Diplomarbeit

Farbsupraleitung in Neutronen- und Protoneutronensternen

Verena Werth

September 2004

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Einer der Hauptschwerpunkte der modernen Physik ist die Erforschung des Aufbaus der Materie und der grundlegenden Wechselwirkungen ihrer Bestandteile. In den letzten siebzig Jahren hat man auf diesem Gebiet viele neue Erkenntnisse gewonnen. In der kosmischen Strahlung und bei Experimenten mit Teilchen–Beschleunigern wurden immer neue Teilchen gefunden. 1964 schlugen schließlich Gell–Mann [1] und Zweig[1] [2] unabhängig voneinander Quarks mit Drittel–Ladungen als elementarste Bestandteile der Materie vor.

Nach unserem heutigen Wissensstand wird die Zusammensetzung der Materie durch das Standardmodell der Elementarteilchen beschrieben. Danach besteht unsere Welt aus Quarks, Leptonen und Eichbosonen (Vermittler der Wechselwirkung). Die Quarks unterliegen im Gegensatz zu den Leptonen der starken Wechselwirkung, die durch die Quantenchromodynamik (QCD) beschrieben wird. In unserer natürlichen Umgebung liegen Quarks nur in gebundenen Zuständen (Baryonen und Mesonen) vor. Die bekanntesten Baryonen sind das Proton und das Neutron. Diese beiden auch als Nukleonen bezeichneten Baryonen sind die Bestandteile der Atomkerne.

Uns sind heute sechs Quarksorten (Flavors) bekannt: up (u), down (d), strange (s), charm (c), bottom (b) und top (t). Up– und Down–Quarks sind relativ leicht: ihre nackten Massen m liegen im Bereich von 5 MeV. Strange–Quarks haben eine deutlich höhere Masse ($m_s = 80 - 155\,\mathrm{MeV}$). Da die restlichen Flavors wesentlich schwerer ($m_c = 1 - 1,4\,\mathrm{GeV}$, $m_b = 4 - 4.5\,\mathrm{GeV}$, $m_t = 170 - 185\,\mathrm{GeV}$) sind als die drei zuerst genannten, werden wir bei unseren Überlegungen ausschließlich die drei leichtesten Flavors berücksichtigen.

Es ist nicht nur interessant, woraus Materie besteht, sondern auch wie sie aus ihren Bestandteilen aufgebaut ist und wie dies von den äußeren Bedingun-

[1]Zweig nannte diese Elementarteilchen ursprünglich „Aces“

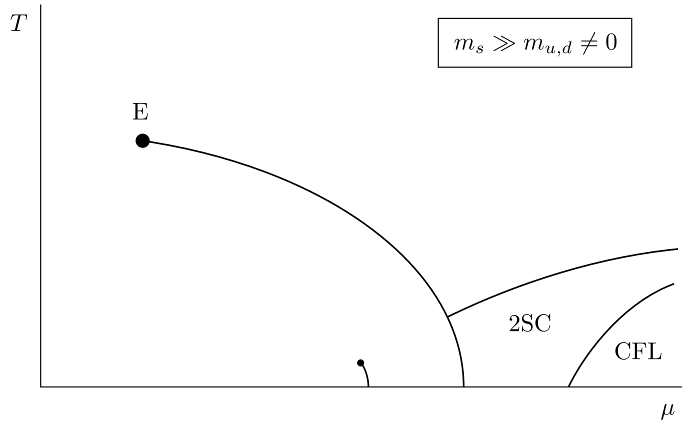

Abbildung 1.1: Schematisches QCD-Phasendiagramm. Entnommen aus [3].

gen abhängt. So wie man für Wasser ein Phasendiagramm zeichnen kann, in dem angegeben ist, unter welchen Bedingungen es fest, flüssig oder gasförmig ist, so kann man auch ein Phasendiagramm für die Quantenchromodynamik skizzieren. Ein solches ist in Abbildung 1.1 dargestellt. Dabei sind die Zustände in Abhängigkeit vom chemischen Potential μ, welches positiv mit der Dichte korreliert ist, und der Temperatur T aufgetragen. Im abgebildeten Phasendiagramm werden nur die drei leichtesten Flavors berücksichtigt. Die anderen Flavors werden als unendlich schwer betrachtet und vernachlässigt. Im linken unteren Abschnitt des Phasendiagramms befindet sich die hadronische Phase. Dort existieren Quarks nur gebunden in Hadronen (Mesonen und Baryonen). Dies ist der Zustand, in dem sich die von uns erfahrbare Materie befindet. Bei sehr hohen Temperaturen (10^{12} Kelvin) liegen die Quarks und Gluonen (Austauschteilchen der starken Wechselwirkung) frei als Quark–Gluon–Plasma vor.

Man geht davon aus, daß Quarks bei sehr hohen Dichten (mehrfache Kernmateriedichte) ebenfalls als freie Teilchen vorliegen. Es wird vermutet, daß Quarks bei hohen Dichten und niedrigen Temperaturen Diquarkpaare bilden. Dabei spricht man in Analogie zur Supraleitung in Metallen, bei der Elektronen Cooper–Paare bilden, von Farbsupraleitung. Dieser Bereich ist in Abbildung 1.1 als 2SC und CFL gekennzeichnet.

Bereits 1975 wurde vermutet, daß bei den hohen Dichten im Innern von Neutronensternen Quarks als freie Teilchen vorliegen könnten [4]. In der gleichen Referenz wird auch schon die Existenz von Farbsupraleitung unter diesen Bedingungen angedeutet. Die Farbsupraleitung geriet jedoch schnell in Vergessenheit und wurde erst Ende der 90er Jahre wiederentdeckt [5, 6].

Seitdem war das Interesse an diesem Zustand der Quarkmaterie groß, und man fand unterschiedliche farbsupraleitende Phasen, abhängig davon, wie groß die Masse der Strange–Quarks ist. Wenn die Strange–Quarks eine große Masse haben, bilden sich nur Paare von Up–Quarks mit Down–Quarks. In diesem Fall spricht man von einem „two–flavor colorsuperconductor“ (2SC). Für leichte Strange–Quarks kann sich eine „color–flavor locked“ (CFL) Phase formieren [7]. Dabei bilden sich ud–, us– und ds–Paare.

In dieser Arbeit werden wir uns mit farbsupraleitender Materie unter Bedingungen beschäftigen, wie wir sie für das Innere von (Proto–)Neutronensternen vermuten. Bei einem Neutronenstern müssen zusätzliche Randbedingungen berücksichtigt werden. Ein Neutronenstern muß bezüglich Farbladung und elektrischer Ladung neutral sein. Zusätzlich kann man einen Neutronenstern näherungsweise bei $T = 0$ behandeln. Farbsupraleitende Phasen im Inneren von Neutronensternen wurden bereits teilweise in der Diplomarbeit von Frederik Neumann [8] behandelt.

Ein Protoneutronenstern ist die in einer Supernova entstehende heiße (einige zehn MeV) Vorstufe eines Neutronensterns. In diesem Gebilde sind Neutrinos für mehrere Sekunden gefangen. Dieser Sachverhalt führt zu erhaltenen Leptonenzahlen für diese Gebilde. Zusätzlich spielen bei Protoneutronensternen im Gegensatz zu Neutronensternen endliche Temperaturen eine Rolle.

Um zu untersuchen, welche farbsupraleitende Phase unter den Bedingungen im Inneren von (Proto–)Neutronensternen jeweils die günstigste ist, werden wir in Kapitel 2 zunächst auf die notwendigen Grundlagen eingehen. Dabei geht es darum, wie sich die Wechselwirkung zwischen Quarks theoretisch beschreiben läßt. Desweiteren geben wir eine Einführung in das Phänomen der Farbsupraleitung. In Kapitel 3 stellen wir das von uns verwendete Modell und den angewandten Formalismus vor, während Kapitel 4 die Thermodynamik des Systems beschreibt. Die Ergebnisse unserer Rechnungen unter den Bedingungen im Inneren eines Neutronensterns werden wir in Kapitel 5 vorstellen. Schließlich werden wir in Kapitel 6 vergleichbare Rechnungen für Protoneutronensterne durchführen.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Quantenchromodynamik

Die Theorie, die die starke Wechselwirkung beschreibt, ist die Quantenchromodynamik(QCD). In dieser Theorie tragen die Quarks Farbladungen, und die Wechselwirkung wird über den Austausch von Gluonen vermittelt. Das Besondere ist, daß die Gluonen selbst Farbladungen tragen und somit untereinander wechselwirken.

Die QCD-Lagrangedichte ist gegeben durch [9]

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - \hat{m})\psi - \frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a \, . \tag{2.1}$$

ψ ist ein Quarkfeld mit sechs Flavor– und drei Farbfreiheitsgraden (rot, grün, blau), und $\hat{m}$ ist die Diagonalmatrix der nackten Massen. Die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\frac{\lambda_a}{2}A_\mu^a \tag{2.2}$$

enthält wiederum die Gell–Mann–Matrizen λ^a im Farbraum, das Gluonfeld A_μ^a und die Kopplungskonstante g der starken Wechselwirkung. Der Index a läuft von eins bis acht. Der Feldstärketensor $F_{\mu\nu}^a$, der im zweiten Term der Lagrangedichte vorkommt, ist gegeben durch

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \tag{2.3}$$

mit den antisymmetrischen Strukturkonstanten f^{abc} der $SU(3)$-Gruppe.

Die Kopplungskonstante g ist impulsabhängig. Sie wird bei großen Impulsen klein. In diesem Bereich läßt sich die Quantenchromodynamik störungstheoretisch behandeln. Man bezeichnet dies auch als asymptotische Freiheit. Für kleinere Impulse ist eine störungstheoretische Behandlung nicht möglich, da die Kopplungskonstante dort groß wird. Dieser Bereich ist exakt nicht zu handhaben, daher verwendet man dort Modelle. Diesen Weg werden wir beschreiten. Wir werden zur Beschreibung der farbsupraleitenden Phasen ein Nambu–Jona-Lasinio Modell verwenden (Kap. 3).

Unter bestimmten Bedingungen läßt sich die QCD auch numerisch auf einem Gitter lösen. Dies ist jedoch nur mit unphysikalisch großen Quarkmassen möglich. Außerdem bereitet ein endliches chemisches Potential bei Gitterrechnungen große Probleme.

Eine wichtige Eigenschaft der QCD ist das Confinement: Es existieren keine freien farbigen Objekte. Quarks und Gluonen kommen nicht frei vor, sondern nur als gebundene, farblose Zustände. Als farblos bezeichnet man einen Zustand, in dem alle drei Farbladungen gleich oft vorkommen oder einen Zustand, in dem Farbe und Antifarbe gleich oft vertreten sind. Solche Zustände sind Mesonen und Baryonen. Mesonen bestehen aus einem Quark und einem Antiquark der gleichen Farbe und Baryonen aus drei Quarks, von denen jedes eine andere Farbe trägt. Genau genommen kommen Quarks nur als Farbsinguletts vor. Das bedeutet, daß die gebundenen Zustände invariant unter Farbtransformationen sein müssen. In [10] wurde am Beispiel der 2SC–Phase gezeigt, daß die aufwendigere Behandlung als Farbsingulett nur einen sehr geringen Effekt auf die Energie der Kondensate hat. Die Beschränkung auf die Forderung nach farbneutralen (farblosen) Zuständen ist daher gerechtfertigt.

2.1.1 Symmetrien

Generell liegen Symmetrien dort vor, wo eine Änderung in den Variablen die Physik unverändert läßt. In der Feldtheorie sind die Felder die Variablen. Symmetrien beschreiben dabei Invarianzen unter Transformationen der Felder. Nach dem Noether Theorem ist jede Symmetrie mit einem erhaltenen Strom verbunden.

In diesem Abschnitt betrachten wir die Symmetrien der QCD–Lagrangedichte, um diese später mit den Symmetrien des verwendeten Modells zu vergleichen. Die Lagrangedichte ist symmetrisch unter lokalen $SU(3)$–Farbtransformationen. Darunter versteht man die Transformationen

$$
\begin{aligned}
\psi &\to \exp\left(i\frac{\theta_a(x)\lambda_a}{2}\right)\psi \, , \\
\frac{\lambda_a}{2}A_\mu^a &\to \exp\left(-i\frac{\theta_a(x)\lambda_a}{2}\right)\frac{\lambda_a}{2}A_\mu^a \exp\left(i\frac{\theta_a(x)\lambda_a}{2}\right) \\
&\quad - \frac{i}{g}\left(\partial_\mu \exp\left(-i\frac{\theta_a(x)\lambda_a}{2}\right)\right)\exp\left(i\frac{\theta_a(x)\lambda_a}{2}\right) \, ,
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

wobei λ_a wieder die Gell–Mann–Matrizen im Farbraum sind.

