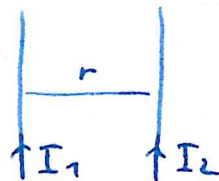


### SI und cgs Einheitensystem

siehe z.B. J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, Appendix

Coulomb Gesetz  $F = k_E \frac{q_1 q_2}{r^2}$   $\frac{q_1}{\bullet} \frac{q_2}{\bullet}$   
 $\uparrow$   
 Proportionalitätskonstante

Außerdem erzeugen zwei Ströme (bewegte Ladungen) in parallelen Drähten eine Kraft pro Länge

$$\frac{F}{L} = k_M \frac{I_1 I_2}{r}$$


Elektrodynamik zeigt, daß beide zusammenhängen mit

$$2 k_E = c^2 k_M \quad (*)$$

$\uparrow$   
Lichtgeschwindigkeit

### SI (oder MKS) Einheitensystem

Basiseinheiten m, kg, s

und neue Einheit für Strom

1 Ampere = Strom, so daß für  $d = 1m$   $\frac{F}{L} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{m}$

d.h.  $k_M = \frac{\mu_0}{2\pi}$  mit  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$

aus (\*)  $k_E = \frac{c^2 k_M}{2} = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \equiv \frac{1}{4\pi \epsilon_0}$  d.h.  $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$

Einheit für Ladung 1 Coulomb = 1 As aus MKS und Ampere

cgs Einheitensystem

Basiseinheiten cm, g, s

führt keine neuen Basiseinheiten ein

$k_E = 1$  und aus  $\textcircled{*}$   $k_M = \frac{2}{c^2}$

Krafteinheit 1 dyne = 1 cm  $\frac{g}{s^2}$

Ladungseinheit 1 esu =  $\sqrt{1 \text{ dyne} \cdot \text{cm}^2}$

electric charge unit

cgs System ist einfacher für Elektrodynamik (ohne  $\epsilon_0, \mu_0$ )

Wir benutzen Coulomb-Potential in cgs System

$$V = \frac{q_1 q_2}{r} = - \frac{z e^2}{r} = - \frac{z \alpha \hbar c}{r}$$

mit dimensionsloser Wechselwirkungsstärke  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$ .

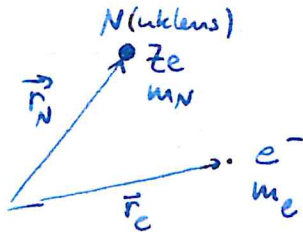
## 9. Wasserstoffatom

9.1

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_N^2}{2m_N} + \frac{\hat{p}_e^2}{2m_e} - \frac{Ze\hbar c}{|\vec{r}_N - \vec{r}_e|}$$

$$\alpha = \frac{1}{137} = \frac{e^2}{\hbar c}$$

$Z=1$  für Wasserstoffatom,  
sonst Wasserstoffähnlich



Schwerpunktssystem:

Schwerpunkt koordinat  $\vec{R} = \frac{m_N \vec{r}_N + m_e \vec{r}_e}{m_N + m_e} \rightarrow \vec{r}_N$   
 $m_N \gg m_e$

Relativkoordinat  $\vec{r} = \vec{r}_N - \vec{r}_e$

$\vec{P} = \vec{p}_N + \vec{p}_e \xrightarrow{QM} \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_R$

$\vec{p} = \frac{m_e \vec{p}_N - m_N \vec{p}_e}{m_N + m_e} \xrightarrow{QM} \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_r$

reduzierte Masse  $m_r = \frac{m_e m_N}{m_e + m_N} \rightarrow m_e$   
 $m_N \gg m_e$

Gesamtmasse  $m_N + m_e = M$

$$\Rightarrow \hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2M} + \frac{\hat{p}^2}{2m_r} - \frac{Ze\hbar c}{r}$$

$$\Rightarrow \Psi(\vec{R}, \vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\vec{P} \cdot \vec{R}} \Psi(\vec{r})$$

Wellenfkt für N-e Relativsystem

Schrödinger-GLG. für Relativsystem

9.2

$$\left( \frac{\vec{p}^2}{2m_r} - \frac{Z\alpha\hbar c}{r} \right) \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r})$$

Ansatz:  $\Psi(\vec{r}) = \frac{u_E(r)}{r} Y_l^m(\theta, \varphi)$  mit  $u_E(r=0) = 0$

$$\Rightarrow \left( -\frac{\hbar^2}{2m_r} \partial^2 + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2m_r r^2} - \frac{Z\alpha\hbar c}{r} \right) u_E(r) = E u_E(r)$$

