

Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Wintersemester 2021/22

Übungsblatt 2

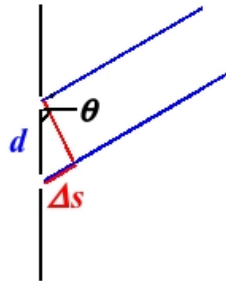
Abgabe der mit (*) gekennzeichneten Aufgaben: Dienstag, 26. Oktober, Anfang der Vorlesung

19. Oktober 2021

Aufgabe H1: Doppelspalt-Experiment (*)

1. Wie groß ist der Abstand Δ zweier benachbarter Maxima des Interferenzbildes auf einem Schirm mit Abstand D hinter dem Doppelspalt? Der Abstand zwischen beiden Spalten ist d . Nehmen Sie an, dass die Breite eines Spaltes viel kleiner ist als die de-Broglie-Wellenlänge der Elektronen.

LÖSUNG: Maxima entstehen, wenn der Gangunterschied zweier Strahlen ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge ist:



Das Maximum mit Ordnung m ist deshalb

$$d \sin \theta_m = m\lambda, \quad (1)$$

und mit dem Abstand des m -ten Maximums zur optischen Achse y_m folgt

$$\tan \theta_m \approx \sin \theta_m = \frac{y_m}{D} \Rightarrow \frac{d}{D} y_m = m\lambda. \quad (2)$$

Der Abstand zweier Maxima berechnet sich zu

$$\Delta = y_m - y_{m-1} = \frac{D}{d} \lambda (m - (m-1)) = \frac{D}{d} \lambda. \quad (3)$$

Mit der de-Broglie-Wellenlänge, $\lambda = \frac{h}{p}$, erhalten wir

$$\Delta = \frac{hD}{pd}. \quad (4)$$

2. Bestimmen Sie den Abstand zweier Maxima auf einem $L = 1.95$ m entfernten Schirm für ein Experiment mit Helium-Atomen der Geschwindigkeit 2.2 km/s. Der Abstand der beiden Spalten beträgt $d = 8 \mu\text{m}$. Das Interferenzbild auf dem Schirm ist in Abb. 1 gezeigt.

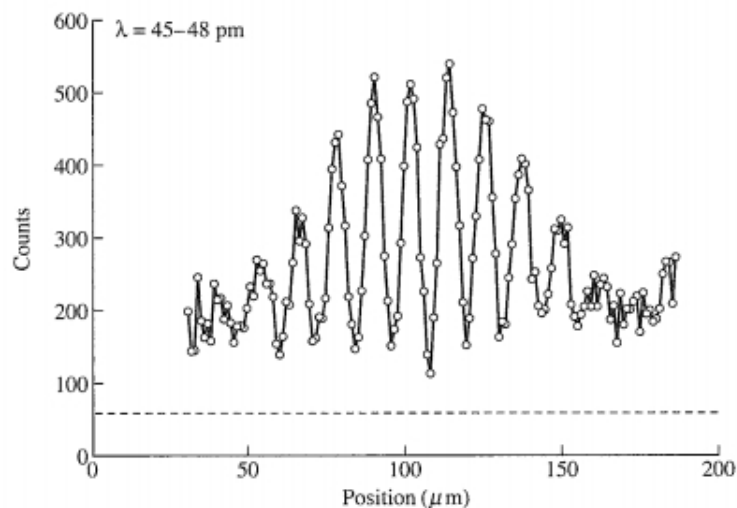


Abbildung 1: Detektierte Helium-Atome als Funktion der Position z auf dem Schirm.
Quelle: Ch. Kurtsiefer, T. Pfau und T. Mlynek. Siehe auch *Nature* **386**, 150 (1997).

LÖSUNG: Zunächst berechnen wir die Wellenlänge der Helium-Atome mit der Masse eines Helium-Atoms $m = 6.65 \times 10^{-27}$ kg,

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}}{(6.65 \times 10^{-27} \text{ kg})(2.2 \times 10^3 \text{ m/s})} \approx 45 \text{ pm}, \quad (5)$$

und daraus den Abstand zweier Maxima auf dem Schirm,

$$\Delta = \frac{D\lambda}{d} = \frac{(1.95 \text{ m})(45 \times 10^{-12} \text{ m})}{8 \times 10^{-6} \text{ m}} \approx 11 \mu\text{m}. \quad (6)$$

Aufgabe H2: Gaußsches Wellenpaket (*)

Die Form eines Wellenpakets ist nicht konstant unter zeitlicher Entwicklung. In dieser Übung wollen wir das Zerfließen des Gaußschen Wellenpakets

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \varphi(k) e^{i(kx - \frac{\hbar}{2m} k^2 t)} \quad (7)$$

mit einer gaußförmigen Impulsverteilung

$$\varphi(k) = A e^{-(k-k_0)^2 d^2} \quad (8)$$

in einer Dimension betrachten.

