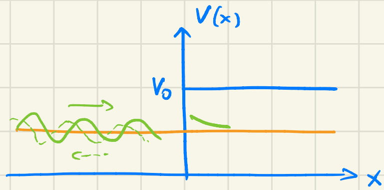
Review

4.4 Potential step

$E > 0$ continuous



with scattering states $\psi_{E=\frac{\hbar^2 k^2}{2m}}(x) = \psi_k(x)$

Ansatz for $E < V_0$: $\psi_k(x) \begin{cases} e^{ikx} + r e^{-ikx} & , x<0 \\ \tau e^{-k'x} & , x>0 \end{cases}$

Reflexion coefficient $R = \left| \frac{j_{refl.}}{j_{in}} \right| = |r|^2$

For $E < V_0$: $R = 1$, but $|\psi_k(x>0)|^2 \neq 0$ to find particle at $x>0$

Vorlesung heute:

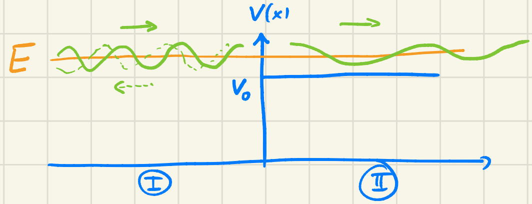
4.4 Potentialstufe: Streuzustände für $E > V_0$ ✓

4.5 Potentialbarriere und Tunneleffekt ✓

5. Formalismus der QM

5.1 Hilbertraum

4.4. Potentialstufe: Fall $E > V_0$ Streuung oberhalb Stufe



Ansatz $\psi_k(x) = \begin{cases} e^{ikx} + r\, e^{-ikx}, & x < 0 \\ \tau\, e^{ik'x}, & x > 0 \end{cases}$

$+k$ von links mit $+k$ einlaufende Streuzustände

$k' = \frac{2\pi}{\lambda'}$

- Einsetzen in S-Glg.

$$\underbrace{E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}}_{\text{I}} = \underbrace{\frac{\hbar^2 k'^2}{2m} + \frac{\hbar^2 \varkappa^2}{2m}}_{\text{II}} \Rightarrow k^2 = k'^2 + \varkappa^2$$

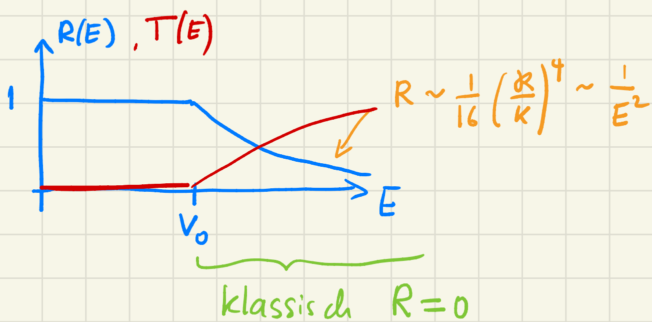
$$\Rightarrow k' = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-V_0)}$$

- Stetigkeit bei $x=0$

$$\frac{\psi'(0^-)}{\psi(0^-)} = ik\,\frac{1-r}{1+r} = ik' = \frac{\psi'(0^+)}{\psi(0^+)}$$

$$\Rightarrow r = \frac{k-k'}{k+k'}$$

$\Rightarrow$ <u>Reflexionskoeffizient</u> $R = |r|^2 = \frac{(k-k')^2}{(k+k')^2}$



- **Transmissionskoeffizient** $T = \left| \frac{j_{trans}}{j_{ein}} \right|$ $\qquad j_{ein} = \frac{\hbar k}{m}$

mit $j_{trans} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \frac{d}{dx}\psi - \psi \frac{d}{dx}\psi^*\right) = \frac{\hbar}{2mi}\left(ik' |\tau|^2 - (-ik')|\tau|^2\right)$

mit $\psi_{x>0}$

$= \frac{\hbar k'}{m} |\tau|^2$

$\Rightarrow T = \frac{k'}{k} |\tau|^2$, Stetigkeit $\tau = 1 + r$

⋮

$\Rightarrow T = \frac{4kk'}{(k+k')^2}$

Beobachtung: $T + R = 1$ $\longrightarrow$ Teilchenzahlerhaltung

folgt aus Kontinuitätsglg. $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} j = 0$

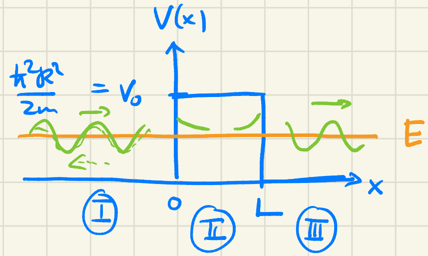
da $\psi_k(x)$ stationär ist $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial j}{\partial x} = 0 \Rightarrow j = \text{const.}$

