Review Key experiments and ideas for QM

- energy is quantized
- light / el.-magn. waves have particle character } wave-particle duality
- particles have wave character

→ de Broglie wave length $\lambda = \frac{h}{p}$ or $k = \frac{p}{\hbar}$

and frequency $\omega = \frac{E}{\hbar}$

- classical path $\vec{r}(t), \vec{p}(t)$ is replaced by wave function $\Psi(\vec{r},t)$ probability density amplitude

- $|\Psi(\vec{r},t)|^2 d^3r$ = prob. to find particle in d^3r at $\vec{r}$ and time t

- QM effects when wave length $\lambda \sim$ typical / relevant length scale

Matter waves: free particle $E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \underset{\text{de Broglie}}{\Longrightarrow} \omega = \frac{\hbar \vec{k}^2}{2m}$ dispersion relation

→ wave function is plane wave $\Psi(\vec{r},t) = A\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$

→ particle with group velocity (= classical velocity)

$$\vec{v}_G = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = \frac{\partial E}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m} = \vec{v}$$

Vorlesung heute:

- Wellenpaket ✓
- Wellengleichung ✓
- Erwartungswerte ✓
- Orts- und Impulsoperator

Neues Übungblatt 3

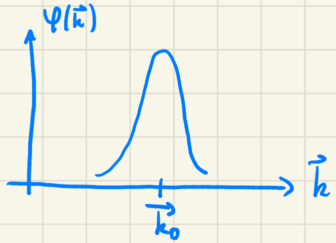
Ebene Welle $|\Psi(\vec{r},t)|^2 = \left| A\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \right|^2 = |A|^2 = \text{const.}$

→ Teilchen ist überall im Raum mit gleicher Ws zu finden

Wellenpaket ist Überlagerung ebener Wellen

$$\psi(\vec r,t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \underbrace{\varphi(\vec k)}_{\text{Impulsverteilung}}\, e^{i(\vec k\cdot\vec r - \overset{\omega(\vec k)}{\omega} t)}$$

mit $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$ und Impulsverteilung



Betrachte scharfe Impulsverteilung um $\vec k_0$

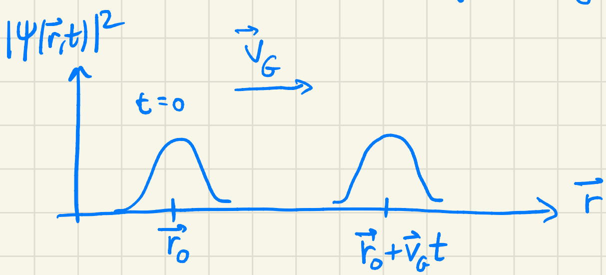
Entwickle $\omega(\vec k)$ um $\vec k_0$: $\omega(\vec k) = \underbrace{\omega(\vec k_0)}_{\frac{\hbar k_0^2}{2m} \equiv \omega_0} + \underbrace{\frac{\partial\omega}{\partial\vec k}\Big|_{\vec k_0}}_{\frac{\hbar\vec k_0}{m} = \vec v_G} \cdot (\vec k - \vec k_0) + \dots$

$-2\omega_0$

$$= -\omega_0 + \vec v_G\cdot\vec k + \dots$$

$$\Rightarrow \psi(\vec r,t) = e^{i\omega_0 t}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\varphi(\vec k)\, e^{i(\vec k\cdot\vec r - \vec v_G\cdot\vec k t)}$$

$$= e^{i\omega_0 t}\,\psi(\vec r - \vec v_G t, 0)$$



Wellenpaket bewegt sich ohne Formänderung
mit Gruppengeschwindigkeit $\vec v_G = \frac{\hbar\vec k_0}{m}$ = zu $\vec k_0$ gehörende Teilchengeschw.

