Kai Hebeler, Jan Hoppe, Lars Zurek
Achim Schwenk
Institut für Kernphysik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Wintersemester 2021/22

Übungsblatt 15

Abgabe der mit (∗) gekennzeichneten Aufgaben: Dienstag, 15. Februar, Anfang der Vorlesung

8. Februar 2022

Aufgabe P14: Zwei-Minuten-Fragen

1. Die Auswahlregeln für Übergänge im Wasserstoffatom sind $\Delta l = \pm 1$ und $\Delta m = 0, \pm 1$. Wie viele Spektrallinien sieht man für den Übergang vom ersten angeregten Zustand in den Grundzustand für das Wasserstoffatom in einem homogenen Magnetfeld bzw. einem schwachen homogenen elektrischen Feld?

2. Welchen Wert muss das externe Magnetfeld B annehmen, damit die Aufspaltung des ersten angeregten Zustands im Wasserstoffatom 0,1 eV beträgt? Vergleichen Sie die Stärke des Feldes mit der des Erdmagnetfeldes $B_{\text{Erde}} \approx 50\ \mu$T.

3. Skizzieren Sie, wie Sie die Grundzustandsenergie des Wasserstoffatoms mit einer Variationsrechnung bestimmen würden. Wie würden Sie den Ansatz für die Wellenfunktion und Variationsparameter wählen?

4. Welche Werte kann der Spin S eines Teilchens annehmen? Können Spinoperatoren als $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ dargestellt werden?

5. In der Vorlesung haben wir die Darstellung des Spin-Operators für $S = 1/2$ durch die Pauli-Matrizen $\widehat{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ ausgedrückt. Beschreiben Sie, wie sich diese Darstellung für $S = 1$ ändert und stellen Sie speziell den Operator S_z in der Basis dar.

6. Nennen Sie drei Eigenschaften der Pauli-Matrizen.

   Hinweis: Weitere hilfreiche Relationen für die Pauli-Matrizen:
   - Kommutator: $[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\varepsilon_{jkl}\sigma_l$ (Summation von l über x, y, z).
   - Antikommutator: $\{\sigma_j, \sigma_k\} \equiv \sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j = 2\delta_{jk}\mathbb{1}$.
   - Daraus ergibt sich für das Produkt von Pauli-Matrizen: $\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk}\mathbb{1} + i\varepsilon_{jkl}\sigma_l$.

Aufgabe H43: Variationsrechnung für das Heliumatom (∗) (5 Punkte)

Betrachten Sie das Heliumatom mit dem Hamiltonoperator (für $m_e \ll m_p$)

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{\boldsymbol{p}}_1^2}{2m_e} + \frac{\widehat{\boldsymbol{p}}_2^2}{2m_e} - \frac{2\alpha\hbar c}{\widehat{r}_1} - \frac{2\alpha\hbar c}{\widehat{r}_2} + \frac{\alpha\hbar c}{|\widehat{\mathbf{r}}_1 - \widehat{\mathbf{r}}_2|} \,. \tag{1}$$

Machen Sie den Ansatz (Produkt zweier Wasserstoffatome)

$$\psi_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r_2}) = \frac{A^3}{\pi r_0^3}\, e^{-A(r_1+r_2)/r_0} \tag{2}$$

für die Grundzustandswellenfunktion und bestimmen Sie die Grundzustandsenergie durch Variationsrechnung mit dem Parameter A. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der exakten Energie $E_{\text{exakt}} = -2.904\,\alpha^2 m_e c^2$.

Hinweis: Verwenden Sie sphärische Koordinaten mit dem Winkel θ zwischen $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ für das Integral mit $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r_2}|^{-1}$.

Aufgabe H44: Störungstheorie für Elektronenspin im Magnetfeld (∗) (5 Punkte)

Betrachten Sie den Hamiltonoperator für ein Spin-1/2-Teilchen in einem magnetischen Feld entlang der z-Achse und einer kleinen Störung entlang der x-Achse.

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \lambda \widehat{H}' \,, \tag{3}$$

wobei

$$\widehat{H}_0 = -\mu_B B g \frac{\widehat{S}_z}{\hbar} \approx -\mu_B B \sigma_z \,, \tag{4}$$

$$\widehat{H}' = -\mu_B B g \frac{\widehat{S}_x}{\hbar} \approx -\mu_B B \sigma_x \,. \tag{5}$$

1. Finden Sie die Energieeigenwerte und die zugehörigen Eigenzustände für H_0.
2. Berechnen Sie die Energiekorrekturen in erster Ordnung Störungstheorie.
3. Berechnen Sie die Energiekorrekturen in zweiter Ordnung.
4. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenzustände von H exakt. Vergleichen Sie diese Resultate mit Ihrer Störungsrechnung der vorherigen Aufgabe.

Aufgabe H45: Spin-Bahn-Wechselwirkung

Betrachten Sie den Hamiltonoperator

$$\widehat{H} = \alpha\, \widehat{\mathbf{L}} \cdot \widehat{\mathbf{S}} \,, \tag{6}$$

mit Bahndrehimpuls $\widehat{\mathbf{L}}$, Spin $\widehat{\mathbf{S}}$ und zugehörigen Quantenzahlen l und S.

1. Berechnen Sie $\widehat{\mathbf{L}} \cdot \widehat{\mathbf{S}}\, |(lS)JJ_z\rangle$.
2. Nehmen Sie an, dass $l \geqslant S$, und berechnen Sie das Spektrum von $\widehat{H}$.
3. Was ist die Grundzustandsenergie für $\alpha > 0$ und für $\alpha < 0$?
4. Berechnen Sie $\widehat{\mathbf{L}} \cdot \widehat{\mathbf{S}}\, |lm\rangle |Sm_s\rangle$.