Kai Hebeler, Jan Hoppe, Lars Zurek
Achim Schwenk
Institut für Kernphysik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Wintersemester 2021/22

Übungsblatt 5

Abgabe der mit (∗) markierten Aufgaben: Dienstag, 16. November, Anfang der Vorlesung

9. November 2021

Aufgabe P4: Zwei-Minuten-Fragen

1. Welche Impulsverteilung entspricht einer Konstanten im Ortsraum? Veranschaulichen Sie die Relation mittels der Fourier-Transformation einer ebenen Welle.

2. Für welche Potentiale sind die Energieeigenwerte des Hamilton-Operators diskret und für welche kontinuierlich? Warum hängt das von der Energie E des Zustandes ab?

3. Wie kann man die Lösung des 3-dimensionalen unendlichen Potentialtopfs mit
$$V(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 0 \;\;, \; 0 \leqslant x \leqslant L,\; 0 \leqslant y \leqslant L,\; 0 \leqslant z \leqslant L \\ \infty \;,\; \text{sonst} \end{cases}$$
auf die Lösung des 1-dimensionalen zurückführen? Was bedeutet das für die Energieeigenwerte?

4. Geben Sie für den 3-dimensionalen unendlichen Potentialtopf aus P4.3 die ersten 4 Energieeigenwerte und deren Entartung an.

5. Skizzieren Sie die ersten 4 Eigenzustände des 1-dimensionalen endlichen Potentialtopfs aus der Vorlesung für gebundene Zustände.

6. Betrachten Sie eine Potentialstufe. Skizzieren Sie den Reflexionskoeffizienten R als Funktion der Energie der einlaufenden ebenen Welle.

Aufgabe H10: Gebundene Zustände im Doppel-δ-Potential (3 Punkte) (∗)

Betrachten Sie ein Teilchen mit Masse m in dem Potential
$$V(x) = -\frac{\hbar^2 \lambda}{2m}\big[\delta(x-a) + \delta(x+a)\big]\,, \tag{1}$$
für $\lambda > 0$ und $a > 0$. Da das Potential symmetrisch unter Parität ($x \to -x$) ist, machen wir den Ansatz für die Wellenfunktion
$$\psi(x) = \begin{cases} e^{kx} & x < -a\,, \\ A\cosh(kx) & -a \leqslant x \leqslant a\,, \\ e^{-kx} & x > a\,. \end{cases} \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass die Lösung für gebundene Zustände $ka(1 + \tanh(ka)) = \lambda a$ erfüllt. Integrieren sie dafür für $\epsilon > 0$ die zeitunabhängige Schrödingergleichung über ein Intervall um a

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \mathrm{d}x \, (\widehat{H} - E)\psi(x) = 0 \tag{3}$$

und bestimmen Sie die Lösung für $\lambda a = 1$ graphisch. Warum ist es ausreichend nur a und nicht zusätzlich $-a$ zu betrachten?

Aufgabe H11: Streuung am endlichen Potentialtopf (7 Punkte) (∗)

Wir betrachten die Streuung eines Teilchens mit Energie $E > 0$ am endlichen Potentialtopf der Breite L mit

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < -L/2 & \text{(I)} \\ -V_0 & , \ -L/2 \leqslant x \leqslant L/2 & \text{(II)} \\ 0 & , \ x > L/2 & \text{(III)} \ . \end{cases} \tag{4}$$

Der Ansatz für die Wellenfunktion ist gegeben durch

$$\psi_{\mathrm{I}}(x) = e^{ikx} + re^{-ikx} \tag{5}$$

$$\psi_{\mathrm{II}}(x) = n_+ e^{ik'x} + n_- e^{-ik'x} \tag{6}$$

$$\psi_{\mathrm{III}}(x) = \tau e^{ikx} \ . \tag{7}$$

1. Warum ist dieser Ansatz sinnvoll für die Beschreibung des Problems? Wie müssen k und k' gewählt werden, so dass der Ansatz eine Lösung der Schrödinger-Gleichung ist?

2. Bestimmen Sie die Koeffizienten r und τ als Funktion von k und k'.

3. Der Transmissionskoeffizient T und der Reflexionskoeffizient R sind durch $T \equiv \left|\frac{j_T}{j_{\mathrm{ein}}}\right|$ und $R \equiv \left|\frac{j_R}{j_{\mathrm{ein}}}\right|$ gegeben, wobei $j = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^*(\frac{\partial}{\partial x}\psi) - \psi(\frac{\partial}{\partial x}\psi^*))$ die Stromdichte bezeichnet. Zeigen Sie, dass $T + R = 1$ und dass für den Transmissionskoeffizienten

$$T = |\tau|^2 = \left(1 + \frac{V_0^2}{4E(E+V_0)} \sin^2 k'L\right)^{-1} \tag{8}$$

   gilt.

4. Bestimmen Sie die Maxima des Transmissionskoeffizienten $T(E)$. Die zugehörigen Streuzustände mit diesen Energien heißen Resonanzen. Was ist an diesen Zuständen besonders?

Aufgabe H12: α-Zerfall

Die Tunnelwahrscheinlichkeit $T(E)$ für einen allgemeinen Potentialberg kann man über N rechteckige Potentialbarrieren der Breite Δx annähern. Für $\Delta x \to 0$ erhält man für den gesamten Potentialberg die Tunnelwahrscheinlichkeit

$$T(E) \approx e^{-G} = \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\int_a^b dx \sqrt{2m(V(x) - E)}\right] \ , \tag{9}$$

mit dem Gamow-Faktor G, wobei an den klassischen Umkehrpunkten $V(a) = V(b) = E$ gilt.

Der α-Zerfall kann folgendermaßen modelliert werden: Man nimmt an, dass sich ein α-Teilchen im sphärischen Kernpotential

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & , \ 0 \leqslant r < R \\ \dfrac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{1}{r} & , \ r \geqslant R \end{cases} \tag{10}$$

mit $0 < E < V(R)$ bewegt. Dies entspricht einem anziehenden Potential für die Kernkräfte und einem abstoßenden Coulombpotential.

Betrachten Sie das Umherlaufen des α-Teilchens im Atomkern als klassischen Prozess und nehmen Sie an, dass es bei jedem Stoß an den Rand des Atomkerns bei $r = R$ diesen mit der Tunnelwahrscheinlichkeit $T(E)$ verlässt. Zeigen Sie, dass die Lebensdauer τ des Atomkerns der Geiger-Nuttall-Regel folgt, d.h.

$$\ln \tau \propto \frac{\alpha(Z)}{\sqrt{E}} + \beta(Z) \ , \tag{11}$$

wobei $R \approx R_0 Z^{1/3}$ gilt.