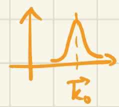
Review

Wave packet $\quad \Psi(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \underset{\uparrow}{\varphi(\vec{k})}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega(\vec{k})t)}$

momentum distribution

sharp mom. dist. peaked around $\vec{k}_0$: $\quad |\Psi(\vec{r},t)|^2 \approx |\Psi(\vec{r}-\vec{v}_G t, 0)|^2$

$\rightarrow$ wave packet moves with $\vec{v}_G = \frac{\hbar \vec{k}_0}{m}$



Schrödinger equation for free particle = wave equ. for wave packet

$$\boxed{\underbrace{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}}\, \Psi(\vec{r},t) = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta}\, \Psi(\vec{r},t)}$$

operating on Ψ gives $\hbar\omega \rightarrow E\Psi = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\Psi$

Expectation value of $\vec{r}$ $\quad \langle \vec{r} \rangle (t) = \int d^3r\, \Psi^*(\vec{r},t)\, \vec{r}\, \Psi(\vec{r},t)$

$|\Psi|^2$

Wave function in momentum space = Fourier trafo of Ψ

$$\tilde{\Psi}(\vec{k},t) = \int d^3r\, \Psi(\vec{r},t)\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

for wave packet

$$= \varphi(\vec{k}) \cdot e^{-i\omega(\vec{k})\cdot t}$$

Vorlesung heute:

- Impuls- und Ortsoperator ✓
- Heisenbergsche Unschärferelation ✓

3. Schrödingergleichung ✓

- Zeitabhängige Schrödingerglg. ✓
- Zeitunabhängige Schrödingerglg.

Impulsoperator und Ortsoperator

$$\tilde{\psi}^* \; \hbar\vec{k} \; \tilde{\psi}$$

$$\langle\hat{\vec{P}}\rangle(t) = \quad \boxed{\langle\vec{p}\rangle(t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left|\tilde{\psi}(\vec{k},t)\right|^2 \hbar\vec{k}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}^*(\vec{k},t)\, \hbar\vec{k}\, \tilde{\psi}(\vec{k},t)$$

Ws dichte im Impulsraum

Übergang zum Ortsraum mit allg. Parceval Glg. (bisher $g=f$)

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{f}^*(\vec{k})\, \tilde{g}(\vec{k}) = \int d^3r\, f^*(\vec{r})\, g(\vec{r})$$

mit $\tilde{f}^*(\vec{k}) = \tilde{\psi}^*(\vec{k},t)$ und $\tilde{g}(\vec{k}) = \hbar\vec{k}\,\tilde{\psi}(\vec{k},t)$

$$f^*(\vec{r}) = \psi^*(\vec{r},t) \qquad g(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \hbar\vec{k}\, \tilde{\psi}(\vec{k},t)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$= \underbrace{\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\vec{r}}}_{\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}} \underbrace{\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}(k,t)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}_{\psi(\vec{r},t)}$$

$$\langle\hat{\vec{P}}\rangle(t) \Rightarrow \boxed{\langle\vec{p}\rangle(t) = \int d^3r\, \psi^*(\vec{r},t)\, \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\, \psi(\vec{r},t)}$$

mit **Impulsoperator $\hat{\vec{P}}$**

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{im Ortsraum } \hat{\vec{P}} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \\ \text{im Impulsraum } \hat{\vec{P}} = \vec{p} = \hbar\vec{k} \end{array}}$$

$\hat{O}$ $\hat{}$ kennzeichnet, dass O = Operator

Wirkung des Impulsoperators auf Wellenfkt.

$$\hat{\vec{P}}\,\psi(\vec{r},t) = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\,\psi(\vec{r},t) \quad \text{oder} \quad \hat{\vec{P}}\,\tilde{\psi}(\vec{k},t) = \hbar\vec{k}\,\tilde{\psi}(\vec{k},t)$$

Entsprechend ist <u>Ortsoperator $\hat{\vec{Q}}$</u>

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{im Ortsraum} & \hat{\vec{Q}} = \vec{r} \\ \text{im Impulsraum} & \hat{\vec{Q}} = -\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\vec{k}} = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\vec{p}} \end{array}}$$

entsprechend Wirkung auf Wellenfkt. z.B. $\hat{\vec{Q}}\,\tilde{\psi}(\vec{k},t) = -\frac{1}{i}\underbrace{\frac{\partial}{\partial\vec{k}}}_{\vec{\nabla}_k}\tilde{\psi}(\vec{k},t)$

Messgröße $\rightarrow$ Operator $\hat{O}$

Op. im Ortsraum

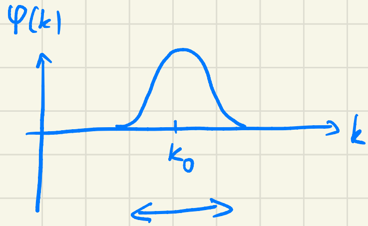
$$\Rightarrow \quad \langle\hat{O}\rangle(t) = \int d^3r\; \psi^*(\vec{r},t)\,\hat{O}\,\psi(\vec{r},t)$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\tilde{\psi}^*(\vec{k},t)\,\hat{O}\,\tilde{\psi}(\vec{k},t)$$

Op. im Impulsraum

Heisenbergsche Unschärferelation

Betrachte Wellenpaket bei $t = \text{const.}$, 1d



mit Breite Δx $\qquad\qquad$ Δk

Breiten sind gegeben durch Varianz / Schwankung

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle^2 + \langle x \rangle^2$$
$$= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$(\Delta k)^2 = \langle (k - \langle k \rangle)^2 \rangle = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$$

Für Gaußsches Wellenpaket (s. Übung)

$$|\psi(x,0)|^2 \sim e^{-\frac{x^2}{2d^2}} \longrightarrow \Delta x = d$$

$$|\tilde{\psi}(k,0)|^2 \sim e^{-\frac{2\,2d^2(k-k_0)^2}{2}} \longrightarrow \Delta k = \frac{1}{2d}$$

$$e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\left(\frac{1}{2d}\right)^2}}$$

oder $\Delta p = \hbar \Delta k = \frac{\hbar}{2d}$

$\Rightarrow$ für Gaußsches Wellenpaket gilt $\Delta x \cdot \Delta p = \cancel{d}\,\frac{\hbar}{2\cancel{d}} = \frac{\hbar}{2}$

Für allg. Wellenfunktion gilt

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}}$$

Heisenbergsche Unschärferelation

Ort und Impuls sind nicht simultan scharf meßbar! (bei gleichem t)

$$\langle (x-\langle x\rangle)^2\rangle = \langle (x^2 - 2x\langle x\rangle + \langle x\rangle^2)\rangle$$

$\langle 1\rangle = 1$

$$= \langle x^2\rangle - \langle 2x\langle x\rangle\rangle + \langle x\rangle^2$$

$$- 2\langle x\rangle\langle x\rangle$$

- in 3d: $\Delta y\, \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}$ und $\Delta z\, \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$
- Beweis für bel. Wellenfkt folgt später aus Operatoridentität für $\vec{P}$ und $\vec{Q}$.

$$\Psi(\vec{r},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\, \tilde{\Psi}(\vec{p},t)\, e^{\frac{i\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}}$$

$$\hbar\vec{k} = \vec{p}$$