Kai Hebeler, Jan Hoppe, Lars Zurek
Achim Schwenk
Institut für Kernphysik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Wintersemester 2021/22

Übungsblatt 5

Abgabe der mit (∗) markierten Aufgaben: Dienstag, 16. November, Anfang der Vorlesung

9. November 2021

Aufgabe P4: Zwei-Minuten-Fragen

1. Welche Impulsverteilung entspricht einer Konstanten im Ortsraum? Veranschaulichen Sie die Relation mittels der Fourier-Transformation einer ebenen Welle.

2. Für welche Potentiale sind die Energieeigenwerte des Hamilton-Operators diskret und für welche kontinuierlich? Warum hängt das von der Energie E des Zustandes ab?

3. Wie kann man die Lösung des 3-dimensionalen unendlichen Potentialtopfs mit

$$V(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 0 \ , \ 0 \leqslant x \leqslant L, \ 0 \leqslant y \leqslant L, \ 0 \leqslant z \leqslant L \\ \infty \ , \ \text{sonst} \end{cases}$$

auf die Lösung des 1-dimensionalen zurückführen? Was bedeutet das für die Energieeigenwerte?

4. Geben Sie für den 3-dimensionalen unendlichen Potentialtopf aus P4.3 die ersten 4 Energieeigenwerte und deren Entartung an.

5. Skizzieren Sie die ersten 4 Eigenzustände des 1-dimensionalen endlichen Potentialtopfs aus der Vorlesung für gebundene Zustände.

6. Betrachten Sie eine Potentialstufe. Skizzieren Sie den Reflexionskoeffizienten R als Funktion der Energie der einlaufenden ebenen Welle.

Aufgabe H10: Gebundene Zustände im Doppel-δ-Potential (3 Punkte) (∗)

Betrachten Sie ein Teilchen mit Masse m in dem Potential

$$V(x) = -\frac{\hbar^2\lambda}{2m}\left[\delta(x-a) + \delta(x+a)\right] , \tag{1}$$

für $\lambda > 0$ und $a > 0$. Da das Potential symmetrisch unter Parität ($x \to -x$) ist, machen wir den Ansatz für die Wellenfunktion

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{kx} & x < -a \, , \\ A\cosh(kx) & -a \leqslant x \leqslant a \, , \\ e^{-kx} & x > a \, . \end{cases} \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass die Lösung für gebundene Zustände $ka(1 + \tanh(ka)) = \lambda a$ erfüllt. Integrieren sie dafür für $\epsilon > 0$ die zeitunabhängige Schrödingergleichung über ein Intervall um a

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \mathrm{d}x\, (\widehat{H} - E)\psi(x) = 0 \tag{3}$$

und bestimmen Sie die Lösung für $\lambda a = 1$ graphisch. Warum ist es ausreichend nur a und nicht zusätzlich $-a$ zu betrachten?

Lösung: Wir betrachten eine stetige Wellenfunktion ψ, die unstetig (Sprungstelle) in der ersten Ableitung ist. Dann gilt ausgehend von der zeitunabhängigen Schrödingergleichung

$$(\widehat{H} - E)\psi = 0 \tag{4}$$

mit $\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \widehat{V}$, dass dies nach einmaliger Integration (hier nur für $x = +a$, da das Potential symmetrisch unter einer Paritätstransformation ist)

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda\delta(x-a) - E' \right) \psi(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{5}$$

mit $E' = E\frac{2m}{\hbar^2}$ ist. Ausführen dieses Integrals ergibt

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\psi'(x)\big|_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} + \lambda\psi(a) - \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} E'\,\psi(x)\,\mathrm{d}x \right) \right) = 0\,, \tag{6}$$

wobei das Integral mit E' wegen der Stetigkeit der Wellenfunktion verschwindet.

Mit $\psi(a) = A\cosh(ka)$ und

$$\lim_{\epsilon \to 0}(\psi'(a+\epsilon) - \psi'(a-\epsilon)) = -k\exp(-ka) - Ak\sinh(ka) \tag{7}$$

lässt sich der Ausdruck zu

$$k(\exp(-ka) + A\sinh(ka)) = \lambda A\cosh(ka) \tag{8}$$

umschreiben, was schließlich mit $\exp(-ka) = A\cosh(ka)$ (nach Stetigkeit bei $x = a$) die gesuchte Behauptung

$$k\left(1 + \frac{\sinh(ka)}{\cosh(ka)}\right) = \lambda \tag{9}$$

bzw.

$$ka(1 + \tanh(ka)) = \lambda a \tag{10}$$

ergibt.

