Kai Hebeler, Jan Hoppe, Lars Zurek
Achim Schwenk
Institut für Kernphysik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Wintersemester 2021/22

Übungsblatt 6

Abgabe der mit (∗) markierten Aufgaben: Dienstag, 23. November, Anfang der Vorlesung

16. November 2021

Aufgabe P5: Zwei-Minuten-Fragen

1. Skizzieren Sie den Transmissionskoeffizienten T als Funktion der Energie einer einlaufenden ebenen Welle, die an einer Potentialstufe streut. Diskutieren Sie qualitativ, wie sich T ändert, wenn die Potentialstufe eine endliche Potentialbarriere ist.

2. Wie sähen die Transmissionskoeffizienten aus 1. für klassische Teilchen aus?

3. Bei der Betrachtung verschiedener quantenmechanischer Probleme sind Ihnen ebene Wellen als Lösungen der Schrödingergleichung begegnet. Kommentieren Sie dies unter Berücksichtigung der Definition des Hilbertraums.

4. Berechnen Sie $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\dagger}$.

5. Zeigen Sie, dass $\langle \widehat{A}^{\dagger} \rangle = \langle \widehat{A} \rangle^{*}$. Erwartungswerte sind gegeben durch $\langle \widehat{A} \rangle = (\psi, \widehat{A}\psi)$.

6. Betrachten Sie $\widehat{A} = \exp\left(ic\frac{\partial}{\partial x}\right)$, wobei c eine Konstante ist. Berechnen Sie den adjungierten Operator $\widehat{A}^{\dagger}$. Benutzen Sie hierfür die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion.

Aufgabe H13: Potenzreihenansatz (7 Punkte) (∗)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m in dem Potential $(\kappa > \lambda > 0)$

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0\,, \\ -\frac{\hbar^2\lambda^2}{2m} e^{-\kappa x} & x \geqslant 0\,. \end{cases} \tag{1}$$

1. Betrachten Sie die Schrödinger-Gleichung für einen gebundenen Zustand mit Energie $E = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Zeigen Sie, dass sich die Schrödinger-Gleichung mit der Substitution $z = (\lambda/\kappa)^2 e^{-\kappa x}$ schreiben lässt für $x \geqslant 0$ als
$$\left(z\partial_z + z^2\partial_z^2 + z - \frac{k^2}{\kappa^2}\right)\phi(z) = 0\,. \tag{2}$$

2. Nehmen Sie als Ansatz eine Potenzreihe $\phi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+\rho}$ und zeigen Sie, dass die folgenden Beziehungen gelten:
$$(\rho\kappa)^2 = k^2\,, \quad c_n = -\frac{c_{n-1}}{n^2 + 2n\rho} \quad \text{für} \quad n > 0\,. \tag{3}$$

3. Wie lautet die Quantisierungsbedingung für k (bzw. ρ)?

Aufgabe H14: Ehrenfestsches Theorem (3 Punkte) $(*)$

Der Erwartungswert einer zeitunabhängigen Observablen $\widehat{A}$ in einem stationären Zustand mit $\psi_n(\boldsymbol{r}, t) = e^{-iE_n t/\hbar}\varphi_n(\boldsymbol{r})$ ist auch zeitunabhängig. Das liegt daran, dass die Zeitabhängigkeit von stationären Zuständen eine reine Phase ist, die in dem Erwartungswert $\langle \widehat{A} \rangle$ herausfällt.

1. Zeigen Sie, dass im allgemeinen Fall, falls kein stationärer Zustand vorliegt und falls der Operator $\widehat{A}(t)$ explizit zeitabhängig ist, das Ehrenfestsche Theorem gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \widehat{A}(t)\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [\widehat{H}, \widehat{A}(t)]\rangle + \langle \frac{\partial}{\partial t}\widehat{A}(t)\rangle \,, \tag{4}$$

   wobei $[\widehat{A}, \widehat{B}] \equiv \widehat{A}\widehat{B} - \widehat{B}\widehat{A}$ der Kommutator ist.

2. Was bedeutet das für den Spezialfall zeitunabhängiger Operatoren, die mit dem Hamiltonoperator $\widehat{H}$ vertauschen?

Aufgabe H15: Anwendung des Ehrenfestschen Theorems

Wenden Sie das Ehrenfestsche Theorem aus H14 unter Verwendung von

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + \widehat{V}(\widehat{\boldsymbol{r}}) \tag{5}$$

auf die Operatoren $\widehat{\boldsymbol{r}}$ und $\widehat{\boldsymbol{p}}$ an und zeigen Sie, dass folgende Relation gilt:

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\langle \widehat{\boldsymbol{r}}\rangle = -\langle \boldsymbol{\nabla}\widehat{V}(\widehat{\boldsymbol{r}})\rangle \,. \tag{6}$$

Inwiefern unterscheidet sich diese Gleichung von der analogen klassischen Gleichung?

Hinweis: Verwenden Sie für die Berechnung der auftretenden Kommutatoren die aus der Vorlesung bekannte Impulsoperator-Darstellung $\widehat{p}_i = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial r_i}$ und wenden Sie den Kommutator auf eine Testfunktion $f(\boldsymbol{r})$ an.