-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n e^{-z^2}}{\partial z^n}\Big|_{z=y} (z-y)^n \tag{16}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n e^{-y^2}}{\partial y^n} (z-y)^n \ . \tag{17}$$

Der letzte Schritt ist möglich, da man anstatt y nach der z-Ableitung einzusetzen, auch direkt nach y ableiten kann. Um auf die gewünschte Funktion zu kommen, setzt man nun $z = y - y_0/2$ und erhält

$$e^{-(y-y_0/2)^2} = f(z = y - y_0/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{y_0}{2}\right)^n \frac{\partial^n e^{-y^2}}{\partial y^n} \ . \tag{18}$$

Aus der Vorlesung sind die Hermite Polynome $H_n(y)$ bekannt. Diese können wir umschreiben zu

$$H_n(y) = e^{y^2/2} \left(y - \frac{\partial}{\partial y}\right)^n e^{-y^2/2} \tag{19}$$

$$= e^{y^2/2} \left(-e^{y^2/2} \frac{\partial}{\partial y} e^{-y^2/2}\right)^n e^{-y^2/2} \tag{20}$$

$$= (-1)^n e^{y^2} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^n e^{-y^2} \ , \tag{21}$$

wobei im letzten Schritt die aufeinander treffenden e-Funktionen durch die Aneinanderreihung der Faktoren immer $e^{y^2/2} e^{-y^2/2} = 1$ ergeben. Durch Einsetzen diesen Ausdruckes für die Hermite Polynome in Gl. (18) folgt

$$e^{-(y-y_0/2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{y_0}{2}\right)^n \frac{\partial^n e^{-y^2}}{\partial y^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{y_0}{2}\right)^n H_n(y) e^{-y^2} \ , \tag{22}$$

was zu zeigen war.

Diese Relation benutzen wir nun, um den Zustand $|\varphi(t=0)\rangle$ in der Eigenbasis des harmonischen Oszillators darzustellen:

$$\varphi(y,0) = \pi^{-1/4} e^{-(y-y_0)^2/2} \tag{23}$$

$$= \pi^{-1/4} e^{y^2/2 - y_0^2/4} e^{-(y-y_0/2)^2} \tag{24}$$

$$= \pi^{-1/4} e^{y^2/2 - y_0^2/4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{y_0}{2}\right)^n H_n(y) e^{-y^2} \tag{25}$$

$$= \pi^{-1/4} e^{y^2/2 - y_0^2/4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{y_0}{2}\right)^n \sqrt{2^n n!} \pi^{1/4} \varphi_n(y) e^{-y^2/2} \tag{26}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{y_0}{\sqrt{2}}\right)^n e^{-y_0^2/4} \varphi_n(y) \tag{27}$$

$$\equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) \varphi_n(y) \ , \tag{28}$$

so dass für die Entwicklungskoeffizienten

$$c_n(0) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{y_0}{\sqrt{2}}\right)^n e^{-y_0^2/4} \ , \tag{29}$$

gilt. Die Wellenfunktion $\varphi(y, t = 0)$ entspricht der Eigenfunktion des harmonischen Oszillators im Grundzustand mit einer Auslenkung um y_0: $\varphi(y, t = 0) = \varphi_0(y - y_0)$.

2. In H23 zeigen Sie, dass die Zeitentwicklung des Zustands $|\varphi(t)\rangle$ gegeben ist durch

$$\varphi(y,t) = \pi^{-1/4} e^{-i\omega t/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(y - y_0 e^{-i\omega t}\right)^2 - \frac{1}{4} y_0^2 \left(1 - e^{-2i\omega t}\right)\right] . \tag{30}$$

   Verwenden Sie diesen Ausdruck, um zu zeigen, dass $|\varphi(t)\rangle$ ein Eigenzustand des Absteigeoperators $\widehat{a}$ ist. Dies ist eine charakteristische Eigenschaft kohärenter Zustände.

LÖSUNG: Im Ortsraum ist

$$\widehat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y + \frac{\partial}{\partial y}\right) . \tag{31}$$

Durch Einsetzen von Gl. (37) folgt direkt

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(y + \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi(y,t) = \frac{y_0 e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}}\varphi(y,t) \tag{32}$$

und somit ist $\widehat{a}\,|\varphi(t)\rangle = \frac{y_0 e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}}\,|\varphi(t)\rangle$.

3. Zeigen Sie außerdem, dass der Aufsteigeoperator $\widehat{a}^\dagger$ keine rechtsseitigen Eigenzustände besitzen kann, d.h., dass es kein $|\phi\rangle \neq 0$ mit

$$\widehat{a}^\dagger\,|\phi\rangle \propto |\phi\rangle \tag{33}$$

   gibt.

   HINWEIS: Setzen Sie allgemein mit

$$|\phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,|n\rangle \tag{34}$$

   an, wobei $\{|n\rangle\}$ die Eigenzustände des harmonischen Oszillators bezeichne, und zeigen Sie einen Widerspruch zu Gl. (33).

