

Review

Study t-indep. Schrödinger eqn. with different 1d $V(x)$

→ Generally Ψ and Ψ' are continuous

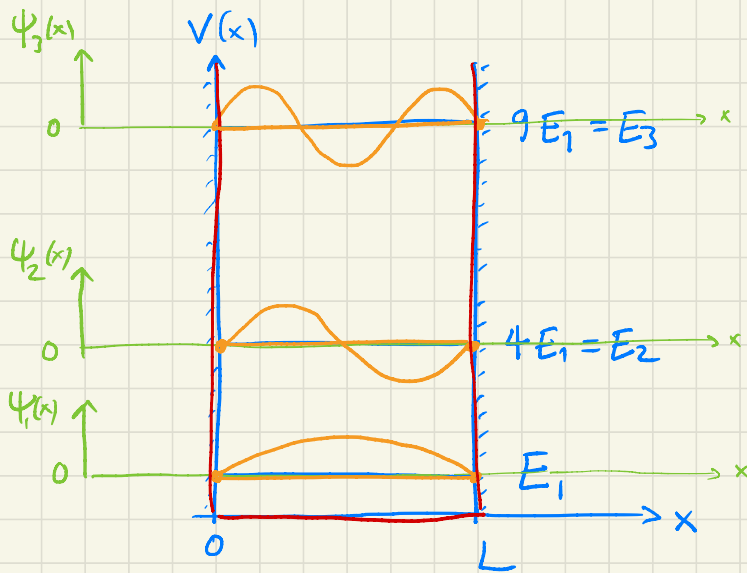
$$\hat{H} \Psi(x) = E \Psi(x)$$

$V \times$

4.1 Infinite potential well $V(x)$

discrete $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2, n=1,2,3,\dots$

with eigenfunctions $\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$



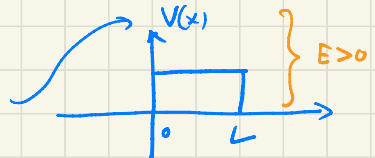
eigenfunctions $\{\Psi_n(x)\}$ are orthonormal and complete set
for general wave function on $[0, L]$

Vorlesung heute:

- 4.1 Unendl. Pot. topf
 - 4.2 Endlicher Potentialtopf
 - 4.3 δ -Potential
- } lok./geb. Zustände

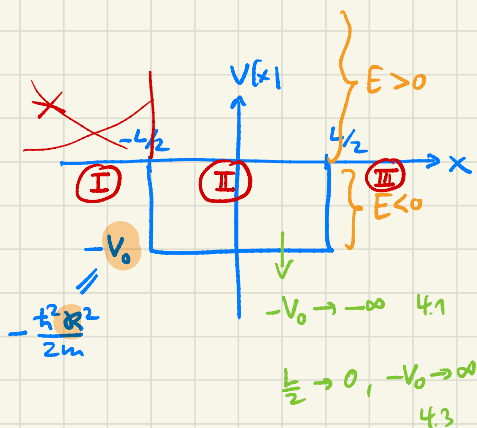
Streu-
zustände

- 4.4 Potentialstufe
- 4.5 Potentialbarriere



4.2 Endlicher Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & , |x| \leq \frac{L}{2} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$



Für stückweise konstantes Potential ist S-Glg. von der Form

$$(E - V) \psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) \quad \rightarrow \quad \psi'' \sim \psi$$

hier in (I) und (III): $V=0 \rightarrow E$ und in (II): $V=-V_0 \rightarrow E+V_0$

$E-V$ entscheidet Vorzeichen

Allgemein

Lösungen sind $\psi(x) \sim e^{\pm ax}$ für $E-V < 0$

$a, b \in \mathbb{R}$

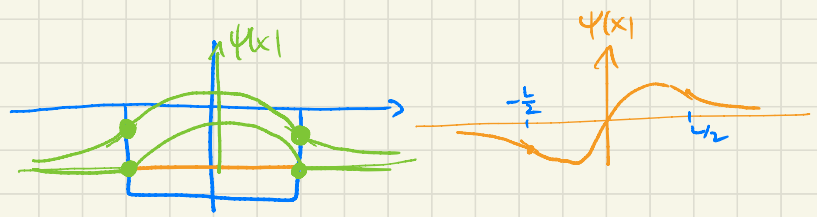
$\psi(x) \sim e^{\pm ibx}$ für $E-V > 0$ II $E+V_0 > 0$
 $\hookrightarrow \cos bx \pm i \sin bx$

Unendl. Potentialtopf $\rightarrow$ Grundzustand ist gerade Fkt.