Sehr wichtig ist auch die ungefähre chirale Symmetrie der Lagrangedichte. Darunter versteht man die Symmetrie unter $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$–Transformationen. Diese sind äquivalent zu $SU(N_f)_V \times SU(N_f)_A$–Transformationen

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \exp\left(i\frac{\theta_a^V \tau_a}{2}\right)\psi \ , \\ \psi &\rightarrow \exp\left(i\frac{\theta_a^A \gamma_5 \tau_a}{2}\right)\psi \ . \end{aligned} \tag{2.5}$$

τ_a steht hier für die $SU(N_f)$–Generatoren. Die chirale Symmetrie wäre nur für masselose Flavors (chiraler Limes) exakt. Für die zwei leichten Flavors (up und down) ist sie immernoch gut erfüllt. Berücksichtigt man zusätzlich das schwerere Strange–Quark, gilt die chirale Symmetrie nur mit größeren Abweichungen. Auf die schweren Quarks ist sie nicht anwendbar.

Die Symmetrietransformation

$$\psi \rightarrow \exp(-i\alpha)\psi \tag{2.6}$$

ist mit der Baryonenzahlerhaltung verknüpft.

Die QCD–Lagrangedichte ist für masselose Quarks ebenfalls invariant unter der $U(1)_A$–Transformation

$$\psi \rightarrow \exp(i\alpha\gamma_5)\psi \ . \tag{2.7}$$

Diese Symmetrie ist jedoch auf dem Quantenlevel gebrochen. Sie ist keine wirkliche Symmetrie der Quantenchromodynamik.

2.2 Farbsupraleitung

In einem System von Fermionen bilden sich bei Vorhandensein einer attraktiven Wechselwirkung in der Nähe der Fermi–Fläche Paare von Teilchen mit entgegengesetztem Impuls und Spin [11]. Man spricht hierbei von einem Cooper–Paar. Im metallischen Supraleiter handelt es sich dabei um Elektronenpaare. Die Wechselwirkung zwischen Elektronen ist eigentlich abstoßend. Durch Wechselwirkung mit dem Metallgitter entsteht jedoch eine schwach attraktive Komponente.

Man geht davon aus, daß sich in Quarkmaterie bei hohen Dichten und niedrigen Temperaturen Diquarkpaare formieren. Dabei spricht man analog zur Supraleitung in Metallen von Farbsupraleitung, da hier die Farbladungen für die Wechselwirkung verantwortlich sind. Im Gegensatz zur Wechselwirkung zwischen Elektronen ist die Wechselwirkung zwischen Quarks von Natur aus anziehend.

Während es nur eine Sorte Elektronen gibt, existieren neun unterschiedliche leichte Quarkspezies (drei Flavors mit je drei Farben). Daher gibt es unterschiedliche Möglichkeiten, Diquarkpaare zu bilden. Je nachdem, welche Quarkspezies gepaart sind klassifiziert man die Materie in unterschiedliche Phasen. Die beiden am meisten diskutierten Phasen sind die Zwei–Flavor–Farbsupraleiter („two–flavor colorsuperconductor“ oder 2SC) und die „color–flavor locked“ (CFL) Phase. Da wir uns in den nächsten Kapiteln mit diesen Phasen beschäftigen wollen, sollen ihre wichtigsten Eigenschaften in Kapitel 2.2.1 kurz erläutert werden.

Allgemein definiert man ein Diquarkkondensat als den Erwartungswert

$$\langle \psi^T \mathcal{O} \psi \rangle, \tag{2.8}$$

wobei $\mathcal{O}$ ein Operator im Farb–, Flavor– und Diracraum ist.

Aufgrund des Pauliprinzips sind nur Operatoren zugelassen, die total antisymmetrisch sind. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, einen total antisymmetrischen Operator zusammenzusetzen; er kann in allen drei Räumen antisymmetrisch sein oder in einem antisymmetrisch und in den beiden anderen symmetrisch. Man geht davon aus, daß die total antisymmetrischen Kondensate

$$s_{AA'} = \langle \psi^T C \gamma_5 \tau_A \lambda_{A'} \psi \rangle \tag{2.9}$$

die dominierenden sind. Dabei steht τ_A für die antisymmetrischen Gell-Mann-Matrizen im Flavorraum und $\lambda_{A'}$ für die entsprechenden Matrizen in Farbraum. Generell bezeichnen wir im folgenden im Flavorraum wirkende Matrizen mit τ und im Farbraum wirkende Matrizen mit λ. Im Diracraum wirkt der antisymmetrische Operator $C\gamma_5$ mit der Ladungskonjugationsmatrix

$$C = i\gamma^2\gamma^0 \ . \tag{2.10}$$

Der Einfluß der im Farb– und Flavorraum symmetrischen Diquarkkondensate wurde z. B. in [12] untersucht. Die Autoren gelangen zu dem Schluß, daß diese Kondensate einen Beitrag liefern, der aber nur gering ist, und daß der Beitrag der total antisymmetrischen Kondensate der dominierende ist.

2.2.1 Farbsupraleitende Phasen

Wir wollen zunächst auf die beiden Extremfälle (2SC und CFL) farbsupraleitender Quarkmaterie eingehen.

In der 2SC–Phase ist das Strange–Quark zu schwer, um eine Rolle zu spielen. In dieser Phase paaren, wie der Name („two-flavor") schon sagt, nur die beiden leichten Flavors. Demzufolge ist das Kondensat auf den Flavorindex $A = 2$ festgelegt, da die τ_2-Matrix genau diese beiden Flavors miteinander verbindet. Durch eine Farbrotation ist es dann möglich auch den Farbindex auf $A' = 2$ zu legen, was einer Beschränkung auf Kondensaten aus roten und grünen Quarks gleichkommt. Somit wird die 2SC–Phase dadurch charakterisiert, daß nur das Diquarkkondensat

$$s_{22} = \langle \psi^T C \gamma_5 \tau_2 \lambda_2 \psi \rangle \tag{2.11}$$

vorhanden ist. Es liegen also Paare von roten Up–Quarks mit grünen Down–Quarks und von grünen Up– mit roten Down–Quarks vor.

Der zweite Extremfall farbsupraleitender Materie ist die CFL–Phase. Hier geht man im Idealfall von drei gleich schweren Flavors aus. In dieser Phase existieren die drei Kondensate s_{22}, s_{55} und s_{77}

$$s_{AA} = \langle \psi^T C \gamma_5 \tau_A \lambda_A \psi \rangle \qquad A = 2, 5, 7\ . \tag{2.12}$$

Es treten also folgende Paarungen auf:

$$\begin{aligned} &(u_r, d_g)\ , \qquad &(u_g, d_r)\ , \\ &(u_r, s_b)\ , \qquad &(u_b, s_r)\ , \\ &(d_g, s_b)\ , \qquad &(d_b, s_g)\ . \end{aligned} \tag{2.13}$$

Die farbneutrale CFL–Phase ist aufgrund dieser Paarungen gleichzeitig auch ladungsneutral [13]. Wie wir noch sehen werden, gilt dies exakt nur wenn kein zusätzliches ladungschemisches Potential vorhanden ist.

Der Name „color–flavor locked" rührt daher, daß Farbe und Flavor miteinander verbunden sind; in Farb– und Flavorraum wirken die gleichen Matrizen. Die CFL–Phase ist invariant unter gekoppelten Farb–Flavor–Rotationen.

Im Grenzfall gleicher Massen und gleicher chemischer Potentiale für alle Quarks sind die drei Kondensate gleich, wohingegen sie im allgemeinen unterschiedlich sein können.

In der Natur ist das Strange–Quark weder schwer noch leicht. Der realistische Fall liegt also irgendwo zwischen den beiden vorgestellten Extremfällen. Die Strange–Quarkmasse ist nicht konstant, sondern abhängig vom chemischen Potential μ. Bei niedrigen chemischen Potentialen ist die Strange–Quarkmasse sehr groß, und die 2SC–Phase ist eine gute Beschreibung. Bei hohen chemischen Potentialen (größer als die Masse des Strange–Quarks) kann man die Strange–Quarks nicht mehr vernachlässigen. Wenn das chemische Potential ausreichend groß ist, kommt es zu Diquarkpaaren mit Up– und Strange–Quarks bzw. Down– und Strange–Quarks, was einer nicht mehr idealisierten (Kondensate nicht mehr gleich groß) CFL–Phase entspricht. Es existiert ein Zwischenbereich, in dem schon Strange–Quarks vorhanden sind, aber eine Paarung mit den leichten Quarks noch nicht möglich ist. Die Strange–Quarks liegen dann ungepaart vor.

Der Übergang von der 2SC– zur CFL–Phase wurde z. B. in [14, 15] untersucht.

Der realistische Fall unterschiedlicher Quarkmassen liegt Abbildung 1.1 zugrunde. Hier befindet sich auf der $T = 0$–Achse zunächst ein 2SC–Bereich, bevor bei höherem chemischem Potential der Übergang zur CFL–Phase stattfindet. Es ist noch anzumerken, daß Abb. 1.1 sich auf ein einheitliches quarkchemisches Potential μ bezieht. Gibt man diese Annahme auf, kann sich das Bild ändern. Unterschiedliche quarkchemische Potentiale für unterschiedliche Quarkspezies sind erforderlich, wenn man neutrale Materie betrachtet, wie sie in Neutronensternen vorliegt. Up– und Down–Quarks erhalten durch ihre unterschiedliche elektrische Ladung verschiedene chemische Potentiale. Auch für die verschiedenen Farben führt man unterschiedliche chemische Potentiale ein, um farbneutrale Materie zu behandeln. Wir werden im folgenden immer von ungleichen chemischen Potentialen für die einzelnen Quarkspezies ausgehen, da wir farb– und ladungsneutrale Materie betrachten wollen.

Einen Überblick über das Feld der Farbsupraleitung gibt [3].

Kapitel 3

Nambu–Jona-Lasinio Modell

Wir berechnen die Quarkphasen mit einem Nambu–Jona-Lasinio Modell. Nambu und Jona-Lasinio veröffentlichten dieses Modell 1961 als Modell für die Wechselwirkung zwischen Nukleonen [16, 17]. Später wurde das Modell uminterpretiert und zur Beschreibung der Wechselwirkung zwischen Quarks verwendet [18, 19]. Da es sich ursprünglich um ein Modell für Nukleonen handelte, ist kein Confinement enthalten. Dafür wird aber die chirale Symmetrie berücksichtigt.

Die Verwendung von Modellen hat den Vorteil, daß man mit ihnen auch komplexere Sachverhalte angehen kann, die auf anderem Wege kaum behandelbar sind. Dazu gehört die Berechnung verschiedener Quarkphasen unter unterschiedlichen Bedingungen.

Modelle vereinfachen die QCD z. T. stark. Ergebnisse, die bei Rechnungen mit Modellen gewonnen werden, müssen daher kritisch betrachtet werden. Man kann z. B. prüfen, ob bestimmte Spezial– oder Extremfälle, für die man Voraussagen hat, richtig wiedergegeben werden. Dabei können verschiedene Modelle unterschiedliche Stärken haben.

Für die Behandlung der Farbsupraleitung bietet sich das NJL–Modell an, weil hier das fehlende Confinement keine Rolle spielt. Da das NJL–Modell in Analogie zur Supraleitung entwickelt wurde, ist es ebenfalls naheliegend, es auf die Farbsupraleitung anzuwenden.

Einen Überblick über das NJL–Modell geben [20, 21]. Eine Beschreibung des Nambu–Jona-Lasinio Modells und seiner Anwendung zur Behandlung von Farbsupraleitung enthält [22].