Die graphische Lösung ergibt sich durch Auftragen der linken und rechten Seite von $\tanh(\tilde{x}) = \frac{\lambda a}{\tilde{x}} - 1$, mit $\tilde{x} = ka$ gegeneinander, siehe Abb. 1, wodurch sich die Lösung im Schrittpunkt ablesen lässt.

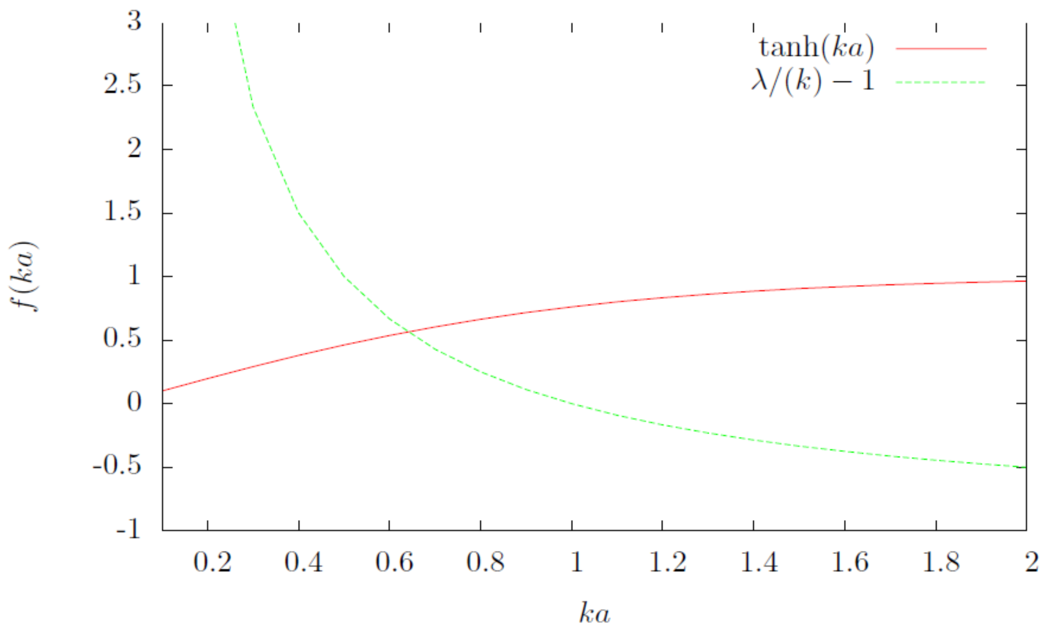

Abbildung 1: Graphische Bestimmung des Schnittpunkts.

Aufgabe H11: Streuung am endlichen Potentialtopf (7 Punkte) $(*)$
Wir betrachten die Streuung eines Teilchens mit Energie $E > 0$ am endlichen Potentialtopf der Breite L mit

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < -L/2 & \text{(I)} \\ -V_0 & , \ -L/2 \leqslant x \leqslant L/2 & \text{(II)} \\ 0 & , \ x > L/2 & \text{(III)} \ . \end{cases} \tag{11}$$

Der Ansatz für die Wellenfunktion ist gegeben durch

$$\psi_{\mathrm{I}}(x) = e^{ikx} + re^{-ikx} \tag{12}$$

$$\psi_{\mathrm{II}}(x) = n_+ e^{ik'x} + n_- e^{-ik'x} \tag{13}$$

$$\psi_{\mathrm{III}}(x) = \tau e^{ikx} \ . \tag{14}$$

1. Warum ist dieser Ansatz sinnvoll für die Beschreibung des Problems? Wie müssen k und k' gewählt werden, so dass der Ansatz eine Lösung der Schrödinger-Gleichung ist?

