Kai Hebeler, Jan Hoppe, Lars Zurek
Achim Schwenk
Institut für Kernphysik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Wintersemester 2021/22

Übungsblatt 11

Abgabe der mit (∗) gekennzeichneten Aufgaben: Dienstag, 18. Januar, Anfang der Vorlesung

11. Januar 2022

Aufgabe P10: Zwei-Minuten-Fragen

1. Kurze Übung zur Bra-Ket-Notation: Leiten Sie die eindimensionale Schrödinger-Gleichung in Ortsdarstellung aus der Schrödinger-Gleichung in Bra-Ket-Darstellung her. Was ändert sich an der Herleitung in drei Dimensionen?

   Hinweis: Sie können die in H25 hergeleitete Relation

   $$\langle x|\widehat{P}|x'\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x')$$

   und $\langle x|\widehat{V}|x'\rangle = V(x)\delta(x-x')$ verwenden.

2. Was gibt die „magnetische“ Quantenzahl m an und warum trägt sie diesen Namen?

3. Bestimmen Sie alle Matrixelemente der Operatoren $\widehat{L}_x$ und $\widehat{L}_z$ in der $\{|l,m\rangle\}$-Basis für $l = 1/2$.

   Hinweis: Verwenden Sie die Leiteroperatoren für $\widehat{L}_x$.

4. In welchem $|l,m\rangle$-Zustand befindet sich das Teilchen jeweils, wenn seine Wellenfunktion im Ortsraum wie folgt gegeben ist?

   $$\begin{aligned}\psi_1(\boldsymbol{r}) &= (x+iy)f(r)\,,\\ \psi_2(\boldsymbol{r}) &= (x-iy)f(r)\,,\\ \psi_3(\boldsymbol{r}) &= zf(r)\,.\end{aligned}$$

   Hinweis:

   $$Y_1^{\pm1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\phi}\,, \qquad Y_1^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\,.$$

5. Nennen Sie mindestens drei Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta,\phi)$.

Aufgabe H31: Eigenfunktionen der Drehimpulsoperatoren (4.5 Punkte) $(*)$

1. Bestimmen Sie die Normierung N_2^2 der Kugelflächenfunktion $Y_2^2(\theta,\phi) = N_2^2 \sin^2(\theta) e^{2i\phi}$ und konstruieren Sie die Kugelflächenfunktionen $Y_2^1(\theta,\phi)$ und $Y_2^0(\theta,\phi)$ durch Anwendungen von $\widehat{L}_- = -\hbar e^{-i\phi}(\partial_\theta - i\cot(\theta)\partial_\phi)$ auf $Y_2^2(\theta,\phi)$.

2. Zeigen Sie, dass $f(x,y) = (x+iy)^m$ eine Eigenfunktion von $\widehat{L}_z$ ist.

Aufgabe H32: Sphärisch-symmetrisches Potential (5.5 Punkte) $(*)$

Die Wellenfunktion eines Teilchens in einem sphärisch-symmetrischen Potential $V(r)$ ist gegeben durch

$$\psi(\boldsymbol{r}) = (x+y+3z)f(r)\,. \tag{1}$$

1. Ist $\psi(\boldsymbol{r})$ eine Eigenfunktion von $\widehat{\boldsymbol{L}}^2$? Falls ja, was ist der Wert für l? Falls nein, was sind mögliche Werte für l, wenn $\widehat{\boldsymbol{L}}^2$ gemessen wird?

2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, ein Teilchen in den verschiedenen m-Zuständen zu finden.

3. Angenommen, $\psi(\boldsymbol{r})$ sei als Eigenzustand mit Energie E bekannt. Bestimmen Sie $V(r)$.

   Hinweis: Vielleicht ist der Laplace-Operator in der folgenden Schreibweise hilfreich zur Aufstellung der Schrödingergleichung:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\widehat{\boldsymbol{L}}^2}{\hbar^2 r^2}\,.$$

Aufgabe H33: Halbzahlige l-Werte

Nehmen Sie an, dass halbzahlige Werte für die Drehimpulsquantenzahl $l = \frac{1}{2}, \ldots$ erlaubt wären. Aus $\widehat{L}_+ Y_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta,\phi) = 0$ könnten wir dann schließen, dass

$$Y_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta,\phi) \propto e^{i\phi/2}\sqrt{\sin\theta}\,. \tag{2}$$

1. Konstruieren Sie $Y_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}$ durch Anwendung von $\widehat{L}_-$ auf $Y_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$.

2. Konstruieren Sie $Y_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}$ nun mit Hilfe von $\widehat{L}_- Y_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} = 0$. Was schließen Sie aus beiden Teilaufgaben?