3.1 Das Modell

Wir verwenden in dieser Arbeit eine erweiterte Form des ursprünglichen Modells. Die Lagrangedichte setzt sich dabei aus einem freien Anteil, einem Wechselwirkungsanteil zwischen einem Quark und einem Antiquark und einem Wechselwirkungsanteil zwischen zwei Quarks zusammen

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - \hat{m})\psi + \mathcal{L}_{\bar{q}q} + \mathcal{L}_{qq} \tag{3.1}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\bar{q}q} &= G\sum_{a=0}^{8}\left[\left(\bar{\psi}\tau_a\psi\right)^2 + \left(\bar{\psi}i\gamma_5\tau_a\psi\right)^2\right] \\ &\quad -K\left[\det{}_f\left(\bar{\psi}(1\!\!1+\gamma_5)\psi\right) + \det{}_f\left(\bar{\psi}(1\!\!1-\gamma_5)\psi\right)\right] \ , \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\mathcal{L}_{qq} = H\sum_{A=2,5,7}\sum_{A'=2,5,7}\left(\bar{\psi}i\gamma_5\tau_A\lambda_{A'}C\bar{\psi}^T\right)\left(\psi^T Ci\gamma_5\tau_A\lambda_{A'}\psi\right). \tag{3.3}$$

ψ ist wieder ein Quarkfeld mit drei Flavor– und drei Farbdimensionen. $\hat{m}$ ist eine im Flavorraum diagonale Matrix, die die nackten Quarkmassen als Einträge hat: $\hat{m} = \mathrm{diag}_f\{m_u, m_d, m_s\}$. τ_a bezeichnet die Gell–Mann–Matrizen im Flavorraum, mit $\tau_0 = \sqrt{2/3}\,1\!\!1$. τ_A steht für die antisymmetrischen Gell–Mann–Matrizen (τ_2, τ_5 und τ_7) im Flavor–Raum und $\lambda_{A'}$ für die antisymmetrischen Gell–Mann–Matrizen im Farbraum. G, K und H sind dimensionsbehaftete Kopplungskonstanten. Der erste Teil der Quark-Antiquark-Wechselwirkung (mit Kopplungskonstante G) entspricht einer Vier–Punkt–Wechselwirkung, wohingegen der zweite Teil (mit Kopplungskonstante K) eine Sechs–Punkt–Wechselwirkung darstellt. Der erste Teil ist symmetrisch unter $SU(3)_{color}$– und $U(3)_V \otimes U(3)_A$–Transformationen. Der zweite Teil, die t'Hooft Determinanten-Wechselwirkung, ist symmetrisch unter $SU(3)_V \otimes SU(3)_A$–Transformationen, bricht aber die $U_A(1)$–Symmetrie [23]. Die Sechs–Punkt–Wechselwirkung ist maximal flavormischend.

Unsere Modell–Lagrangedichte hat also die gleichen Symmetrien wie die QCD-Lagrangedichte (Kap. 2.1.1).

3.2 Meanfield–Näherung

Wir wenden nun die Meanfield–Näherung auf die Lagrangedichte an. Dabei betrachten wir bestimmte Kondensate und linearisieren die Lagrangedichte in deren Anwesenheit. Wir beachten die Kondensate

$$\phi_a = \langle \bar{a}a \rangle \qquad a = u, d, s \quad , \tag{3.4}$$

$$s_{AA} = \langle \psi^T C\gamma_5 \tau_A \lambda_A \psi \rangle \qquad A = 2, 5, 7 \ . \tag{3.5}$$

Die Kondensate ϕ_a sind für die chirale Symmetriebrechung im Vakuum verantwortlich, während s_{AA} die in Kapitel 2.2 vorgestellten Diquarkkondensate sind. Alle anderen Kondensate werden auf null gesetzt

$$\langle \bar{a}b \rangle = 0 \quad \text{für} \quad a \neq b \ , \tag{3.6}$$

$$\langle \bar{a}i\gamma_5 b \rangle = 0 \quad \text{für alle } \ a, b \ , \tag{3.7}$$

$$\langle \psi^T C\gamma_5 \tau_A \lambda_{A'} \psi \rangle = 0 \quad \text{für} \quad A \neq A' \ . \tag{3.8}$$

Wir verwenden nun die Definition

$$\bar{a}a = \langle \bar{a}a \rangle + \delta(\bar{a}a) = \phi_a + \delta(\bar{a}a) \tag{3.9}$$

um $(\bar{a}a)^2$ umzuschreiben

$$\begin{aligned} (\bar{a}a)^2 &= \langle \bar{a}a \rangle^2 + 2\langle \bar{a}a \rangle \delta(\bar{a}a) + \delta(\bar{a}a)^2 \\ &\approx \langle \bar{a}a \rangle^2 + 2\langle \bar{a}a \rangle \delta(\bar{a}a) = -\phi_a^2 + 2\phi_a \bar{a}a \ . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Dabei vernachlässigen wir Terme von $\mathcal{O}(\delta^2)$.

Entsprechend verwenden wir für das Diquarkkondensat

$$\begin{aligned} \psi^T C\gamma_5 \tau_A \lambda_A \psi &= \langle \psi^T C\gamma_5 \tau_A \lambda_A \psi \rangle + \delta(\psi^T Ci\gamma_5 \tau_A \lambda_A \psi) \\ &= s_{AA} + \delta(\psi^T C\gamma_5 \tau_A \lambda_A \psi) \ . \end{aligned} \tag{3.11}$$

Nun enthält unsere Lagrangedichte aber keinen Term der Form $(\psi^T C\gamma_5 \tau_A \lambda_A \psi)^2$, sondern $(\bar{\psi} i\gamma_5 \tau_A \lambda_{A'} C\bar{\psi}^T)(\psi^T Ci\gamma_5 \tau_A \lambda_{A'} \psi)$. Wir können uns aber mit folgender Umformung helfen

$$\left(\psi^T C\gamma_5 \tau_A \lambda_A \psi\right)^\dagger = -\left(\bar{\psi}\gamma_5 \tau_A \lambda_A C\bar{\psi}^T\right) . \tag{3.12}$$

Für diesen Term gilt

$$\bar{\psi}\gamma_5 \tau_A \lambda_A C\bar{\psi}^T = s_{AA}^* + \delta^* \left(\bar{\psi}\gamma_5 \tau_A \lambda_A C\bar{\psi}^T\right) , \tag{3.13}$$

womit man schließlich den gewünschten Ausdruck berechnen kann

$$\begin{aligned}\left(\bar\psi\gamma_5\tau_A\lambda_A C\bar\psi^T\right)\left(\psi^T C\gamma_5\tau_A\lambda_A\psi\right) \approx & -s_{AA}\left(\bar\psi\gamma_5\tau_A\lambda_A C\bar\psi^T\right)\\ & + s^*_{AA}\left(\psi^T C\gamma_5\tau_A\lambda_A\psi\right) - |s_{AA}|^2.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Die Linearisierung der Determinanten–Terme wird in Anhang B durchgeführt.

Diese Näherungen führen zu folgenden linearisierten Lagrangedichten

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{MF}_{\bar qq} =& \bar u(4G\phi_u - 2K\phi_d\phi_s)u + \bar d(4G\phi_d - 2K\phi_u\phi_s)\\ &+ \bar s(4G\phi_s - 2K\phi_u\phi_d)s - 2G(\phi_u^2 + \phi_d^2 + \phi_s^2) + 4K\phi_u\phi_d\phi_s\ ,\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\mathcal{L}^{MF}_{qq} = H\sum_{A=2,5,7}\left(s^*_{AA}\left(\psi^T C\gamma_5\tau_A\lambda_A\psi\right) - s_{AA}\left(\bar\psi\gamma_5\tau_A\lambda_A C\bar\psi^T\right) - |s_{AA}|^2\right)\ . \tag{3.16}$$

An dieser Stelle ist es sinnvoll, effektive Massen (Konstituentenmassen) einzuführen. Sie setzen sich zusammen aus den nackten Massen aus dem freien Anteil der Lagrangedichte und den entsprechenden Termen der linearisierten Lagrangedichte für Quarks und Antiquarks

$$M_u = m_u - 4G\phi_u + 2K\phi_d\phi_s\ , \tag{3.17}$$

$$M_d = m_d - 4G\phi_d + 2K\phi_u\phi_s\ , \tag{3.18}$$

$$M_s = m_s - 4G\phi_s + 2K\phi_u\phi_d\ . \tag{3.19}$$

Desweiteren verwenden wir den Gapparameter

$$\Delta_A = -2Hs_{AA} \tag{3.20}$$

statt des Diquarkkondensats s_{AA}.

Insgesamt erhält man dann

$$\mathcal{L}^{MF} = \bar\psi(i\partial\!\!\!/ - M)\psi + \sum_{A=2,5,7}\left(\frac{1}{2}\bar\psi(\Delta_A\gamma_5\tau_A\lambda_A)C\bar\psi^T - \frac{1}{2}\psi^T C(\Delta^*_A\gamma_5\tau_A\lambda_A)\psi\right) - \mathcal{V}. \tag{3.21}$$

Im Potential $\mathcal{V}$ werden alle Terme zusammengefaßt, die keine Quarkfelder mehr enthalten

$$\mathcal{V} = -4K\phi_u\phi_d\phi_s + 2G(\phi_u^2 + \phi_d^2 + \phi_s^2) + \frac{1}{4H}(\Delta_2^2 + \Delta_5^2 + \Delta_7^2)\ . \tag{3.22}$$

3.2.1 Nambu–Gorkov–Formalismus

Wir verwenden nun den Nambu–Gorkov–Formalismus, um die Lagrangedichte umzuschreiben. Dazu führen wir ladungskonjugierte Felder

$$\psi^C = C\bar{\psi}^T, \qquad \bar{\psi}^C = \psi^T C \tag{3.23}$$

ein. Anschließend verdoppelt wir formal die Anzahl der Freiheitsgrade, indem wir ψ und ψ^C als unabhängige Variablen behandelt. Wir definieren Bispinorfelder

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^C \end{pmatrix}, \qquad \bar{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\bar{\psi}, \bar{\psi}^C \right) \ . \tag{3.24}$$

Die Verdopplung der Freiheitsgrade wird dabei durch den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ wieder ausgeglichen. Mit den Feldern q und $\bar{q}$ läßt sich die linearisierte Lagrangedichte in einer sehr kompakten Weise angeben

$$\mathcal{L}^{MF} = \bar{q} \begin{pmatrix} i\partial\!\!\!/ - M & \sum_{A=2,5,7} \Delta_A \gamma_5 \tau_A \lambda_A \\ -\sum_{A=2,5,7} \Delta_A^* \gamma_5 \tau_A \lambda_A & -i \overleftarrow{\partial\!\!\!/} - M \end{pmatrix} q - \mathcal{V} \ . \tag{3.25}$$

Die Wirkung S ist definiert als

$$S = \int d^4x \ \mathcal{L} \ . \tag{3.26}$$

Für die Meanfield–Lagrangedichte aus Gl. 3.25 erhalten wir

$$S = \int d^4x \left\{ \bar{q} \begin{pmatrix} i\partial\!\!\!/ - M & \sum_{A=2,5,7} \Delta_A \gamma_5 \tau_A \lambda_A \\ -\sum_{A=2,5,7} \Delta_A^* \gamma_5 \tau_A \lambda_A & -i \overleftarrow{\partial\!\!\!/} - M \end{pmatrix} q - \mathcal{V} \right\} \ . \tag{3.27}$$

Mit Hilfe der Fourriertransformation

$$q(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ \exp(-ipx) \ \tilde{q}(p) \tag{3.28}$$

$$\bar{q}(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ \exp(ipx) \ \tilde{\bar{q}}(p) \tag{3.29}$$

gelangen wir in den Impulsraum. Wir wollen die Transformation hier am Beispiel des oberen linken Matrixelements durchführen

$$
\begin{aligned}
S' &= \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4}\ \exp(ipx)\ \tilde{\bar{q}}(p)\ (i\overleftarrow{\partial\!\!\!/} - M)\ \exp(-ip'x)\ \tilde{q}(p') \\
&= \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4}\ \exp\left(i(p-p')x\right)\ \tilde{\bar{q}}(p)\ (p\!\!\!/' - M)\ \tilde{q}(p') \\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4}\ (2\pi)^4\ \delta^4(p-p')\ \tilde{\bar{q}}(p)\ (p\!\!\!/' - M)\ \tilde{q}(p') \\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ \tilde{\bar{q}}(p)\ (p\!\!\!/ - M)\ \tilde{q}(p)\ . \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

Für die gesamte Matrix ergibt sich

$$
\begin{aligned}
S &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left\{ \tilde{\bar{q}}(p) \begin{pmatrix} p\!\!\!/ - M & \sum_{A=2,5,7} \Delta_A \gamma_5 \tau_A \lambda_A \\ -\sum_{A=2,5,7} \Delta_A^* \gamma_5 \tau_A \lambda_A & p\!\!\!/ - M \end{pmatrix} \tilde{q}(p) - \tilde{\mathcal{V}} \right\} \\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ \tilde{\mathcal{L}}(p) \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

mit $\tilde{\mathcal{V}} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p)\, \mathcal{V}$.
Somit läßt sich die Lagrangedichte im Impulsraum schreiben als

$$
\tilde{\mathcal{L}}^{MF} = \tilde{\bar{q}} \begin{pmatrix} p\!\!\!/ - M & \sum_{A=2,5,7} \Delta_A \gamma_5 \tau_A \lambda_A \\ -\sum_{A=2,5,7} \Delta_A^* \gamma_5 \tau_A \lambda_A & p\!\!\!/ - M \end{pmatrix} \tilde{q} - \tilde{\mathcal{V}}\ . \qquad (3.32)
$$

3.3 Parameter

Für unsere numerischen Berechnungen verwenden wir die Parameter von Rehberg, Klevansky und Hüfner [24] (Tabelle 3.1). Dabei wurde die nackte Masse der Up– und Down–Quarks auf 5,5 MeV festgelegt und die restlichen Paramter durch Fits an $m_\pi = 135,0\,\mathrm{MeV}$, $m_K = 497,7\,\mathrm{MeV}$, $m_{\eta'} = 957,8\,\mathrm{MeV}$ und $f_\pi = 92,4\,\mathrm{MeV}$ bestimmt.

