Bitte denken Sie an die Evaluation der Vorlesung und Übungen!

Review: General selfadj. Operators $\rightarrow$ eigenvectors $|n\rangle$ $\rightarrow$ discrete spectrum

and/or improper eigenvectors $|a\rangle$

$$\{|\alpha\rangle\} = \{|n\rangle, |a\rangle\}$$ complete basis of $\mathcal{H}$

with $\langle\alpha|\beta\rangle = 0$ for $\alpha \neq \beta$

Represent any state $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

$$|\psi\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|\psi\rangle + \int da\, |a\rangle\langle a|\psi\rangle$$

↳ Completeness relation

$$\mathbb{1} = \sum_n |n\rangle\langle n| + \int da\, |a\rangle\langle a|$$

Normalization for continuous coordinate / momentum eigenstates $|\vec{r}\rangle$ / $|\vec{k}\rangle$

$$\langle\vec{r}|\vec{r}\,'\rangle = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \qquad \langle\vec{k}|\vec{k}'\rangle = (2\pi)^3\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

Representation of states and operators

in coordinate, momentum, energy eigenstates (... or any other basis)

$\hat{Q}|\vec{r}\rangle = \vec{r}|\vec{r}\rangle$ $\quad \hat{P}|\vec{p}\rangle = \vec{p}|\vec{p}\rangle$ $\quad \hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$ (only discrete spectrum)

$$\psi(\vec{r}) = \langle\vec{r}|\psi\rangle, \quad \tilde{\psi}(\vec{p}) = \langle\vec{p}|\psi\rangle, \quad \psi_n = c_n = \langle n|\psi\rangle$$

$$\psi_\alpha = \langle\alpha|\psi\rangle$$

$\hat{U} \rightarrow$ Fourier trafo

Basis transformation: $\hat{U}_{\vec{r},n} = \langle \text{new}|\text{old}\rangle = \langle\vec{r}|n\rangle$

$$\psi(\vec{r}) = \sum_n \hat{U}_{\vec{r},n}\,\psi_n$$

basis trafo $\hat{U}$ = unitary trafo $\hat{U}\hat{U}^{+} = \hat{U}^{+}\hat{U} = \mathbb{1}$

→ Ψ changes under basis/unitary trafo, but observables unchanged

---

Vorlesung heute: 7.3 Zeitliche Entwicklung ✓

Bilder der QM ✓

8. Drehimpulsoperator und sphärisch sym. Potentiale

---

7. Zeitliche Entwicklung

Zeitliche Entwicklung $|\Psi(0)\rangle \rightarrow |\Psi(t)\rangle$

lineare und unitäre Abbildung

Wahrscheinlichkeiten bleiben erhalten

Betrachte zeitunabhängigen Hamilton-Op. $\hat{H}$

$$\Rightarrow \quad |\Psi(t)\rangle = \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}}_{\hat{U}(t)\text{: Zeitentwicklungsoperator}} |\Psi(0)\rangle$$

in Energiedarstellung/Eigenbasis $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$ ang. diskretes Spektrum

$$\hat{U}(t) = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} |n\rangle\langle n|$$

→ zeitliche Entwicklung von $|\Psi(t)\rangle$

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} |n\rangle \underbrace{\langle n|\Psi(0)\rangle}_{c_n(0)}$$

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n |n\rangle \underbrace{\langle n|\Psi(t)\rangle}_{c_n(t)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{c_n(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} c_n(0)}$$

ω_n

Eigenschaften von $\hat{U}(t)$:

- $\hat{U}$ ist unitär $\quad \hat{U}(t)\underbrace{\hat{U}^+(t)}_{e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}} = \mathbb{1} = \hat{U}^+(t)\,\hat{U}(t)$

$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$

da $\hat{H}$ hermitesch und $t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\langle\psi(t)|}_{\text{zeitunabh.}}\psi(t)\rangle = \underbrace{\langle\psi(0)|\overbrace{\hat{U}^+(t)\,\hat{U}(t)}^{\hat{\mathbb{1}}}}|\psi(0)\rangle = \langle\psi(0)|\psi(0)\rangle$$

