

2. Materiewellen

Für Lichtquanten (Photonen) haben wir

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad \text{mit} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

und deren Impuls

$$p = \frac{E}{c} = h \frac{\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

↑
Wellenlänge
↑
Wellenzahl
 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

de Broglie (Dissertation 1924, Nobelpreis 1929)

Materieteilchen haben Welleneigenschaften

Teilchen mit Impuls und Energie ($\vec{p}$ und E) sind

ebene Wellen mit Wellenvektor $\vec{k}$ und Frequenz ω zugeordnet

→ de-Broglie Beziehungen $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ und $E = \hbar \omega$

insondere de-Broglie Wellenlänge $p = \frac{h}{\lambda}$

Beispiele: 1) klassische Objekte sind makroskopisch

$$p \sim \sigma \left(\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{1 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}} \sim 10^{-34} \text{ m} \quad \text{nicht messbar}$$

kl. Mechanik: Wellenlänge $\ll$ typische Längen (z.B.)

Atom	$\sim 10^{-10} \text{ m}$
Kern	$\sim 10^{-14} \text{ m}$
Proton	$\sim 10^{-15} \text{ m}$

2) mikroskopische Objekte, z.B. e^- mit $v = 0,1c$

$$p = m_e v = \frac{511 \text{ keV}}{c} \cdot 0,1c \approx 50 \frac{\text{keV}}{c}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi \hbar \cdot c}{p \cdot c} = \frac{6,3 \cdot 197 \text{ MeV} \cdot 10^{-15} \text{ m}}{50 \text{ keV}} \approx 0,25 \cdot 10^{-10} \text{ m} \\ = 0,25 \text{ \AA}$$

$$\hbar c = 197 \text{ MeV fm} \quad \underbrace{\quad}_{10^{-15} \text{ m}}$$

Wellenlänge des e^- $\sim$ Größe eines Atoms

QM: Wenn Wellenlänge $\sim$ typischen Längenskala

Freies Teilchen

z.B. e^- Strahl

de Broglie $E = \hbar \omega$ und $\vec{p} = \hbar \vec{k}$

aber für freie Teilchen auch $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$

$\Rightarrow$ Dispersionsrelation

$$\omega = \frac{\hbar}{2m} k^2$$

vgl. zu $\omega = c \cdot k$ ($v = c/\lambda$) für masselose Photonen / Licht

Wellenfunktion: Materiewellen als ebene Wellen

$$\Psi(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Wellenfronten
stehen $\perp$ auf $\vec{k}$
und bewegen sich in $\vec{k}$ Richtung
als Pkt der Zeit

$= \text{const.}$



physikalisch messbar ist Gruppengeschwindigkeit

$$\vec{v}_G = \frac{d\omega}{d\vec{k}} = \frac{dE}{d\vec{p}}$$

und nicht die Phasengeschwindigkeit $v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p}$

Materiewellen mit nichtrel. Dispersion

$$v_G = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} = v \rightarrow \text{Welle bewegt sich mit kl. Geschwindigkeit}$$

$$\text{aber } v_p = \frac{p}{2m} = \frac{1}{2}v$$

Wellenpaket ist Überlagerung ebener Wellen

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \psi(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

mit $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$ und Impulsverteilung

