$n_x = n_y = n_z = 0$

$n_x = 1,\ n_y = n_z = 0$
$n_y = 1,\ n_x = n_z = 0$
$n_z = 1,\ n_x = n_y = 0$

n_x	n_y	n_z
(2,	0,	0)
0	2	0
0	0	2
1	1	0
0	1	1
1	0	1

N-ter Zustand ist $\frac{1}{2}(N+1)(N+2)$ - fach entartet

Später: $N = n + 2\ell$ ← Drehimpulsqz.

n: Radialquantenzahl $|\vec{r}|$

$n = 0, 1, 2, \ldots$
$\ell = 0, 1, 2, \ldots$

7. Spektrum selbstadj. Operatoren, Darstellungen und zeitliche Entwicklung

7.1 Spektrum selbstadj. Operatoren

bisher: selbstadj. Op. $\hat{A}$ mit diskretem Spektrum

aber: hatten schon (z.B. bei Pot. barriere) gesehen, dass

für $E > V$: kontinuierliche Energien / Spektrum

von Streuzuständen → nützliche Basisfkten für Wellenpakete
mit Orthogonalitätsrelation
Vollständigkeitsrelationen
aber nicht normierbar

Bsp.: Impulsoperator $\hat{p} = \hat{p}^\dagger$ Eigenwertglg. $\hat{p}\,|\psi\rangle = p\,|\psi\rangle$

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) = p\,\psi(x)$$

hat Lösung $\psi(x) = N\, e^{i\frac{p}{\hbar}x} = N\, e^{ikx} = N\, u_k(x)$

aber nicht normierbar $(u_k, u_k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot 1 = \infty$

u_k wird <u>uneigentlicher Eigenvektor/Eigenfkt.</u> mit

$p = \hbar k$ <u>uneigentlichem Eigenwert</u> genannt

Kontinuierliches Spektrum = Menge der uneigentlichen Eigenwerte

---

Uneigentliche Eigenvektoren lassen sich darstellen als Grenzwert von (normierbaren) Eigenvektoren $\in \mathcal{H}$, aber Limes $\notin \mathcal{H}$

Bsp. Ebene Wellen $u_k(x)$ als Grenzwert im endlichen Volumen

$x \in [0, L]$
↪ unend. Pot. kasten

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx} \in \mathcal{H}, \quad k = \frac{\pi}{L}, \frac{2\pi}{L}, \dots$$

normierbar

Diskretisierung des Kontinuums

aber $L \to \infty$ $\psi_k(x) \sim u_k(x) \notin \mathcal{H}$

Für ebene Wellen haben wir aus Theorie der Fouriertrafo

<u>Kontinuumsorthonormalitätsrelation</u>

$$(u_k, u_{k'}) = 2\pi\, \delta(k-k')$$

$\to$ $\langle k | k' \rangle = 2\pi\, \delta(k-k')$ $\qquad \hat{P}|k\rangle = \hbar k |k\rangle, \quad |k\rangle \notin \mathcal{H}$

<u>Vollständigkeitsrelation</u>

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, u_k(x)\, u_k^*(y) = \delta(x-y)$$

$E < V_{max}$ $\qquad E \geq V_{max}$

$\to$ $\int \frac{dk}{2\pi} |k\rangle\langle k| = \hat{\mathbb{1}}$ $\quad \dashrightarrow \quad$ $\hat{\mathbb{1}} = \sum_n |n\rangle\langle n| + \int \frac{dk}{2\pi} |k\rangle\langle k|$

Weiteres Beispiel: Ortsoperator   rein kont. Spektrum

$$\langle x| \quad \hat{Q}\,|q\rangle = q \,|q\rangle \quad \langle x|$$

$$\Rightarrow \quad x\, \chi_q(x) = q\, \chi_q(x)$$

$\chi_q(x)$ uneigentliche Eigenfkt zum uneigentlichen Eigenwert q

$$\Rightarrow \quad (x-q)\,\chi_q(x) = 0$$

$\rightarrow$ für $x \neq q$: $\chi_q(x) = 0$

$$\rightarrow \quad \chi_q(x) = \delta(x-q) = \langle x|q\rangle$$

$\rightarrow$ kontinuierliche Spektrum mit uneigentlichen EW q
"   EV $|q\rangle \notin \mathcal{H}$

da $\chi_q(x)$ nicht normierbar $\int dx\, |\chi_q(x)|^2 = \infty$