1. Bestimmen Sie die zeitliche Entwicklung des Wellenpakets $\psi(x, t)$ und zeigen Sie, dass sich

$$|\psi(x, t)|^2 = \psi(x, t) \psi^*(x, t) = \frac{|A|^2}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{d^4 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2}}} \exp \left(-\frac{\left(x - \frac{\hbar k_0}{m} t\right)^2}{2d^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{2m^2 d^2}} \right) \quad (9)$$

für das Betragsquadrat ergibt. Erklären Sie qualitativ wie sich die Form des Wellenpakets $|\psi(x, t)|^2$ zeitlich ändert.

LÖSUNG: Es ergibt sich

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \varphi(k) e^{i(kx - \frac{\hbar}{2m} k^2 t)} \quad (10)$$

$$= \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp \left(-k^2 \left(d^2 + i \frac{\hbar}{2m} t \right) + k (2k_0 d^2 + ix) - d^2 k_0^2 \right) \quad (11)$$

$$= \frac{A}{2\pi} e^{-d^2 k_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(-k^2 \alpha + k \beta), \quad (12)$$

wobei wir $\alpha = d^2 + i \frac{\hbar}{2m} t$ und $\beta = 2k_0 d^2 + ix$ definiert haben. Quadratisches Ergänzen liefert nun

$$\psi(x, t) = \frac{A}{2\pi} e^{-d^2 k_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp \left(-\alpha \left(k^2 - \frac{\beta}{\alpha} k + \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \right) + \alpha \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \right) \quad (13)$$

$$= \frac{A}{2\pi} e^{-d^2 k_0^2 + \alpha \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp \left(-\alpha \left(k - \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \right). \quad (14)$$

Mit der Substitution $\tilde{k} = k - \frac{\beta}{2\alpha}$ kann das Integral ausgeführt werden:

$$\psi(x, t) = \frac{A}{2\pi} e^{-d^2 k_0^2 + \alpha \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{k} \exp(-\alpha \tilde{k}^2) \quad (15)$$

$$= \frac{A}{2\pi} e^{-d^2 k_0^2 + \alpha \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (16)$$

$$= \frac{A}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{d^2 + i \frac{\hbar}{2m} t}} \exp \left(\frac{\frac{\beta^2}{4} - d^2 \alpha k_0^2}{\alpha} \right) \quad (17)$$

$$= \frac{A}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{d^2 + i \frac{\hbar}{2m} t}} \exp \left(\frac{-\frac{x^2}{4} + i d^2 k_0 (x - \frac{\hbar k_0}{2m} t)}{d^2 + i \frac{\hbar}{2m} t} \right). \quad (18)$$

Das Betragsquadrat kann nun durch Multiplikation $|\psi(x, t)|^2 = \psi^*(x, t)\psi(x, t)$ bestimmt werden. Um das Betragsquadrat des Exponenten zu bestimmen, kann verwendet werden, dass für $\chi = e^z = e^{\text{Re}(z)+i\text{Im}(z)}$ das Betragsquadrat die Form

$$|\chi|^2 = \chi^* \chi = e^{\text{Re}(z)-i\text{Im}(z)} e^{\text{Re}(z)+i\text{Im}(z)} = e^{2\text{Re}(z)} \quad (19)$$

annimmt. Für das Argument der Exponentialfunktion aus Gl. (18) gilt

$$z = \frac{-\frac{x^2}{4} + id^2 k_0(x - \frac{\hbar k_0}{2m}t)}{d^2 + i\frac{\hbar}{2m}t} \quad (20)$$

$$= \frac{(-\frac{x^2}{4} + id^2 k_0(x - \frac{\hbar k_0}{2m}t))(d^2 - i\frac{\hbar}{2m}t)}{d^4 + (\frac{\hbar}{2m}t)^2} \quad (21)$$

$$= \frac{\left(-\frac{x^2}{4}d^2 + d^2 k_0 \frac{\hbar t}{2m}(x - \frac{\hbar k_0}{2m}t)\right) + i\left(d^4 k_0(x - \frac{\hbar k_0}{2m}t) + \frac{x^2}{4} \frac{\hbar t}{2m}\right)}{d^4 + (\frac{\hbar}{2m}t)^2} \quad (22)$$

und somit

$$2\text{Re}(z) = -\frac{\left(x - \frac{k_0 \hbar}{m}t\right)^2}{2d^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{2m^2 d^2}}. \quad (23)$$

Für das Betragsquadrat von ψ ergibt sich damit

$$|\psi(x, t)|^2 = \psi^*(x, t)\psi(x, t) \quad (24)$$

$$= \frac{|A|^2}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(d^2 + i\frac{\hbar t}{2m})(d^2 - i\frac{\hbar t}{2m})}} \exp(2\text{Re}(z)) \quad (25)$$

$$= \frac{|A|^2}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{d^4 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2}}} \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{\hbar k_0}{m}t\right)^2}{2d^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{2m^2 d^2}}\right). \quad (26)$$