Asymptotisches Verhalten für gebundene Zustände  $E = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_r} < 0$

$$r \rightarrow \infty: u_E(r) \sim e^{-\alpha r} \quad \left( \frac{1}{r^2} \text{ und } \frac{1}{r} \text{ Terme von } \hat{H} \rightarrow 0 \right)$$

$$r \rightarrow 0: u_E(r) \sim r^{l+1} \quad \left( \frac{1}{r^2} \text{ dominiert} \right)$$

Schrödinger-GLG. mit dimensionslosen Variablen  $\rho = 2\alpha r$

$$\rho_0 = 2\alpha r_0 \quad \text{mit} \quad r_0 \equiv \frac{\hbar}{m_r \alpha} = \frac{\hbar c}{m_r c^2 \alpha} = \frac{\hbar^2}{m_r e^2}$$

$$\text{und} \quad \nu \equiv \frac{Z}{\alpha r_0}$$

$$\Rightarrow \left( \partial_\rho^2 - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} - \frac{1}{4} \right) u_E(\rho) = 0$$

mit Ansatz  $u_E(\rho) = \rho^{l+1} e^{-\rho/2} \tilde{u}_E(\rho)$

$$\text{mit} \quad \tilde{u}_E(\rho) = \sum_{n=0}^N c_n \rho^n$$

werden sehen, daß Reihe endlich sein muß

$$\Rightarrow \rho \tilde{u}_E'' + (2l+2-\rho) \tilde{u}_E' - (l+1-\nu) \tilde{u}_E = 0$$

Potenzreihe eingesetzt, Potenzen von  $g^n$  müssen einzeln verschwinden

9.3

$$\Rightarrow c_{n+1} (n(n+1) + (n+1)(2l+2)) - c_n (l+1-v+n) = 0$$

$$\Rightarrow c_{n+1} = \frac{l+1-v+n}{(n+1)(n+2l+2)} c_n$$

mit  $c_0 = 1 \rightarrow$  Normierung am Ende

$$\Rightarrow c_n = \frac{\Gamma(l+1-v+n)}{\Gamma(l+1-v)} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(2l+2+n)}$$

mit Gammafkt.  $\Gamma(n+1) = n!$  für  $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$$

$$\Rightarrow \tilde{u}_E(g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2l+1)!}{(2l+1+n)!} \frac{\Gamma(l+1-v+n)}{\Gamma(l+1-v)} \frac{g^n}{n!}$$

$= {}_1F_1(l+1-v; 2l+2; g)$  konfluente hypergeometrische Fkt für unendliche Reihe

$${}_1F_1(a; \alpha; g) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g^n \quad \text{mit } c_0 = 1 \text{ und } c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{a(a+1)\dots(a+n)}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}$$

$$\rightarrow g^{a-\alpha} e^g \quad \text{für } g \rightarrow \infty$$

d.h. in unserem Fall

$$\rightarrow g^{-l-1-v} e^g \rightarrow \text{zerstört Normierbarkeit}$$

$\Rightarrow$  Potenzreihe muß abbrechen

$$\Rightarrow a = -k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow l+1-v = -k \quad \Rightarrow \quad v = \underline{l+1+k}$$

|||  
n Hauptquantenzahl =  $l+1+k = 1, 2, 3, \dots$

$$l = 0, 1, 2, \dots$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow R = \frac{m_r c \alpha z}{\hbar n} = \frac{m_r e^2 z}{\hbar^2 n}$$

9.4

$$\Rightarrow \boxed{E = -\frac{\hbar^2 R^2}{2m_r} = -\frac{m_r c^2 \alpha^2 z^2}{2} \frac{1}{n^2} = -\frac{m_r e^4 z^2}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{R_y z^2}{n^2}}$$

mit Rydbergzahl  $\boxed{R_y = \frac{m_r c^2 \alpha^2}{2} = \frac{m_r e^4}{2\hbar^2}}$

$$\approx \frac{511 \text{ keV}}{2 (137)^2} \approx \boxed{13.6 \text{ eV}}$$

→ QM sagt für Wasserstoffatom ( $z=1$ ) voraus:

