Wie besprochen: Termin für Erstklausur 7.3.2022 9:00 – 11:00

Review

Dirac (bra-ket) notation

Physical states $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ with scalar product $\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle$

Matrix elements of operator $\hat{A}$: $\langle x | \hat{A} | \Psi \rangle$

Basis $\{|n\rangle\}$ = complete orthonormal system $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$

Completeness relation $\mathbb{1} = \sum_n |n\rangle\langle n|$

Expansion of state in basis: $\mathbb{1}|\Psi\rangle = \sum_n |n\rangle \underbrace{\langle n|\Psi\rangle}_{c_n}$

$$= \sum_n c_n |n\rangle \, , \quad c_n \in \mathbb{C}$$

State $|\Psi\rangle$ can be represented by column vector $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$

General operator: $\mathbb{1}\hat{A}\mathbb{1} = \sum_{n,m} |n\rangle \underbrace{\langle n|\hat{A}|m\rangle}_{A_{nm} \in \mathbb{C}} \langle m|$

Operator $\hat{A}$ can be represented by matrix $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

Operator acting on state: $|\Psi'\rangle = \hat{A}|\Psi\rangle$

Represented by $\vec{c}\,' = A\vec{c}$

Self-adjoint operator $\hat{A} = \hat{A}^+$

Represented by hermitian matrix $A_{nm} = A_{mn}^*$

$$\langle n|\hat{A}|m\rangle = \langle m|\hat{A}|n\rangle^*$$

Self-adjoint operator in eigenbasis $\{|e_n\rangle\}$: $\hat{A}|e_n\rangle = a_n |e_n\rangle$

$$\hat{A} = \sum_n |e_n\rangle a_n \langle e_n|$$

Represented by diagonal matrix: $A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$

with real eigenvalues
and orthonormal $\langle e_n|e_m\rangle = \delta_{nm}$

Diagonalizing $\hat{H}$ in basis $\Longleftrightarrow$ Solving $\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$

Vorlesung heute:

- QM Zustände $|\Psi\rangle$ und Wellenfkt. continued ✓
- 5.5 Observable
- 5.6 Postulate der QM

QM Zustände $|\Psi\rangle$ und Wellenfkt

Wellenfkt. $\Psi(\dots)$ ist Abbildung des Zustandes $|\Psi\rangle$ auf geeignete Basis (Ortsraum, Impulsraum, Eigenfkten) $\{|\vec{r}\rangle\}$

$$\Psi(\vec{r}) = \langle\vec{r}|\Psi\rangle$$

wobei $\underbrace{|\vec{r}\rangle}$ Eigenzustand des Ortsoperators $\hat{\vec{Q}}\,|\vec{r}\rangle = \vec{r}\,|\vec{r}\rangle$

entspricht bei $\vec{r}$ lokalisiertem Teilchen

$$\langle\vec{r}|\Psi\rangle = \int d^3r' \; \delta(\vec{r}\,'-\vec{r})\;\Psi(\vec{r}\,') = \Psi(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \underbrace{\langle\vec{r}|\vec{r}\,'\rangle}_{\text{Ortsraumwf. des bei } \vec{r}\,' \text{ lok. Teilchens}} = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,'), \qquad \mathbb{1} = \int d^3r \; |\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|$$

$$\Psi(\vec{r}) = \langle\vec{r}|\Psi\rangle = \langle\vec{r}|\mathbb{1}|\Psi\rangle$$

$$= \int d^3r' \; \underbrace{\langle\vec{r}|\vec{r}\,'\rangle}\langle\vec{r}\,'|\Psi\rangle$$

$$= \int d^3r' \; \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\;\Psi(\vec{r}\,')$$

- Abbildung in Impulsraum

$$\tilde{\Psi}(\vec{p}) = \langle\vec{p}|\Psi\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\vec{p}|\vec{p}\,'\rangle = (2\pi\hbar)^3\,\delta(\vec{p}-\vec{p}\,'), \qquad \langle\vec{k}|\vec{k}\,'\rangle = (2\pi)^3\,\delta(\vec{k}-\vec{k}\,')$$

$$\mathbb{1} = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}| \quad , \quad \mathbb{1} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|$$

wobei $|\vec{p}\rangle$ = Eigenzustand von $\hat{\vec{P}}\,|\vec{p}\rangle = \vec{p}\,|\vec{p}\rangle$

