Review: Collapse of wave function

Measurement of observable $\hat{A}$ with eigenvalues $\hat{A}|n\rangle = a_n |n\rangle$, $a_n \in \mathbb{R}$

After measurement $|\Psi\rangle$ collapses to eigenstate $|\bar{n}\rangle$ corresponding to measured value $a_{\bar{n}}$

$$|\Psi\rangle = \sum_n \langle n|\Psi\rangle\, |n\rangle \longrightarrow |\bar{n}\rangle$$

Probability to measure $a_{\bar{n}}$ $= |\langle \bar{n}|\Psi\rangle|^2$

Vorlesung heute

6. Harmonischer Oszillator

→ algebraische Lösung mit Hilfe von Leiteropeatoren

6. Harmonischer Oszillator

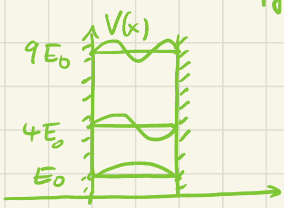
1-dim. harm. Oszillator (HO) mit Hamilton-Operator

(1) $$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{P}^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{Q}^2$$

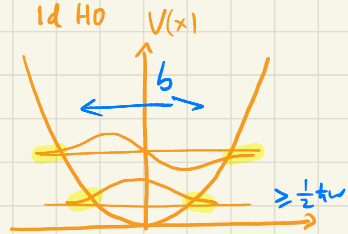
ganz viele Anwendungen z.B. Molekülschwingungen
Gitterschwingungen im Festkörper: Phononen } QM

Klassisch: lineares Kraftgesetz $F = -\frac{dV}{dx} = -\underbrace{m\omega^2}_{K} x$

Vorüberlegung: bisher 1d unendl. Pot.topf



1d HO



erwarten diskretes Spektrum, aber nicht quadratisch sondern näher beieinander.

H21 → Lösung der S-Glg. mit Ansatz für Wellenfkt (→ Kapitel 4)

Vorlesung: <u>Algebraische Lösung der S-Glg. mit Leiteroperatoren</u>

<u>Natürliche Variablen:</u> $\underbrace{y}_{\text{dim.-los}} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x = \frac{x}{b}$ $\quad b$ = Oszillatorlänge

$$\rightarrow \hat{\tilde{Q}} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, \hat{Q} \,, \quad \hat{\tilde{P}} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}\, \hat{P}$$

(2) $$\Rightarrow \hat{H} = \underbrace{\hbar\omega}_{\text{Energie}} \, \frac{1}{2}\left(\hat{\tilde{P}}^2 + \hat{\tilde{Q}}^2\right)$$

$$\Rightarrow [\hat{\tilde{P}}, \hat{\tilde{Q}}] = \frac{1}{\hbar}[\hat{P}, \hat{Q}] = -i$$

Definiere Operator $$\boxed{\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\tilde{Q}} + i\hat{\tilde{P}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y + \frac{\partial}{\partial y}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\tilde{Q}} - i\hat{\tilde{P}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y - \frac{\partial}{\partial y}\right)}$$

(3) $$\Rightarrow \boxed{\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right)}$$

Es gilt für $\hat{a}$ und $\hat{a}^+$: $\quad [\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$ oder $\hat{a}\hat{a}^+ = \hat{a}^+\hat{a} + 1$

und $\hat{\tilde{Q}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a} + \hat{a}^+\right)$ und $\hat{\tilde{P}} = \frac{1}{i\sqrt{2}}\left(\hat{a} - \hat{a}^+\right)$

Untersuche Eigenwertglg. für $\hat{H}$ bzw. für $\hat{a}^+\hat{a}$

$$\hat{a}^+\hat{a}\,|\lambda\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle$$

$\Rightarrow$ 1. $\lambda = \langle\lambda|\hat{a}^+\hat{a}|\lambda\rangle = \|\,\hat{a}|\lambda\rangle\|^2 \geq 0$

2. Ist λ Eigenwert $\Rightarrow$ $\lambda+1$ ist auch Eigenwert

$$(\hat{a}^+\hat{a})\,\underbrace{\hat{a}^+|\lambda\rangle}_{\text{neuer Zustand } \sim |\lambda+1\rangle} = \hat{a}^+(\hat{a}\hat{a}^+)|\lambda\rangle = \hat{a}^+(\hat{a}^+\hat{a}+1)\,|\lambda\rangle$$
$$= (\lambda+1)\,\underbrace{\hat{a}^+|\lambda\rangle}$$