LÖSUNG: Der Ansatz beschreibt ein Teilchen, welches von links einläuft und dann reflektiert und transmittiert wird. Die Normierung ist so gewählt, dass in Bereich I die einlaufende Welle mit e^{ikx} den Vorfaktor 1 hat, so dass re^{-ikx} gerade den nach links laufenden, reflektierten Anteil beschreibt. In Bereich III existiert nur die nach rechts laufende, transmittierte Welle. In beiden Bereichen ist $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$. Hier gibt τ also den Anteil der einlaufenden Welle an, der transmittiert wird. In Bereich II muss das Potential mit berücksichtigt werden, so dass hier $k'^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E+V_0)$ gilt. In Bereich II handelt es sich auch um ebene Wellen, die jedoch um V_0 verschoben sind.

2. Bestimmen Sie die Koeffizienten r und τ als Funktion von k und k'.

LÖSUNG: Die Koeffizienten werden bestimmt durch das Matching der Wellenfunktion und ihrer Ableitung bei $x = L/2$ und $x = -L/2$. Damit ergibt sich ein System aus 4 Gleichungen:

$$\psi_{\mathrm{I}}(-L/2) \stackrel{!}{=} \psi_{\mathrm{II}}(-L/2) \quad \Rightarrow \quad 1 + re^{ikL} = n_+ e^{i(k-k')L/2} + n_- e^{i(k+k')L/2} \tag{15}$$

$$\psi'_{\mathrm{I}}(-L/2) \stackrel{!}{=} \psi'_{\mathrm{II}}(-L/2) \quad \Rightarrow \quad 1 - re^{ikL} = \frac{k'}{k}\left(n_+ e^{i(k-k')L/2} - n_- e^{i(k+k')L/2}\right) \tag{16}$$

$$\psi_{\mathrm{II}}(L/2) \stackrel{!}{=} \psi_{\mathrm{III}}(L/2) \quad \Rightarrow \quad \tau = n_+ e^{-i(k-k')L/2} + n_- e^{-i(k+k')L/2} \tag{17}$$

$$\psi'_{\mathrm{II}}(L/2) \stackrel{!}{=} \psi'_{\mathrm{III}}(L/2) \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{k'}{k}\left(n_+ e^{-i(k-k')L/2} - n_- e^{-i(k+k')L/2}\right) \ . \tag{18}$$

Durch Auflösen von Gl. (17) und Gl. (18) erhält man für n_+ und n_- in Abhängigkeit von τ

$$n_+ = \frac{\tau}{2}\left(1 + \frac{k}{k'}\right) e^{i(k-k')L/2} \ , \tag{19}$$

$$n_- = \frac{\tau}{2}\left(1 - \frac{k}{k'}\right) e^{i(k+k')L/2} \ . \tag{20}$$

Einsetzen von n_+ und n_- in Gl. (15) und Gl. (16) liefert mit $2\cos(x) = e^{ix} + e^{-ix}$ und $2i\sin(x) = e^{ix} - e^{-ix}$

$$\tau = e^{-ikL}\left[\cos(k'L) - \frac{i}{2}\left(\frac{k}{k'} + \frac{k'}{k}\right)\sin(k'L)\right]^{-1} \ , \tag{21}$$

$$r = \frac{i}{2}\sin(k'L)\left(\frac{k'}{k} - \frac{k}{k'}\right)\tau \ . \tag{22}$$

3. Der Transmissionskoeffizient T und der Reflexionskoeffizient R sind durch $T \equiv \left|\frac{j_T}{j_{\mathrm{ein}}}\right|$ und $R \equiv \left|\frac{j_R}{j_{\mathrm{ein}}}\right|$ gegeben, wobei $j = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^*(\frac{\partial}{\partial x}\psi) - \psi(\frac{\partial}{\partial x}\psi^*))$ die Stromdichte bezeichnet. Zeigen Sie, dass $T + R = 1$ und dass für den Transmissionskoeffizienten

$$T = |\tau|^2 = \left(1 + \frac{V_0^2}{4E(E+V_0)}\sin^2 k'L\right)^{-1} \tag{23}$$

gilt.