Spektrum von Spektrallinien mit Frequenzen

$$\nu_{n \rightarrow n'} = \frac{E_n - E_{n'}}{h} = \frac{R_y}{h} \left( -\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} \right) \rightarrow \text{empirische Balmer Formel}$$

$R_y$  stimmt mit Experiment auf  $\sim 10^{-3}$  genau überein

Wellenfkt des Wasserstoffatoms

$$\Psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi) = R_{n,l}(r) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

mit

$$R_{n,l}(r) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Normierung}}}{N} \rho^l e^{-\rho/2} \sum_{j=0}^{k=n-l-1} \frac{(2j+1)!}{(2l+1+j)!} \frac{\Gamma(j-k)}{\Gamma(-k)} \frac{\rho^j}{j!}$$

$$\text{mit } \rho = 2Rr = \frac{2m_r c \alpha z r}{\hbar n} = \frac{2zr}{nr_0}$$

und Bohr radius  $\boxed{r_0 = \frac{\hbar}{m_r c \alpha} = \frac{\hbar^2}{m_r e^2}}$

$$\frac{\hbar c}{m_r c^2 \alpha} \approx \frac{197.327 \text{ MeV fm}}{0.511 \text{ MeV} \cdot \frac{1}{137}} \approx \boxed{0.529 \text{ \AA}}$$

Schöne Darstellung von  $R_{nl}$  mit

9.5

$$\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \frac{1}{\Gamma(1-x)} \Rightarrow \frac{\Gamma(j-k)}{\Gamma(-k)} = \frac{\sin(-\pi k)}{\sin(\pi(j-k))} \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k-j)}$$

$$= \frac{1}{\cos(\pi j)} = (-1)^j$$

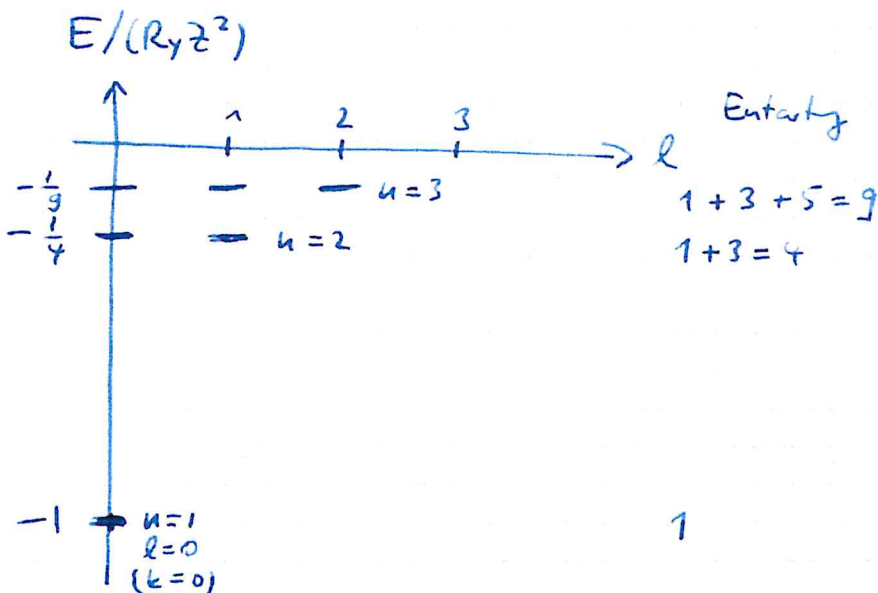
$$\Rightarrow R_{nl}(r) = N \rho^l e^{-\rho/2} \sum_{j=0}^{k=n-l-1} \frac{(2l+1)!}{(2l+1+j)!} \frac{k!}{(k-j)!} \frac{\rho^j}{j!} (-1)^j$$

$\sim L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho)$   
assoziiertes Laguerre-Polynom

Beispiel: Grundzustandswellenfkt.

$$\Psi_{100}(r, \vartheta, \varphi) = N e^{-\rho/2} \quad \rho = \frac{2Zr}{n r_0} = \frac{2Zr}{r_0}$$

### Energiespektrum und Entartung



zu gegebener Hauptquantenzahl  $n$  gibt es  $\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2$  Zustände

Vergleich zum Experiment zeigt gute Übereinstimmung, aber Spektrallinien haben Feinstruktur (d.h. Spektrallinien bestehen aus eng benachbarten Linien)  $\rightarrow$  Elektronenspin