$\Rightarrow |j_{ein}| - |j_{refl.}| = |j_{trans}|$

$\Rightarrow 1 = \underbrace{\frac{|j_{trans}|}{|j_{ein}|}}_{T} + \underbrace{\frac{|j_{refl.}|}{|j_{ein}|}}_{R}$

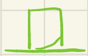
4.5 Potentialbarriere und Tunneleffekt

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x<0 \\ V_0 & , \quad 0<x<L \\ 0 & , \quad x>L \end{cases}$$



Betrachte $0<E<V_0$

Ansatz: $$\psi_{+k}(x) = \begin{cases} e^{ikx} + r e^{-ikx} & , \quad x<0 \\ A e^{-k'x} + B e^{k'x} & , \quad 0<x<L \\ T e^{ikx} \end{cases} \qquad e^{\pm k'x}$$



$$B e^{k'x} = \tilde{B} e^{k'(x-L)}$$ aufgrund von Refexion an $x=L$

- Einsetzen in S-Glg.: $$\underbrace{E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}}_{\mathrm{I},\,\mathrm{III}} = \underbrace{-\frac{\hbar^2 k'^2}{2m} + \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}}_{\mathrm{II}}$$

$$\Rightarrow \quad k' = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)}$$

- Stetigkeit bei $x=0$: $\frac{\psi'}{\psi}$

$$ik\,\frac{1-r}{1+r} = k'\,\frac{B-A}{B+A} \quad \Rightarrow \quad \cancel{ik}\,\frac{1-r}{1+r} = -i\,\frac{k'}{k}\,\frac{1-\frac{A}{B}}{1+\frac{A}{B}} \qquad (*)$$

Stetigkeit bei $x=L$:

$$k'\,\frac{Be^{k'L} - Ae^{-k'L}}{Be^{k'L} + Ae^{-k'L}} = ik\,\frac{\cancel{Te^{ikL}}}{\cancel{Te^{ikL}}} \quad \rightarrow \quad \frac{A}{B}\,e^{-2k'L} = \frac{1 - i\frac{k}{k'}}{1 + i\frac{k}{k'}} \qquad (**)$$

Aus Glg. ⊛ $\Rightarrow$ $r = \frac{1-C}{1+C}$, $C = -i\frac{k'}{k}\frac{1-\frac{A}{B}}{1+\frac{A}{B}}$

Einsetzen von $\frac{A}{B}$ aus (**)

$$\Rightarrow \quad r = \frac{1+i\frac{k'}{k}\tanh k'L}{1+i\frac{k}{k'}\tanh k'L} \qquad R = |r|^2$$

$\Rightarrow$ Transmissionskoeffizient $T = 1-R = 1-|r|^2$

$$\boxed{T(E) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}\underbrace{\left(\frac{k}{k'}+\frac{k'}{k}\right)^2}_{\frac{V_0^2}{E(V_0-E)}}\sinh^2 k'L}} < 1$$

$$k' = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(V_0-E)}$$

$T \neq 0 \rightarrow$ Durchdringen des kl. verbotenen Bereichs

$\rightarrow$ Tunneleffekt mit Tunnelws $T(E)$

Grenzwert für große Barriere: $k'L \gg 1$

$$\sinh^2 k'L \simeq \frac{e^{2k'L}}{4}$$

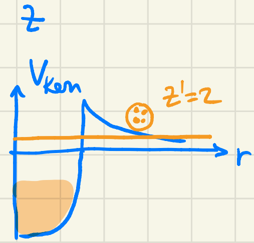
$$\Rightarrow \quad T(E) \approx \frac{16\,E(V_0-E)}{V_0^2}\, e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(V_0-E)}\cdot L}$$

klassische Wirkung

Beispiele des Tunneleffekts:

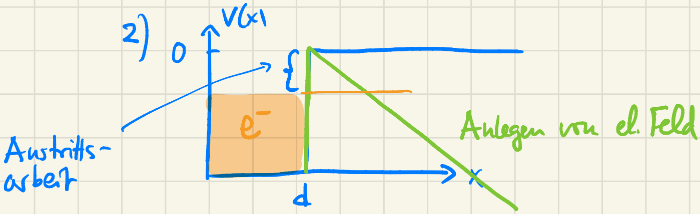
1) α Zerfall

↳ Tunneln des α Teilchens durch Coulombbarriere



→ Üblatt 5

2)



Emission von e^- aus Metall bei angelegtem el. Feld „Feldemission"

→ Rastertunnelmikroskopie