Kai Hebeler, Jan Hoppe, Lars Zurek
Achim Schwenk
Institut für Kernphysik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Wintersemester 2021/22

Übungsblatt 10

Abgabe der mit (∗) gekennzeichneten Aufgaben: Dienstag, 11. Januar, Anfang der Vorlesung

14. Dezember 2021

Aufgabe P9: Zwei-Minuten-Fragen

1. Welche Eigenschaften besitzen unitäre Transformationen? Nennen Sie ein Beispiel einer unitären Transformation für einen Basiswechsel.

2. Welche Form hat der Zeitentwicklungsoperator $\widehat{U}$, um Zustände von $t = t_1$ nach $t = t_2$ zu entwickeln?

3. Zeigen Sie, dass $\widehat{U}^\dagger(t)\widehat{U}(t) = \widehat{\mathbb{1}}$. Gilt die Relation $\exp(\widehat{A}+\widehat{B}) = \exp(\widehat{A})\exp(\widehat{B})$ für alle Operatoren?

4. Zeigen Sie mit Hilfe des Zeitentwicklungsoperators, dass die Norm der Wellenfunktion erhalten ist, d.h. $\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 0$.

5. Wie können Sie eine Wellenfunktion im Ortsraum $\psi(x,t)$ durch die Wellenfunktion $\psi(x,t=0)$ mit dem Zeitentwicklungsoperator in Ortsdarstellung schreiben? Was ergibt sich anschaulich für $\psi(x,t=0) = \delta(x-x_0)$? Warum heißt der Zeitentwicklungsoperator in Ortsdarstellung auch Propagator?

6. Wie lauten die Relationen für die Zeitentwicklung von Operatoren und Zuständen im Schrödingerbild, Heisenbergbild und Wechselwirkungsbild? Geben Sie auch die Bewegungsgleichungen der Operatoren in den verschiedenen Bildern für den Fall zeitunabhängiger Wechselwirkungen an.

Aufgabe H28: Neutrino-Oszillationen (6 Punkte) (∗)

In dieser Aufgabe wollen wir ein vereinfachtes Modell für Neutrino-Oszillationen, der Umwandlung verschiedener Neutrino-Sorten ineinander, betrachten. Wir beschränken uns dabei auf zwei Sorten, Elektron- und Myon-Neutrinos, und stellen diese in einem Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ durch

$$|\nu_\mu\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\nu_e\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

dar. Ohne Wechselwirkung sind die Zustände in Gl. (1) Eigenzustände des freien Hamiltonoperators

$$\widehat{H}_0 = \begin{pmatrix} E_\mu & 0 \\ 0 & E_e \end{pmatrix}. \tag{2}$$

1. Wir betrachten eine einfache Wechselwirkung zwischen den Neutrinos, die durch

$$\widehat{H} = \begin{pmatrix} E_\mu & g \\ g & E_e \end{pmatrix} , \tag{3}$$

gegeben ist, wobei $g \in \mathbb{R}$ die Stärke der Wechselwirkung angibt. Bestimmen Sie durch Diagonalisierung die Energien E_j und Eigenzustände $|\nu_j\rangle$ mit $j = 1, 2$ des Hamiltonoperators $\widehat{H}$. Zeigen Sie, dass

$$|\nu_1\rangle = \cos\theta \, |\nu_\mu\rangle + \sin\theta \, |\nu_e\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$|\nu_2\rangle = -\sin\theta \, |\nu_\mu\rangle + \cos\theta \, |\nu_e\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{5}$$

für die Eigenzustände gilt, wobei der Mischungswinkel θ durch

$$\sin(2\theta) = \frac{2g}{E_1 - E_2} \quad \text{bzw.} \quad \cos(2\theta) = \frac{E_\mu - E_e}{E_1 - E_2} \tag{6}$$

gegeben ist. Es genügt, wenn Sie dazu eine der beiden Relationen aus Gl. (6) zeigen.

2. Die Zustände $|\nu_j\rangle$ mit $j = 1, 2$ beschreiben Teilchen mit einer definierten Masse m_j, wobei E_j die relativistische Energie $E_j = \sqrt{(pc)^2 + (m_j c^2)^2}$ der Neutrinos ist. Schreiben sie den Zeitentwicklungsoperator $\widehat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}t}$ und die Zustände aus Gl. (1) in der $\{|\nu_j\rangle\}$-Basis.