- $\hat{U}^+(t) = \hat{U}(-t) = \hat{U}^{-1}(t)$

unitär

$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$

- $|\psi(t)\rangle = \underbrace{\hat{U}(t)}_{\text{zeitabh.}}\underbrace{|\psi(0)\rangle}_{\text{zeitunabh.}}$ $\rightarrow$ Bewegungsgleichung für Zeitentwicklungsop.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t) = \cancel{i\hbar}\left(-\cancel{\tfrac{i}{\hbar}}\hat{H}\right)e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} = \hat{H}\,\hat{U}(t) = \hat{U}(t)\,\hat{H}$$

mit Randbedingung $\hat{U}(t=0) = \hat{\mathbb{1}}$

Frage: $\underbrace{\hat{U}(-t)}_{\hat{U}^+(t)}\,\hat{\vec{Q}}\,\hat{U}(t)|\psi(0)\rangle \overset{?}{=} \hat{\vec{Q}}|\psi(0)\rangle$

$\hat{\vec{P}}$

Antwort: Ja, falls $[\hat{\vec{Q}},\hat{U}(t)] = 0$ $\qquad \hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$

$\Updownarrow$

$[\hat{\vec{Q}},\hat{H}] = 0$? $\qquad [\hat{\vec{Q}}, \frac{\hat{\vec{P}}^2}{2m} + \hat{V}] \neq 0$

$\hat{\vec{P}} \quad \hat{\vec{P}}^2 \neq 0$

$[\hat{\vec{Q}},\hat{\vec{P}}] \neq 0$

Ortsdarstellung des Zeitentwicklungsoperators heisst Propagator

$$\langle \vec{r} \,|\psi(t)\rangle = \langle \vec{r}\,|\hat{U}(t)\overset{\hat{1}}{|}\psi(0)\rangle$$

$$\psi(\vec{r},t) = \int d^3r' \underbrace{\langle \vec{r}\,|\,\hat{U}(t)\,|\vec{r}\,'\rangle}_{\substack{\text{Propagator} \\ K(\vec{r},\vec{r}\,',t)}} \underbrace{\langle \vec{r}\,'|\psi(0)\rangle}_{\psi(\vec{r}\,',t=0)}$$

$$K(\vec{r},\vec{r}\,',t) = \langle \vec{r}\,|\hat{U}(t)|\vec{r}\,'\rangle = \sum_n \langle \vec{r}\,|\underbrace{n\rangle}_{\text{Energieeigenzustände } \varphi_n(\vec{r})} e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \langle n|\vec{r}\,'\rangle$$

$$= \sum_n \varphi_n(\vec{r})\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\, \varphi_n^*(\vec{r}\,')$$

für freies Teilchen $(V=0)$:

$$K(\vec{r},\vec{r}\,',t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\, \exp\left(-\frac{m(\vec{r}-\vec{r}\,')^2}{2i\hbar t}\right) \quad \rightarrow \langle \vec{r}\,|\hat{U}|\vec{r}\,'\rangle$$

für harm. Oszi in 1d:

$$K(x,x',t) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin\omega t}}\, \exp\left(-\frac{m\omega}{2i\hbar\sin\omega t}\left(x^2\cos\omega t - 2xx' + x'^2\cos\omega t\right)\right)$$

$$K_{HO} \rightarrow K_{frei} \text{ für } \omega\rightarrow 0 \quad (b\rightarrow\infty)$$

→ Warum Propagator?

$$\psi(\vec{r},t) = \int d^3r'\, K(\vec{r},\vec{r}\,',t)\, \psi(\vec{r}\,',t=0)$$

Bilder der QM

bisher: $\underbrace{\text{zeitabh. Zustände } |\Psi_S(t)\rangle, \text{ meist zeitunabh. Operatoren } \hat{O}_S}_{\text{Schrödinger Bild der QM}}$ z.B. $\hat{\vec{Q}}, \hat{\vec{P}}$

physikalisch sind Erwartungswerte $\langle\Psi(t)|\hat{O}|\Psi(t)\rangle$ und nicht $|\Psi(t)\rangle, \hat{O}$ separat

können durch unitäre Trafo diese Rolle vertauschen:

