Review   Expectation value of momentum $\vec{P}$

$$\langle \hat{\vec{P}} \rangle = \langle \vec{p} \rangle (t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \, \tilde{\Psi}^*(\vec{k},t) \, \hbar \vec{k} \, \tilde{\Psi}(\vec{k},t)$$

$$= \underbrace{\int d^3r \, \Psi^*(\vec{r},t) \, \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \, \Psi(\vec{r},t)}$$

$\|$ momentum operator $\hat{\vec{P}}$ in mom. coord. space

General expectaction value of operator $\hat{O}$

$$\langle \hat{O} \rangle = \int d^3r \, \Psi^*(\vec{r},t) \, \hat{O} \, \Psi(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \, \tilde{\Psi}^*(\vec{k},t) \, \hat{O} \, \tilde{\Psi}(\vec{k},t)$$

Heisenberg uncertainty relation

$$\Delta x \, \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta y \, \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta z \, \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$$

coordinate and momentum in same direction cannot be sharply measured at the same time

Schrödinger equation   for particle of mass m in potential V

time-dep. S-eqn. = equation of motion for Ψ

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r},t) = \hat{H} \, \Psi(\vec{r},t)}$$

Energy = kinetic + potential energy

with Hamiltonian $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})$ special case: V is indep. of time

in coord. space for local potential $V(\vec{r})$

Solution $\Psi(\vec{r},t)$ of time-dep. S-eqn. obeys

continuity equation $\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$

$\rho = |\Psi|^2$

$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Psi^*\right)$

and conserves norm $\int d^3r\, |\Psi(\vec{r},t)|^2 = 1 \quad \forall t$

time-indep. S-eqn., when V is time-indep.

$$\Psi(\vec{r},t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\,\Psi(\vec{r})$$ is stationary

with $$\boxed{\hat{H}\,\Psi(\vec{r}) = E\,\Psi(\vec{r})}$$ $E \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ not only norm is time-indep., but also ρ and $\vec{j}$ are time-indep.

Vorlesung heute:

- Zeitunabh. Schrödingergleichung ✓

4. Eindimensionale Probleme ✓

- Unendlicher Potentialtopf ✓
- Endlicher Potentialtopf

Zeitunabh. Schrödingergl. $\hat{H}\,\psi(\vec{r}) = E\,\psi(\vec{r})$

Lin. Alg. $\underset{\text{matrix}}{A}\,\vec{v} = a\,\vec{v}$

Eigenwertglg.: $\psi(\vec{r})$ ist Eigenfkt. von $\hat{H}$ mit Eigenwert E

Was ist E? Erwartungswert von $\hat{H}$:

$$\langle \hat{H} \rangle = \int d^3r\, \psi^*(\vec{r})\, \underbrace{\hat{H}\,\psi(\vec{r})}_{E\,\psi(\vec{r})}$$

NB: $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ fällt raus

$$= E \int d^3r\, |\psi(\vec{r})|^2 = E$$

$\rightarrow$ $E \in \mathbb{R}$ ist Energie des Zustands (zunächst im Sinne von Erwartungswert / Mittelwert)

Was ist Schwankung ΔE?

$$(\Delta E)^2 = \langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2 = \int d^3r\, \psi^*(\vec{r})\, \underbrace{\hat{H}^2 \psi(\vec{r})}_{E^2 \psi(\vec{r})} - E^2$$

$$= E^2 - E^2 = 0$$

$\rightarrow$ Für stat. Zustand ist E die Energie des Zustands (scharf messbar)
$\langle \hat{H} \rangle = E$, $(\Delta E)^2 = 0$

$\Rightarrow$ Lösung der zeitunabh. Schrödingerglg. $\hat{H}\,\psi(\vec{r}) = E\,\psi(\vec{r})$

mit Normierung $\int d^3r\, |\psi(\vec{r})|^2 = 1$

gibt möglichen Energiewert E

$\rightarrow$ später in Vorlesung zum Wasserstoffatom: nur diskrete E_i möglich
$E_i \rightarrow E_j$: $E_i - E_j = h\nu$ Spektrallinien