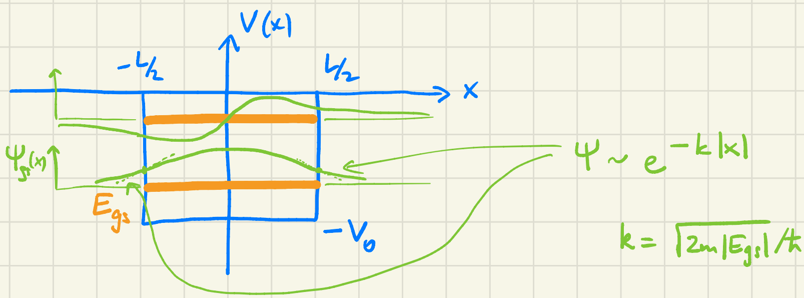
Klausur

	Erstklausur aktuell	23.2.22	15:00 - 17:00	18+12
	mögliche Alternativen	25.2.22	8:00 - 10:00	3+11
		7.3.22	9:00 - 11:00	17+17
	Zweitklausur	31.3.22	13:00 - 15:00	

Review: Finite potential well



$\hookrightarrow \frac{\psi'}{\psi}$ stetig

→ always at least one bound state $E_{gs} < 0$
even for arbitrary weak V_0 (and arbitrary small $\frac{L}{2}$)

$k \cdot L = n\pi$

Vorlesung: 4.3. δ-Potential } geb./lok. Zustände

4.4. Potentialstufe

4.5. Potentialbarriere und Tunneleffekt } Streuzustände delok. Zustände

4.3 δ- Potential

$$V(x) = -g\,\delta(x) \quad , \quad g > 0$$

Ansatz für gebundenen Zustand: $\psi(x) = N e^{-k|x|}$

vgl. Lösung von 4.2 im Bereich (I) und (III) $\quad E = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (*)$

Schrödingergl.:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_{(x)} - g\,\delta(x)\,\psi_{(x)} = E\,\psi(x)$$

erfüllt für $x \neq 0$

Integration von $-\varepsilon$ bis $+\varepsilon$

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi''(x)\,dx}_{\varepsilon>0 \;\; \psi = Ne^{-kx} \quad -\varepsilon<0 \;\; \psi = Ne^{kx}} - g\,\psi(0) = \underbrace{E\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi(x)\,dx \underset{\varepsilon\to 0}{=} 0}_{\text{da } \psi \text{ stetig}}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi'(\varepsilon) - \psi'(-\varepsilon)\right) - g\,\psi(0) = 0$$

δ- Potential hat "unendliche Sprungstelle"
↳ ψ' hat Sprungstelle (aber ψ stetig)
vgl. 4.1 an Rändern

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(-k\,\psi(\overset{\varepsilon\to 0}{0}) - k\,\psi(0)\right) - g\,\psi(0) = 0 \iff \frac{2k\hbar^2}{2m} = g$$

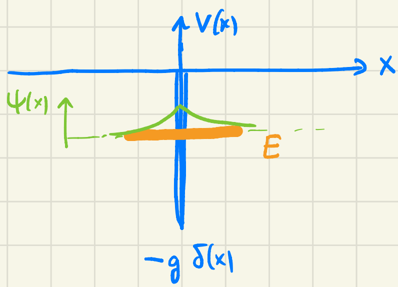
$$k = \frac{mg}{\hbar^2}$$

in (*)

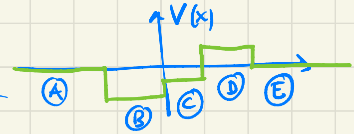
$$\Rightarrow \boxed{E = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = -\frac{g^2 m}{2\hbar^2}}$$

δ-Potential hat genau einen geb. Zustand (in 1d)

Graphische Darstellung:



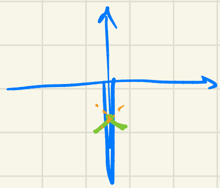
Vorletzte Vorlesung: S-Glg. für endl. Sprungstellen / stückweise konst. Pot.



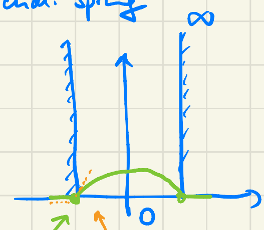
$\hookrightarrow \quad \psi'' \underset{\uparrow}{\sim} \psi$, ψ und ψ' stetig $\forall x$

A … E

Für Sprungstelle mit unendl. Sprung



$-g\,\delta(x)$

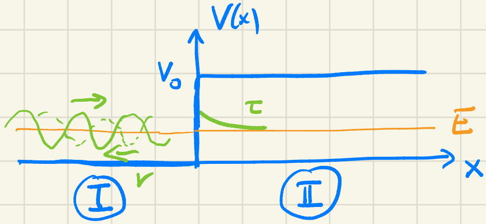


→ ψ stetig, ψ' hat endl. Sprungstelle

4.4. Potentialstufe

$$V(x) = \begin{cases} 0 \,, & x < 0 \\ V_0 \,, & x > 0 \end{cases}$$

$$V_0 = \frac{\hbar^2}{2m}\kappa^2 > 0$$



Fall $0 < E < V_0$: Energien unterhalb der Potentialstufe $E = \frac{\hbar^2}{2m}k^2$