- Abbildung auf Basis $\{|n\rangle\}$ (allg. Basis oder Eigenbasis)

$$c_n = \psi(n) = \langle n|\psi\rangle$$

$$\Rightarrow \langle n|n'\rangle = \delta_{nn'} \qquad \mathbb{1} = \sum_n |n\rangle\langle n|$$

$$\Rightarrow \langle\vec{r}|\vec{r}\,'\rangle = \langle\vec{r}|\,\mathbb{1}\,|\vec{r}\,'\rangle = \sum_n \langle\vec{r}|n\rangle \underbrace{\langle n|\vec{r}\,'\rangle}_{\langle\vec{r}\,'|n\rangle^*}$$

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \sum_n u_n(\vec{r})\; u_n^*(\vec{r}\,')$$

5.5 Observable

Observable = physikalische Größe (z.B. Energie, Ort, ...) die von physikalischem Zustand $|\psi\rangle$ gemessen werden können

In QM sind Messwerte einer Observablen statistisch verteilt
bei wiederholter Messung gibt $\underbrace{\text{Mittelwert/Erwartungs}}$ und $\underbrace{\text{Schwankung}}$

z.B. für Impulsoperator $\hat{\vec{P}}$ $\quad \langle\hat{P}\rangle = \langle\psi|\hat{\vec{P}}|\psi\rangle \quad (\Delta P)^2 = \langle\hat{\vec{P}}^2\rangle - (\langle\hat{\vec{P}}\rangle)^2$

Allg. QM: Observable $\longrightarrow$ selbstadj. Operator

z.B. $\vec{P}$ $\quad\quad \hat{\vec{P}}$

$A \longrightarrow \hat{A} = \hat{A}^+$ hat reelle Eigenwerte!

$\Rightarrow$ Erwartungswert $\langle\hat{A}\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$

$\| $ Eigenbasis / Spektraldarst.

$\sum_n |n\rangle a_n \langle n|$ $\quad\quad |n\rangle$ Eigenzustände

$$\Rightarrow \langle\hat{A}\rangle = \sum_n \langle\psi|n\rangle a_n \langle n|\psi\rangle$$

$$= \sum_n \underset{\mathbb{R}}{a_n} \underbrace{|\langle n|\psi\rangle|^2}_{\mathbb{R}} \quad \text{reell!}$$

oder $(\Delta A)^2 = \langle\hat{A}^2\rangle - (\langle\hat{A}\rangle)^2$

$$= \sum_n a_n^2 |\langle n|\psi\rangle|^2 - \left(\sum_n a_n |\langle n|\psi\rangle|^2\right)^2$$

Betrachte: $|\psi\rangle$ = Eigenzustand der Observable $= |m\rangle$

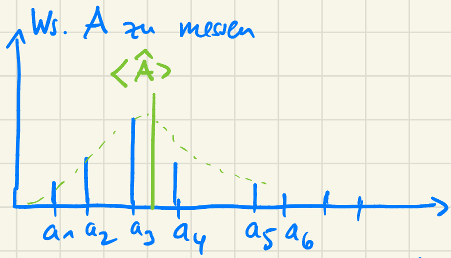
$$\Rightarrow \langle\hat{A}\rangle = a_m \quad , \quad \Delta A = 0$$

Observable ist scharf messbar mit Messwert a_m

Allg. $|\psi\rangle$ = Superposi. von Eigenzustände $|\psi\rangle = \sum_n \underbrace{c_n}_{\langle n|\psi\rangle} |n\rangle$

führt Messung von Observable $\hat{A}$

zu Messwert a_n mit Ws $p(a_n) = |\langle n|\psi\rangle|^2 = |c_n|^2$



Eigenwerte werden mit $p(a_n) = |\langle n|\psi\rangle|^2$

Verträgliche Observable

Sei $|n\rangle$ Eigenzustand von Observable $\hat{A}$: $\hat{A}|n\rangle = a_n|n\rangle$

