Kai Hebeler, Jan Hoppe, Lars Zurek
Achim Schwenk
Institut für Kernphysik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Wintersemester 2021/22

Übungsblatt 16

15. Februar 2022

Aufgabe P15: Zwei-Minuten-Fragen

1. Der Hamiltonoperator eines Teilchens mit Spin $\widehat{\mathbf{S}}$ kommutiere mit

   (a) $\widehat{\mathbf{S}}^2, \widehat{\mathbf{L}}^2, \widehat{\mathbf{J}}^2$ und $\widehat{J}_z$,

   (b) $\widehat{\mathbf{S}}^2, \widehat{\mathbf{L}}^2, \widehat{S}_z$ und $\widehat{L}_z$.

   Welche Basis wählen Sie jeweils, um das Problem zu lösen, und warum?

2. Drei $S = 1/2$ Spins werden gekoppelt. Was sind die möglichen Werte für den Gesamtspin (d.h. die Summe der drei Spins), und wieviele Zustände mit Gesamtspin S_{tot} kommen vor? Als Check Ihrer Rechnung, berechnen Sie die Dimension des Spinhilbertraums.

3. Was bezeichnet man als Feinstrukturaufspaltung? Was sind die Quantenzahlen der vier niedrigsten Energieniveaus im Wasserstoffatom?

4. Für das Wasserstoffatom mit Spin in einem Magnetfeld entkoppeln für starkes Magnetfeld der Spin und Bahndrehimpuls (siehe Vorlesung). Dies wird nach den Entdeckern als Paschen-Back-Effekt bezeichnet. Wie stark muss dafür das Magnetfeld sein?

Aufgabe H46: Kopplung zweier Drehimpulse

Koppeln Sie zwei Drehimpulse $\widehat{\mathbf{L}}_1, \widehat{\mathbf{L}}_2$ mit Quantenzahlen $l_1 = l_2 = 1$, und schreiben Sie die gekoppelten Zustände $|(l_1 l_2) J J_z\rangle$ zum Gesamtdrehimpuls $\widehat{\mathbf{J}} = \widehat{\mathbf{L}}_1 + \widehat{\mathbf{L}}_2$ als Summe über die ungekoppelten Zustände $|l_1 m_1\rangle |l_2 m_2\rangle$.

Hinweis: Vergleichen Sie Ihr Ergebnis nach der Berechnung mit Werten in einer Tabelle von Clebsch-Gordan-Koeffizienten. Eine Zusammenstellung dieser Koeffizienten ist z. B. in P.A. Zyla et al. (Particle Data Group): Review of Particle Physics, Prog. Theor. Exp. Phys. 2020, 083C01 (2020) oder unter `https://pdg.lbl.gov/2020/reviews/rpp2020-rev-clebsch-gordan-coefs.pdf` zu finden.

Aufgabe H47: Positronium im Magnetfeld

Positronium ist ein exotisches Atom, das aus einem Elektron e^- und seinem Antiteilchen, dem Positron e^+ besteht. Der spinabhängige Teil des Hamiltonoperators von Positronium im Magnetfeld B ist gegeben durch

$$\widehat{H} = A\,\boldsymbol{\sigma}_e \cdot \boldsymbol{\sigma}_p + \mu_B B\,(\sigma_{e,z} - \sigma_{p,z})\,, \tag{1}$$

wobei A eine Konstante ist, und $\boldsymbol{\sigma}_e$ und $\boldsymbol{\sigma}_p$ sind die Pauli-Matrizen des Elektron- und Positron-Spins.

1. Für $B = 0$ ist der Spin-Singulett-Zustand um 8.4×10^{-4} eV unterhalb des Spin-Triplett-Zustands. Bestimmen Sie den Wert von A. Handelt es sich dabei um die Feinstrukturaufspaltung oder die Hyperfeinstrukturaufspaltung?

2. Bestimmen Sie die Abhängigkeit der vier Zustände als Funktion des Magnetfelds für ein schwaches Magnetfeld in erster Ordnung Störungstheorie, für ein starkes Magnetfeld, wobei Sie nur den zweiten Term des Hamiltonoperators betrachten, und für ein allgemeines Magnetfeld durch Diagonalisierung.