Kai Hebeler, Jan Hoppe, Lars Zurek
Achim Schwenk
Institut für Kernphysik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Wintersemester 2021/22

Übungsblatt 10

Abgabe der mit (∗) gekennzeichneten Aufgaben: Dienstag, 11. Januar, Anfang der Vorlesung

14. Dezember 2021

Aufgabe P9: Zwei-Minuten-Fragen

1. Welche Eigenschaften besitzen unitäre Transformationen? Nennen Sie ein Beispiel einer unitären Transformation für einen Basiswechsel.

2. Welche Form hat der Zeitentwicklungsoperator $\widehat{U}$, um Zustände von $t = t_1$ nach $t = t_2$ zu entwickeln?

3. Zeigen Sie, dass $\widehat{U}^\dagger(t)\widehat{U}(t) = \widehat{\mathbb{1}}$. Gilt die Relation $\exp(\widehat{A}+\widehat{B}) = \exp(\widehat{A})\exp(\widehat{B})$ für alle Operatoren?

4. Zeigen Sie mit Hilfe des Zeitentwicklungsoperators, dass die Norm der Wellenfunktion erhalten ist, d.h. $\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 0\,.$

5. Wie können Sie eine Wellenfunktion im Ortsraum $\psi(x,t)$ durch die Wellenfunktion $\psi(x,t=0)$ mit dem Zeitentwicklungsoperator in Ortsdarstellung schreiben? Was ergibt sich anschaulich für $\psi(x,t=0) = \delta(x-x_0)$? Warum heißt der Zeitentwicklungsoperator in Ortsdarstellung auch Propagator?

6. Wie lauten die Relationen für die Zeitentwicklung von Operatoren und Zuständen im Schrödingerbild, Heisenbergbild und Wechselwirkungsbild? Geben Sie auch die Bewegungsgleichungen der Operatoren in den verschiedenen Bildern für den Fall zeitunabhängiger Wechselwirkungen an.

Aufgabe H28: Neutrino-Oszillationen (6 Punkte) (∗)

In dieser Aufgabe wollen wir ein vereinfachtes Modell für Neutrino-Oszillationen, der Umwandlung verschiedener Neutrino-Sorten ineinander, betrachten. Wir beschränken uns dabei auf zwei Sorten, Elektron- und Myon-Neutrinos, und stellen diese in einem Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ durch

$$|\nu_\mu\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\,,\quad |\nu_e\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{1}$$

dar. Ohne Wechselwirkung sind die Zustände in Gl. (1) Eigenzustände des freien Hamiltonoperators

$$\widehat{H}_0 = \begin{pmatrix}E_\mu & 0\\0 & E_e\end{pmatrix}\,. \tag{2}$$

1. Wir betrachten eine einfache Wechselwirkung zwischen den Neutrinos, die durch

$$\widehat{H} = \begin{pmatrix} E_\mu & g \\ g & E_e \end{pmatrix}, \tag{3}$$

gegeben ist, wobei $g \in \mathbb{R}$ die Stärke der Wechselwirkung angibt. Bestimmen Sie durch Diagonalisierung die Energien E_j und Eigenzustände $|\nu_j\rangle$ mit $j = 1, 2$ des Hamiltonoperators $\widehat{H}$. Zeigen Sie, dass

$$|\nu_1\rangle = \cos\theta\,|\nu_\mu\rangle + \sin\theta\,|\nu_e\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$|\nu_2\rangle = -\sin\theta\,|\nu_\mu\rangle + \cos\theta\,|\nu_e\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{5}$$

für die Eigenzustände gilt, wobei der Mischungswinkel θ durch

$$\sin(2\theta) = \frac{2g}{E_1 - E_2} \quad \text{bzw.} \quad \cos(2\theta) = \frac{E_\mu - E_e}{E_1 - E_2} \tag{6}$$

gegeben ist. Es genügt, wenn Sie dazu eine der beiden Relationen aus Gl. (6) zeigen.