Ansatz für gerade Lösungen der S-Glg. für $E < 0$ (geb./lok. Zustände)

$$\psi(x) = \begin{cases} -N_{\text{ungerade}} e^{kx} & , x < -\frac{L}{2} \text{ (I)} \\ N_i \cos k'x \quad \text{sin } k'x & , |x| \leq \frac{L}{2} \text{ (II)} \\ N_a e^{-kx} & , x > \frac{L}{2} \text{ (III)} \end{cases}$$

$N_a e^{kx} + \tilde{N}_a e^{-kx}$
 $N_i \cos k'x + \tilde{N}_i \sin k'x$



Einsetzen in Schrödingergleichung gibt

im Bereich ① und ② $E \psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi(x)$

$$\Rightarrow E = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

und in ③

$$E \psi(x) = \left(\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}}_{\frac{\hbar^2 k'^2}{2m}} - \frac{\hbar^2 \mathcal{R}^2}{2m} \right) \psi(x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{-k^2}_E = \underbrace{k'^2}_{\text{Krümmung von } \psi} - \underbrace{\mathcal{R}^2}_V$$

$$\Rightarrow k'^2 = \mathcal{R}^2 - k^2$$

Aus Stetigkeit von ψ und ψ' bei $x = \pm \frac{L}{2}$ folgt (Quantisierung)

$\Rightarrow$ Stetigkeit von $\frac{\psi'}{\psi}$ (log. Ableitung), Normierungskonst. fallen raus
bei $x = \frac{L}{2}$

$$\frac{\psi'(\frac{L}{2})}{\psi(\frac{L}{2})} = \frac{\overset{+}{-} k' \sinh' \frac{L}{2}}{\cosh' \frac{L}{2}} = \frac{-k e^{-k \frac{L}{2}}}{e^{-k \frac{L}{2}}} = \frac{\psi'(\frac{L}{2})}{\psi(\frac{L}{2})}$$

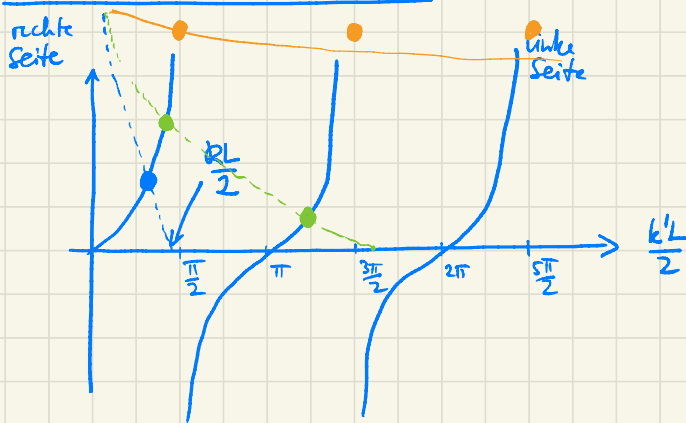
$$\Rightarrow \boxed{\tan k' \frac{L}{2} = \frac{k}{k'} = \frac{\sqrt{(\mathcal{R} \frac{L}{2})^2 - (k' \frac{L}{2})^2}}{k' \frac{L}{2}}} \quad (*)$$

