Review: 1d harmonic oscillator

$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$

in natural units $\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{\tilde{P}}^2 + \hat{\tilde{Q}}^2\right)$

$\hat{\tilde{Q}} = \frac{1}{b}\hat{Q}$ with oscillator length $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

$y = \frac{x}{b}$

ladder operators

$$\begin{cases} \text{raising operator } \hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\tilde{Q}} - i\hat{\tilde{P}}\right) \\ \text{lowering operator } \underset{=(\hat{a}^+)^+}{\hat{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\tilde{Q}} + i\hat{\tilde{P}}\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$ and $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$

eigenstates of $(\hat{a}^+\hat{a})|n\rangle = n|n\rangle$

have eigenvalues $n = 0, 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow$ equidistant spectrum $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$ with $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$

excited states $|n\rangle$ can be created from ground state $|0\rangle$:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^+\right)^n|0\rangle$$

$\langle m|$ $\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$ $\langle m|$ $\Rightarrow$ $\langle m|\hat{a}^+|n\rangle = \delta_{m,n+1}\sqrt{n+1}$

$\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ $\Rightarrow$ $\hat{a}\,|0\rangle = 0$

$n=0$

eigenfunctions in coordinate space

$$\langle y|n\rangle = \boxed{\varphi_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(y)\, e^{-y^2/2}} \rightarrow \varphi_n\left(y=\frac{x}{b}\right)$$

with <u>Hermite polynomials</u> $H_n(y)$ (poly. of degree n)

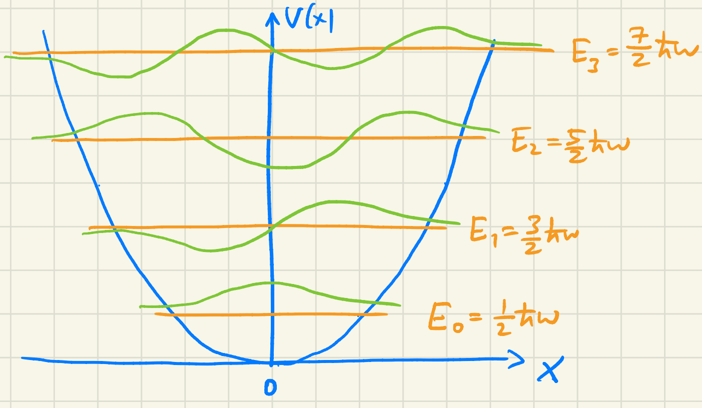
$$H_0(y) = 1$$
$$H_1(y) = 2y$$
$$H_2(y) = 4y^2 - 2$$
$$H_3(y) = 8y^3 - 12y$$
$$\vdots$$

even

odd

$$H_{n+1}(y) = 2y\, H_n(y) - 2n\, H_{n-1}(y)$$

differential equation for $H_n(y)$: $\left(\frac{d^2}{dy^2} - 2y\frac{d}{dy} + 2n\right) H_n(y) = 0$



<u>Vorlesung heute:</u>

6. Harmonischer Oszillator
   - Unschärfen ✓
   - Oszillierendes Wellenpaket ✓
   - 3d HO ✓

7. Spektrum selbstadjungierter Operatoren, ...

6. HO continued

Unschärfen

$$\hat{Q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a} + \hat{a}^+\right) \qquad \hat{P} = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\,\frac{1}{i}\left(\hat{a} - \hat{a}^+\right)$$

(dim.voll)

Erwartungswert des Orts im n-ten Zustand

$$\langle x\rangle_n = \langle n|\hat{Q}|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle n|\overbrace{\hat{a}}^{\sim\sqrt{n-1}} + \underbrace{\hat{a}^+|n\rangle}_{\sim|n+1\rangle} = 0$$

$$(\Delta x_n)^2 = \langle x^2\rangle_n - \left(\langle x\rangle_n\right)^2 = \langle x^2\rangle_n$$

$$\langle x^2\rangle_n = \langle n|\hat{Q}^2|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\,\langle n|(\hat{a}+\hat{a}^+)(\hat{a}+\hat{a}^+)|n\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\,\langle n|\overbrace{\hat{a}^2}^{\sim|n-2\rangle} + \overbrace{\hat{a}^{+2}}^{\sim|n+2\rangle} + \underbrace{\hat{a}\hat{a}^+}_{\hat{a}^+\hat{a}+1} + \hat{a}^+\hat{a}|n\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\,\langle n|2\underbrace{\hat{a}^+\hat{a}}_{n}+1|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta x_n = \sqrt{\langle x^2\rangle_n} = \underbrace{\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}}_{b\text{ Oszilänge}}\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^{1/2}$$

Genauso:

$$\langle p\rangle_n = \langle n|\hat{P}|n\rangle = 0$$

$$(\Delta p_n)^2 = \langle p^2\rangle_n = \langle n|\hat{P}^2|n\rangle = \frac{m\omega\hbar}{2}(2n+1)$$

$$\Delta p_n = \underbrace{\sqrt{m\omega\hbar}}_{\hbar/b}\sqrt{n+\tfrac{1}{2}}$$

$$\longrightarrow \quad \Delta x_n\,\Delta p_n = \hbar\left(n+\tfrac{1}{2}\right)$$

