Kai Hebeler, Jan Hoppe, Lars Zurek
Achim Schwenk
Institut für Kernphysik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Wintersemester 2021/22

Übungsblatt 3

Abgabe der mit (∗) gekennzeichneten Aufgaben: Dienstag, 2. November, Anfang der Vorlesung

26. Oktober 2021

Aufgabe P2: Zwei-Minuten-Fragen

1. Was würde man erwarten, wenn sich der photoelektrische Effekt klassisch (d.h. ohne Quantenmechanik) erklären ließe?

2. Weshalb hatten wir im Doppelspaltexperiment angenommen, dass die Breite eines Spalts viel kleiner ist als die de-Broglie-Wellenlänge der Teilchen?

3. In welchem Fall ist das in der Vorlesung besprochene Wellenpaket eine Gauß-Funktion im Ortsraum? In welchem Fall ist es eine ebene Welle?

4. Beweisen Sie die in Übungsblatt 1 eingeführte Parseval-Gleichung für die Fourier-Transformation
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, |f(x)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, |\tilde{f}(k)|^2.$$

5. Wie lauten Orts- und Impulsoperator sowohl im Ortsraum als auch im Impulsraum?

Aufgabe H4: Der Paritätsoperator (5 Punkte) (∗)

Der Paritätsoperator $\widehat{\mathcal{P}}$ wirkt auf eine Wellenfunktion $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ wie

$$\widehat{\mathcal{P}}\psi(\boldsymbol{r}, t) = \psi(-\boldsymbol{r}, t)\,. \tag{1}$$

1. Zeigen Sie, dass $\widehat{\mathcal{P}}$ die Eigenwerte ± 1 besitzt.

2. Zeigen Sie, dass die Operatoren
$$\widehat{\Pi}_\pm \equiv \frac{1}{2}\left(1 \pm \widehat{\mathcal{P}}\right) \tag{2}$$
Projektoren sind, d.h. dass $\widehat{\Pi}_\pm^2 = \widehat{\Pi}_\pm$ gilt. Zeigen Sie auch, dass $\widehat{\Pi}_+\widehat{\Pi}_- = \widehat{\Pi}_-\widehat{\Pi}_+ = 0$ (d.h. die Projektoren sind orthogonal), dass $\widehat{\Pi}_+ + \widehat{\Pi}_- = 1$, und dass $\widehat{\Pi}_\pm$ die Wellenfunktion auf gerade Funktionen für „+"(positive Parität) und ungerade Funktionen für „−"(negative Parität) projiziert.

3. Betrachten Sie nun den Paritätsoperator in einer Dimension. Berechnen Sie den Erwartungswert der Projektion auf negative Parität $\widehat{\Pi}_-$, wenn die Wellenfunktion des Zustands durch ein Gaußsches Wellenpaket,

$$\psi(x) = \frac{1}{(\pi a^2)^{1/4}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2\right] \tag{3}$$

gegeben ist. Das Resultat gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, eine negative Parität des Zustands zu messen.

Hinweis: Für $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) = \sqrt{\pi a^2}\,. \tag{4}$$

Aufgabe H5: Superposition stationärer Zustände (5 Punkte) (∗)

Betrachten Sie ein System, das sich in einer Überlagerung stationärer Zustände befindet, d.h. betrachten Sie

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = \sum_i a_i \psi_i(\boldsymbol{r}) \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_i t}{\hbar}\right), \tag{5}$$

wobei die Zustände orthonormiert seien. Es gelte also

$$\int \mathrm{d}^3r\, \psi_i^*(\boldsymbol{r})\psi_j(\boldsymbol{r}) = \delta_{ij}\,. \tag{6}$$

Für die Besetzungszahlen $a_i \in \mathbb{R}$ gilt $\sum_i a_i^2 = 1$.

Anmerkung: Zur Bearbeitung dieser Aufgabe muss die zeitunabhängige Schrödingergleichung verwendet werden. Diese wird voraussichtlich am Donnerstag, den 28.10., in der Vorlesung behandelt.

1. Der Erwartungswert des Hamiltonoperators berechnet sich nach

$$E = \langle \widehat{H} \rangle = \int \mathrm{d}^3r\, \psi^*(\boldsymbol{r},t)\widehat{H}\psi(\boldsymbol{r},t)\,. \tag{7}$$

Zeigen Sie, dass

$$\langle \widehat{H} \rangle = \sum_i a_i^2 E_i \tag{8}$$

gilt.

2. Berechnen Sie die Varianz der Energie $(\Delta E)^2 = \langle \widehat{H}^2 \rangle - E^2$. Zeigen Sie dann für den Fall gleichbesetzter Zustände verschiedener Energien,

$$a_i = \begin{cases} a & 1 \leqslant i \leqslant N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \tag{9}$$

dass ΔE von Null verschieden ist.

Aufgabe H6: Weshalb die Wellenfunktion stetig sein muss

Betrachten Sie die Wellenfunktion

$$\psi(x) = \begin{cases} N & -\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{10}$$

in einer Dimension. Zunächst sieht diese physikalisch aus: Sie ist normierbar, die Ortsunsicherheit Δx ist endlich, die Fourier-Transformierte existiert. Andererseits zeigt sie Unstetigkeiten bei $x = \pm a/2$, wodurch die Anwendung des Impulsoperators im Ortsraum $\widehat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ zu Divergenzen führt.

1. Bestimmen Sie die Normierungskonstante N sowie die Ortsunsicherheit Δx.

2. Bestimmen Sie $\langle \widehat{p} \rangle$ und $\langle \widehat{p}^2 \rangle$ mittels Fourier-Transformation. Ihr Ergebnis für $\langle \widehat{p}^2 \rangle$ wird divergieren! Wie muss sich die Fourier-Transformierte $\tilde{\psi}(k)$ für große k verhalten, damit $\langle \widehat{p}^2 \rangle$ endlich bleibt?

3. Was ist die physikalische Interpretation dieser Divergenz?