Review | Observable $\longrightarrow$ self-adjoint operator

e.g. energy $\longrightarrow$ $\hat{H}$

possible measurement values are given by (real) eigenvalues

Expectation value = mean value

$$\langle \hat{H} \rangle = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = \sum_n \underbrace{|\langle n|\psi\rangle|^2}_{} E_n$$

$= p_n$ probability to measure E_n

with eigenstates/eigenvalues $\hat{H}\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle$

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1 = \sum_n |\langle n|\psi\rangle|^2 = \sum_n p_n$$

Simultaneous eigenstates

Observables $\hat{A}$ and $\hat{B}$ have simultaneous basis of eigenstates

$\Longleftrightarrow$ Commutator $[\hat{A}, \hat{B}] = 0 = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \Longleftrightarrow \hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$

Set of operators that commute with each other defines set of simultaneously sharply measurable observables

Vorlesung heute:

5.5 Observable continued
Born-Jordan Vertauschungsrelationen ✓
Unschärferelation

5.6 Postulate der QM

6. Harmonischer Oszillator

Born-Jordan Vertauschungsrelationen

Betrachte Kommutator $[\hat{\vec{P}}_x, \hat{\vec{Q}}_x]$

im Ortsraum: $\hat{\vec{P}}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$, $\hat{\vec{Q}}_x = x$

$$\Rightarrow [\hat{\vec{P}}_x, \hat{\vec{Q}}_x] = \frac{\hbar}{i}\left[\frac{\partial}{\partial x}, x\right] = \frac{\hbar}{i}\left(\frac{\partial}{\partial x}x - x\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Anwendung auf Wellenfkt.

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}x - x\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(x,y,z) = \left(1 + \cancel{x\frac{\partial}{\partial x}} - \cancel{x\frac{\partial}{\partial x}}\right)\Psi(x,y,z)$$

$$\begin{array}{cccc} x & y & y & x \end{array}$$

$$= 1\cdot\Psi(x,y,z)$$

$$\Rightarrow [\hat{\vec{P}}_x, \hat{\vec{Q}}_x] = \frac{\hbar}{i}\mathbb{1}$$ d.h. $\hat{\vec{P}}_x$ und $\hat{\vec{Q}}_x$ nicht verträglich

$$\begin{array}{ccccc} y & y & = & " \\ z & z & = & " \\ x & y & = & 0 \end{array}$$

aber z. B. $\hat{\vec{P}}_x$ und $\hat{\vec{Q}}_y$ sind verträglich

$$\Rightarrow \boxed{[\hat{\vec{P}}_i, \hat{\vec{Q}}_j] = \frac{\hbar}{i}\delta_{ij}}$$

Born + Jordan, 1925

Unschärferelation

angenommen $\hat{A}$ und $\hat{B}$ sind nicht verträglich d.h. $[\hat{A},\hat{B}] \neq 0$ und nicht gleichzeitig scharf messbar, was gilt für $\Delta A, \Delta B$?

Es gilt allgemeine Unschärferelation

$$\boxed{\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right|}$$

Beweis: Betrachte $\left([\hat{A},\hat{B}]\right)^{+} = \left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)^{+}$

$$= \hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B} = -[\hat{A},\hat{B}]$$

Kommutator ist anti-hermitisch

$$[\hat{A},\hat{B}] = i\hat{C} \qquad \text{mit} \quad \hat{C} = \hat{C}^{+}$$

$$(\qquad)^{+} = -i\hat{C} = -(\quad)$$

Definiere $\hat{\alpha} = \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle$, $\hat{\beta} = \hat{B} - \langle\hat{B}\rangle$ $\qquad \hat{\alpha}, \hat{\beta}$ sind selbst

$$\Rightarrow \quad \langle\hat{\alpha}^2\rangle = (\Delta A)^2, \quad \langle\hat{\beta}^2\rangle = (\Delta B)^2, \quad [\hat{\alpha},\hat{\beta}] = [\hat{A},\hat{B}] = i\hat{C}$$

Betrachte $\|(\lambda\hat{\alpha} - i\hat{\beta})\psi\|^2 \geq 0$ $\qquad \psi$ bel. Zustand, $\lambda \in \mathbb{R}$

allg.
$\|\psi\| \geq 0$
$\|\hat{O}\psi\| \geq 0$

$$= \left((\lambda\hat{\alpha} - i\hat{\beta})\psi, (\lambda\hat{\alpha} - i\hat{\beta})\psi\right)$$

$$= \left(\psi, (\lambda\hat{\alpha} + i\hat{\beta})(\lambda\hat{\alpha} - i\hat{\beta})\psi\right)$$

$$= \left(\psi, \left(\lambda^2\hat{\alpha}^2 + \lambda\hat{C} + \hat{\beta}^2\right)\psi\right)$$

$$= \langle\lambda^2\hat{\alpha}^2\rangle + \langle\lambda\hat{C}\rangle + \langle\hat{\beta}^2\rangle = \lambda^2(\Delta A)^2 + \lambda\langle\hat{C}\rangle + (\Delta B)^2 \geq 0$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}$$

mit $\lambda = -\dfrac{\langle\hat{C}\rangle}{2(\Delta A)^2}$

$$\Rightarrow \quad (\Delta B)^2 - \frac{1}{4}\frac{(\langle\hat{C}\rangle)^2}{(\Delta A)^2} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4}(\langle\hat{C}\rangle)^2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2}\left|\langle\hat{C}\rangle\right| = \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right| \quad \checkmark$$

Spezialfall: für $[\hat{\vec{P}}_i, \hat{\vec{Q}}_j] = \frac{\hbar}{i}\delta_{ij} = -i\hbar\,\delta_{ij}\,\mathbb{1}$

$\hat{C}$ selbst.adj.

$$\Rightarrow \boxed{\Delta P_i \, \Delta Q_j \geq \frac{\hbar}{2}\delta_{ij}}$$

Heisenbergsche Unschärferelation folgt aus Kommutatoreigenschaft und Operatorungl.

