10. Zeitunabhängige Störungstheorie, Zeeman und Stark Effekt, Ritzsches Variationsverfahren

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \underbrace{g\hat{V}}$$

z.B $\hat{H}_{HAtom}$ exakt lösbar

kleiner Wechselwirkungseffekt, schwache Störung
↪ reicht näherungsweise Hinzunahme

Grundzustand

$-13{,}6\,eV$ $\quad\sim 0{,}1\,eV$

mit Störfaktor g, gut für Buchhaltung, $g = 1$, $g\hat{V}$ klein

Wollen möglichst gut exakte Lösung von $\hat{H}$ beschreiben

$$\hat{H}\,|\psi_n\rangle = E_n\,|\psi_n\rangle \qquad (*)$$

basierend auf ungestörten Zuständen

$$\hat{H}_0\,|\psi_n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)}\,|\psi_n^{(0)}\rangle \quad \text{mit } \langle\psi_n^{(0)}|\psi_m^{(0)}\rangle = \delta_{nm}$$

Potenzreihenansatz für exakte E_n und $|\psi_n\rangle$ in g (d.h. $\hat{V}$)

$$E_n = E_n^{(0)} + \delta E_n = E_n^{(0)} + g\,\underset{\hat{V}}{\underset{\widehat{=}}{E_n^{(1)}}} + g^2\,\underset{\hat{V}^2}{\underset{\widehat{=}}{E_n^{(2)}}} + \dots$$

$$|\psi_n\rangle = |\psi_n^{(0)}\rangle + |\delta\psi_n\rangle = |\psi_n^{(0)}\rangle + g\,\underset{\hat{V}}{\underset{\widehat{=}}{|\psi_n^{(1)}\rangle}} + g^2\,\underset{\hat{V}^2}{\underset{\widehat{=}}{|\psi_n^{(2)}\rangle}} + \dots$$

Einsetzen in Schrödingerglg. und Koeff. von $g^{k=0,1,2,\dots}$ vergleichen
$\sim \hat{V}^{k=0,1,2,\dots}$

$$(\hat{H}_0 + g\hat{V})\left(|\psi_n^{(0)}\rangle + g|\psi_n^{(1)}\rangle + \dots\right) =$$

$$= \left(E_n^{(0)} + g\, E_n^{(1)} + \dots\right)\left(|\psi_n^{(0)}\rangle + g\,|\psi_n^{(1)}\rangle + \dots\right)$$

Terme g^0: $\sim \hat{V}^0$ $$\hat{H}_0 |\psi_n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} |\psi_n^{(0)}\rangle \quad \checkmark$$

Terme g^1 $\sim \hat{V}^1$ $$\hat{V}|\psi_n^{(0)}\rangle + \hat{H}_0 |\psi_n^{(1)}\rangle = E_n^{(1)} |\psi_n^{(0)}\rangle + E_n^{(0)}|\psi_n^{(1)}\rangle \quad (1)$$

Terme g^2 $\sim \hat{V}^2$ $$\hat{H}_0 |\psi_n^{(2)}\rangle + \hat{V}|\psi_n^{(1)}\rangle = E_n^{(0)}|\psi_n^{(2)}\rangle + E_n^{(1)}|\psi_n^{(1)}\rangle + E_n^{(2)}|\psi_n^{(0)}\rangle \quad (2)$$

1. Fall: Nichtentartete Störungstheorie

Eigenwerte sind nicht entartet, also einfach z.B. Grundzustand des H Atoms

Näherung 1. Ordnung g^1, Glg. (1), $|\psi_n^{(0)}\rangle \equiv |n\rangle$

Multipliziere Glg. (1) mit $\langle n|$ $\longrightarrow E_n^{(1)}$ (mult. $\langle m| \to |\psi_n^{(1)}\rangle$)

$$\Rightarrow \langle n|\hat{V}|n\rangle + \underbrace{\langle n|\hat{H}_0|\psi_n^{(1)}\rangle}_{E_n^{(0)}\cancel{\langle n|\psi_n^{(1)}\rangle}} = E_n^{(1)} \underbrace{\langle n|n\rangle}_{1} + E_n^{(0)}\cancel{\langle n|\psi_n^{(1)}\rangle}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_n^{(1)} = \langle n|\hat{V}|n\rangle}$$

In 1. Ordnung Störungstheorie wird der nichtent. Eigenwert $E_n^{(0)}$ um den Erwartungswert der Störung $\hat{V}$ im Zustand $|n\rangle$ verschoben

$$\Rightarrow \quad q=1: \qquad E_n = E_n^{(0)} + \langle n|\hat{V}|n\rangle + \mathcal{O}(\hat{V}^2)$$