Kai Hebeler, Jan Hoppe, Lars Zurek
Achim Schwenk
Institut für Kernphysik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Wintersemester 2021/22

Übungsblatt 9

Abgabe der mit (∗) gekennzeichneten Aufgaben: Dienstag, 14. Dezember, Anfang der Vorlesung

7. Dezember 2021

Aufgabe P8: Zwei-Minuten-Fragen

1. Schreiben Sie den $\mathbb{1}$-Operator in Bra-Ket-Notation als Integral/Summe über Eigenzustände des Ortsoperators, des Impulsoperators, und des Hamiltonoperators. Nehmen Sie im letzten Fall ein diskretes Spektrum an.

2. Was ist die spektrale Darstellung eines hermiteschen Operators in Bra-Ket-Notation? Warum heißt diese spektrale Darstellung?

3. Berechnen Sie das Matrixelement $\langle x| \widehat{P} |p\rangle$.

4. Der harmonische Oszillator ist in der Quantenmechanik häufig ein sinnvolles Werkzeug zur Beschreibung von Teilchen in der Nähe von Potentialminima. Warum?

5. Der Operator $\widehat{N} = \widehat{a}^\dagger \widehat{a}$ wird auch Besetzungszahloperator genannt. Warum? Zeigen Sie für den harmonischen Oszillator, dass $[\widehat{N}, \widehat{a}] = -\widehat{a}$ und dass $[\widehat{N}, \widehat{a}^\dagger] = +\widehat{a}^\dagger$.

6. Zeigen Sie am Spektrum des harmonischen Oszillators auf, inwiefern der Grenzfall $\hbar \to 0$ der klassischen Physik entspricht.

Aufgabe H25: Bras und Kets (3 Punkte) (∗)

Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

$$\langle x|\widehat{P}|x'\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\delta(x - x')\,, \tag{1}$$

$$\langle p|\widehat{Q}|\alpha\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\widetilde{\psi}_\alpha(p)\,, \tag{2}$$

$$\langle \beta|\widehat{Q}|\alpha\rangle = i\int\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\,\widetilde{\psi}^*_\beta(p)\frac{\partial}{\partial p}\widetilde{\psi}_\alpha(p)\,, \tag{3}$$

wobei $\widetilde{\psi}_\alpha(p) = \langle p|\alpha\rangle$ die Wellenfunktion im Impulsraum ist.

Aufgabe H26: Double-Well-Potential (7 Punkte) (∗)

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Double-Well-Potential

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{mL^6}\,(x^2 - a^2)^2\,. \tag{4}$$

1. Skizzieren Sie das Potential. Nehmen Sie an, dass $a \gg L$, und dass das Teilchen im rechten Potentialminimum ist. Zeigen Sie, dass die Energie im Grundzustand näherungsweise gegeben ist durch $E \approx \hbar\omega/2$ mit $\omega = \sqrt{8}\frac{\hbar}{mL^2}\frac{a}{L}$.

2. Geben Sie die zugehörige Wellenfunktion $\psi_R(x)$ an. Zeigen Sie, dass diese Wellenfunktion kein Eigenzustand des Hamiltonoperators ist.

3. Sei $\psi_L(x)$ die Wellenfunktion eines Teilchens im linken Potentialminimum, $\psi_L(x) = \psi_R(-x)$. Betrachten Sie die Wellenfunktionen $\psi_\pm = N_\pm(\psi_R \pm \psi_L)$. Zeigen Sie, dass für die Normierung gilt:

$$N_\pm^{-2} = 2(1 \pm e^{-(a/l)^2}) \tag{5}$$

   mit $l = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$.

4. Überzeugen Sie sich, dass auch $a \gg l \equiv \sqrt{\hbar/(m\omega)}$, und berechnen Sie die Energiedifferenz

$$\Delta E = E_+ - E_- \tag{6}$$

   mit

$$E_\pm = \langle\psi_\pm|\widehat{H}|\psi_\pm\rangle \tag{7}$$

   zu führender Ordnung in $a/l \gg 1$.

   Hinweis: Schreiben Sie $\psi_\pm$ in Form von $\psi_{R,L}$ und verwenden Sie die Taylorentwicklung des Potentials um die Minima.

   Sie sollten sehen, dass der symmetrische Zustand eine niedrigere Energie hat als der antisymmetrische, und dass die Energiedifferenz zwischen ψ_+ und ψ_- sehr klein ist.

Aufgabe H27: Klassischer Grenzfall der kohärenten Zustände

In Aufgabe H22 haben Sie die kohärenten Zustände des harmonischen Oszillators, hier mit $\varphi(y,t)$ bezeichnet, kennengelernt. Dabei haben Sie die von der dimensionslosen Anfangsauslenkung y_0 abhängigen Entwicklungskoeffizienten aus

$$\varphi(y,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0)\varphi_n(y) \tag{8}$$

zu

$$c_n(0) = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\frac{y_0}{\sqrt{2}}\right)^n e^{-y_0^2/4} \tag{9}$$

berechnet.

Betrachten Sie von nun an den Fall großer Auslenkungen.

1. Nutzen Sie die (vereinfachte) Stirling-Formel

$$\ln(n!) \approx n\ln(n) - n \tag{10}$$

   und schreiben Sie $c_n(0)$ näherungsweise zu einer kontinuierlichen Funktion $K(n) \approx c_n(0)$ um. Berechnen Sie dann, welcher Energieeigenzustand φ_{n_0} maximal zu einem kohärenten Zuständ beiträgt.

2. Man kann die Verteilung $|K(n)|^2$ durch eine Gauß-Verteilung

   $$G(n) \propto \exp\left(-\frac{(n-n_0)^2}{2(\Delta n)^2}\right) \tag{11}$$

   nähern.

   Zeigen Sie durch geeigneten Vergleich der Taylor-Reihe von $|K(n)|^2$,

   $$|K(n)|^2 = |K(n_0)|^2 + \left[\frac{\partial}{\partial n_0}|K(n_0)|^2\right](n-n_0) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial n_0^2}|K(n_0)|^2\right](n-n_0)^2 + \dots\,, \tag{12}$$

   mit der Taylor-Reihe der Gauß-Verteilung, dass $\frac{\Delta n}{n_0}$ für große Auslenkungen verschwindet.

3. Was bedeutet die Erkenntnis aus Teilaufgabe 2 für die Energie des kohärenten Zustands? Vergleichen Sie die sich ergebende Energie mit der Energie des klassischen harmonischen Oszillators,

   $$E = \frac{m\omega^2}{2}x_0^2\,. \tag{13}$$