Kai Hebeler, Jan Hoppe, Lars Zurek
Achim Schwenk
Institut für Kernphysik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Wintersemester 2021/22

Übungsblatt 13

Abgabe der mit (∗) gekennzeichneten Aufgaben: Dienstag, 1. Februar, Anfang der Vorlesung

25. Januar 2022

Aufgabe P12: Zwei-Minuten-Fragen

1. Die allgemeinen Lösungen $R_{E,l}(r)$ der radialen Schrödingergleichung des freien Teilchens sind sphärische Bessel- und Neumannfunktionen. Diese können als

$$j_l(\rho) = (-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\right)^l \frac{\sin\rho}{\rho}\,, \tag{1}$$

$$n_l(\rho) = -(-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\right)^l \frac{\cos\rho}{\rho} \tag{2}$$

   dargestellt werden, mit $\rho = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\,r$. Skizzieren Sie die Funktionen für $l = 0$ und nennen Sie qualitative Unterschiede zwischen den beiden Funktionenklassen. Warum sind nicht immer beide Funktionen physikalisch sinnvolle Lösungen?

2. In der Vorlesung wurde die Lösung des sphärischen harmonischen Oszillators in kartesischen Koordinaten und in Kugelkoordinaten diskutiert. Geben Sie jeweils das Spektrum, die Bedeutung der relevanten Quantenzahlen und die Entartung der ersten Zustände an. Welche Werte können die Quantenzahlen annehmen?

3. Warum faktorisiert die Wellenfunktion des Wasserstoffatoms in eine ebene Welle für die Schwerpunktsbewegung und die Wellenfunktion der Proton-Elektron-Relativbewegung?

4. Was ist die Entartung des Grundzustands und der ersten beiden angeregten Zustände des Wasserstoffatoms?

5. Haben die Eigenfunktionen zu einer bestimmten Energie für das Wasserstoffatom eine bestimmte Parität? Wie ist das für den sphärischen harmonischen Oszillator?

6. In der Vorlesung wurde die radiale Wellenfunktion des Wasserstoffatoms durch einen Potenzreihenansatz bestimmt. Warum reduziert sich der Potenzreihenansatz für $\tilde{u}_{E,l}(\rho)$ in eine endliche Reihe?

Aufgabe H37: Das Wasserstoffatom $(*)$ **(6 Punkte)**
Betrachten Sie ein gebundenes Elektron in einem von einem Wasserstoffkern erzeugten Coulomb-Potential mit maximaler Drehimpulsquantenzahl $l = n - 1$.

1. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle r \rangle$ und $\langle r^2 \rangle$.

   Hinweis: Die Integraldarstellung der Gammafunktion könnte für die Berechnung hilfreich sein:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-t} dt \,. \tag{3}$$

2. Zeigen Sie mit Hilfe dieser Ergebnisse folgende Grenzwerte für große n und l,

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} \to r_0 n^2 \,, \tag{4}$$
$$\frac{\Delta r}{\langle r \rangle} \to 0 \,, \tag{5}$$
$$E_n \to -\frac{1}{2} \frac{e^2}{n^2 r_0} \,. \tag{6}$$

   Das bedeutet, dass das Elektron näherungsweise auf einer Oberfläche mit Radius $n^2 r_0$ lokalisiert ist, wobei r_0 der Bohr-Radius ist, und dass die Energie einem klassischen Elektron auf einer kreisförmigen Umlaufbahn mit gleichem Radius entspricht.

3. Betrachten Sie den Grundzustand des Wasserstoffatoms. Bei welchem Radius ist die Wahrscheinlichkeit am größten, das Elektron zu finden?

Aufgabe H38: Relativistische Korrekturen zum Wasserstoffatom $(*)$ **(4 Punkte)**
Der relativistische Ausdruck für die kinetische Energie ist

$$T_{\mathrm{rel}} = \sqrt{m^2c^4 + \boldsymbol{p}^2c^2} - mc^2 \approx \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{1}{2mc^2}\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\right)^2 \,. \tag{7}$$

Betrachten Sie $V = -\frac{1}{2mc^2}\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\right)^2$ als Störung, und berechnen Sie die Korrektur zur Grundzustandsenergie wasserstoffähnlicher Atome mit Ladung Z in erster Ordnung. Benutzen Sie

$$H_0 = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{Z\alpha\hbar c}{r} \,, \tag{8}$$
$$V = -\frac{1}{2mc^2}\left(H_0 + \frac{Z\alpha\hbar c}{r}\right)^2 \,, \tag{9}$$

und

$$\langle nlm|r^{-1}|nlm\rangle = \frac{Z}{r_0 n^2} \,, \tag{10}$$
$$\langle nlm|r^{-2}|nlm\rangle = \frac{Z^2}{r_0^2 n^3 (l+1/2)} \,, \tag{11}$$

mit dem Bohr-Radius $r_0 = \hbar/(mc\alpha)$. Wie groß ist die Korrektur für Wasserstoff und wie groß für Blei ($Z = 82$)?

Aufgabe H39: Erwartungswerte und Energien

1. Berechnen Sie $\langle V \rangle$ für den Grundzustand des isotropen dreidimensionalen harmonischen Oszillators und bestimmen Sie die den Erwartungswert der kinetischen Energie $\langle T \rangle$. Berechnen Sie ferner das Verhältnis $\langle T \rangle / \langle V \rangle$. Gehorchen die Ergebnisse dem Virialtheorem, das Sie aus der klassischen Mechanik kennen?

2. Berechnen Sie $\langle V \rangle$ für den Grundzustand des Wasserstoffatoms. Zeigen Sie, dass $E = \langle V \rangle / 2$ und bestimmen Sie die den Erwarungswert der kinetischen Energie $\langle T \rangle$ im Grundzustand. Gehorchen die Ergebnisse dem Virialtheorem, das Sie aus der klassischen Mechanik kennen?