Lösung: Wir bestimmen die Eigenwerte durch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, d.h. die Nullstellen von

$$P_H(\lambda) = \det(\widehat{H} - \lambda\mathbb{1}) = (E_e - \lambda)(E_\mu - \lambda) - g^2\,. \tag{7}$$

Mit der pq-Formel ergibt sich

$$E_1 = \frac{1}{2}(E_e + E_\mu) + \frac{1}{2}\sqrt{(E_e - E_\mu)^2 + 4g^2}\,, \tag{8}$$

$$E_2 = \frac{1}{2}(E_e + E_\mu) - \frac{1}{2}\sqrt{(E_e - E_\mu)^2 + 4g^2}\,. \tag{9}$$

Die Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_i$ können über $0 = (E_i\mathbb{1} - H)\boldsymbol{v}_i$ also dem Kern der Matrix $(E_i\mathbb{1} - H)$ bestimmt werden. Man findet

$$\boldsymbol{v}_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2g}\left(E_\mu - E_e + (-1)^{i+1}\sqrt{(E_e - E_\mu)^2 + 4g}\right)\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \tag{10}$$

wobei λ so gewählt wird, dass die Eigenvektoren normiert sind, d.h. $|\boldsymbol{v}_i| = 1$. Mit Gln. (8) und (9) folgt

$$\boldsymbol{v}_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{g}(E_i - E_e)\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Der Mischwinkel für $\boldsymbol{v}_1$ kann über

$$\tan\theta = \frac{v_{1,y}}{v_{1,x}} = \frac{g}{E_1 - E_e} \tag{12}$$

bestimmt werden. Mit trigonometrischen Beziehungen finden wir

$$\sin(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} = \frac{2g(E_1 - E_e)}{(E_1 - E_e)^2 + g^2}\,. \tag{13}$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, benötigen wir zwei weitere Beziehungen. Durch Addition bzw. Subtraktion von Gl. (8) und Gl. (9) ergibt sich

$$E_1 + E_2 = E_\mu + E_e\,, \tag{14}$$
$$(E_1 - E_2)^2 = (E_\mu - E_e)^2 + (2g)^2\,. \tag{15}$$

Mit Gl. (14) und (15) können wir den Zähler zu

$$\begin{aligned}
(E_1 - E_e)^2 + g^2 &= \frac{1}{4}(E_1 - E_e + E_\mu - E_2)^2 + g^2 && (16)\\
&= \frac{1}{4}\left((E_1 - E_2)^2 + (E_\mu - E_e)^2 + 2(E_1 - E_2)(E_\mu - E_e) + (2g)^2\right) && (17)\\
&= \frac{1}{2}\left((E_1 - E_2)^2 + (E_1 - E_2)(E_\mu - E_e)\right) && (18)\\
&= (E_1 - E_2)(E_1 - E_e) && (19)
\end{aligned}$$

vereinfachen. Durch Einsetzen in Gl. (13) folgt

$$\sin(2\theta) = \frac{2g(E_1 - E_e)}{(E_1 - E_2)(E_1 - E_e)} = \frac{2g}{E_1 - E_2}\,. \tag{20}$$

Die Beziehung für $\cos(2\theta)$ kann durch eine analoge Rechnung gezeigt werden. Da die Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ orthogonal zueinander sind, folgt die Darstellung für $\boldsymbol{v}_2$ direkt ohne weitere Rechnung.

2. Die Zustände $|\nu_j\rangle$ mit $j = 1, 2$ beschreiben Teilchen mit einer definierten Masse m_j, wobei E_j die relativistische Energie $E_j = \sqrt{(pc)^2 + (m_j c^2)^2}$ der Neutrinos ist. Schreiben sie den Zeitentwicklungsoperator $\widehat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}t}$ und die Zustände aus Gl. (1) in der $\{|\nu_j\rangle\}$-Basis.

