Kai Hebeler, Jan Hoppe, Lars Zurek
Achim Schwenk
Institut für Kernphysik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Wintersemester 2021/22

Übungsblatt 2

Abgabe der mit (∗) gekennzeichneten Aufgaben: Dienstag, 26. Oktober, Anfang der Vorlesung

19. Oktober 2021

Aufgabe H1: Doppelspalt-Experiment (3 Punkte) (∗)

1. Wie groß ist der Abstand Δ zweier benachbarter Maxima des Interferenzbildes auf einem Schirm mit Abstand D hinter dem Doppelspalt? Der Abstand zwischen beiden Spalten ist d. Nehmen Sie an, dass die Breite eines Spaltes viel kleiner ist als die de-Broglie-Wellenlänge der Elektronen.

2. Bestimmen Sie den Abstand zweier Maxima auf einem $L = 1.95$ m entfernten Schirm für ein Experiment mit Helium-Atomen der Geschwindigkeit 2.2 km/s. Der Abstand der beiden Spalten beträgt $d = 8\,\mu$m. Das Interferenzbild auf dem Schirm ist in Abb. 1 gezeigt.

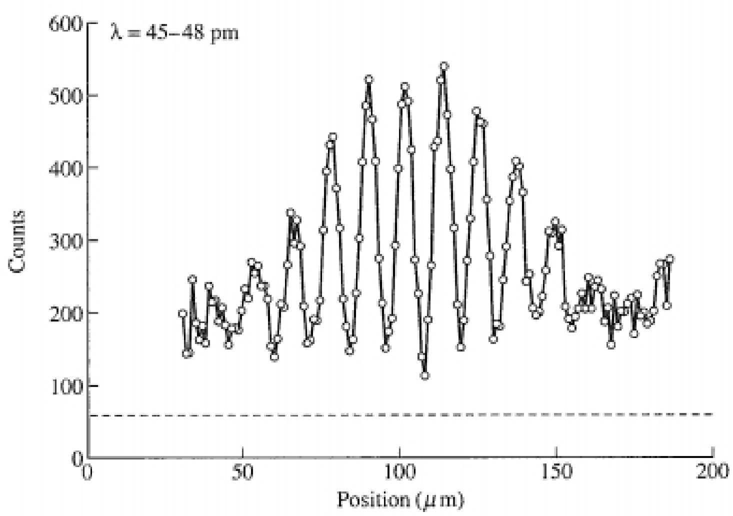

Abbildung 1: Detektierte Helium-Atome als Funktion der Position z auf dem Schirm.
Quelle: Ch. Kurtsiefer, T. Pfau und T. Mlynek. Siehe auch *Nature* **386**, 150 (1997).

Aufgabe H2: Gaußsches Wellenpaket (7 Punkte) $(*)$

Die Form eines Wellenpakets ist nicht konstant unter zeitlicher Entwicklung. In dieser Übung wollen wir das Zerfließen des Gaußschen Wellenpakets

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\, \varphi(k)\, e^{i\left(kx - \frac{\hbar}{2m}k^2 t\right)} \tag{1}$$

mit einer gaußförmigen Impulsverteilung

$$\varphi(k) = A e^{-(k-k_0)^2 d^2} \tag{2}$$

in einer Dimension betrachten.

1. Bestimmen Sie die zeitliche Entwicklung des Wellenpakets $\psi(x,t)$ und zeigen Sie, dass sich

$$|\psi(x,t)|^2 = \psi(x,t)\psi^*(x,t) = \frac{|A|^2}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{d^4 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2}}} \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{\hbar k_0}{m} t\right)^2}{2d^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{2m^2 d^2}}\right) \tag{3}$$

   für das Betragsquadrat ergibt. Erklären Sie qualitativ wie sich die Form des Wellenpakets $|\psi(x,t)|^2$ zeitlich ändert.

2. Eine Gauß-Verteilung der Form $\exp\left(-\frac{(z-z_0)^2}{2(\Delta z)^2}\right)$ hat den Peak bei z_0 und die Breite Δz. Bestimmen Sie Δx und Δp aus $|\psi(x,t)|^2$ zur Zeit $t = 0\,\mathrm{s}$ und zeigen Sie, dass die Unschärferelation

$$(\Delta x)(\Delta p) \geqslant \frac{\hbar}{2} \tag{4}$$

   erfüllt ist. Die Impulsunschärfe Δp kann dem Betragsquadrat der Fouriertransformation $\tilde{\psi}(k, t = 0) = \varphi(k)$ entnommen werden.

Aufgabe H3: Wahrscheinlichkeitserhaltung und -stromdichte

Immer wenn man eine erhaltene Größe hat, z.B. die Ladung in der Elektrodynamik oder die Masse in der Kontinuumsmechanik, gilt für diese eine Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0\,, \tag{5}$$

mit einer geeigneten Stromdichte $\boldsymbol{j}$. Diese Gleichung besagt, dass sich auf Grund der Erhaltung der betrachteten Größe (Ladung, Masse) die Dichte dieser Größe an einer Stelle $\boldsymbol{r}$ nur dadurch ändern kann, dass ein Strom dieser Größe von der Stelle $\boldsymbol{r}$ weg oder darauf zu fließt. Wir wollen zeigen, dass das Betragsquadrat der Wellenfunktion selbst eine solche Größe ist.

1. Betrachten Sie dazu $\rho = \psi^*(\boldsymbol{r},t)\psi(\boldsymbol{r},t)$ und berechnen Sie die entsprechende Stromdichte $\boldsymbol{j}$.

2. Zeigen Sie ausgehend von der Kontinuitätsgleichung, dass die Norm der Wellenfunktion erhalten ist, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \mathrm{d}^3 r\, \psi(\boldsymbol{r},t)\psi^*(\boldsymbol{r},t) = 0\,. \tag{6}$$

   Nutzen sie den Gaußschen Integralsatz und nehmen Sie an, dass die Wellenfunktion im unendlichen verschwindet.