Wellengleichung

für ebene Welle / freies Teilchen gilt

$$\Psi(\vec r, t) = A\, e^{i(\vec k \cdot \vec r - \omega t)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec r, t) = -i\underbrace{\omega}_{= \frac{\hbar \vec k^2}{2m}} \Psi(\vec r, t)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \vec r} \Psi(\vec r, t) = i \vec k\, \Psi(\vec r, t)$$

$$\Delta \Psi(\vec r, t) = -\vec k^2 \Psi(\vec r, t)$$

$\Rightarrow$ Ebene Wellen (und Wellenpakete als Überlagerung von ebenen Wellen)
freie Teilchen

genügen Bewegungsglg. = Wellengleichung

$$\boxed{\underbrace{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}}_{\hbar\omega = E} \Psi(\vec r, t) = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta}_{\frac{\hbar^2}{2m}\vec k^2 = \frac{\vec p^2}{2m}} \Psi(\vec r, t)}$$

Korrespondenz

$\rightarrow$ Schrödingergleichung für freies Teilchen

$\rightarrow$ DGL ist 1. Ordnung in t, d.h. ist festgelegt durch Anfangsbedingung $\Psi(\vec r, t=0)$

$\rightarrow$ Allg. Lösung der Wellenglg. ist Wellenpaket

Notation $\frac{\partial}{\partial \vec r} = \vec \nabla$

Hier: nichtrel. Teilchen $E = \frac{\vec p^2}{2m}$

rel. Teilchen $E^2 = \vec p^2 c^2 + m^2 c^4 \rightarrow$ Klein-Gordon Glg.

masselose Teilchen (Photonen/Licht) $\underbrace{E^2}_{\partial_t^2} = \underbrace{\vec p^2}_{\partial_{\vec r}^2} c^2 \quad (E = |\vec p| c)$

Erwartungswerte

Ws-interpretation von $\Psi(\vec{r},t)$

→ können wir Erwartungswerte für Ort wie folgt

$$\boxed{\langle\vec{r}\rangle(t) = \int d^3r \, |\Psi(\vec{r},t)|^2 \, \vec{r}}$$

Erwartungswert des Ortes

oder $$\langle f(\vec{r})\rangle(t) = \int d^3r \, |\Psi(\vec{r},t)|^2 f(\vec{r})$$

$\langle \cdots \rangle$ gibt Mittelwert bei wiederholter Messung

Welle-Teilchen Dualismus

Ein Teilchen (z.B. e^-) ist weder Welle noch Teilchen, sondern ein physikalisches Objekt (beschrieben durch $\Psi(\vec{r},t)$), welches Wellen- als auch Teilcheneigenschaften zeigen kann. In welcher Weise hängt von exp. Situation ab.

Wie berechnen wir Erwartungswerte des Impulses?

→ Impulsraum

Betrachte Wellenpaket in 1d $\Psi(x,t) = \int \frac{dk}{2\pi} \underbrace{\varphi(k)\, e^{i(kx-\omega t)}}_{\underbrace{\varphi(k)e^{-i\omega(k)t}}_{\tilde{\Psi}(k,t)} e^{ikx}}$

Erinnerung: Fourier Trafo $$\int dx\, |\Psi(x,t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk \, \frac{|\varphi(k)|^2}{2\pi}$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi} |\tilde{\Psi}(k,t)|^2$$

$|\tilde{\Psi}|^2 = |\varphi|^2$

⇒ Ws dichte im Impulsraum (für Wellenzahl k) $= \frac{|\varphi(k)|^2}{2\pi}$

$$\frac{|\varphi(k)|^2}{2\pi}\,dk = \text{Ws Wellenzahl in } k \dots k+dk \text{ zur Zeit } t \text{ zu messen}$$

Wellenpaket in 3d:

allg. $$\psi(\vec r,t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \tilde\psi(\vec k,t)\, e^{i\vec k\cdot\vec r}$$

Fourier Transformierte = Wellenfkt im Impulsraum $\tilde\psi$

Wellenpaket $$\tilde\psi(\vec k,t) = \varphi(\vec k)\, e^{-i\omega(\vec k)t}$$

Impulsoperator und Ortsoperator

Aus Ws dichte im Impulsraum folgt

$$\boxed{\langle \vec p\rangle(t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, |\tilde\psi(\vec k,t)|^2\, \underbrace{\hbar\vec k}_{\vec p}}$$

$$\langle f(\vec p)\rangle(t) = \dots\dots\dots f(\vec p)$$

$\vdots$

$$\boxed{\langle \vec p\rangle(t)} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \tilde\psi^*(\vec k,t)\, \hbar\vec k\, \tilde\psi(\vec k,t)$$

$\vdots$

$$\boxed{= \int d^3r\, \psi^*(\vec r,t)\, \underbrace{\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\vec r}}_{\frac{\hbar}{i}\vec\nabla}\, \psi(\vec r,t)}$$