Lösung: Der Zeitentwicklungsoperator nimmt die Form

$$\widehat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}t} = e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\,|\nu_1\rangle\langle\nu_1| + e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\,|\nu_2\rangle\langle\nu_2| \tag{21}$$

an, wobei wir benutzt haben, dass die Eigenvektoren eine vollständige Basis bilden, z.B. $\mathbb{1} = |\nu_1\rangle\langle\nu_1| + |\nu_2\rangle\langle\nu_2|$.

Um die Zustände $|\nu_\mu\rangle, |\nu_e\rangle$ in der $\{|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle\}$-Basis darzustellen kann benutzt werden, dass

$$\begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_\mu\rangle \\ |\nu_e\rangle \end{pmatrix} \tag{22}$$

gilt. Durch Inversion der Matrix ergibt sich

$$|\nu_\mu\rangle = \cos\theta\,|\nu_1\rangle - \sin\theta\,|\nu_2\rangle \tag{23}$$
$$|\nu_e\rangle = \sin\theta\,|\nu_1\rangle + \cos\theta\,|\nu_2\rangle\,. \tag{24}$$

3. Wir wollen nun zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Myon-Neutrino betrachten, d.h. $|\psi(t = 0)\rangle = |\nu_\mu\rangle$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, zu einem Zeitpunkt $t > 0$ ein Elektron-Neutrino zu messen, durch

$$p(t) = \sin^2(2\theta)\cdot\sin^2\left(\frac{E_1 - E_2}{2\hbar}t\right) \tag{25}$$

gegeben ist.

LÖSUNG: Unser Anfangszustand kann durch die Ergebnisse der vorherigen Aufgabe als

$$|\psi(t=0)\rangle = |\nu_\mu\rangle = \cos\theta\,|\nu_1\rangle - \sin\theta\,|\nu_2\rangle \tag{26}$$

geschrieben werden. Durch Anwenden des Zeitentwicklungsoperators ergibt sich der Zustand zur Zeit t als

$$|\psi(t)\rangle = \widehat{U}(t)\,|\psi(t=0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\cos\theta\,|\nu_1\rangle - e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\sin\theta\,|\nu_2\rangle\ . \tag{27}$$

Die Wahrscheinlichkeit zur Zeit t ein Elektron-Neutrino zu messen kann nun durch Projektion auf $\langle\nu_e|$ (aus der vorherigen Aufgabe) bestimmt werden. Wir finden

$$p(t) = |\,\langle\nu_e|\psi(t)\rangle\,|^2 = |\,(\sin\theta\,\langle\nu_1| + \cos\theta\,\langle\nu_2|)\,|\psi(t)\rangle\,|^2 \tag{28}$$

$$= \left|\sin\theta\cos\theta\left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} - e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\right)\right|^2 \tag{29}$$

$$= \sin^2(2\theta)\sin^2\left(\frac{E_1 - E_2}{2\hbar}t\right), \tag{30}$$

wobei wir $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ und $\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$ benutzt haben.

4. Was muss erfüllt sein, dass es zu Neutrino-Oszilationen kommen kann? Nehmen sie dazu an, dass die Energien durch $E_j = \sqrt{(pc)^2 + (m_j c^2)^2}$ gegeben sind und dass die Neutrinos ultra-relativistisch sind, d.h. $m_j c^2 \ll pc$.

LÖSUNG: Für ultra-relativistische Teilchen $m_j c^2 \ll pc$ können wir die Energierelation entwickeln:

$$E_j = \sqrt{(pc)^2 + (m_j c^2)^2} = pc\sqrt{1 + \left(\frac{m_j c^2}{pc}\right)^2} \approx pc\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_j c^2}{pc}\right)^2\right) = pc + \frac{m_j^2 c^4}{2pc}\,, \tag{31}$$

wobei wir die Taylor-Entwicklung von $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \ldots$ benutzt haben. Damit ergibt sich

$$E_1 - E_2 \approx \frac{(m_1^2 - m_2^2)c^4}{2pc}\,. \tag{32}$$

Somit sind Oszillationen nach Gl. (25) nur möglich, wenn Neutrinos eine Masse m_i haben, wobei $m_1^2 \neq m_2^2$ erfüllt sein muss. Außerdem muss nach Gl. (25) $\theta \neq 0$ sein und somit darf die Wechselwirkungsstärke g nicht verschwinden (siehe Gl. (6)).