$m_u = m_d$ [MeV]	m_s [MeV]	$G\Lambda^2$	$K\Lambda^2$	Λ [MeV]
5,5	140,7	1,835	12,36	602,3

Tabelle 3.1: Parameter für die numerischen Berechnungen. Entnommen aus [24]

Λ ist der Cutoff für den Dreier-Impuls. Er ist nötig, da die Impulsintegrale divergent sind.

In [24] wird keine Farbsupraleitung behandelt, weshalb dort auch keine Lagrangedichte $\mathcal{L}_{qq}$ mit einer Kopplungskonstante H existiert. Wir verwenden $H\Lambda^2 = G\Lambda^2$.

Kapitel 4

Thermodynamisches Potential

Da wir es mit einem relativistischen System zu tun haben, in dem Teilchen erzeugt und vernichtet werden können, verwenden wir zur Berechnung des thermodynamischen Potentials das großkanonische Ensemble. Die großkanonische Zustandssumme Z ist definiert als [25]

$$Z = \mathbf{Tr} \exp\left(-\frac{1}{T}(H - \mu_i N_i)\right) . \tag{4.1}$$

Die Spur repräsentiert dabei die Summe über alle möglichen Zustände.

Wir sind am thermodynamischen Potential interessiert. Das thermodynamische Potential pro Volumeneinheit läßt sich aus der großkanonischen Zustandssumme gewinnen

$$\Omega = -\frac{T}{V} \ln \mathbf{Tr} \exp\left(-\frac{1}{T}\int d^3x(\mathcal{H} - \mu_i n_i)\right) . \tag{4.2}$$

$\mathcal{H}$ ist die Hamiltondichte, μ_i und n_i sind das chemische Potential und die Teilchendichte der Teilchenspezies i.

Aus dem thermodynamischen Potential lassen sich andere Größen berechnen. Die Teilchenzahldichte n_i und der Druck p werden durch

$$n_i = -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu_i} \quad \text{bzw.} \quad p = -\Omega \tag{4.3}$$

bestimmt.

4.1 Thermodynamisches Potential der Quarks

Für die Berechnung des thermodynamischen Potentials der Quarks führen wir eine effektive Lagrangedichte ein, die den zweiten benötigten Term ($\mu_i n_i$) enthält. Die Teilchenzahl ist gegeben durch $q^\dagger q$.

$$\mathcal{L}_{eff}^{MF} = \tilde{\mathcal{L}}^{MF} + q^\dagger\, \hat{\mu}\, q \tag{4.4}$$

Dabei ist $\hat{\mu}$ eine Diagonalmatrix im Farb– und Flavorraum, deren Einträge die chemischen Potentiale der jeweiligen Quarkspezies sind

$$\hat{\mu} = diag\{\mu_u^r, \mu_u^g, \mu_u^b, \mu_d^r, \mu_d^g, \mu_d^b, \mu_s^r, \mu_s^g, \mu_s^b\}. \tag{4.5}$$

Die effektive Meanfield–Lagrangedichte nimmt im Nambu–Gorkov–Formalismus folgende Form an (vgl. Gl. 3.32)

$$\mathcal{L}_{eff}^{MF} = \bar{\tilde{q}} \begin{pmatrix} \not{p} - M + \hat{\mu}\gamma^0 & \sum_{A=2,5,7} \Delta_A \gamma_5 \tau_A \lambda_A \\ -\sum_{A=2,5,7} \Delta_A^* \gamma_5 \tau_A \lambda_A & \not{p} - M - \hat{\mu}\gamma^0 \end{pmatrix} \tilde{q} - \tilde{\mathcal{V}}\,. \tag{4.6}$$

Diese Formel kann man verkürzt schreiben als

$$\mathcal{L}_{eff}^{MF} = \bar{\tilde{q}}\, S^{-1}\, \tilde{q} - \tilde{\mathcal{V}}, \tag{4.7}$$

wobei S^{-1} den inversen Propagator bezeichnet.

Jetzt sind wir in der Lage, das thermodynamische Potential zu berechnen. Wir können Ω schreiben als

$$\Omega(T,\mu) = -T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \mathbf{Tr} \ln \left(\frac{1}{T} S^{-1}(i\omega_n, \vec{p}) \right) + \mathcal{V}. \tag{4.8}$$

Hierbei benutzen wir den Matsubara–Formalismus [26]. Dabei sind $\omega_n = (2n-1)\pi T$ mit $n \in \mathbb{Z}$ die fermionischen Matsubara–Frequenzen. Um den Ausdruck auszuwerten, bedient man sich der folgenden Identität

$$\mathrm{Tr}\ \ln A = \ln\ \det A. \tag{4.9}$$

Bei S^{-1} handelt es sich um eine 72×72 Matrix (3 Flavor–, 3 Farb–, 4 Dirac– und 2 Bispinor–Dimensionen). Daher erhält man

$$\mathrm{Tr} \ln \left(\frac{1}{T}\, S^{-1} \right) = \ln\ \det S^{-1} - 72\ \ln T. \tag{4.10}$$

Der inverse Propagator S^{-1} enthält viele Nulleinträge. Da Zeilen– und Spaltenvertauschung die Determinante einer Matrix bis auf das Vorzeichen unverändert lassen, kann man durch geschicktes Anwenden dieser Umformungen die Berechnung der Determinante erheblich vereinfachen. Auf diese Weise kann man die Matrix in sechs 8×8 und eine 24×24 Matrix zerlegen. In diesen Matrizen kommen jeweils unterschiedliche Quarkspezies vor.

Zur kompakteren Darstellung führen wir zunächst folgende abkürzende Schreibweisen ein

$$U_c^\pm := \not{p}_{uc}^\pm - M_u \;, \tag{4.11}$$
$$D_c^\pm := \not{p}_{dc}^\pm - M_d \;, \tag{4.12}$$
$$S_c^\pm := \not{p}_{sc}^\pm - M_s \tag{4.13}$$

mit

$$\not{p}_{fc}^\pm := \not{p} \pm \mu_{fc}\,\gamma^0 \;, \tag{4.14}$$

wobei die Indizes f und c für Flavor und Farbe (color) stehen.

Zusätzlich definieren wir

$$X_i := \Delta_i\,\gamma_5 \qquad i = 2, 5, 7 \;. \tag{4.15}$$

Die Determinante der Matrix S^{-1} läßt sich nun (nach Zeilen– und Spaltenvertauschungen) schreiben als

$$\det S^{-1} = \det \begin{pmatrix} \boxed{\mathcal{M}_{uds}} & & & & & & \\ & \boxed{\mathcal{M}_{ud}} & & & & & \\ & & \boxed{\mathcal{M}_{us}} & & & & \\ & & & \boxed{\mathcal{M}_{du}} & & & \\ & & & & \boxed{\mathcal{M}_{ds}} & & \\ & & & & & \boxed{\mathcal{M}_{su}} & \\ & & & & & & \boxed{\mathcal{M}_{sd}} \end{pmatrix} . \tag{4.16}$$

Dabei haben wir die Blöcke von S^{-1} entsprechend der vorkommenden Quarkspezies benannt

$$\mathcal{M}_{uds} = \begin{pmatrix} U_r^+ & -X_2 & -X_5 & 0 & 0 & 0 \\ X_2^* & D_g^- & 0 & X_7^* & 0 & 0 \\ X_5^* & 0 & S_b^- & 0 & X_7^* & 0 \\ 0 & -X_7 & 0 & S_b^* & 0 & -X_5 \\ 0 & 0 & -X_7 & 0 & D_g^+ & -X_2 \\ 0 & 0 & 0 & X_5^* & X_2^* & U_r^- \end{pmatrix} , \tag{4.17}$$

$$\mathcal{M}_{ud} = \begin{pmatrix} U_g^+ & X_2 \\ -X_2^* & D_r^- \end{pmatrix} , \qquad \mathcal{M}_{du} = \begin{pmatrix} D_r^+ & X_2 \\ -X_2^* & U_g^- \end{pmatrix} ,$$
$$\mathcal{M}_{us} = \begin{pmatrix} U_b^+ & X_5 \\ -X_5^* & S_r^- \end{pmatrix} , \qquad \mathcal{M}_{su} = \begin{pmatrix} S_r^+ & X_5 \\ -X_5^* & U_b^- \end{pmatrix} , \tag{4.18}$$
$$\mathcal{M}_{ds} = \begin{pmatrix} D_b^+ & X_7 \\ -X_7^* & S_g^- \end{pmatrix} , \qquad \mathcal{M}_{sd} = \begin{pmatrix} S_g^+ & X_2 \\ -X_2^* & D_b^- \end{pmatrix} .$$

Dabei beschreiben die Matrizen $\mathcal{M}_{ud}$ und $\mathcal{M}_{du}$ die Paarung von grünen Up–Quarks mit roten Down–Quarks, die Matrizen $\mathcal{M}_{us}$ und $\mathcal{M}_{su}$ die von blauen Up–Quarks mit roten Strange–Quarks und die Matrizen $\mathcal{M}_{ds}$ und $\mathcal{M}_{sd}$ das Kondensat aus blauen Down–Quarks und grünen Strange–Quarks.

Die Determinante läßt sich nun stückweise berechnen

$$\begin{aligned}\det S^{-1}(p) = {} & \det \mathcal{M}_{uds} \cdot \det \mathcal{M}_{ud} \cdot \det \mathcal{M}_{us} \cdot \det \mathcal{M}_{du} \cdot \det \mathcal{M}_{ds} \\ & \cdot \det \mathcal{M}_{su} \cdot \det \mathcal{M}_{sd} .\end{aligned} \tag{4.19}$$

Wir wollen zunächst die kleineren Matrizen (Gl. (4.18)) behandeln

$$\mathcal{M}_{ab} = \begin{pmatrix} \not{p}_a^+ - M_a & \Delta_i \gamma_5 \\ -\Delta_i^* \gamma_5 & \not{p}_b^- - M_b \end{pmatrix} \qquad a = (f_a, c_a),\ b = (f_b, c_b) \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned} i = 2 \quad & \text{für} \quad ab = ud \ \vee \ ab = du \\ i = 5 \quad & \text{für} \quad ab = us \ \vee \ ab = su \\ i = 7 \quad & \text{für} \quad ab = ds \ \vee \ ab = sd \end{aligned}$$

Von diesen Matrizen lassen sich die Determinanten berechnen. Man erhält

$$\det \mathcal{M}_{ab} = (x_a^+ \, x_b^- - 2|\Delta_i|^2 y_{ab} + |\Delta_i|^4)^2 , \tag{4.21}$$

wobei wir die abkürzenden Schreibweisen

$$x_a^\pm := (i\omega_n \pm \mu_a)^2 - M_a^2 - \vec{p}^2 = (i\omega_n \pm \mu_a)^2 - E_a^2 , \tag{4.22}$$
$$y_{ab} := -\omega_n^2 + i\omega_n(\mu_a - \mu_b) - \mu_a \, \mu_b - M_a \, M_b - \vec{p}^2 \tag{4.23}$$

verwenden.

Mit der Matrix $\mathcal{M}_{uds}$ werden Paarungen zwischen roten Up-Quarks, grünen Down-Quarks und blauen Strange-Quarks beschrieben. Für diese Matrix läßt sich die Determinante nicht in einer so kompakten Form schreiben. Man kann die Terme nach Potenzen der Gaps ordnen

$$\det \mathcal{M}_{uds} = \sum_{klm} C_{klm} |\Delta_2|^k |\Delta_5|^l |\Delta_7|^m \tag{4.24}$$
$$\text{mit } \ k, l, m \leq 8, \quad k + l + m \leq 12 .$$

Die Koeffizienten C_{klm} werden in Anhang C aufgeführt.