LÖSUNG: Wir nehmen an, dass $|\phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,|n\rangle \neq 0$ ein Eigenzustand von $\widehat{a}^\dagger$ mit Eigenwert α sei. Mit $\widehat{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$ ist dann

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,|n\rangle = \alpha\,|\phi\rangle = \widehat{a}^\dagger\,|\phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}\sqrt{n}\,|n\rangle\ . \tag{35}$$

Es folgt für $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \neq 0$ durch Koeffizientenvergleich

$$c_n = \frac{\sqrt{n}}{\alpha} c_{n-1}\,. \tag{36}$$

Es ist jedoch nach Gl. (35) $c_0 = 0$ und damit wegen Gl. (36) $c_n = 0\ \forall\ n$. Damit ist $|\phi\rangle = 0$ im Widerspruch zur Annahme.

Für $\alpha = 0$ folgt aus Gl. (35) direkt $c_n = 0\ \forall\ n$ mit der gleichen Konsequenz. Also hat $\widehat{a}^\dagger$ keine rechtsseitigen Eigenzustände.

Aufgabe H23: Zeitentwicklung der kohärenten Zustände

Zeigen Sie, dass die zeitliche Entwicklung des kohärenten Zustands $|\varphi(t)\rangle$ aus H22 gegeben ist durch

$$\varphi(y,t) = \pi^{-1/4} e^{-i\omega t/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(y - y_0 e^{-i\omega t}\right)^2 - \frac{1}{4} y_0^2 \left(1 - e^{-2i\omega t}\right)\right] . \tag{37}$$

Lösung: Für die Zeitentwicklung des Zustandes betrachten wir zunächst die Zeitentwicklung der Koeffizienten c_n. Dazu setzen wir den Zustand $|\varphi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)\,|n\rangle$ in die Schrödingergleichung ein und formen beide Seiten so um, dass sich eine Differentialgleichung für $c_n(t)$ ergibt:

$$\langle n|\, i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\, |\varphi(t)\rangle = \langle n|\, H\, |\varphi(t)\rangle \tag{38}$$

$$\Leftrightarrow \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle n|\varphi(t)\rangle = E_n \langle n|\varphi(t)\rangle \tag{39}$$

$$\Leftrightarrow \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} c_n(t) = E_n c_n(t) \ . \tag{40}$$

Diese DGL hat die Lösung

$$c_n(t) = c_n(0) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} = c_n(0) e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} \ . \tag{41}$$

Damit ergibt sich für die Zeitentwicklung der Wellenfunktion

$$\varphi(y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)\varphi_n(y) \tag{42}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{y_0}{\sqrt{2}}\right)^n e^{-y_0^2/4} e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} \varphi_n(y) \tag{43}$$

$$= e^{-i\omega t/2} e^{-y_0^2/4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{y_0}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t}\right)^n \varphi_n(y) \ . \tag{44}$$

Vergleich von (24) und (27) zeigt, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{y_0 e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}}\right)^n \varphi_n(y) = \pi^{-1/4} e^{y^2/2} e^{-(y - y_0 e^{-i\omega t}/2)^2} \tag{45}$$

gilt. Damit folgt nun nach Umformungen im Exponenten

$$\varphi(y,t) = \pi^{-1/4} e^{-i\omega t/2} \exp\left[-\frac{1}{4} y_0^2 \left(1 - e^{-2i\omega t}\right) - \frac{1}{2}\left(y - y_0 e^{-i\omega t}\right)^2\right] , \tag{46}$$

was zu zeigen war.

Aufgabe H24: Zweidimensionaler harmonischer Oszillator

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m in der x-y-Ebene mit dem Hamiltonoperator

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{p}_x^2 + \widehat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\left(\omega_x^2\, \widehat{x}^2 + \omega_y^2\, \widehat{y}^2\right) , \tag{47}$$

mit $\widehat{H}_x = \frac{\widehat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_x^2 \widehat{x}^2$ und $\widehat{H}_y = \frac{\widehat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_y^2 \widehat{y}^2$.

1. Zeigen Sie, dass $[\widehat{H}_x, \widehat{H}_y] = [\widehat{H}, \widehat{H}_x] = [\widehat{H}, \widehat{H}_y] = 0$, so dass simultane Eigenzustände von $\widehat{H}_x, \widehat{H}_y$ und $\widehat{H}$ existieren.