Aufgabe H29: Kommutatoren mit dem Drehimpulsoperator (4 Punkte) (∗)

Zeigen Sie, dass die Drehimpulsoperatoren folgende Vertauschungsrelationen erfüllen:

LÖSUNG: Der Drehimpulsoperator ist definiert als Kreuzprodukt zwischen Ort und Impuls

$$\widehat{\boldsymbol{L}} = \widehat{\boldsymbol{r}} \times \widehat{\boldsymbol{p}}\,, \tag{33}$$

beziehungsweise seine Komponenten als

$$\widehat{L}_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk}\widehat{r}_j\widehat{p}_k\,. \tag{34}$$

1. $[\widehat{r}_j, \widehat{L}_k] = i\hbar\, \epsilon_{jkl}\, \widehat{r}_l$

LÖSUNG: Wie verwenden die Darstellung des Kreuzprodukts durch Epsilon-Tensoren und verwenden folgende Rechenregeln für Kommutatoren: $[\widehat{A}, \widehat{B} + \widehat{C}] = [\widehat{A}, \widehat{B}] + [\widehat{A}, \widehat{C}]$, und $[\widehat{A}, \widehat{B}\widehat{C}] = \widehat{B}[\widehat{A}, \widehat{C}] + [\widehat{A}, \widehat{B}]C$.

$$\begin{aligned}
[\widehat{r}_j, \widehat{L}_k] &= [\widehat{r}_j, \epsilon_{ilk}\widehat{r}_i\widehat{p}_l] && (35)\\
&= [\widehat{r}_j, \epsilon_{ilk}\widehat{r}_i\widehat{p}_l] && (36)\\
&= \epsilon_{ilk}(\widehat{r}_i[\widehat{r}_j, \widehat{p}_l] + [\widehat{r}_j, \widehat{r}_i]\widehat{p}_l) && (37)\\
&= i\hbar\epsilon_{ilk}\widehat{r}_i\delta_{jl} = i\hbar\epsilon_{jki}\widehat{r}_i\,. && (38)
\end{aligned}$$

2. $[\widehat{\boldsymbol{L}}, V(\boldsymbol{r})] = \frac{\hbar}{i}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\nabla} V(\boldsymbol{r})$

LÖSUNG: Um den Kommutator zu bestimmen, drücken wir das Kreuzprodukt mittels des ϵ-Tensors aus. Für eine beliebige Drehimpulskomponente gilt,

$$\begin{aligned}
[\widehat{\boldsymbol{L}}_i, V(\boldsymbol{r})] &= [\epsilon_{ijk}r_j\widehat{p}_k, V(\widehat{r})] && (39)\\
&= \frac{\hbar}{i}\epsilon_{ijk}r_j\nabla_k V(r) - \frac{\hbar}{i}\epsilon_{ijk}V(r)r_j\nabla_k && (40)\\
&= \frac{\hbar}{i}\epsilon_{ijk}\widehat{r}_j(\nabla_k V(r)) + \frac{\hbar}{i}\epsilon_{ijk}r_jV(r)\nabla_k - \frac{\hbar}{i}\epsilon_{ijk}V(r)r_j\nabla_k && (41)\\
&= \frac{\hbar}{i}\epsilon_{ijk}\widehat{r}_j(\nabla_k V(r))\,. && (42)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die Produktregel angewendet.