Für das thermodynamische Potential ergibt sich somit

$$
\begin{aligned}
\Omega(T,\mu) = -T\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\Bigg[& -36\ln T + \ln(x^+_{ug}\,x^-_{dr} - 2|\Delta_2|^2 y_{ug,dr} + |\Delta_2|^4) \\
& + \ln(x^+_{dr}\,x^-_{ug} - 2|\Delta_2|^2 y_{dr,ug} + |\Delta_2|^4) \\
& + \ln(x^+_{ub}\,x^-_{sr} - 2|\Delta_5|^2 y_{ub,sr} + |\Delta_5|^4) \\
& + \ln(x^+_{sr}\,x^-_{ub} - 2|\Delta_5|^2 y_{sr,ub} + |\Delta_5|^4) \\
& + \ln(x^+_{db}\,x^-_{sg} - 2|\Delta_7|^2 y_{db,sg} + |\Delta_7|^4) \\
& + \ln(x^+_{sg}\,x^-_{db} - 2|\Delta_7|^2 y_{sg,db} + |\Delta_7|^4) \\
& + \frac{1}{2}\ln\sum_{klm} C_{klm}|\Delta_2|^k|\Delta_5|^l|\Delta_7|^m\Bigg] .
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

Die Matsubarasumme konvergiert nicht. Wir wollen nun zunächst in etwas vereinfachter Form zeigen, wie man die divergenten Anteile der Summe behandeln kann. Dazu betrachten wir zunächst die ersten beiden Logarithmen, die u und d miteinander verbinden. Wir addieren

$$0 = \ln(x^+_{ug}x^-_{ug}x^+_{dr}x^-_{dr}) - \ln(x^+_{ug}x^-_{ug}x^+_{dr}x^-_{dr}) . \tag{4.26}$$

Die Matsubarasumme dieser Logarithmen läßt sich analytisch auswerten. Dazu teilen wir den Logarithmus zunächst auf

$$\ln(x^+_{ug}x^-_{ug}x^+_{dr}x^-_{dr}) = \ln(x^+_{ug}x^-_{ug}) + \ln(x^+_{dr}x^-_{dr}) . \tag{4.27}$$

Nun formen wir das Produkt $x^+_a x^-_a$ um, indem wir Gl. (4.22) einsetzen, ausmultiplizieren und schließlich neu zusammenfassen

$$
\begin{aligned}
x^+_a x^-_a &= \left((i\omega_n + \mu_a)^2 - E_a^2\right)\left((i\omega_n - \mu_a)^2 - E_a^2\right) \\
&= \omega_n^4 + 2\omega_n^2\mu_a^2 + 2\omega_n^2 E_a^2 - 2\mu_a^2 E_a^2 + \mu_a^4 + E_a^4 \\
&= \Big(\omega_n^2 + \underbrace{(E_a + \mu_a)^2}_{(Z_a^+)^2}\Big)\Big(\omega_n^2 + \underbrace{(E_a - \mu_a)^2}_{(Z_a^-)^2}\Big) .
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

Die Matsubarasumme von Gl. (4.28) läßt sich analytisch berechnen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{T^2}(\omega_n^2 + Z^2)\right) = \frac{2}{T}\left(\frac{1}{2}|Z| + T\ln\left[1 + \exp\left(-\frac{|Z|}{T}\right)\right]\right) \tag{4.29}$$

Nun addieren wir Gl. (4.26) zum ersten und dritten Logarithmus. Außerdem benötigen wir acht der 72 $\ln T$.

$$
\begin{aligned}
&\sum_n -8\ln T + \ln(x^+_{ug}\, x^-_{dr} - 2|\Delta_2|^2 y_{ug,dr} + |\Delta_2|^4) \\
&\qquad + \ln(x^+_{dr}\, x^-_{ug} - 2|\Delta_2|^2 y_{dr,ug} + |\Delta_2|^4) \\
&\qquad + \ln(x^+_{ug} x^-_{ug} x^+_{dr} x^-_{dr}) - \ln(x^+_{ug} x^-_{ug} x^+_{dr} x^-_{dr}) \\
&= \sum_n \ln \frac{x^+_{ug}\, x^-_{dr} - 2|\Delta_2|^2 y_{ug,dr} + |\Delta_2|^4}{x^+_{ug} x^-_{dr}} \\
&\qquad + \ln \frac{x^+_{dr}\, x^-_{ug} - 2|\Delta_2|^2 y_{dr,ug} + |\Delta_2|^4}{x^+_{dr} x^-_{ug}} \\
&\qquad + \ln\left(\frac{1}{T^4} x^+_{ug} x^-_{ug}\right) + \ln\left(\frac{1}{T^4} x^+_{dr} x^-_{dr}\right)
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

Einsetzen von Gl. (4.29) liefert

$$
\begin{aligned}
&\sum_n \left(\ln \frac{x^+_{ug}\, x^-_{dr} - 2|\Delta_2|^2 y_{ug,dr} + |\Delta_2|^4}{x^+_{ug} x^-_{dr}} \right. \\
&\qquad \left. + \ln \frac{x^+_{dr}\, x^-_{ug} - 2|\Delta_2|^2 y_{dr,ug} + |\Delta_2|^4}{x^+_{dr} x^-_{ug}} \right) \\
&\qquad + \frac{2}{T}\left(\frac{1}{2}|Z^+_{ug}| + T\ln\left[1 + \exp\left(-\frac{|Z^+_{ug}|}{T}\right)\right]\right) \\
&\qquad + \frac{2}{T}\left(\frac{1}{2}|Z^-_{ug}| + T\ln\left[1 + \exp\left(-\frac{|Z^-_{ug}|}{T}\right)\right]\right) \\
&\qquad + \frac{2}{T}\left(\frac{1}{2}|Z^+_{dr}| + T\ln\left[1 + \exp\left(-\frac{|Z^+_{dr}|}{T}\right)\right]\right) \\
&\qquad + \frac{2}{T}\left(\frac{1}{2}|Z^-_{dr}| + T\ln\left[1 + \exp\left(-\frac{|Z^-_{dr}|}{T}\right)\right]\right) .
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

Die verbleibende Summe läßt sich nun numerisch berechnen, da die Argumente der Logarithmen jeweils für $n \to \infty$ gegen eins gehen.

Im Prinzip funktioniert dieses Vorgehen. Die Konvergenz ist jedoch wesentlich besser, wenn man statt der Terme aus Gl. (4.26) Terme addiert, die sich umformen lassen zu

$$\begin{aligned}\ln\Big[&\big(\omega_n^2+\underbrace{(E_{ug}+\mu_{ug})^2+\Delta_2^2}_{(Z_{ug}^+)^2}\big)\big(\omega_n^2+\underbrace{(E_{ug}-\mu_{ug})^2+\Delta_2^2}_{(Z_{ug}^-)^2}\big)\\ &\cdot\big(\omega_n^2+\underbrace{(E_{dr}+\mu_{dr})^2+\Delta_2^2}_{(Z_{dr}^+)^2}\big)\big(\omega_n^2+\underbrace{(E_{dr}-\mu_{dr})^2+\Delta_2^2}_{(Z_{dr}^-)^2}\big)\Big]\,.\end{aligned} \tag{4.32}$$

Für die verbleibenden Logarithmen geht man analog vor.

4.2 Thermodynamisches Potential und Dichten der Leptonen

Bei der Berechnung des thermodynamischen Potentials und der Teilchendichten betrachten wir die Leptonen (Elektronen, Myonen, Elektronneutrinos, Myonneutrinos und die jeweils zugehörigen Antiteilchen) als Gas freier Fermionen. Für Elektronen und Myonen gilt folgende Beziehung [25]:

$$\begin{aligned}\Omega_{e/\mu}=-2T\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\ln\Bigg\{&\left(1+\exp\left[-\frac{1}{T}(E_p-\mu_{e/\mu})\right]\right)\\ &+\ln\left(1+\exp\left[-\frac{1}{T}(E_p+\mu_{e/\mu})\right]\right)\Bigg\}\,.\end{aligned} \tag{4.33}$$

Die beiden Anteile entsprechen den Beiträgen der Teilchen und Antiteilchen. Der Faktor zwei kommt durch die beiden möglichen Spinrichtungen zustande. Da masselose Neutrinos nur eine Spinrichtung haben, fällt für sie dieser Faktor zwei weg.

Die Teilchenzahldichte ist durch das Negative der partiellen Ableitung des thermodynamischen Potentials nach dem chemischen Potential gegeben

$$\begin{aligned}n_{e^-/\mu^-}&=-\frac{\partial\Omega}{\partial\mu_{e/\mu}}\\ &=2\,T\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(\frac{1}{\exp\left[\frac{1}{T}(E_p-\mu_{e/\mu})\right]+1}+\frac{1}{\exp\left[\frac{1}{T}(E_p+\mu_{e/\mu})\right]+1}\right).\end{aligned} \tag{4.34}$$

Elektronen und Neutrinos werden im folgenden als masselos angenommen, so daß für sie gilt

$$E_p=\sqrt{|\vec{p}|^2+m^2}\approx|\vec{p}|\,. \tag{4.35}$$

Die Myonen können nicht als masselos betrachtet werden. Ihre Masse beträgt $m_{\mu^-} = 105,66\,\mathrm{MeV}$.

Tau–Leptonen berücksichtigen wir aufgrund der viel höheren Masse der Tauonen ($m_\tau \approx 1777\,\mathrm{MeV}$) überhaupt nicht.

4.2.1 T=0

Für den Grenzfall $T = 0$ lassen sich die Ausdrücke einfach auswerten, da in diesem Grenzfall die Besetzungszahldichte in eine Θ–Funktion übergeht

$$\lim_{T\to 0} \frac{1}{\exp\left[\frac{1}{T}(E_p - \mu)\right] + 1} = \Theta(\mu - E_p) \,, \tag{4.36}$$

Auf diese Weise erhält man

$$\Omega_e = -\frac{1}{12\pi^2}\mu_{e^-}^4 \,, \tag{4.37}$$

$$n_{e^-} = \frac{1}{3\pi^2}\mu_{e^-}^3 \,, \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned} \Omega_\mu = \frac{1}{24\,\pi^2}\Bigg(& 5\,|\mu_{\mu^-}|(\mu_{\mu^-}^2 - m_{\mu^-})^{3/2} - 3|\mu_{\mu^-}|^3\sqrt{\mu_{\mu^-}^2 - m_{\mu^-}} \\ & + 3m_{\mu^-}^4 \ln\left(\frac{|\mu_{\mu^-}|}{m_\mu^-} + \sqrt{\frac{|\mu_{\mu^-}|}{m_\mu^-} - 1}\right)\Bigg)\theta(|\mu| - m) \,, \end{aligned} \tag{4.39}$$

$$n_{\mu^-} = \frac{1}{3\pi^2}\left(\mu_{\mu^-}^2 - m_{\mu^-}^2\right)^{3/2} \;.\mathrm{sgn}(\mu_{\mu^-}) \tag{4.40}$$

Die Beiträge der Neutrinos berechnen sich analog zu denen der Elektronen (beide werden als masselos angenommen). Wie eingangs schon erwähnt, erhält man für das gleiche chemische Potential für Neutrinos nur die halbe Teilchendichte und das halbe thermodynamische Potential im Vergleich zu Elektronen, da sie nur eine Spinrichtung haben

$$\Omega_{\nu_{e/\mu}} = -\frac{1}{24\pi^2}\mu_{\nu_{e/\mu}}^4 \,, \tag{4.41}$$

$$n_{\nu_{e/\mu}} = \frac{1}{6\pi^2}\mu_{\nu_{e/\mu}}^3 \,. \tag{4.42}$$

Negative chemische Potentiale bedeuten, daß Antiteilchen vorliegen. Wie man an den obigen Gleichungen sehen kann, ergeben sich für diesen Fall negative Teilchendichten.