Ansatz
$$\psi_k(x) = \begin{cases} e^{ikx} + r\,e^{-ikx} \,, & x < 0 & \text{I} \\ \tau\,e^{-k'x} \,, & x > 0 & \text{II} \end{cases}$$

$\psi(0) = \psi(0)$

$x < 0$: einlaufende + reflektierte Welle
$\quad k > 0 \qquad -k < 0$ (− Richtung)

$x > 0$: Wellenfkt. dringt in klassisch nicht-erlaubten Bereich ein

Bemerkung:

Wir betrachten hier Streuzustände ($\psi_k(x),\ x<0$) von ebenen Wellen in I $\rightarrow$ nicht normierbar

Physikalischen Lösungen sind Wellenpakete, die sich aus Streuzuständen zusammensetzen

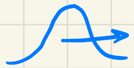
Erinnerung: freies Wellenpaket
$$\underset{\text{nichtstat.}}{\psi(x,t)} = \int \frac{dk}{2\pi}\, \varphi(k)\, \underbrace{e^{i(kx-\omega(k)t)}}_{\text{Streuzustände für freies Feld (stationär)}}$$

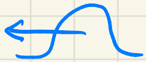
Streuzustände mit V

Mit Potentialstufe:

$$\psi(x,t) = \int \frac{dk}{2\pi}\, \varphi(k)\, \underbrace{\psi_k(x)}_{e^{ikx} + r\,e^{-ikx}}\, e^{-i\frac{E(k)}{\hbar}t}$$

Lösung der zeitabh. S-Glg. für Wellenpaket mit $V(x)$

für $t \ll 0$  einlaufendes Wellenpaket

für $t \gg 0$  reflektiertes Wellenpaket

Einsetzen in Schrödingergl.

I $$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\psi(x)$$

II $$E\psi(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \underset{\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m}}{\underset{\shortparallel}{V_0}}\right)\psi(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(-k'^2 + \kappa^2\right) \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} k' &= \sqrt{\kappa^2 - k^2} \\ &= \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)} \end{aligned}}$$

Stetigkeit bei $x=0$:

$$\frac{\psi'(0^-)}{\psi(0^-)} = \frac{ik(1-r)}{1+r} = -k' = \frac{\psi'(0^+)}{\psi(0^+)}$$

$$\Rightarrow r(k) = \frac{1 - i\frac{k'}{k}}{1 + i\frac{k'}{k}}$$

Betrachte Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\frac{d}{dx}\psi - \psi\frac{d}{dx}\psi^*\right)$ (*)

Teilchenstrom der einlaufenden Welle

$$j_{ein} = \frac{\hbar}{2mi}\left(ik - (-ik)\right) = \frac{\hbar k}{m}$$

↑ in (*) e^{ikx} Teil von ψ

(würde auch aus Wellenpaketen folgen: $\vec{v}_G$)

Teilchenstrom der reflektierten Welle

$$j_{refl.} = \frac{\hbar}{2mi}\left(-ik|r|^2 - (ik|r|^2)\right) = -|r|^2\frac{\hbar k}{m}$$

in (*) re^{-ikx} Teil von ψ

$\Rightarrow$ <u>Reflexionskoeffizient</u> $R = \left| \frac{j_{refl.}}{j_{ein}} \right|$

= Ws dass Teilchen reflektiert wird und nicht Pot.stufe durchläuft zu $x \to +\infty$

$$\Rightarrow \quad R = |r|^2 = \left| \frac{1 - i\frac{k'}{k}}{1 + i\frac{k'}{k}} \right|^2 = 1 \quad \to \text{ totale Reflektion für } E < V_0$$

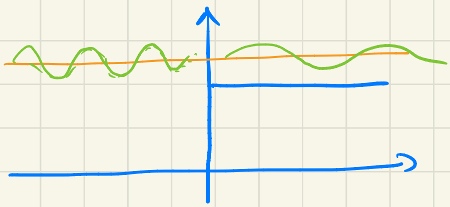
Aber trotzdem endliche Ws, Teilchen bei $x > 0$ zu finden

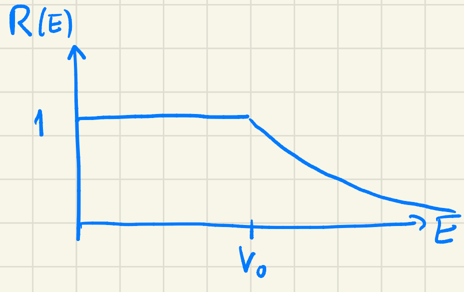
$$\hookrightarrow \quad |\psi(x>0)|^2 dx = |\tau|^2 e^{-2k'x} dx > 0$$

und $\tau = 1 + r$ Stetigkeit von ψ bei $x = 0$ $\left(\frac{\psi'}{\psi} \text{ stetig s.o.} \right)$

$\psi(0^+) = \psi(0^-)$

Fall $E > V_0$: Streuung über Potstufe





4.5 Potentialbarriere ....

Ansatz:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + r e^{-ikx} & , x<0 \\ A e^{-k'x} + B e^{k'x} & , \text{II} \\ \tau e^{ikx} & , x>L \end{cases}$$