3. $[\widehat{\boldsymbol{L}}, V(|\boldsymbol{r}|)] = 0$

LÖSUNG: Diese Teilaufgabe ist eine direkte Anwendung der eben bestimmten Kommutatorrelation für Potentiale,

$$\begin{aligned}
[\widehat{\boldsymbol{L}}, V(|\boldsymbol{r}|)] &= \frac{\hbar}{i}\boldsymbol{r} \times \nabla V(|\boldsymbol{r}|) && (43)\\
&= \frac{\hbar}{i}\boldsymbol{r} \times \frac{\partial V}{\partial r}\nabla|\boldsymbol{r}| && (44)\\
&= \frac{\hbar}{i}\boldsymbol{r} \times \frac{\partial V}{\partial r}\nabla\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} && (45)\\
&= \frac{\hbar}{i}\boldsymbol{r} \times \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = 0\,. && (46)
\end{aligned}$$

Wir haben hierbei den Ortsvektor in kartesischen Koordinaten ausgeschrieben und explizit den Gradienten berechnet, $\nabla|\boldsymbol{r}| = \left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{r}}, \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{r}}, \frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{r}}\right)$. Die letzte Gleichung folgt direkt aus der Tatsache, dass das Kreuzprodukt zwischen zwei parallelen Vektoren verschwindet.

4. $[\widehat{p}_j, \widehat{L}_k] = i\hbar\, \epsilon_{jkl}\, \widehat{p}_l$

LÖSUNG: Wir verwenden wie oben die Darstellung des Kreuzprodukts durch Epsilon-Tensoren:

$$
\begin{aligned}
[\widehat{p}_j, \widehat{L}_k] &= [\widehat{p}_j, \epsilon_{ilk}\widehat{r}_i\widehat{p}_l] &(47)\\
&= \epsilon_{ilk}(\widehat{r}_i[\widehat{p}_j, \widehat{p}_l] + [\widehat{p}_j, \widehat{r}_i]\widehat{p}_l) &(48)\\
&= -i\hbar\epsilon_{ilk}\delta_{ji}\widehat{p}_l = i\hbar\epsilon_{jkl}\widehat{p}_l\,. &(49)
\end{aligned}
$$

5. $[\widehat{L}_j, \widehat{\boldsymbol{p}}^2] = 0$ für $j = 1, 2, 3$

LÖSUNG: Der Kommutator lässt sich über die üblichen Rechenregeln für Kommutatoren direkt bestimmen, wir machen dies hier exemplarisch für $\widehat{L}_2$

$$
[\widehat{L}_2, \widehat{\boldsymbol{p}}^2] = [\widehat{r}_3\widehat{p}_1 - \widehat{r}_1\widehat{p}_3, \widehat{p}_1^2 + \widehat{p}_2^2 + \widehat{p}_3^2] = [\widehat{r}_3\widehat{p}_1, \widehat{p}_3^2] - [\widehat{r}_1\widehat{p}_3, \widehat{p}_1^2]\,. \tag{50}
$$

Alle weiteren Kommutatoren fallen weg, da

$$
\begin{cases}
[\widehat{p}_i, \widehat{p}_j] = 0\,,\\
[\widehat{r}_i, \widehat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}\,.
\end{cases} \tag{51}
$$

Nun verwenden wir noch $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ und erhalten

$$
\begin{aligned}
[\widehat{L}_2, \widehat{\boldsymbol{p}}^2] &= [\widehat{r}_3, \widehat{p}_3^2]\widehat{p}_1 - [\widehat{r}_1, \widehat{p}_1^2]\widehat{p}_3 &(52)\\
&= \widehat{p}_3[\widehat{r}_3, \widehat{p}_3]\widehat{p}_1 + [\widehat{r}_3, \widehat{p}_3]\widehat{p}_3\widehat{p}_1 - \widehat{p}_1[\widehat{r}_1, \widehat{p}_1]\widehat{p}_3 - [\widehat{r}_1, \widehat{p}_1]\widehat{p}_1\widehat{p}_3 &(53)\\
&= i\hbar\widehat{p}_3\widehat{p}_1 + i\hbar\widehat{p}_3\widehat{p}_1 - i\hbar\widehat{p}_1\widehat{p}_3 - i\hbar\widehat{p}_1\widehat{p}_3 = 0\,. &(54)
\end{aligned}
$$

Die beiden anderen Kommutatoren berechnen sich völlig analog.