2. Eine Gauß-Verteilung der Form $\exp\left(-\frac{(z-z_0)^2}{2(\Delta z)^2}\right)$ hat den Peak bei z_0 und die Breite Δz . Bestimmen Sie Δx und Δp aus $|\psi(x, t)|^2$ zur Zeit $t = 0$ s und zeigen Sie, dass die Unschärferelation

$$(\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{\hbar}{2} \quad (27)$$

erfüllt ist. Die Impulsunschärfe Δp kann dem Betragsquadrat der Fouriertransformation $\tilde{\psi}(k, t = 0) = \varphi(k)$ entnommen werden.

LÖSUNG: Aus Gl. (9) können wir $(\Delta x)^2 = d^2$ für $t = 0$ ablesen. Aus der Fouriertransformation ergibt sich

$$|\varphi(k)|^2 = |A|^2 e^{-2(k-k_0)^2 d^2} \quad (28)$$

und somit $2(\Delta k)^2 = \frac{1}{d^2}$. Mit $p = \hbar k$ folgt

$$(\Delta x)(\Delta p) = \frac{\hbar}{2}. \quad (29)$$

Aufgabe H3: Wahrscheinlichkeitserhaltung und -stromdichte

Immer wenn man eine erhaltene Größe hat, z.B. die Ladung in der Elektrodynamik oder die Masse in der Kontinuumsmechanik, gilt für diese eine Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (30)$$

mit einer geeigneten Stromdichte $\mathbf{j}$. Diese Gleichung besagt, dass sich auf Grund der Erhaltung der betrachteten Größe (Ladung, Masse) die Dichte dieser Größe an einer Stelle $\mathbf{r}$ nur dadurch ändern kann, dass ein Strom dieser Größe von der Stelle $\mathbf{r}$ weg oder darauf zu fließt. Wir wollen zeigen, dass das Betragsquadrat der Wellenfunktion selbst eine solche Größe ist.

1. Betrachten Sie dazu $\rho = \psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t)$ und berechnen Sie die entsprechende Stromdichte $\mathbf{j}$.

LÖSUNG: Mit der Produktregel kann die Zeitableitung von ρ als $\dot{\rho} = \dot{\psi}^*\psi + \psi^*\dot{\psi}$ berechnet werden. Aus der Wellengleichung ergibt sich nun

$$\dot{\psi} = \frac{i\hbar^2}{2m\hbar}\Delta\psi \quad (31)$$

$$\dot{\psi}^* = -\frac{i\hbar^2}{2m\hbar}\Delta\psi^*. \quad (32)$$

Durch Einsetzen folgt

$$\dot{\rho} = \frac{i\hbar}{2m} (-(\Delta\psi^*)\psi + \psi^*(\Delta\psi)) \quad (33)$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m} \nabla \cdot ((\nabla\psi^*)\psi - \psi^*(\nabla\psi)) \quad (34)$$

$$\equiv -\nabla \cdot \mathbf{j} \quad (35)$$

wobei $\mathbf{j} = \frac{i\hbar}{2m} ((\nabla\psi^*)\psi - \psi^*(\nabla\psi))$ die gesuchte Stromdichte ist.

2. Zeigen Sie ausgehend von der Kontinuitätsgleichung, dass die Norm der Wellenfunktion erhalten ist, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3r \psi(\mathbf{r}, t)\psi^*(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (36)$$

Nutzen sie den Gaußschen Integralsatz und nehmen Sie an, dass die Wellenfunktion im unendlichen verschwindet.

LÖSUNG: Mit der Kontinuitätsgleichung gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3r \psi(\mathbf{r}, t)\psi^*(\mathbf{r}, t) = \int d^3r \frac{\partial}{\partial t} (\psi(\mathbf{r}, t)\psi^*(\mathbf{r}, t)) = - \int d^3r \nabla \cdot \mathbf{j}. \quad (37)$$

Mit dem Gaußschen Integralsatz kann das Volumenintegral in ein Oberflächenintegral einer Kugeloberfläche ∂B_R mit Radius R umgeschrieben werden:

$$\int d^3r \nabla \mathbf{j} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B_R} d^3r \nabla \mathbf{j} = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\partial B_R} d^2 \mathbf{f} \cdot \mathbf{j}. \quad (38)$$

Da die Wellenfunktion im Unendlichen verschwindet, gilt $\mathbf{j} \rightarrow 0$ für $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ und somit verschwindet das Oberflächenintegral

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3r \psi(\mathbf{r}, t) \psi^*(\mathbf{r}, t) = - \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\partial B_R} d^2 \mathbf{f} \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (39)$$