$\Rightarrow$ $\hat{a}^+|\lambda\rangle$ ist Eigenzustand mit EW $(\lambda+1)$

Check: $\hat{a}^+|\lambda\rangle \neq 0$ ✓

$\rightarrow$ $\|\hat{a}^+|\lambda\rangle\|^2 = \langle\lambda|\hat{a}\hat{a}^+|\lambda\rangle = \langle\lambda|(\hat{a}^+\hat{a}+1)|\lambda\rangle$
$= \lambda+1 \geq 1$

3. Analog kann man für $\lambda > 0$ zeigen, dass

$$(\hat{a}^+\hat{a})\,\underbrace{\hat{a}|\lambda\rangle}_{\text{neuer Zustand } \sim |\lambda-1\rangle} = (\lambda-1)\,\hat{a}|\lambda\rangle \quad \text{und} \quad \hat{a}|\lambda\rangle \neq 0$$

4. Starte bei Zustand mit Eigenwert $\lambda > 0$

$\Rightarrow$ Anwendung von $\hat{a}|\lambda\rangle$ generiert absteigende Folge von Eigenzuständen $\hookrightarrow |\lambda-1\rangle$, $\hat{a}^2|\lambda\rangle \sim |\lambda-2\rangle, \ldots$ mit Eigenwerten $\lambda-1, \lambda-2, \ldots$
solange wegen 1. die Eigenwerte positiv ≥ 0 bleiben

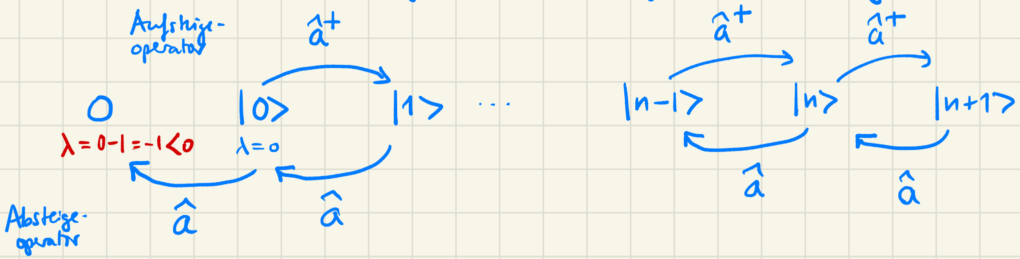
$\Rightarrow$ Es muss ein $n = 1, 2, \ldots$ geben, so dass $\hat{a}|\lambda-n\rangle = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = \underbrace{\hat{a}^+ \hat{a}}_{0} \, |\lambda - n\rangle = (\lambda - n) \underbrace{|\lambda - n\rangle}_{\neq 0}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda - n = 0 \Rightarrow \lambda = n$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots \qquad \lambda \in \mathbb{N}_0}$$

Sukzessive Anwendung von $\hat{a}^+$ erzeugt Leiter von Eigenzuständen



$\hat{a}|0\rangle = 0$ kein neuer Zustand

5. Konstruktion der normierten Eigenzustände $|n\rangle$

$|0\rangle$, Grundzustand mit $\lambda = 0$, $\langle 0|0\rangle$ $\qquad \hat{a}^+\hat{a}\,|\lambda\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle$

$|1\rangle = \hat{a}^+|0\rangle$, Normierung $\langle 1|1\rangle = \langle 0|\hat{a}\,\hat{a}^+|0\rangle = \langle 0|\cancel{\hat{a}^+\hat{a}}^{\,0} + 1|0\rangle$

normiert ✓

$= \langle 0|0\rangle = 1$

$|2\rangle = c_2\, \hat{a}^+|1\rangle$, $\qquad \langle 2|2\rangle = c_2^2 \langle 1|\hat{a}\hat{a}^+|1\rangle = c_2^2 \langle 1|\underbrace{\hat{a}^+\hat{a}}_{1} + 1|1\rangle$

$c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= c_2^2 \cdot 2 \cdot \underbrace{\langle 1|1\rangle}_{1}$

$\vdots$

Allgemein: $\boxed{|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\, \hat{a}^+ |n-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^+)^n |0\rangle}$

n-ter Eigenzustand

$\Rightarrow$ Eigenwerte des 1d HO: $\boxed{E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