Aufgabe H30: Baker-Campbell-Hausdorff-Relation

1. Zeigen Sie, dass für beliebige lineare Operatoren $\widehat{A}$ und $\widehat{B}$ gilt, dass

$$
\exp(\widehat{A})\,\widehat{B}\,\exp(-\widehat{A}) = \widehat{B} + [\widehat{A}, \widehat{B}] + \frac{1}{2!}[\widehat{A}, [\widehat{A}, \widehat{B}]] + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[\widehat{A}, \widehat{B}]_n\,, \tag{55}
$$

wobei der "Multikommutator" rekursiv definiert ist durch

$$
[\widehat{A}, \widehat{B}]_0 = \widehat{B} \quad \text{und} \quad [\widehat{A}, \widehat{B}]_n = [\widehat{A}, [\widehat{A}, \widehat{B}]_{n-1}]\,. \tag{56}
$$

HINWEIS: Betrachten Sie die Taylor-Reihe von $f(x) = \exp(x\widehat{A})\,\widehat{B}\,\exp(-x\widehat{A})$ und schreiben Sie die Ableitungen mit Hilfe von Kommutatoren.

LÖSUNG: Sei $f(x) = \exp(x\widehat{A})\widehat{B}\exp(-x\widehat{A})$. Entwickeln dieser Funktion in x um $x_0 = 0$ ergibt

$$f(x) = f(0) + x\frac{df}{dx}|_{x=0} + \frac{x^2}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}|_{x=0} + \dots\,, \tag{57}$$

wobei sich die i-ten ($i \in \mathbb{N}$) Ableitungen nach

$$\frac{df}{dx} = \widehat{A}f(x) - f(x)\widehat{A} = \left[\widehat{A}, f(x)\right] \tag{58}$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \left[\widehat{A}, \frac{df(x)}{dx}\right] = \left[\widehat{A}, \left[\widehat{A}, f(x)\right]\right] \tag{59}$$

$$\dots \tag{60}$$

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \left[\widehat{A}, f(x)\right]_n \tag{61}$$

iterativ aus der vorherigen Ableitung über den "Multikommutator" ergeben.
Eingesetzt in obige Entwicklung ergibt dies

$$f(x) = f(0) + x\left[\widehat{A}, f(x)|_{x=0}\right] + \frac{x^2}{2}\left[\widehat{A}, \left[\widehat{A}, f(x)|_{x=0}\right]\right] + \dots \tag{62}$$

$$= \widehat{B} + x\left[\widehat{A}, f(x)|_{x=0}\right] + \frac{x^2}{2}\left[\widehat{A}, \left[\widehat{A}, f(x)|_{x=0}\right]\right] + \dots \tag{63}$$

Der Grenzübergang $x \to 1$ liefert dann

$$\exp(\widehat{A})\widehat{B}\exp(-\widehat{A}) = \widehat{B} + \left[\widehat{A}, \widehat{B}\right] + \frac{1}{2!}\left[\widehat{A}, \left[\widehat{A}, \widehat{B}\right]\right] + \dots\,, \tag{64}$$

was zu zeigen war.

2. Zeigen Sie mit Hilfe von Gl. (55), dass im Spezialfall $[\widehat{A}, [\widehat{A}, \widehat{B}]] = [[\widehat{A}, \widehat{B}], \widehat{B}] = 0$ die spezielle Baker-Campbell-Hausdorff-Formel,

$$\exp(\widehat{A})\exp(\widehat{B}) = \exp\left(\widehat{A} + \widehat{B} + \frac{1}{2}\left[\widehat{A}, \widehat{B}\right]\right), \tag{65}$$

und der Spezialfall der Zassenhaus-Formel,

$$\exp(\widehat{A} + \widehat{B}) = \exp(\widehat{A})\ \exp(\widehat{B})\ \exp\left(-\frac{1}{2}[\widehat{A}, \widehat{B}]\right), \tag{66}$$

gelten.