4.2.2 Endliche Temperatur

Bei endlicher Temperatur lassen sich nicht alle Ausdrücke so einfach auswerten. Wir erhalten

$$\Omega_e = -\frac{7}{180}\pi^2 T^4 - \frac{1}{6}\mu_{e^-}^2 T^2 - \frac{1}{12\pi^2}\mu_{e^-}^4 \tag{4.43}$$

$$n_{e^-} = \frac{1}{3}\mu_{e^-} T^2 + \frac{1}{3\pi^2}\mu_{e^-}^3 \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned}\Omega_\mu = & -\frac{T}{\pi^2}\int dp\, p^2 \left\{ \ln\left(1 + \exp\left[-\frac{1}{T}\left(E_p - \mu_{\mu^-}\right)\right]\right)\right. \\ & \left. + \ln\left(1 + \exp\left[-\frac{1}{T}\left(E_p + \mu_{\mu^-}\right)\right]\right)\right\}\end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}n_{\mu^-} = & \frac{1}{\pi^2}\int dp\, p^2 \left(\frac{1}{\exp\left(\frac{1}{T}(E_p - \mu_{\mu^-})\right) + 1}\right. \\ & \left. - \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{T}(E_p + \mu_{\mu^-})\right) + 1}\right).\end{aligned} \tag{4.46}$$

Endliche Temperaturen werden uns bei den Berechnungen für das Innere eines Protoneutronensterns beschäftigen. Dort werden wir es auch mit Neutrinos zu tun haben. Für deren Beiträge gilt

$$\Omega_{\nu_{e/\mu}} = -\frac{7}{360}\pi^2 T^4 - \frac{1}{12}\mu_{\nu_{/\mu}e}^2 T^2 - \frac{1}{24\pi^2}\mu_{\nu_{e/\mu}}^4 , \tag{4.47}$$

$$n_{\nu_{e/\mu}} = \frac{1}{6}\mu_{\nu_{e/\mu}} T^2 + \frac{1}{6\pi^2}\mu_{\nu_{e/\mu}}^3 . \tag{4.48}$$

4.3 Stabile Lösungen

Das thermodynamische Potential ergibt sich schließlich als Summe aus den Beiträgen der Quarks und der Leptonen

$$\Omega = \Omega_{quark} + \Omega_{lept} + const. \tag{4.49}$$

Ω ist nur bis auf eine Konstante bestimmt. Diese wird so gewählt, daß das thermodynamische Potential im Vakuum verschwindet ($\Omega_{vac} = 0$).

Für unsere Rechnung hat die Wahl dieser Konstante im Prinzip keine Bedeutung. Sie ist nur dort wichtig, wo absolute Werte für das thermodynamische Potential oder den Druck angegeben werden sollen. Wir suchen nach stabilen Lösungen. Dort muß das thermodynamische Potential ein Minimum aufweisen. Wir suchen also nach Kombinationen von ϕ_f und Δ_i für die gilt:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\phi_f} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial\Omega}{\partial\Delta_i} = 0. \tag{4.50}$$

Hierbei handelt es sich um sechs nichlineare Gleichungen, die selbstkonsistent gelöst werden müssen.

Kapitel 5

Neutronensterne

Neutronensterne sind die kleinsten und dichtesten Sterne, die uns bekannt sind. Viele von ihnen rotieren sehr schnell (einige hundert Mal in der Sekunde) [27]. Dementsprechend groß muß die Gravitationskraft sein, die den Stern zusammenhält. Neutronensterne sind 10^{14} mal so dicht wie die Erde. Die Masse eines Neutronensterns beträgt typischerweise 1,5 Sonnenmassen, und er hat einen Radius von etwa zehn Kilometern. Ein Neutronenstern wird für unsere Zwecke als kalt angesehen. Kalt klingt natürlich im ersten Moment sehr merkwürdig bei einem Gebilde, das Temperaturen von 10^5 – $10^9\,$K hat. Man muß dies aber relativ zu den betrachteten Energieskalen sehen: $1\,\mathrm{MeV} \approx 10^{10}\,$K. Die Temperatur des Sterns ist kalt im Vergleich zu den Fermienergieen der Quarks und Leptonen. Dies rechtfertigt die Näherung, den Neutronenstern bei T=0 zu betrachten. Die Quarks sind dabei wie „eingefroren"; sie besetzen die niedrigsten freien Energiezustände (bis zur Fermikante).

5.1 Neutralität

Ein stabiler Neutronenstern sollte ladungs– und farbneutral sein. Ladungsneutralität erfordert eine verschwindende Ladungsdichte

$$n_Q = \frac{2}{3} n_u - \frac{1}{3}(n_d + n_s) - n_{e^-} - n_{\mu^-} = 0 \; . \tag{5.1}$$

In farbneutraler Materie müssen die Teilchendichten der roten, grünen und blauen Quarks gleich sein

$$n_r = n_g = n_b \; . \tag{5.2}$$

Wir verwenden für die Farbladungen die Linearkombinationen

$$n_3 = n_r - n_g, \tag{5.3}$$

$$n_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} n_r + \frac{1}{\sqrt{3}} n_g - \frac{2}{\sqrt{3}} n_b. \tag{5.4}$$

Für farbneutrale Materie muß also gelten

$$n_3 = 0, \qquad n_8 = 0. \tag{5.5}$$

Die Quarkdichte n ist definiert als

$$n = n_r + n_g + n_b \ . \tag{5.6}$$

Es existieren ebensoviele unabhängige chemische Potentiale wie erhaltene Ladungen. In unserem Fall also vier unabhängige chemische Potentiale (μ_r, μ_g, μ_b und μ_Q) für vier erhaltene Teilchenzahlen. Bei unseren Rechnungen verwenden wir Linearkombinationen dieser Potentiale

$$\mu = \frac{1}{3} \mu_r + \frac{1}{3} \mu_g + \frac{1}{3} \mu_b \ , \tag{5.7}$$

$$\mu_3 = \frac{1}{2} \mu_r - \frac{1}{2} \mu_g \ , \tag{5.8}$$

$$\mu_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \mu_r + \frac{1}{2\sqrt{3}} \mu_g - \frac{1}{\sqrt{3}} \mu_b \ , \tag{5.9}$$

$$\mu_Q = \mu_Q \ . \tag{5.10}$$

Die einzelnen Vorfaktoren der chemischen Potentiale werden durch die Bedingungen

$$-\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_i} = n_i \tag{5.11}$$

bestimmt. Wir haben also vier chemische Potentiale und drei Neutralitätsbedingungen. Im folgenden variieren wir bei unseren Rechnungen das quarkchemische Potential μ und erhalten die anderen chemischen Potentiale aus den Neutralitätsbedingungen. Die chemischen Potentiale der einzelnen Quarks lassen sich als Linearkombinationen von μ, μ_3, μ_8, und μ_Q darstellen. Für ein rotes Up-Quark erhält man zum Beispiel:

$$\mu_{u,r} = \underbrace{\mu + \mu_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \mu_8}_{\text{rotes Quark}} \quad + \quad \underbrace{\frac{2}{3} \mu_Q}_{\text{Ladung des Up-Quarks}} \tag{5.12}$$

5.2 β–Gleichgewicht

Ein stabiler Neutronenstern befindet sich im β–Gleichgewicht. Dabei haben die Reaktionen

$$d \rightleftharpoons u + e^- + \bar{\nu}_e \ , \tag{5.13}$$
$$s \rightleftharpoons u + e^- + \bar{\nu}_e \tag{5.14}$$

den Gleichgewichtszustand erreicht. Man erhält aus den Reaktionsgleichungen die Bedingungen für die chemischen Potentiale der Quarks und Leptonen. Damit sich die Materie im β–Gleichgewicht befindet, muß das chemische Potential des Teilchens auf der linken Seite der Reaktionsgleichung mit der Summe der chemischen Potentiale der Teilchen auf der rechten Seite übereinstimmen. Auf diese Weise erhält man die Relationen

$$\mu_{d,c} = \mu_{u,c} + \mu_{e^-} \ , \tag{5.15}$$
$$\mu_{s,c} = \mu_{u,c} + \mu_{e^-} \ . \tag{5.16}$$

Dabei wurden die chemischen Potentiale der Neutrinos auf Null gesetzt, da ihre Zahl nicht erhalten ist. Sie verlassen den Stern innerhalb der ersten Sekunden seiner Existenz.

Man kann eine ähnliche Reaktionsgleichung für die Umwandlung von Myonen in Elektronen aufstellen

$$\mu^- \rightleftharpoons e^- + \bar{\nu}_{e^-} + \nu_\mu \ . \tag{5.17}$$

Wie zuvor läßt sich daraus eine Bedingung für die chemischen Potentiale herleiten

$$\mu_{\mu^-} = \mu_{e^-} \ . \tag{5.18}$$

Die einzige erhaltene Größe bei Elektron und Myon ist die Ladung. Daher kann man die chemischen Potentiale dieser Leptonen schreiben als

$$\mu_{e^-} = \mu_{\mu^-} = -\mu_Q \ . \tag{5.19}$$

Das β–Gleichgewicht liefert keine neuen Bedingungen im Vergleich zu den im vorigen Kapitel genannten. Die Bedingungen des β–Gleichgewichts sind automatisch erfüllt, wenn man allen Teilchen die chemischen Potentiale entsprechend ihrer erhaltenen Ladungen zuordnet.

5.3 Konstruktion des Phasenübergangs

Verschiedene Phasen befinden sich im Gleichgewicht, wenn ihre Temperatur, ihr Druck und alle chemischen Potentiale übereinstimmen [28]. Da wir es mit mehreren chemischen Potentialen zu tun haben, handelt es sich dabei um eine Kurve in einem mehrdimensionalen Raum. Aufgrund der Tatsache, daß es schwierig ist, sich solch einen Raum vorzustellen, wollen wir die Situation zunächst an einem vereinfachten Beispiel mit nur einem einzigen chemischen Potential erläutern. Wir haben in Kapitel 4 beschrieben, wie sich für vorgegebene Temperatur der Druck in Abhängigkeit vom chemischen Potential berechnen läßt. Wenn wir dies für unterschiedliche Phasen tun (in der 2SC–Phase gilt $\Delta_2 \neq 0$, $\Delta_5 = \Delta_7 = 0$, wohingegen in der CFL–Phase alle drei Gapparameter von Null verschieden sind), bestimmt der Schnittpunkt der Kurven im μ–p–Diagramm den Punkt gleichen chemischen Potentials und gleichen Drucks für beide Phasen. Wenn wir dies für unterschiedliche Temperaturen durchführen, können wir die jeweils erhaltenen Gleichgewichtspunkte in ein μ–T–Diagramm einzeichnen und erhalten so die Phasengrenze. Welche Phase auf welcher Seite der Phasengrenze stabil ist, können wir ebenfalls am Druckdiagramm ablesen. Der Druck ist das negative des thermodynamischen Potentials. Somit ist bei vorgegebenem μ und T die Phase mit dem höheren Druck (niedrigeren thermodynamischen Potential) stabil.

Das von uns untersuchte Problem hat jedoch nicht nur ein chemisches Potential, sondern vier. Hier gibt es unterschiedliche Möglichkeiten Phasenübergänge zu konstruieren. Wenn wir uns an das oben beschrieben Kriterium des Phasengleichgewichts halten, finden Phasenübergänge an Punkten gleichen Drucks und jeweils identischer chemischer Potentiale statt. Wir wollen aber (elektrisch und farb–) neutrale Materie betrachten. Bei dieser Einschränkung können die einzelnen chemischen Potentiale nicht frei voneinander gewählt werden, so daß sie in beiden Phasen gleich sind. Die Bedingung der lokalen Neutralität macht die Konstruktion eines Phasenübergangs, bei dem sich die Phasen im vollständigen chemischen Gleichgewicht befinden, im allgemeinen unmöglich. Wir werden die chemischen Potentiale μ_3, μ_8 und μ_Q in Abhängigkeit von μ aus den Neutralitätsbedingungen bestimmen und dann bei der Konstruktion des Phasenübergangs so vorgehen, als hätten wir nur ein chemisches Potential μ. Ein solches Vorgehen wird auch als Maxwell-Konstruktion bezeichnet. Dabei liegen an der Grenzfläche unterschiedliche ladungs– und farbladungschemische Potentiale vor. In [29] wurde solch eine Grenzfläche zwischen neutraler CFL–Materie und neutraler Kernmaterie untersucht. Dort wurde berechnet, wie sich die unterschiedlichen chemischen Potentiale und Teilchendichten in einer Grenzschicht von ca. 10 fm Ausdehnung angleichen.

5.4 Homogene neutrale Materie im β–Gleichgewicht

Wir beginnen unsere Analyse der Quarkphasen mit neutraler Materie im β–Gleichgewicht. Jede Phase soll dabei farb– und ladungsneutral sein. Abbildung 5.1 zeigt die Drücke der einzelnen Phasen. Als normale Phase bezeichnen wir die Phase, in der keine Diquarkkondensate vorhanden sind, die also nicht farbsupraleitend ist. Dies Phase wird für uns nicht von Interesse sein, weil sie für alle betrachteten Fälle ungünstiger ist als die beiden farbsupraleitenden Phasen.