3. Wir wollen nun zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Myon-Neutrino betrachten, d.h. $|\psi(t = 0)\rangle = |\nu_\mu\rangle$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, zu einem Zeitpunkt $t > 0$ ein Elektron-Neutrino zu messen, durch

$$p(t) = \sin^2(2\theta) \cdot \sin^2\left(\frac{E_1 - E_2}{2\hbar} t\right) \tag{7}$$

gegeben ist.

4. Was muss erfüllt sein, dass es zu Neutrino-Oszilationen kommen kann? Nehmen sie dazu an, dass die Energien durch $E_j = \sqrt{(pc)^2 + (m_j c^2)^2}$ gegeben sind und dass die Neutrinos ultra-relativistisch sind, d.h. $m_j c^2 \ll pc$.

Aufgabe H29: Kommutatoren mit dem Drehimpulsoperator (4 Punkte) (∗)

Zeigen Sie, dass die Drehimpulsoperatoren folgende Vertauschungsrelationen erfüllen:

1. $[\widehat{r}_j, \widehat{L}_k] = i\hbar \, \epsilon_{jkl} \, \widehat{r}_l$

2. $[\widehat{\boldsymbol{L}}, V(\boldsymbol{r})] = \frac{\hbar}{i} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\nabla} V(\boldsymbol{r})$

3. $[\widehat{\boldsymbol{L}}, V(|\boldsymbol{r}|)] = 0$

4. $[\widehat{p}_j, \widehat{L}_k] = i\hbar \, \epsilon_{jkl} \, \widehat{p}_l$

5. $[\widehat{L}_j, \widehat{\boldsymbol{p}}^2] = 0$ für $j = 1, 2, 3$

Aufgabe H30: Baker-Campbell-Hausdorff-Relation

1. Zeigen Sie, dass für beliebige lineare Operatoren $\widehat{A}$ und $\widehat{B}$ gilt, dass

$$\exp(\widehat{A})\,\widehat{B}\,\exp(-\widehat{A}) = \widehat{B} + [\widehat{A},\widehat{B}] + \frac{1}{2!}[\widehat{A},[\widehat{A},\widehat{B}]] + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[\widehat{A},\widehat{B}]_n\,, \tag{8}$$

   wobei der "Multikommutator" rekursiv definiert ist durch

$$[\widehat{A},\widehat{B}]_0 = \widehat{B} \quad \text{und} \quad [\widehat{A},\widehat{B}]_n = [\widehat{A},[\widehat{A},\widehat{B}]_{n-1}]\,. \tag{9}$$

   Hinweis: Betrachten Sie die Taylor-Reihe von $f(x) = \exp(x\widehat{A})\,\widehat{B}\,\exp(-x\widehat{A})$ und schreiben Sie die Ableitungen mit Hilfe von Kommutatoren.

2. Zeigen Sie mit Hilfe von Gl. (8), dass im Spezialfall $[\widehat{A},[\widehat{A},\widehat{B}]] = [[\widehat{A},\widehat{B}],\widehat{B}] = 0$ die spezielle Baker-Campbell-Hausdorff-Formel,

$$\exp(\widehat{A})\exp(\widehat{B}) = \exp\left(\widehat{A} + \widehat{B} + \frac{1}{2}\left[\widehat{A},\widehat{B}\right]\right), \tag{10}$$

   und der Spezialfall der Zassenhaus-Formel,

$$\exp(\widehat{A}+\widehat{B}) = \exp(\widehat{A})\,\exp(\widehat{B})\,\exp\left(-\frac{1}{2}[\widehat{A},\widehat{B}]\right), \tag{11}$$

   gelten.

   Hinweis: Betrachten Sie die Taylor-Reihe von $g(x) = \exp(x\widehat{A})\exp(x\widehat{B})$ und schreiben Sie die Ableitungen mit Hilfe von Kommutatoren.

Wir wünschen frohe Feiertage und ein gutes neues Jahr!