Sei $\hat{B}$ andere Observable, allg. $\hat{B} = \sum_{n,m} |n\rangle\langle n|\hat{B}|m\rangle\langle m|$

↖ Eigenbasis von $\hat{A}$

→ Messung von $\hat{B}$ an Zustand $|n\rangle$ führt zu Zustandsänderung

$$\hat{B}|n\rangle = \sum_m |m\rangle\langle m|\hat{B}|n\rangle$$

Falls aber $|n\rangle$ auch Eigenzustand von $\hat{B}$, dann bleibt Zustand erhalten $\hat{B}|n\rangle = b_n|n\rangle$,

dann ergibt Messung von $\hat{A}$ immer a_n und $\hat{B}$ immer b_n

→ verträgliche Observable

Observable $\hat{A}$ und $\hat{B}$ heissen <u>verträglich</u> wenn sie gemeinsame Basis von Eigenfkten besitzen, d.h. $\{|n\rangle\}$ Basis sind simultane Eigenzustände von $\hat{A}$ und $\hat{B}$

→ sind $\hat{A}$ und $\hat{B}$ simultan diagonalisierbar und simultan scharf messbar

Wir wollen zeigen:

$\hat{A}$ und $\hat{B}$ sind verträglich (besitzen simultane Eigenzstände) $\iff$ $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ ($\hat{A}$ und $\hat{B}$ vertauschen

mit Kommutator $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$

<u>Beweis</u>: "$\Rightarrow$" existiert Basis simultaner Eigenfkten $\{|n\rangle\}$

$$\Rightarrow \hat{A}\hat{B}|n\rangle = \hat{A}\, b_n |n\rangle = b_n \hat{A}|n\rangle = b_n a_n |n\rangle$$

$$\text{und } \hat{B}\hat{A}|n\rangle = \hat{B}\, a_n |n\rangle = a_n \hat{B}|n\rangle = a_n b_n |n\rangle$$

$$\Rightarrow (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})|n\rangle = (b_n a_n - a_n b_n)|n\rangle = 0 \quad \forall |n\rangle$$

$$\Rightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = 0$$

"$\Leftarrow$" Betrachte Matrixelement von $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ bzgl. Eigenzustände $|n\rangle, |m\rangle$ von $\hat{A}$ mit $a_n \neq a_m$

$$\Rightarrow \langle n| \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} |m\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle n| a_n \hat{B} - \hat{B} a_m |m\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a_n - a_m)}_{\neq 0} \langle \underset{\substack{1\\2}}{n} | \hat{B} | \underset{\substack{2,3,\ldots\\1,3,\ldots}}{m} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \langle n|\hat{B}|m\rangle = 0$$

d.h. $\hat{B}$ in Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} B_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & B_{22} & 0 & 0 & \cdots & \\ \vdots & 0 & \boxed{B} & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & B_{44} & \\ & & & 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

diagonal bzw. Block-diagonal falls a_n k-fach entartet
im entarteten Fall kann man $k \times k$ Block durch Basistrafo diagonalisieren

$\Rightarrow$ $\hat{A}$ und $\hat{B}$ lassen sich simultan diagonalisieren

---

Besonders wichtig in QM sind Operatoren $\hat{A}$ die mit $\hat{H}$ vertauschen
$[\hat{A}, \hat{H}] = 0$

$\Rightarrow$ Diese Observablen $\hat{A}$ sind dann für Eigenzustände von $\hat{H}$ mit scharfen E_n auch simultan scharf messbar.

Ausblick: $$[\hat{\vec{P}}_i, \hat{\vec{Q}}_j] = \frac{\hbar}{i} \delta_{ij}$$
$$[p_x, x] = \frac{\hbar}{i}$$

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|$$

$$\Delta x \; \Delta p_x \geq \frac{1}{2} \left| \frac{\hbar}{i} \right|$$
$$\geq \frac{\hbar}{2}$$