11. Spin und Kopplung von Drehimpulsen

Feinstruktur und Hyperfeinstruktur

Spin

Motivation: bisher QM Teilchen hat 3 Freiheitsgrade $(x,y,z) = \vec{r}$

$\Rightarrow$ magnetisches Moment $\leftrightarrow \hat{\vec{\mu}} \sim \hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$

mit $l = 0, 1, 2, \ldots$ mit $(2l+1)$ magnetische Unterzustände

$= 1, 3, 5, \ldots$ ungerade Zahl

Stern-Gerlach Experiment: Aufspaltung eines wasserstoffähnlichen Silberatomstrahl im inhomogenen Magnetfeld

in erwartet wurden $(2l+1)$ Teilstrahlen

Experiment: 2! Teilstrahlen

$2 = 2l+1 \rightarrow$ Drehimpuls $= \frac{1}{2}$

kann kein Bahndrehimpuls sein!

Goudsmit + Uhlenbeck:

Elektronen besitzen inneren Drehimpuls oder Eigendrehimpuls

= **Spin** $\quad S = \frac{1}{2}$, $m_s = \pm\frac{1}{2}$ $\qquad 2S+1 = 2$

Spinoperator $\hat{\vec{S}}$ gehorcht Drehimpulsalgebra (aber lässt sich nicht mit $\vec{r} \times \vec{p} \ldots$ darstellen)

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk}\, \hat{S}_k \rightarrow \boxed{|s\ m_s\rangle}$$

siehe Kapitel 8

$\boxed{s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots}$

$\boxed{m_s = \underbrace{-s, -s+1, \ldots, s-1, s}_{2s+1}}$

2 Arten von Elementarteilchen:

Fermionen $\rightarrow$ halbzahligen Spin, z.B. $e^{\pm}$, Muon, Quarks, ...

Bosonen $\rightarrow$ ganzzahligen Spin, z.B Photon $\underset{s=1}{\gamma}$, ...

$\hookrightarrow$ QM Teilchen haben $\underset{\vec{r}}{3 \text{ Freiheitsgrade}}$ + $\underset{m_s}{\text{Spin}}$ und Eigenschaften m, Q, s, Masse, Ladung

<u>Hilbertraum eines $s=\frac{1}{2}$ Teilchen</u> (Spinraum): $\mathcal{H}_s$

ist $2s+1$ dimensional

wird aufgespannt durch $|s=\frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2}\rangle = |\uparrow\rangle$

$|s=\frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle = |\downarrow\rangle$

Darstellung als 2-dim. Vektor $\chi_\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\chi_\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Allg. Spinzustand $\rightarrow$ Spinor $\chi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

mit Normierung $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

Alle Spinoperatoren lassen sich als 2x2 Matrizen darstellen

$$\Rightarrow \quad \hat{S}_z = \begin{pmatrix} \langle\uparrow|\underbrace{\hat{S}_z|\uparrow\rangle}_{\hbar m_s} & \langle\uparrow|\hat{S}_z|\downarrow\rangle \\ \langle\downarrow|\hat{S}_z|\uparrow\rangle & \langle\downarrow|\hat{S}_z|\downarrow\rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\sigma_z}$$

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2}\left(\hat{S}_+ + \hat{S}_-\right) \quad \text{Leiterops.}$$

$$\hat{S}_\pm |s\, m_s\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)}\; |s\; m_s \pm 1\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \hat{S}_x = \begin{pmatrix} \langle\uparrow|\frac{1}{2}(\underbrace{\hat{S}_+}_{0} + \underbrace{\hat{S}_-)|\uparrow\rangle}_{\ldots|\downarrow\rangle} & \langle\uparrow|\frac{1}{2}(\underbrace{\hat{S}_+}_{|\uparrow\rangle} + \underbrace{\hat{S}_-)|\downarrow\rangle}_{0} \\ \langle\downarrow|\frac{1}{2}(\hat{S}_+ + \hat{S}_-)|\uparrow\rangle & \langle\downarrow|\frac{1}{2}(\underbrace{\hat{S}_+}_{|\uparrow\rangle} + \underbrace{\hat{S}_-)|\downarrow\rangle}_{0} \end{pmatrix}$$

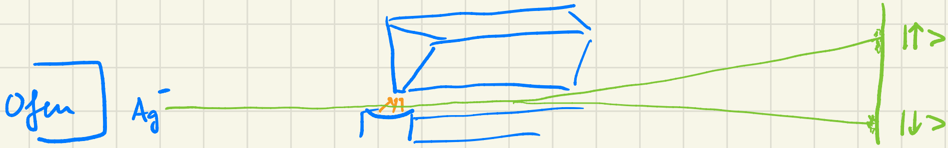
$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_x}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_y}$$

$$\Longrightarrow \quad \hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \qquad \vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

Pauli Matrizen

Pauli Matrizen: hermitsch, spurlos

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{1}}$ sind Basis aller Hermitschen 2x2 Matrizen



$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right)$$

50% Ws $|\uparrow\rangle$
50% Ws $|\downarrow\rangle$