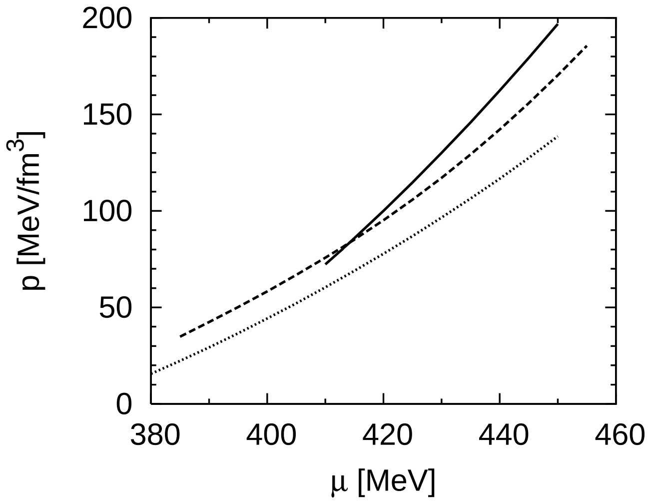

Abbildung 5.1: Drücke der Quarkphasen bei $T = 0$ in Abhängigkeit vom quarkchemischen Potential μ bei $T = 0$, CFL–Phase (durchgezogene Linie), 2SC–Phase (gestrichelte Linie), normale Phase (gepunktete Linie).

Bei $\mu \approx 414$ MeV findet ein Übergang von der 2SC– in die CFL–Phase statt. Bei der 2SC–Phase sind Elektronen nötig, um die Neutralität herzustellen, da die reine farbneutrale 2SC–Phase positiv geladen ist. Die farbneutrale CFL–Phase hingegen ist gleichzeitig auch ladungsneutral.

Abbildung 5.2 zeigt die Konstituentenmassen und die Gaps der jeweils günstigsten Phase. In der CFL–Phase ist die Konstituentenmasse der Strange–Quarks wesentlich geringer als in der 2SC–Phase. Außerdem haben in der CFL–Phase Up– und Down–Quarks die gleiche Masse. In der 2SC–Phase ist nur Δ_2 von null verschieden. Dieser Diquarkgap steigt mit zunehmendem chemischen Potential an. In der CFL–Phase sind dann alle drei Gapparameter ungleich null. Δ_5 und Δ_7 sind gleich groß. In der CFL–Phase ist Δ_2

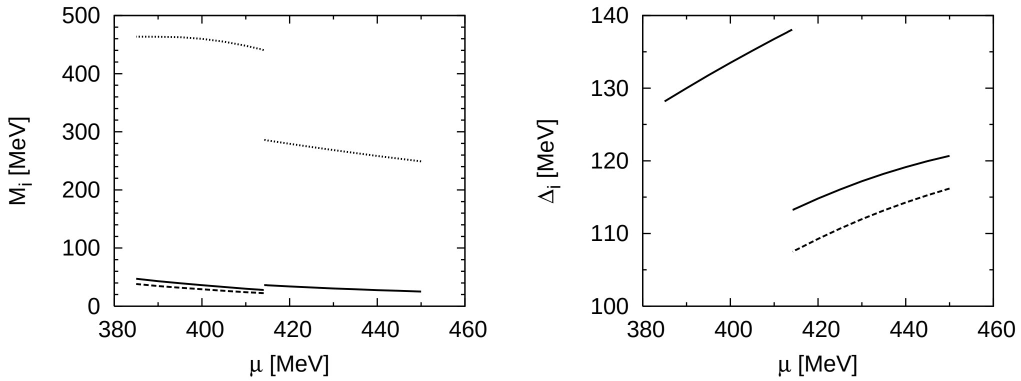

Abbildung 5.2: Konstituentenmassen und Diquarkgaps der jeweils günstigsten Phase bei $T = 0$ in Abhängigkeit vom quarkchemischen Potential μ. Links: Konstituentenmassen M_u (durchgezogene Linie), M_d (gestrichelt) (in der CFL–Phase $M_u = M_d$) und M_s (gepunktet). Rechts: Diquarkgaps Δ_2 (durchgezogene Linie), $\Delta_5 = \Delta_7$ (gestrichelt).

kleiner als in der 2SC–Phase. Dies ist einleuchtend, wenn man bedenkt, daß in der 2SC–Phase nur (u_g, d_r) und (u_r, d_g) Paare existieren, während in der CFL–Phase die blauen Strange–Quarks ebenfalls um u_r und d_g werben (siehe Gl. (2.13)). In der CFL–Phase sind einige Quarkspezies an der Bildung unterschiedlicher Kondensate beteiligt. Dadurch wird jedes Kondensat etwas geschwächt.

Obwohl für einen Neutronenstern $T \approx 0$ gilt, kann man natürlich ausrechnen, wie der Übergangspunkt von der Temperatur beeinflußt wird. Zum Vergleich zeigt Abbildung 5.3 die Drücke der Quarkphasen bei $T = 20$ MeV. Qualitativ ändert sich im Vergleich zu $T = 0$ nichts. Die Drücke liegen insgesamt etwas höher und der Übergang verschiebt sich zu einem zu höherem chemischen Potential μ. Er liegt jetzt bei ca. 420 MeV.

In Kapitel 6 werden wir von erhaltenen Leptonenzahlen ausgehen und uns daher auch mehr für die Elektronen- und Myonendichten interessieren. Um die durch die zusätzlichen Bedingungen hervorgerufenen Änderungen erkennen zu können, zeigt Abbildung 5.4 die Leptonendichten und die Quarkdichte. Wie schon erwähnt, ist die farbneutrale CFL–Phase bei $T = 0$ automatisch auch ladungsneutral. Daher gibt es dort auch keine Leptonen. Die farbneutrale 2SC–Phase hingegen ist positiv geladen und wird erst durch die Anwesenheit von Elektronen und Myonen neutral. Bei endlicher Temperatur ist auch in der CFL–Phase eine geringe Dichte an Leptonen vorhanden. Außerdem vergrößert sich die Quarkdichte bei steigender Temperatur etwas.

Bei einigen Temperaturen haben wir keinen Schnittpunkt zwischen den

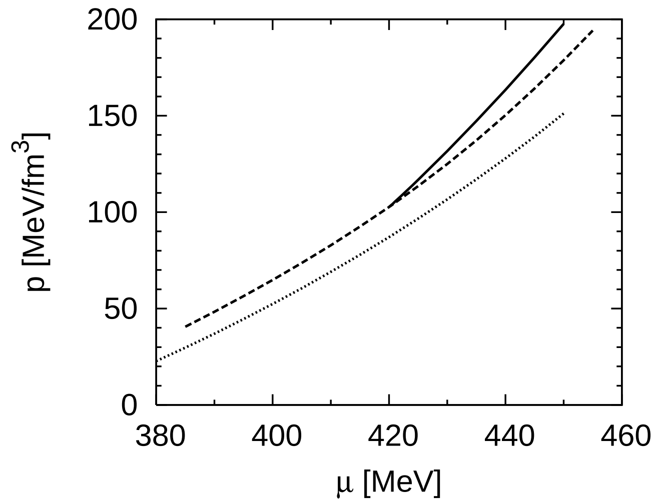

Abbildung 5.3: Drücke der Quarkphasen bei $T = 20$ MeV in Abhängigkeit vom quarkchemischen Potential μ bei $T = 0$, CFL–Phase (durchgezogene Linie), 2SC–Phase (gestrichelte Linie), normale Phase (gepunktete Linie).

Druckkurven der CFL–Phase und der 2SC–Phase gefunden. Die Kurve der CFL–Phase endet in diesen Fällen knapp oberhalb der 2SC–Kurve. Dies ist in Abbildung 5.5 im vergrößerten Ausschnitt zu sehen. Wir konnten in diesen Fällen unterhalb eines bestimmten quarkchemischen Potentials keine neutrale CFL–Phase mehr konstruieren. Das Fehlen eines Schnittpunktes bedeutet, daß es keinen Punkt gleicher Temperatur und gleichen Drucks für die beiden Phasen gibt, wo der Phasenübergang stattfinden könnte. Die Frage ist, welche Bedeutung das für den Phasenübergang hat. Wir können bei jedem quarkchemischen Potential eine Aussage darüber machen, welche Phase bei den gegebenen Bedingungen die bevorzugte ist – nämlich die mit dem höheren Druck. Was passiert jedoch, wenn sich das chemische Potential ändert und dabei das Ende der CFL-Phase überschritten wird?

Eine Möglichkeit, dieses Problem zu lösen, wäre das Auffinden weiterer Phasen, die diese Lücke schließen. Wir werden hierauf in Kapitel 6.4.1 zurückkommen. Eine andere Möglichkeit, das Problem zu umgehen, sind gemischte Phasen, bei denen man die Einschränkung der Neutralität für die einzelnen Komponenten aufgibt und die Neutralität nur noch global für das Gemisch verlangt. Wir werden in Kapitel 5.5 die Möglichkeit gemischter farbneutraler Phasen betrachten. Dabei soll jede Komponente für sich farbneutral aber nicht ladungsneutral sein. Die Ladungsneutralität wird durch das richtige Volumenverhältnis der gegensätzlich geladenen Phasen hergestellt.

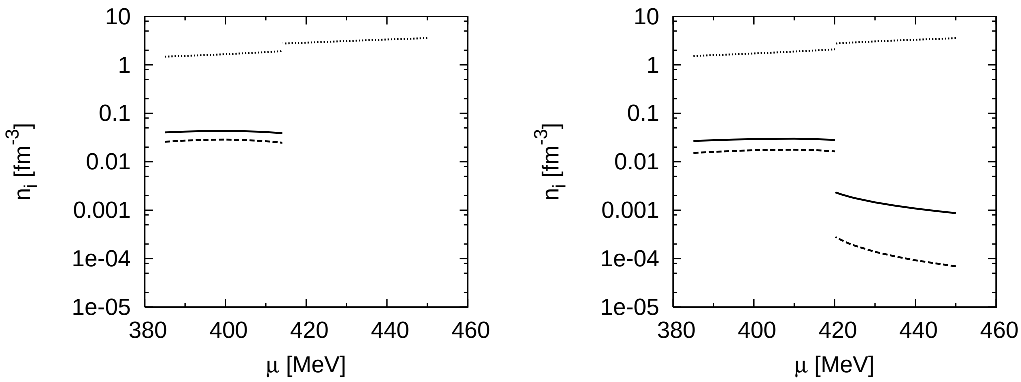

Abbildung 5.4: Quark- und Leptonendichten in der jeweils günstigsten Phase in Abhängigkeit vom quarkchemischen Potential μ. Links: Elektronendichte (durchgezogene Linie), Myonendichte (gestrichelt) und Gesamtquarkdichte (gepunktet) für $T = 0$. Rechts: die gleichen Dichten für $T = 20\,\mathrm{MeV}$

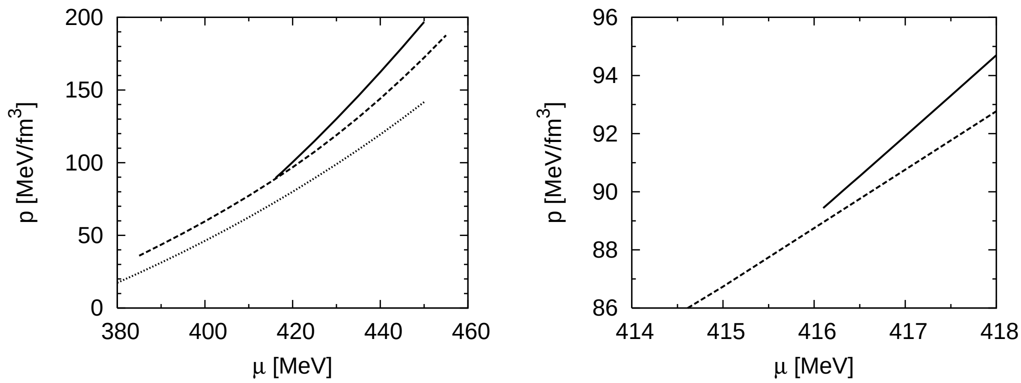

Abbildung 5.5: Drücke der Quarkphasen bei $T = 10\,\mathrm{MeV}$ in Abhängigkeit vom quarkchemischen Potential μ. CFL–Phase (durchgezogene Linie), 2SC–Phase (gestrichelte Linie), normale Phase (gepunktete Linie). Die rechte Abbildung ist ein Ausschnitt aus dem linken Diagramm.