LÖSUNG: Über die angegebene Gleichung für den Strom ergibt sich für den einlaufenden Strom j_{ein}, reflektierten Strom j_{R} und transmittierten Strom j_{T}

$$j_{\mathrm{ein}} = \frac{\hbar}{2mi}\left(e^{-ikx}ike^{ikx} - e^{ikx}(-ik)e^{-ikx}\right) = \frac{\hbar k}{m} \ , \tag{24}$$

$$j_{\mathrm{R}} = \frac{\hbar}{2mi}\left(re^{ikx}(-irk)e^{-ikx} - re^{-ikx}irke^{ikx}\right) = -\frac{\hbar k}{m}|r|^2 \ , \tag{25}$$

$$j_{\mathrm{T}} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\tau e^{-ikx}i\tau ke^{ikx} - \tau e^{ikx}(-i\tau k)e^{-ikx}\right) = \frac{\hbar k}{m}|\tau|^2 \ . \tag{26}$$

Da der Gesamtstrom j erhalten ist, muss die Summe der Ströme in Bereich I und Bereich III identisch sein, woraus folgt

$$j_{\mathrm{I}} = j_{\mathrm{ein}} + j_{\mathrm{R}} \stackrel{!}{=} j_{\mathrm{III}} = j_{\mathrm{T}} \quad \Rightarrow \quad j_{\mathrm{ein}} + j_{\mathrm{R}} = j_{\mathrm{T}} \ . \tag{27}$$

Damit ergibt sich mit Gl. (24)-(26)

$$1 = \frac{j_{\mathrm{T}}}{j_{\mathrm{ein}}} - \frac{j_{\mathrm{R}}}{j_{\mathrm{ein}}} = |\tau|^2 + |r|^2 = \left|\frac{j_T}{j_{\mathrm{ein}}}\right| + \left|\frac{j_R}{j_{\mathrm{ein}}}\right| = T + R \ . \tag{28}$$

Einsetzen von r aus Gl. (22) ergibt

$$\begin{aligned} 1 = T + R = T + \left|\frac{i}{2}\sin(k'L)\left(\frac{k'}{k} - \frac{k}{k'}\right)\tau\right|^2 && (29)\\ = T + \frac{1}{4}\left(\frac{k'}{k} - \frac{k}{k'}\right)^2 \sin^2(k'L)|\tau|^2 && (30)\\ = T\left[1 + \frac{V_0^2}{4E(E+V_0)}\sin^2(k'L)\right] \ , && (31) \end{aligned}$$

woraus

$$T = |\tau|^2 = \left(1 + \frac{V_0^2}{4E(E+V_0)}\sin^2 k'L\right)^{-1} \tag{32}$$

folgt.

4. Bestimmen Sie die Maxima des Transmissionskoeffizienten $T(E)$. Die zugehörigen Streuzustände mit diesen Energien heißen Resonanzen. Was ist an diesen Zuständen besonders?

LÖSUNG: Der Transmissionskoeffizient $T(E)$ wird maximal für $\sin^2 k'L = 0$, so dass $k'L = n\pi$ bei jedem Maximum gelten muss. Die zugehörigen Energien dieser Zustände sind die Resonanzenergien

$$E_{\mathrm{R}} = \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} - V_0 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2 - V_0 \ . \tag{33}$$

Bei diesen Energien ist der Transmissionskoeffizient 1, so dass die gesamte einlaufende Welle transmittiert und nichts reflektiert wird. Eine physikalische Interpretation davon ist, dass die reflektierten Wellen bei $x = -L/2$ und $x = L/2$ bei der Bedingung $k'L = n\pi$ destruktiv interferieren und somit alles transmittiert wird.

Aufgabe H12: α-Zerfall

Die Tunnelwahrscheinlichkeit $T(E)$ für einen allgemeinen Potentialberg kann man über N rechteckige Potentialbarrieren der Breite Δx annähern. Für $\Delta x \to 0$ erhält man für den gesamten Potentialberg die Tunnelwahrscheinlichkeit

$$T(E) \approx e^{-G} = \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\int_a^b dx\sqrt{2m(V(x)-E)}\right] \ , \tag{34}$$

mit dem Gamow-Faktor G, wobei an den klassischen Umkehrpunkten $V(a) = V(b) = E$ gilt.