ungerade
Lösungen

$$\cot k' \frac{L}{2} = -\frac{k}{k'} = -\dots \quad (**)$$

Stetigkeit von $\frac{\psi'}{\psi}$ bei $x = -\frac{L}{2}$ gibt gleiche Bedingg

Graphische Bestimmung von k' für gerade Lösungen

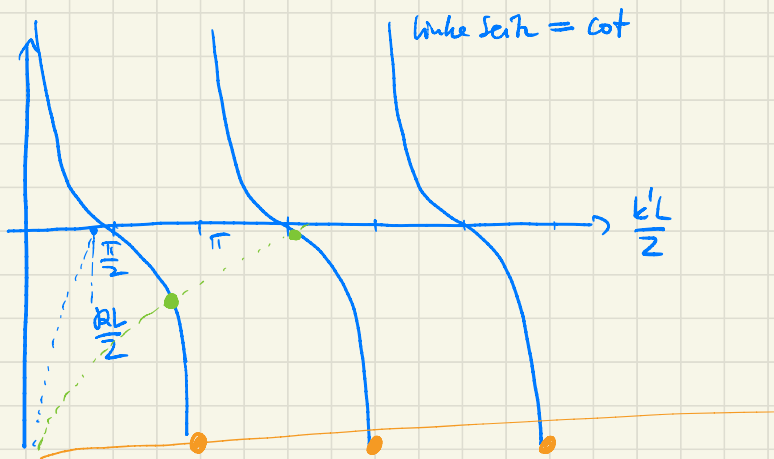


$\Rightarrow$ Es gibt mindestens eine Lösung (einen geb. Zustand) für beliebig schwaches Potential (in 1d)

Und für $\frac{RL}{2} > n \cdot \pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$

gibt es $n+1$ geb. Zustände mit gerader Symmetrie

Graphische Bestimmung von k' für ungerade Lösungen

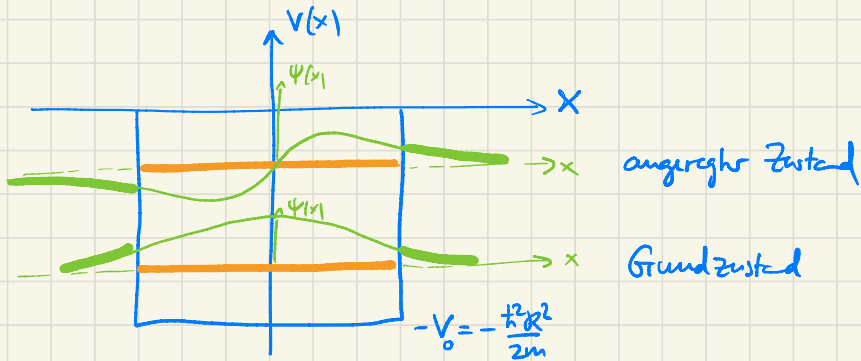


$\Rightarrow$ Es gibt nur ungerade Lösungen wenn $\frac{RL}{2} \geq \frac{\pi}{2}$

Nach Bestimmung von k' $\Rightarrow E = -\frac{\hbar^2}{2m} (R^2 - k'^2)$

N_a und N_i bestimmt durch Stetigkeit von $\Psi(\frac{L}{2})$
und Normierung $\int dx |\Psi(x)|^2 = 1$

Graphische Zusammenfassung für $R\frac{L}{2} \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$



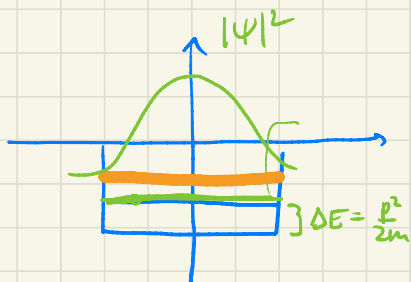
$\rightarrow$ einfaches Modell für schwach gebundenen Zustand
(z.B. Kernphysik: Deuteron = n, p)

$\rightarrow$ Wellenfkt. fällt im klassisch verbotenen Bereich $|x| > \frac{L}{2}$, $E < 0$
ab wie $\Psi \sim e^{-\sqrt{2m|E|}x/\hbar}$
gilt für jeden gebundenen Zustand für V mit endl. Reichweite

$\rightarrow$ Grenzfall unendl. Potentialtopf L fest, $V_0 \rightarrow \infty \Leftrightarrow R \rightarrow \infty$

$$E = -V_0 + \frac{\hbar^2}{2m} k'^2 \quad k' = \frac{n\pi}{L} \quad n=1,2,3,\dots$$

wie in unendl. Pot.topf



klassisch

QM

