Kai Hebeler, Jan Hoppe, Lars Zurek
Achim Schwenk
Institut für Kernphysik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Wintersemester 2021/22

Übungsblatt 8

Abgabe der mit $(*)$ gekennzeichneten Aufgaben: Dienstag, 7. Dezember, Anfang der Vorlesung

30. November 2021

Aufgabe P7: Zwei-Minuten-Fragen

1. Das System befinde sich im Zustand $|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$, wobei $\{|n\rangle\}$ Energieeigenzustände sind. Sie messen die Energie E_i. In welchem Zustand ist das System unmittelbar nach der Messung? Was sind mögliche Messwerte für die Energie wenn die Messung danach wiederholt wird?

2. Eine Messung der Observablen $\widehat{A}$ in einem Zustand $|\psi\rangle$ ergebe a. Danach werde die Observable $\widehat{B}$ und dann wieder $\widehat{A}$ gemessen. Was können Sie über das Ergebnis der zweiten Messung von $\widehat{A}$ aussagen?

3. Zeigen Sie, dass für ein symmetrisches Potential $V(x) = V(-x)$
$$[\widehat{H}, \widehat{\mathcal{P}}] = 0$$
gilt, wobei $\widehat{\mathcal{P}}$ den Paritätsoperator bezeichnet. Was folgt daraus, wenn wir Ansätze für Eigenzustände eines symmetrischen Potentials aufstellen wollen?

4. Welche der folgenden Operatoren entsprechen dem Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators?
   a) $\widehat{H} = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2} m\hbar^2\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2}$
   b) $\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$
   c) $\widehat{H} = \hbar\omega\left(\widehat{a}^\dagger \widehat{a} + \frac{1}{2}\right)$ mit $[\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger] = 1$

5. Was sind die Eigenschaften von $\widehat{a}^\dagger$ bzw. $\widehat{a}$, so dass wir diese als Auf- bzw. Absteigeoperatoren bezeichnet haben?

6. Warum ist das Spektrum des harmonischen Oszillators in der Herleitung mit Leiteroperatoren nach unten begrenzt? Vergleichen Sie das Spektrum mit dem Spektrum des unendlichen Potentialtopfes.

Aufgabe H21: Der harmonische Oszillator (4 Punkte) $(*)$
In dieser Aufgabe behandeln wir eine zur Vorlesung alternative Herleitung der Wellenfunktionen des eindimensionalen harmonischen Oszillators mittels eines Potenzreihenansatzes. Eine Darstellung des Hamilton-Operators des harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$\widehat{H} = \hbar\omega \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}y^2 \right) . \tag{1}$$

Betrachtet man die zeitunabhängige Schrödingergleichung, so ist ein möglicher Ansatz für die Wellenfunktion

$$\psi(y) = u(y)e^{-y^2/2} . \tag{2}$$

1. Leiten Sie eine Differentialgleichung für $u(y)$ her.

2. Für die Lösungen $u_+(y)$ und $u_-(y)$ kann man einen Potenzreihenansatz wählen mit

$$u_+(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}y^{2n} \ , \quad u_-(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}y^{2n-1} \ , \tag{3}$$

   wobei wir gerade und ungerade Funktionen unterscheiden. Begründen Sie, warum diese Darstellung sinnvoll ist.

3. Berechnen Sie daraus eine Rekursionsformel für a_{2n} und a_{2n-1} und ermitteln Sie die möglichen Energieeigenwerte.

Aufgabe H22: Kohärente Zustände (6 Punkte) $(*)$
Betrachten Sie einen Zustand $|\varphi(t)\rangle$, dessen Ortsraumdarstellung zum Zeitpunkt $t = 0$ durch

$$\varphi(y, t = 0) = \pi^{-1/4}e^{-(y-y_0)^2/2} \tag{4}$$

gegeben ist. Solch ein Zustand wird kohärenter Zustand genannt.

1. Stellen Sie $|\varphi(t = 0)\rangle$ in der Eigenbasis des harmonischen Oszillators dar. Zeigen Sie dazu zunächst, dass

$$e^{-(y-y_0/2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{y_0}{2}\right)^n H_n(y)e^{-y^2} \tag{5}$$

   gilt, wobei $H_n(y)$ die Hermiteschen Polynome sind, und berechnen Sie die Entwicklungskoeffizienten $c_n(t = 0)$.

2. In H23 zeigen Sie, dass die Zeitentwicklung des Zustands $|\varphi(t)\rangle$ gegeben ist durch

$$\varphi(y, t) = \pi^{-1/4}e^{-i\omega t/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(y - y_0e^{-i\omega t}\right)^2 - \frac{1}{4}y_0^2\left(1 - e^{-2i\omega t}\right) \right] . \tag{6}$$

   Verwenden Sie diesen Ausdruck, um zu zeigen, dass $|\varphi(t)\rangle$ ein Eigenzustand des Absteigeoperators $\widehat{a}$ ist. Dies ist eine charakteristische Eigenschaft kohärenter Zustände.

3. Zeigen Sie außerdem, dass der Aufsteigeoperator $\widehat{a}^\dagger$ keine rechtsseitigen Eigenzustände besitzen kann, d.h., dass es kein $|\phi\rangle \neq 0$ mit

$$\widehat{a}^\dagger |\phi\rangle \propto |\phi\rangle \tag{7}$$

   gibt.

Hinweis: Setzen Sie allgemein mit

$$|\phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, |n\rangle \tag{8}$$

an, wobei $\{|n\rangle\}$ die Eigenzustände des harmonischen Oszillators bezeichne, und zeigen Sie einen Widerspruch zu Gl. (7).

Aufgabe H23: Zeitentwicklung der kohärenten Zustände

Zeigen Sie, dass die zeitliche Entwicklung des kohärenten Zustands $|\varphi(t)\rangle$ aus H22 gegeben ist durch

$$\varphi(y,t) = \pi^{-1/4} e^{-i\omega t/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(y - y_0 e^{-i\omega t}\right)^2 - \frac{1}{4} y_0^2 \left(1 - e^{-2i\omega t}\right)\right]. \tag{9}$$

Aufgabe H24: Zweidimensionaler harmonischer Oszillator

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m in der x-y-Ebene mit dem Hamiltonoperator

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{p}_x^2 + \widehat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \big(\omega_x^2 \, \widehat{x}^2 + \omega_y^2 \, \widehat{y}^2\big) \, , \tag{10}$$

mit $\widehat{H}_x = \frac{\widehat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_x^2 \widehat{x}^2$ und $\widehat{H}_y = \frac{\widehat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_y^2 \widehat{y}^2$.

1. Zeigen Sie, dass $[\widehat{H}_x, \widehat{H}_y] = [\widehat{H}, \widehat{H}_x] = [\widehat{H}, \widehat{H}_y] = 0$, so dass simultane Eigenzustände von $\widehat{H}_x, \widehat{H}_y$ und $\widehat{H}$ existieren.

2. Machen Sie den Ansatz $\psi_{n_x,n_y}(x,y) = \phi_{n_x}(x)\phi_{n_y}(y)$ für die Eigenfunktionen von $\widehat{H}$. Bestimmen Sie $\phi_{n_x}(x)$ und $\phi_{n_y}(y)$, und die Eigenwerte E_{n_x,n_y} von $\widehat{H}$.

3. Bestimmen Sie die Entartung der Gesamtenergie E im Fall $\omega_x = \omega_y$.