Der α-Zerfall kann folgendermaßen modelliert werden: Man nimmt an, dass sich ein α-Teilchen im sphärischen Kernpotential

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & , \ 0 \leqslant r < R \\ \dfrac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r} & , \ r \geqslant R \end{cases} \tag{35}$$

mit $0 < E < V(R)$ bewegt. Dies entspricht einem anziehenden Potential für die Kernkräfte und einem abstoßenden Coulombpotential.
Betrachten Sie das Umherlaufen des α-Teilchens im Atomkern als klassischen Prozess und nehmen Sie an, dass es bei jedem Stoß an den Rand des Atomkerns bei $r = R$ diesen mit der Tunnelwahrscheinlichkeit $T(E)$ verlässt. Zeigen Sie, dass die Lebensdauer τ des Atomkerns der Geiger-Nuttall-Regel folgt, d.h.

$$\ln\tau \propto \frac{\alpha(Z)}{\sqrt{E}} + \beta(Z) \ , \tag{36}$$

wobei $R \approx R_0 Z^{1/3}$ gilt.

LÖSUNG: Die klassischen Umkehrpunkte sind gegeben bei $r = R$ und $r = r_c$ mit $r_c \gg R$ und $V(r_c) = E = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_c} = \frac{\gamma}{r_c}$. Damit ergibt sich für den Gamow-Faktor G

$$G = \frac{2}{\hbar}\int_R^{r_c} dr\sqrt{2m\left(\frac{\gamma}{r} - E\right)} \tag{37}$$

$$= \frac{2}{\hbar}\sqrt{2mE}\int_R^{r_c} dr\sqrt{\frac{r_c}{r} - 1} \ , \tag{38}$$

wobei $r_c = \gamma/E$ benutzt wurde. Integration (z. B. mit Mathematica) und Anwendung von Relationen zwischen arctan und arcsin liefert

$$G = \frac{2}{\hbar}\sqrt{2mE}\left[r\sqrt{\frac{r_c}{r} - 1} \ - r_c \arctan\left(\sqrt{\frac{r_c}{r} - 1}\right)\right]_R^{r_c} \tag{39}$$

$$= \frac{2}{\hbar}\sqrt{2mE}\left[0 - R\sqrt{\frac{r_c}{R} - 1} \ + r_c \arctan\left(\sqrt{\frac{r_c}{R} - 1}\right)\right] \tag{40}$$

$$= \frac{2}{\hbar}\sqrt{2mE} \ r_c\left[-\sqrt{\frac{R}{r_c}\left(1 - \frac{R}{r_c}\right)} \ + \operatorname{sgn}\left(\sqrt{\frac{r_c}{R} - 1}\right)\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{r_c}{R} - 1}}\right)\right] \tag{41}$$

$$= \frac{2}{\hbar}\sqrt{2mE} \ r_c\left[\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{R}{r_c}\left(1 - \frac{R}{r_c}\right)} \ - \arcsin\left(\sqrt{\frac{R}{r_c}}\right)\right] \ . \tag{42}$$

Da $R \ll r_c$, kann der Ausdruck für G genähert werden zu

$$G \approx \frac{2}{\hbar}\sqrt{2mE} \ r_c\left[\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R}{r_c}} \ - 0\right] \tag{43}$$

$$= \frac{2}{\hbar}\sqrt{2mE} \ \frac{\gamma}{E}\left[\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{RE}{\gamma}}\right] \tag{44}$$

$$= \frac{\pi}{\hbar}\sqrt{2m}\gamma(Z)\frac{1}{\sqrt{E}} - \frac{4}{\hbar}\sqrt{2m}\sqrt{R(Z)\gamma(Z)} \ . \tag{45}$$

Die mittlere Lebensdauer des Atomkerns, bis das α-Teilchen den Kern verlassen hat, ist $\tau = t_0/T$. Hier beschreibt $t_0 = 2R/v = 2R\sqrt{m/2E}$ die Zeit zum Durchqueren des Kerns. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\ln\tau &= \ln(t_0/T) = \ln(t_0 e^G) = G + \ln t_0 && (46)\\
&= \frac{\pi}{\hbar}\sqrt{2m}\gamma(Z)\frac{1}{\sqrt{E}} - \frac{4}{\hbar}\sqrt{2m}\sqrt{R(Z)\gamma(Z)} + \ln t_0 && (47)\\
&\approx \frac{\alpha(Z)}{\sqrt{E}} + \beta(Z)\ , && (48)
\end{aligned}$$

da $\ln t_0$ nur leicht mit der Energie variiert und daher als von E unabhängig approximiert werden kann.