HINWEIS: Betrachten Sie die Taylor-Reihe von $g(x) = \exp(x\widehat{A})\exp(x\widehat{B})$ und schreiben Sie die Ableitungen mit Hilfe von Kommutatoren.

LÖSUNG: Um nun zu zeigen, dass $\exp(\widehat{A} + \widehat{B}) = \exp\widehat{A}\exp\widehat{B}\exp(-1/2\left[\widehat{A}, \widehat{B}\right])$ ist, betrachten wir die Funktion

$$g(x) := \exp(x\widehat{A})\exp(x\widehat{B}) \tag{67}$$

und deren Ableitung

$$\begin{aligned}
\frac{dg}{dx} &= \widehat{A}\exp(x\widehat{A})\exp(x\widehat{B}) + \exp(x\widehat{A})\widehat{B}\exp(x\widehat{B}) && (68)\\
&= \left(\widehat{A} + \exp(x\widehat{A})\widehat{B}\exp(-x\widehat{A})\right)\exp(x\widehat{A})\exp(x\widehat{B}) && (69)\\
&\overset{\text{vorherige Teilaufgabe}}{=} \left(\widehat{A} + (\widehat{B} + \left[\widehat{A},\widehat{B}\right]x + \frac{x^2}{2!}\left[\widehat{A},\left[\widehat{A},\widehat{B}\right]\right] + \dots)\right)\exp(x\widehat{A})\exp(x\widehat{B}) && (70)\\
&= \left(\widehat{A} + \widehat{B} + \left[\widehat{A},\widehat{B}\right]x\right)g(x)\,, && (71)
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt ausgenutzt wurde, dass laut Aufgabenstellung $\left[\widehat{A},\left[\widehat{A},\widehat{B}\right]\right] = \left[\left[\widehat{A},\widehat{B}\right],\widehat{B}\right] = 0$ ist.
Damit lautet also die Ableitung von $g(x)$

$$\frac{dg}{dx} = \left(\left[\widehat{A},\widehat{B}\right]x + \left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)\right)g(x)\,. \tag{72}$$

Diese gewöhnliche DGl 1. Ordnung hat als Lösung

$$g(x) = c\,\exp\left(\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)x + \frac{\left[\widehat{A},\widehat{B}\right]}{2}x^2\right), \tag{73}$$

was formal $\exp(x\widehat{A})\exp(x\widehat{B})$ entspricht (mit $c \equiv 1$ aus Bedingung $g(0) = 1$).
Erneuter Grenzübergang $x \to 1$ nun für $g(x)$ ergibt dann die (spezielle) Baker-Campbell-Hausdorff-Relation

$$\exp\left(\widehat{A}+\widehat{B}+\frac{1}{2}\left[\widehat{A},\widehat{B}\right]\right) = \exp\widehat{A}\exp\widehat{B}\,. \tag{74}$$

Anwenden der Cauchy-Produktformel auf die Exponentialreihen gibt

$$\exp\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)\exp\left(\frac{1}{2}\left[\widehat{A},\widehat{B}\right]\right) = \exp\left(\widehat{A}+\widehat{B}+\frac{1}{2}\left[\widehat{A},\widehat{B}\right]\right), \tag{75}$$

wobei wir den binomischen Lehrsatz verwenden konnten, da $\left[\widehat{A},\left[\widehat{A},\widehat{B}\right]\right] = \left[\left[\widehat{A},\widehat{B}\right],\widehat{B}\right] = 0$.

Somit folgt aus Gl. (74)

$$\exp\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right) = \exp\left(\widehat{A}\right)\exp\left(\widehat{B}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\widehat{A},\widehat{B}\right]\right). \tag{76}$$

Wir wünschen frohe Feiertage und ein gutes neues Jahr!