$\underbrace{\text{zeitunabh. Zustände , zeitabh. Operatoren}}_{\text{Heisenberg Bild der QM (H)}}$ z.B. $\hat{\vec{Q}}_H(t), \hat{\vec{P}}_H(t)$

Zustand im Heisenberg Bild:

$$|\Psi_H\rangle \equiv \hat{U}^+(t)\underbrace{|\Psi_S(t)\rangle}_{\hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle} = |\Psi(0)\rangle \quad \text{zeitunabh.}$$

d.h. Operator im Heisenberg Bild:

$$\hat{A}_H(t) \equiv \hat{U}^+(t)\,\hat{A}_S^{(t)}\,\hat{U}(t) \qquad \text{für explizit } t\text{-abh. Op.}$$

S-Bild $\rightarrow$ H-Bild ist Basis/Darstellungswechsel mit $\hat{U}^+(t)$

$\Rightarrow$ Erwartungswerte ... sind gleich

$$\langle\hat{A}_H(t)\rangle = \langle\Psi_H|\hat{A}_H(t)|\Psi_H\rangle \qquad \text{Erwartungswert im H-Bild}$$

$$= \langle\Psi_S(t)|\underbrace{\hat{U}(t)\,\hat{U}^+(t)}\,\hat{A}_S(t)\,\underbrace{\hat{U}(t)\,\hat{U}^+(t)}|\Psi(t)_S\rangle$$

$$= \langle\Psi_S(t)|\hat{A}_S(t)|\Psi_S(t)\rangle \qquad \text{Erwartungswert im S-Bild}$$

Im Heisenberg Bild: Bewegungsglg. für Operatoren $\hat{A}_H(t)$

Allg. Fall (d.h. für explizit t-abh. $\hat{A}_S(t)$): $\hat{A}_H(t) = \overset{e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}}{\hat{U}^+(t)}\, \hat{A}_S(t)\, \overset{e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}}{\hat{U}(t)}$

$$\Rightarrow \boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}_H(t)} = \hat{U}^+(t)\left[-\hat{H}\hat{A}_S(t) + \hat{A}_S(t)\hat{H} + i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_S(t)\right]\hat{U}(t)$$

$$\boxed{= \left[\hat{A}_H(t), \hat{H}\right] + \underbrace{i\hbar\, \hat{U}^+(t) \frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_S(t)\, \hat{U}(t)}_{\text{entfällt für zeitunab. Op. in S-Bild}}}$$

entfällt für zeitunab. Op. in S-Bild
z.B. $\hat{\vec{Q}}$, $\hat{\vec{P}}$,

Bewegungsgleich für $\hat{A}_H(t)$ ist näher an kl. Bewegungsglg.

z.B. $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\vec{P}}_H(t) = \left[\hat{\vec{P}}_H(t), \hat{H}\right]$

→ siehe H14, Ehrenfestsches Theorem

Erhaltungsgrößen in der QM

für nicht explizit t-abh. Op./Observable $\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_S = 0$

$\Rightarrow$ $\hat{A}$ ist Erhaltungsgröße, d.h. ändert sich nicht mit der Zeit

wenn $\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_H(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\hat{A}_H(t), \hat{H}\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\hat{U}^+(t)\hat{A}_S\hat{U}(t), \hat{H}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\hat{A}_S, \hat{H}\right] = 0$$

wenn $\hat{A}$ und $\hat{H}$ kommensurabel

Wechselwirkungs-Bild (Interaction Picture) I-Bild

sowohl Zustand als auch Operatoren zeitabh.

$$\hat{H} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{z.B. } \hat{T} \text{ oder } \hat{T} + \text{lösbares } \hat{W}}}{\hat{H}_0} + \hat{V}$$

$\hat{V}$ = WW oder Teil der WW.

$$|\psi_I(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} t \hat{H}_0} |\psi_S(t)\rangle$$

$$\hat{A}_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar} t \hat{H}_0} \hat{A}_S(t) \, e^{-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}_0}$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_I(t)\rangle = \hat{V} |\psi_I(t)\rangle$$

Zeitabh. von $|\psi_I(t)\rangle$ nur durch Zeitentw. mit $\hat{V}$.