Grundzustand $n=0$ → Gaußpaket → $\Delta x_0\,\Delta p_0 = \frac{\hbar}{2} \geq \frac{\hbar}{2}$ Heisenberg

Oszillierendes Wellenpaket

Betrachte Überlagerung von HO Eigenzuständen

→ Wellenpaket eines Teilchens im HO (→ Schwingung)

$$|\varphi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \underbrace{\langle n|\varphi(t)\rangle}_{c_n(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)\,|n\rangle$$

Einsetzen von $|\varphi(t)\rangle$ in S-Glg. $\quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\varphi(t)\rangle = \hat{H}|\varphi(t)\rangle$

$$\Rightarrow \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} c_n(t) = E_n\, c_n(t) \qquad \forall n$$

$$\Rightarrow \quad c_n(t) = e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}\, c_n(0)$$

$-i$ ungerade $\cdot \pi$

$\frac{\text{ungerade}}{2} \cdot \omega t$

$$\Rightarrow \quad |\varphi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0)\, \underbrace{e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t}}\, |n\rangle$$

$e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t - i\,\text{ung.}\,\pi}$

$$\Rightarrow \quad |\varphi(t+\tfrac{2\pi}{\omega})\rangle = -\,|\varphi(t)\rangle$$

" T = klassische Schwingungsperiode

$\Rightarrow$ Ws dichte $\quad |\langle x|\varphi(t+\frac{2\pi}{\omega})\rangle|^2 = |\langle x|\varphi(t)\rangle|^2$

↳ periodisch in Zeit mit Periode T

→ Skript $\quad \langle x\rangle(t) = \langle \varphi(t)|\hat{Q}|\varphi(t)\rangle$

$\vdots$

$$= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\, \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, c_{n-1}^*(0)\, c_n(0)\, e^{-i\omega t}\right)$$

$\mathrel{/\!/}$ A

$$= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \; \frac{1}{2}\left(A e^{-i\omega t} + A^* e^{i\omega t} \right)$$

$$\langle x \rangle (t) = X \cos(\omega t - \underset{\alpha}{\text{const.}}) = X \, \frac{1}{2}\left(\underbrace{e^{i(\omega t - \alpha)}}_{e^{i\omega t} A^*} + \underbrace{e^{-i(\omega t-\alpha)}}_{e^{-i\omega t} \underbrace{e^{i\alpha}}_{A}} \right)$$

$\rightarrow$ harmonische Schwingung wie in kl. Mechanik

3d Harmonischer Oszillator

allg. $V(\vec{r}) = \frac{m}{2}\left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2 \right)$

Spezialfall sphärisch-sym. 3d HO $\quad \omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega$

$\Rightarrow \hat{H} = \hat{H}_x + \hat{H}_y + \hat{H}_z$ $\quad$ allg.

sphärisch sym. alle 3 Richtungen gleich

$\Rightarrow$ Zustand Wellenfkt. faktorisiert

$$\psi_{n_x, n_y, n_z}(\vec{r}) = \varphi_{n_x}(x)\, \varphi_{n_y}(y)\, \varphi_{n_z}(z)$$

1d HO Eigenfkten

$$E_{n_x n_y n_z} = \hbar\omega_x \left(n_x + \tfrac{1}{2}\right) + \hbar\omega_y\left(n_y + \tfrac{1}{2}\right) + \hbar\omega_z\left(n_z + \tfrac{1}{2}\right)$$

$$E_N = \hbar\omega \left(\underbrace{n_x + n_y + n_z}_{N} + \tfrac{3}{2} \right) \quad \text{sphärisch sym.}$$

Beispiel: Sphärisch sym. $\quad E_N = \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}\right)$

$N = 0, \; 1, \; 2, \; 3, \; \ldots$

Entartung $\quad 1, \; 3, \; 6$

$n_x = n_y = n_z = 0$

$n_x = 1,\ n_y = n_z = 0$
$n_y = 1,\ n_x = n_z = 0$
$n_z = 1,\ n_x = n_y = 0$

n_x	n_y	n_z
(2,	0,	0)
0	2	0
0	0	2
1	1	0
0	1	1
1	0	1

N-ter Zustand ist $\frac{1}{2}(N+1)(N+2)$ - fach entartet

Später: $N = n + 2l$ ← Drehimpulsq.z.

n: Radialquantenzahl $|\vec{r}|$

$n = 0, 1, 2 .$
$l = 0, 1, 2, ..$

7. Spektrum selbstadj. Operatoren, Darstellungen und zeitliche Entwicklung

7.1 Spektrum selbstadj. Operatoren

bisher: selbstadj. Op. $\hat{A}$ mit diskretem Spektrum

aber: hatten schon (z.B. bei Pot. barriere) gesehen, dass

für $E > V$: kontinuierliche Energien/Spektrum

von Streuzuständen → nützliche Basisfkten für Wellenpakete
mit Orthogonalitätsrelation
Vollständigkeitsrelationen
aber nicht normierbar

Bsp.: Impulsoperator $\hat{p} = \hat{p}^+$ Eigenwertglg. $\hat{p}\,|\psi\rangle = p\,|\psi\rangle$

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) = p\,\psi(x)$$

hat Lösg $\psi(x) = N e^{i\frac{p}{\hbar}x} = N e^{ikx} = N\, u_k(x)$