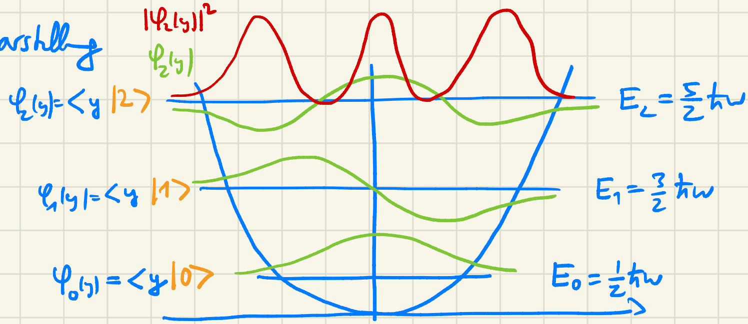
äquidistantes Spektrum

Absteigeoperator: $\boxed{\hat{a}\,|n\rangle} = \hat{a}\,\frac{1}{\sqrt{n}}\,\hat{a}^+|n-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\,(\underbrace{\underbrace{\hat{a}^+\hat{a}}_{n-1}+1}_{n})\,|n-1\rangle$

$$\boxed{= \sqrt{n}\,|n-1\rangle}$$

$$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

Graphische Darstellung



Eigenfunktionen in Ortsraumdarstellung $\qquad \varphi_n(y) = \langle y|n\rangle$

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm} = (\varphi_n, \varphi_m)$$

Betrachte $\hat{a}\,|0\rangle = 0$ in Ortsraumdarstellung

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(y + \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi_0(y) = 0 \quad \longrightarrow \quad \varphi_0(y) = \frac{1}{\pi^{1/4}}\, e^{-y^2/2}$$

Und $\quad \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^+)^n\,|0\rangle = |n\rangle$

$$\varphi_n(y) = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(y - \frac{\partial}{\partial y}\right)^n \varphi_0(y)$$

$$\varphi_n(y) = \frac{1}{\sqrt{n!\,2^n\sqrt{\pi}}}\left(y-\frac{\partial}{\partial y}\right)^n e^{-y^2/2}$$

$$\boxed{\varphi_n(y) = \frac{1}{\sqrt{n!\,2^n\sqrt{\pi}}}\,\underbrace{H_n(y)}_{\text{Polynom n.ten Grades}}\,e^{-y^2/2}} \xrightarrow{|y|\to\infty} y^n e^{-y^2/2}$$

Hermite Polynome

$$\Rightarrow \quad H_n(y) = e^{y^2/2}\left(y-\frac{\partial}{\partial y}\right)^n e^{-y^2/2}$$

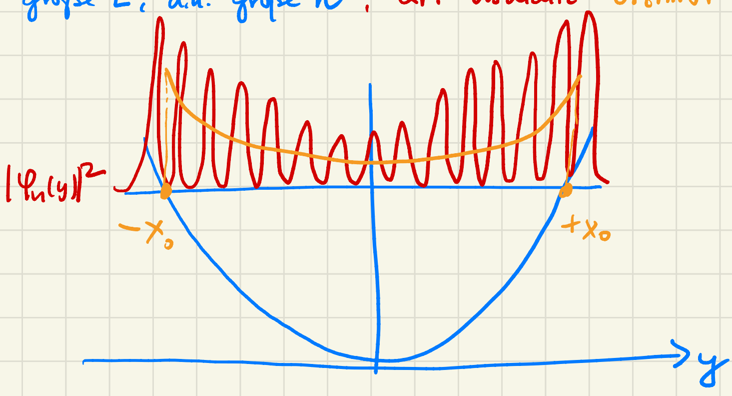
oder durch Rekursionsrelationen

$$H_{n+1}(y) = 2y\,H_n(y) - 2n\,H_{n-1}(y)$$

Aufenthaltswahrscheinlichkeit

Für große E, d.h. große n, QM Wsdichte oszilliert um $w(y)$

= kl. Aufenthaltsws.



Kl. Aufenthaltsws. $\quad w(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x_0^2-x^2}}$, mit $x_0^2 = \frac{2E}{m\omega}$ kl. Wendeplt.

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

$$E = 0 + \frac{1}{2}m\omega^2x_0^2 \qquad w(x) = \frac{\omega}{\pi}\frac{1}{\dot{x}}$$