LÖSUNG: Es genügt zu zeigen, dass der Kommutator von $\widehat{p}_x^2$ und $\widehat{p}_y^2$ verschwinden, da die Ortsoperatoren sicherlich kommutieren. Das ist der Fall, da $\widehat{p} = \frac{\hbar}{i}\partial_x$ als partielle Ableitungen vertauschbar sind (Schwarz'sches Lemma). Desweiteren nutzt man die Linearität des Kommutators, also

$$\left[\widehat{A} + \widehat{B}, \widehat{C}\right] = \left[\widehat{A}, \widehat{C}\right] + \left[\widehat{B}, \widehat{C}\right] .$$

2. Machen Sie den Ansatz $\psi_{n_x,n_y}(x,y) = \phi_{n_x}(x)\phi_{n_y}(y)$ für die Eigenfunktionen von $\widehat{H}$. Bestimmen Sie $\phi_{n_x}(x)$ und $\phi_{n_y}(y)$, und die Eigenwerte E_{n_x,n_y} von $\widehat{H}$.

LÖSUNG: Setzt man den Separationsansatz $\psi(x,y) = \phi(x)\phi(y)$ in den Hamiltonian ein und trennt die Variablen voneinander, so erhält man folgendes:

$$\frac{1}{\phi_x}(\widehat{H}_x - E_x)\phi_x = \frac{1}{\phi_y}(\widehat{H}_y - E_y)\phi_y. \tag{48}$$

Beide Seiten müssen also verschwinden. Auszurechnen ist folgende Eigenwertgleichung (Index x oder y weggelassen):

$$\widehat{H}\left|n\right\rangle = E\left|n\right\rangle . \tag{49}$$

Wir lösen dies indem wir den Hamiltonian durch Auf- und Absteigeoperatoren ausdrücken. Mit

$$\begin{aligned} \widehat{a}_- &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\widehat{x} + \frac{i\widehat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \\ \widehat{a}_+ &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\widehat{x} - \frac{i\widehat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \end{aligned} \tag{50}$$

erhalten wir mit $[\widehat{x}, \widehat{p}] = \frac{\hbar}{i}\widehat{1}$:

$$\widehat{a}_+\widehat{a}_- = \frac{m\omega}{2\hbar}\widehat{x}^2 + \frac{1}{2m\omega\hbar}\widehat{p}^2 - \frac{1}{2} \tag{51}$$

Der Hamiltonian läßt sich also schreiben als:

$$\widehat{H} = \hbar\omega\left(\widehat{a}_+\widehat{a}_- + \frac{1}{2}\right) \tag{52}$$

$\widehat{a}_+\widehat{a}_-$ ist dabei der Teilchenzahloperator für den gilt:

$$\widehat{a}_+\widehat{a}_-\left|n\right\rangle = n\left|n\right\rangle . \tag{53}$$

Für die Energieeigenwerte erhalten wir also:

$$E = E_x + E_y = \hbar\omega_x\left(n_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_y\left(n_y + \frac{1}{2}\right) \tag{54}$$

Als letztes bestimmen wir die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators. Dazu genügt es, wegen Gl.(48) nur eine Raumrichtung zu betrachten, z.B. die x-Richtung. Wir setzen im Folgenden $n_x = n$. Wenn der Absteigeoperator $\widehat{a}_-$ auf den Grundzustand wirkt, dann verschwindet der Grundzustand:

$$\widehat{a}_- |n_0\rangle = 0 \tag{55}$$

Wir wechseln in die Ortsdarstellung: $\langle x|n_0\rangle = \Phi_0$ und erhalten folgende Differentialgleichung:

$$\widehat{a}_-\phi_0 = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\partial_x\right)\Phi_0 = 0. \tag{56}$$

Wir erhalten als Lösung für den Grundzustand:

$$\phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}. \tag{57}$$

Mit

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\widehat{a}_+^n |n_0\rangle . \tag{58}$$

ergeben sich die Eigenfunktionen des n-ten angeregten Zustandes:

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\partial_x\right)^n e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}. \tag{59}$$

Wenn man den Erzeugungsoperator auf $e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$ anwendet, erhält man die Hermite-Polynome $H_n(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x)$. Also:

$$\phi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}H_n(x/l)e^{-\frac{x^2}{2l^2}}. \tag{60}$$

Dabei ist es sinnvoll mit $l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ die Oszillatorlänge zu definieren.

Für das Gesamtsystem erhalten wir folgende Eigenfunktionen:

$$\psi_{n_x,n_y}(x,y) = \phi_{n_x}(x)\phi_{n_y}(y). \tag{61}$$

3. Bestimmen Sie die Entartung der Gesamtenergie E im Fall $\omega_x = \omega_y$.

LÖSUNG: Mit $\omega_x = \omega_y = \omega$ und $\widetilde{n} = n_x + n_y$ erhalten wir für die Gesamtenergie:

$$E = \hbar\omega\left(\widetilde{n} + 1\right). \tag{62}$$

Hat man nur einen einzelnen Zustand fuer $n_x = n_y = 0$, so hat man keine Entartung. Hat man zwei Zustände mit gleicher Energie, so spricht man von zweifacher Entartung usw. Mit diesem Verständnis von Entartung erhalten wir für ein festes $\widetilde{n}$ einen Entartungsgrad von $\widetilde{n} + 1$.