

Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Wintersemester 2021/22

Übungsblatt 14

Abgabe der mit (*) gekennzeichneten Aufgaben: Dienstag, 8. Februar, Anfang der Vorlesung

1. Februar 2022

Aufgabe P13: Zwei-Minuten-Fragen

1. Welche Eigenschaften besitzen die Wellenfunktionen von gebundenen im Vergleich zu nicht gebundenen Zuständen? Geben Sie ein Beispiel für einen nicht gebundenen Zustand an.
2. Wie unterscheiden sich die Korrekturen zur Energie in erster Ordnung Störungstheorie für einen nichtentarteten und einen entarteten Zustand? Und wie in zweiter Ordnung?
3. Was ist eine notwendige Bedingung, dass die Störungstheorie konvergiert? Ist es möglich, dass ein N -fach entarteter Zustand durch eine Störung mit einer gewissen Stärke $(N + 1)$ -fach entartet wird?
4. Welche Aussage lässt sich über die Zweite-Ordnungs-Korrektur zur Grundzustandsenergie machen? Gilt dies auch für einen entarteten Grundzustand?
5. Welche Kriterien bestimmen die Aufspaltung des Hamiltonoperators $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ in den ungestörten Anteil \hat{H}_0 und in den Störungsterm \hat{V} ? Ist diese Aufspaltung eindeutig?

Aufgabe H40: Hellmann-Feynman-Theorem (*) (4 Punkte)

Betrachten Sie einen Hamiltonoperator $\hat{H}(\lambda)$, der von einem Parameter λ abhängt, mit Eigenzuständen

$$\hat{H}(\lambda)|\psi(\lambda)\rangle = E(\lambda)|\psi(\lambda)\rangle \quad \text{und} \quad \langle\psi(\lambda)|\psi(\lambda)\rangle = 1. \quad (1)$$

1. Zeigen Sie, dass das Hellmann-Feynman-Theorem gilt:

$$\frac{\partial E(\lambda)}{\partial \lambda} = \langle\psi(\lambda)|\frac{\partial \hat{H}(\lambda)}{\partial \lambda}|\psi(\lambda)\rangle. \quad (2)$$

2. Verwenden Sie das Ergebnis aus 1., um die Energiekorrektur in erster Ordnung Störungstheorie herzuleiten.

HINWEIS: Nutzen Sie $\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda\hat{V}$.

Aufgabe H41: Störungstheorie für den harmonischen Oszillator (*) (6 Punkte)

Betrachten Sie den folgenden Hamiltonoperator eines Teilchens der Masse m in einer Dimension in einem Oszillatorpotential plus zusätzlichem Störpotential V :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad (3)$$

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2, \quad (4)$$

$$\hat{V} = \varepsilon(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}). \quad (5)$$

1. Zeigen Sie, dass sich das Störpotential mithilfe der bekannten Leiteroperatoren schreiben lässt als

$$\hat{V} = \frac{\varepsilon\hbar}{i} (\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2}). \quad (6)$$

2. Berechnen Sie die Eigenwerte von \hat{H} in erster und zweiter Ordnung Störungstheorie.
3. Bestimmen Sie die Korrektur zu den Eigenzuständen von \hat{H} in erster Ordnung Störungstheorie basierend auf den ungestörten Zuständen.

Aufgabe H42: Atomkern-Korrektur zum Wasserstoffatom

Wir untersuchen die Korrektur zum Energiespektrum wasserstoffähnlicher Atome aufgrund der endlichen Größe des Atomkerns. (In der Vorlesung hatten wir angenommen, dass der Atomkern wie das Elektron punktförmig ist.) Wir beschreiben den Atomkern als eine homogen geladene Kugel mit Radius $R \approx 1.2A^{1/3}$ fm (A ist die Massenzahl). Das Potential wird damit

$$V_N(r) = -Z\alpha\hbar c \begin{cases} \frac{3R^2 - r^2}{2R^3} & r < R, \\ \frac{1}{r} & r > R. \end{cases} \quad (7)$$

Dieses Potential unterscheidet sich von dem Coulombpotential $V_C(r) = -\frac{Z\alpha\hbar c}{r}$ nur für $r < R$. Betrachten Sie die Differenz $\hat{V} = \hat{V}_N - \hat{V}_C$ als Störung, und berechnen Sie die Korrektur erster Ordnung zu dem Energiespektrum wasserstoffähnlicher Atome.

HINWEIS: Da $R \ll r_0$, wobei r_0 der Bohr-Radius ist, werden nur S -Wellen-Zustände beeinflusst und die Radialwellenfunktion $R_{n,l=0}$ kann für diese Abstände mit dem Wert am Ursprung genähert werden, $R_{n,l=0}^2 = 4Z^2/(r_0^3 n^3)$.