5.6 Postulate der QM

1. Physikalische Zustände werden durch normierte Vektoren $|\psi\rangle \in$ Hilbertraum beschrieben.
   Es folgt das Superpositionsprinzip.

2. Observable entsprechen selbstadj. Operatoren.
   Mögliche Messwerte sind die (reellen) Eigenwerte.

3. Erwartungswert (Mittelwert bei wiederholter Messung) einer Observablen im Zustand $|\psi\rangle$ ist gegeben durch $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \langle\hat{A}\rangle$

4. Zeitliche Entwicklung von Zuständen durch Schrödingergl. bestimmt: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$

5. Wird am Zustand $|\psi\rangle$ die Observable $\hat{A}$ mit Messwert a (= Eigenwert von $\hat{A}$) gemessen $(\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle)$ so geht System bei Messung in Eigenzustand $|a\rangle$ über.

   $\rightarrow$ Kollaps der Wellenfkt.: $|\psi\rangle \xrightarrow[a]{} |a\rangle$

Betrachte Observable $\hat{A}$ und $\hat{A}|n\rangle = a_n|n\rangle$

Beliebiger Zustand $|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$ $\qquad c_n = \langle n|\psi\rangle$

$\Rightarrow$ Ws. dass bei Messung von $\hat{A}$ der Messwert $a_n = |c_n|^2$

$$= \boxed{|\langle n|\psi\rangle|^2 = p_n}$$

p_n ist auch Ws, dass Zustand $|\psi\rangle \to |n\rangle$ bei Messung

$\Rightarrow$ Übergangswsk. $p(|\psi\rangle \to |n\rangle) = |\underbrace{\langle n|\psi\rangle}_{\text{Übergangsamplitude}}|^2$

Ausserdem: Kontinuierlichen Fall $\hat{\vec{Q}}|\vec{r}\rangle = \vec{r}\,|\vec{r}\rangle$

$$\Rightarrow \hat{\vec{Q}} = \int d^3r \; |\vec{r}\rangle \vec{r} \langle \vec{r}|$$

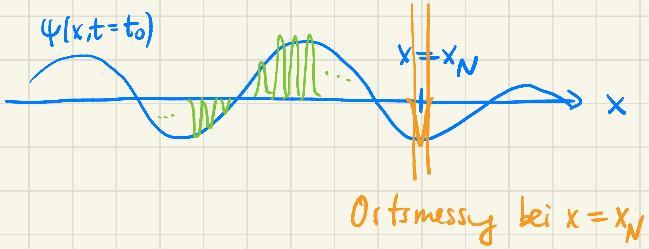
$$\Rightarrow \langle \hat{\vec{Q}} \rangle = \langle \psi | \hat{\vec{Q}} | \psi \rangle$$

$$= \int d^3r \; \boxed{|\langle \vec{r}|\psi\rangle|^2} \; \vec{r}$$

↳ Wsdichte

Illustration zum Kollaps der Wellenfkt

Sei $\psi(x, t=t_0) = \sum_n c_n \underbrace{\varphi(x-x_n)}_{\text{Wellenpaket bei } x=x_n \text{ lokalisiert}}$



Ws, Teilchen bei x_N zu messen $= |c_N|^2$

für $t > t_0$ ist $\Psi(x, t>t_0) = \varphi(x - x_N)$

$t > t_0$

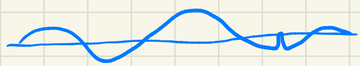
Messung verändert Zustand und führt zum Kollaps der Wellenfkt.

Wieder Start von $|\Psi\rangle$

Q: Was ist Ws, dass Teilchen nicht bei x_N gemessen wird?

A: $1 - |c_N|^2$

Q: Wenn Teilchen nicht bei x_N gemessen wird, was Wellenfkt. für $t > t_0$

A: $\Psi(x, t>t_0) \sim \sum_{n \neq N} c_n \varphi(x - x_n)$ 

$c_n = \langle n | \Psi \rangle \in \mathbb{C}$

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \xrightarrow{\text{Messung von } \hat{A}} a_n, \quad |\Psi\rangle \to |n\rangle$$

$\hat{A} |n\rangle = a_n |n\rangle$ $\qquad p_n = |c_n|^2$

$$|n\rangle = \sum_n \tilde{c}_n |b_n\rangle \xrightarrow{\text{Messung von } \hat{B}} b_n \qquad |n\rangle \to |b_n\rangle$$

$p_{b_n} = |\tilde{c}_n|^2$

$\hat{B} |b_n\rangle = b_n |b_n\rangle$

nicht verträglich

$$|\psi\rangle = \sum_n |n\rangle \underbrace{\langle n|\psi\rangle}_{c_n \in \mathbb{C}}$$

$$\hat{A}|n\rangle = \underset{\in \mathbb{R}}{a_n}|n\rangle$$

$$\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \sum_n \underbrace{|\langle n|\psi\rangle|^2}_{|c_n|^2} a_n \in \mathbb{R}$$

$|\psi\rangle = |n\rangle$