5.4.1 Ausschnitt aus dem Phasendiagramm

Um einen Überblick darüber zu haben, wann welche Phase bevorzugt ist, ist es sinnvoll, ein Phasendiagramm zu zeichnen. Abbildung 5.6 zeigt einen kleinen Bereich des Phasendiagramms für elektrisch neutrale und farbneutrale Materie in der T–μ–Ebene. Die Phasengrenze beschreibt (meist) Punkte gleichen Drucks bei gleichem quarkchemischen Potential. Die anderen chemischen Potentiale (μ_3, μ_8, μ_Q) stimmen jedoch in den benachbarten Phasen nicht überein; sie werden durch die Neutralitätsbedingungen festgelegt.

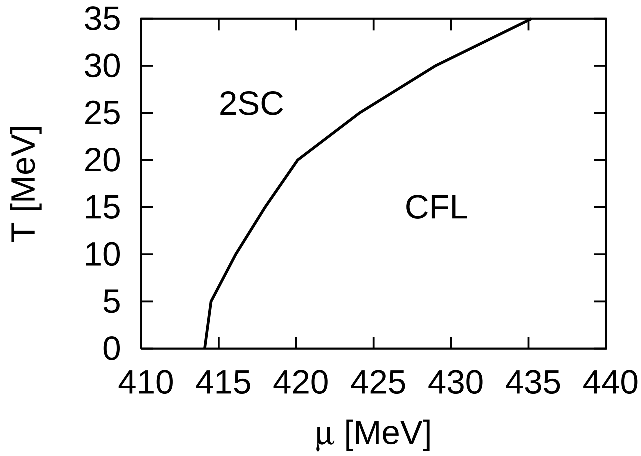

Abbildung 5.6: Phasengrenze zwischen jeweils elektrisch und farbneutraler 2SC– und CFL–Phase.

Die Phasengrenze ist nicht an jeder Stelle durch einen Schnittpunkt im Druckdiagramm gekennzeichnet. Wie schon zuvor angesprochen, kommt es vor, daß wir unterhalb eines bestimmten quarkchemischen Potentials keine neutrale CFL–Lösung finden konnten. Hier tritt das Problem nur für manche Temperaturen und auch erst kurz vor dem erwarteten Schnittpunkt (die Linien im Druckdiagramm sind schon nah beieinander) auf. Wir behandeln diesen Sachverhalt im Phasendiagramm so, als würde der Phasenübergang am Endpunkt der CFL–Phase stattfinden.

5.5 Gemischte Phasen farbneutraler Materie

An dieser Stelle wollen wir uns mit gemischten Phasen bei $T = 0$ beschäftigen. Unser Ziel ist es, gemischte Phasen aus 2SC– und CFL–Materie konstruieren, bei denen jede Komponente für sich farbneutral aber nicht ladungsneutral ist. Wenn man die beiden Phasen im richtigen Verhältnis zusammenfügt, ist die Mischung ladungsneutral. Damit unterscheiden wir uns von Referenz [30], in der auch für die Farbladungen nur globale Neutralität wurde. Wir verlangen hier Farbneutralität für jede einzelne Komponente, da zu erwarten ist, daß sich farbelektrische Felder besonders ungünstig auf die Stabiltät der gemischten Phase auswirken.

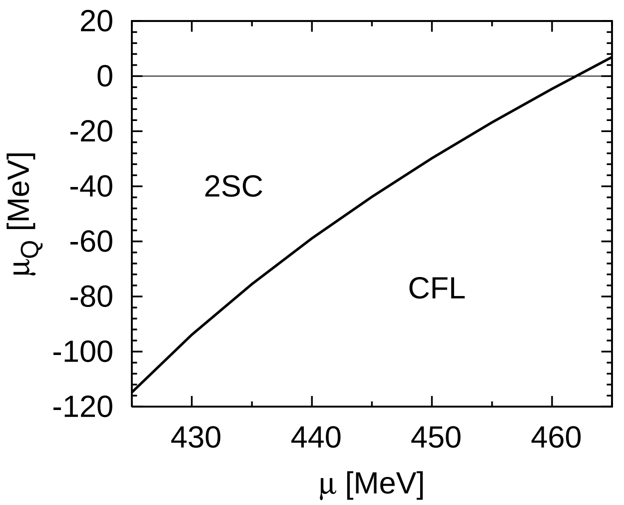

Abbildung 5.7: Ausschnitt aus dem Phasendiagramm farbneutraler (aber nicht ladungsneutraler) Quarkmaterie bei $T = 0$.

Abbildung 5.7 zeigt das Phasendiagramm in der μ–μ_Q–Ebene für farbneutrale, aber nicht ladungsneutrale Materie. Gemischte Phasen können sich entlang der Phasengrenzlinie bilden, solange eine der beiden homogenen Phasen positiv und die andere negativ geladen ist. Entlang dieser Linie haben beide Phasen das gleiche thermodynamische Potential d.h. den gleichen Druck und übereinstimmende quarkchemische und ladungschemische Potentiale; lediglich die farbchemischen Potentiale μ_3 und μ_8 unterscheiden sich, da sie jeweils durch die Bedingung der lokalen Farbneutralität festgelegt werden. Bei negativem ladungschemischen Potential ist die CFL–Phase negativ geladen. Die 2SC–Phase ist in dem abgebildeten Bereich positiv. Da die gemischte Phase als Ganzes ladungsneutral sein soll, muß gelten

$$n_Q^{CFL} \underbrace{x^{CFL}}_{=1-x^{2SC}} + n_Q^{2SC}\, x^{2SC} = 0 \,, \tag{5.20}$$

wobei x^i der Volumenanteil der Phase i ist. Daraus ergibt sich der Volumenanteil der 2SC–Komponente

$$x^{2SC} = \frac{n_Q^{CFL}}{n_Q^{CFL} - n_Q^{2SC}} \,. \tag{5.21}$$

Diese Größe ist im linken Diagramm von Abbildung 5.8 dargestellt. Die 2SC–Komponente hat einen Volumenanteil von nicht mehr als 3,5 Prozent. Sie ist also nur als kleine Beimischung vorhanden. Dies ist einleuchtend, da die CFL–Phase fast ladungsneutral ist. (Der Quarkanteil der farbneutralen CFL–Phase ist gleichzeitig auch ladungsneutral. Die elektrische Ladung wird daher nur durch die Leptonen erzeugt.) Es ist somit nur ein sehr geringer 2SC–Anteil nötig, um die Neutralität herzustellen. Die Ladungsdichten der beiden Komponenten sind in Tabelle 5.1 aufgeführt.

μ [MeV]	425	430	435	440	445
n_Q^{CFL} [fm^{-3}]	$-0,0070$	$-0,0036$	$-0,0019$	$-0,0009$	$-0,0004$
n_Q^{2SC} [fm^{-3}]	$0,200$	$0,240$	$0,276$	$0,312$	$0,346$

Tabelle 5.1: Ladungsdichten der CFL– und der 2SC–Komponente

Das rechte Diagramm von Abbildung 5.8 zeigt die Differenz der thermodynamischen Potentiale der gemischten und der günstigsten neutralen homogenen Phase (hier ist das die CFL–Phase)

$$\Delta\Omega = \Omega^{mix} - \Omega^{hom} \tag{5.22}$$

in Abhängigkeit vom quarkchemischen Potential μ. Das thermodynamische Potential der gemischten Phase ist um weniger als 0,2 MeV geringer als das der neutralen CFL–Phase. Dies wird unter Berücksichtigung von Oberflächen– und Coulombeffekten nicht ausreichen, um die gemischte Phase zu stabilisieren.

Wir müssen jedoch in der CFL–Phase noch die Golstone-Bosonen der chiralen Symmetriebrechung berücksichtigen. Bei negativem ladungschemischen Potential μ_Q sind in der CFL–Phase negative π-Mesonen vorhanden.

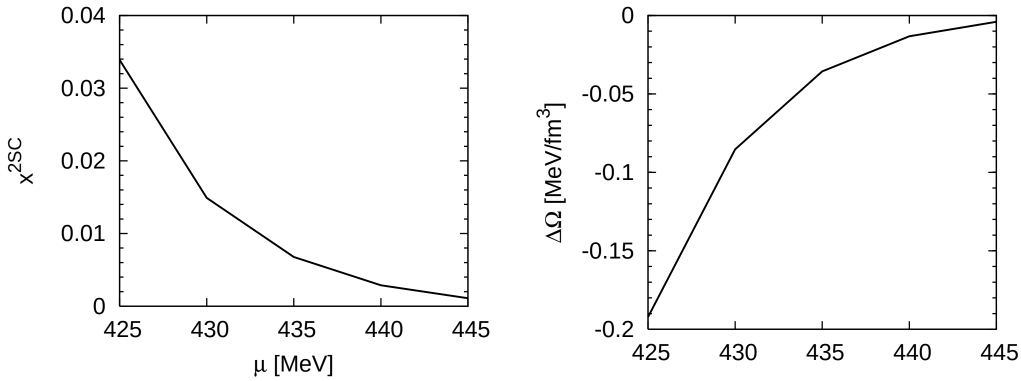

Abbildung 5.8: Links: Volumenanteil der 2SC–Komponente bei $T = 0$ in Abhängigkeit vom quarkchemischen Potential μ. Rechts: Differenz der thermodynamischen Potentiale der gemischten und der neutralen homogenen Phase bei $T = 0$ in Abhängigkeit vom quarkchemischen Potential μ.

Sie sind für die Konstruktion der gemischten Phase sehr wichtig, da sie für einen Großteil der Ladung in der CFL–Komponente verantwortlich sind. Eine größere negative Ladung dieser Komponente vergrößert den Volumenanteil der 2SC–Phase (siehe Gl. 5.21), was die Bildung einer gemischten Phase unterstützt.

Die Pionen sind in unserem Formalismus (unsere Wahl der Kondensate bei der Linearisierung der Lagrangedichte) nicht enthalten. Um ihren Einfluß dennoch abschätzen zu können, greifen wir auf Formeln aus der Literatur zurück.

Die Formeln zur Berechnung der Pionmasse entnehmen wir [31]

$$M_{\pi^-}^2 = 3\frac{\Delta^2}{\pi^2 f_\pi^2}(m_u + m_d)m_s \; . \tag{5.23}$$

Darin bezeichnen m_u, m_d und m_s die nackten Quarkmassen. In [31] werden durch einen Parameter b, der proportional zur Feinstruktukonstanten $\alpha(\approx 1/137)$ ist, elektromagnetische Korrekturen gemacht. Wir berücksichtigen diese Korrekturen hier nicht, da sie verhältnismäßig klein sind (ca. 1%). Gl. (5.23) enthält einen Beitrag Δ^2. Da wir in der CFL–Phase drei verschieden Gaps haben, wählen wir

$$\Delta^2 = \frac{1}{3}(\Delta_2^2 + \Delta_5^2 + \Delta_7^2) \; . \tag{5.24}$$

Die Pionzerfallskonstante f_π entnehmen wir [3]

$$f_\pi^2 = \frac{21 - 8\,\ln 2}{36\,\pi^2}\mu^2 \; . \tag{5.25}$$

Das effektive chemische Potential der Pionen ist gegeben durch [31]

$$\mu_{\pi^-} = -\mu_Q + \frac{m_u^2 - m_d^2}{2\mu} = -\mu_Q \; . \tag{5.26}$$

Hierbei fällt der Massenterm weg, da wir mit gleichen nackten Massen für Up– und Down–Quarks rechnen. Das effektive thermodynamische Potential der Pionen entnehmen wir der gleichen Referenz

$$\Omega_{\pi^-} = -\frac{f_\pi^2}{2}\mu_{\pi^-}^2 \left(1 - \frac{M_{\pi^-}^2}{\mu_{\pi^-}^2}\right)^2 \Theta(\mu_{\pi^-}^2 - M_{\pi^-}^2) \; . \tag{5.27}$$

Die Teilchendichte der Pionen berechnen wir durch Ableiten des thermodynamischen Potentials

$$\begin{aligned} n_{\pi^-} &= -\frac{\partial \Omega_{\pi^-}}{\partial \mu_{\pi^-}} \\ &= f_\pi^2 \, \mu_{\pi^-} \left(1 - \frac{M_{\pi^-}^4}{\mu_{\pi^-}^4}\right) \Theta(\mu_{\pi^-}^2 - M_{\pi^-}^2) \; . \end{aligned} \tag{5.28}$$

Wir sind nun in der Lage, das Phasendiagramm in der μ–μ_Q–Ebene zu berechnen (Abb. 5.9). Pionen kommen nur in dem Bereich der CFL–Phase

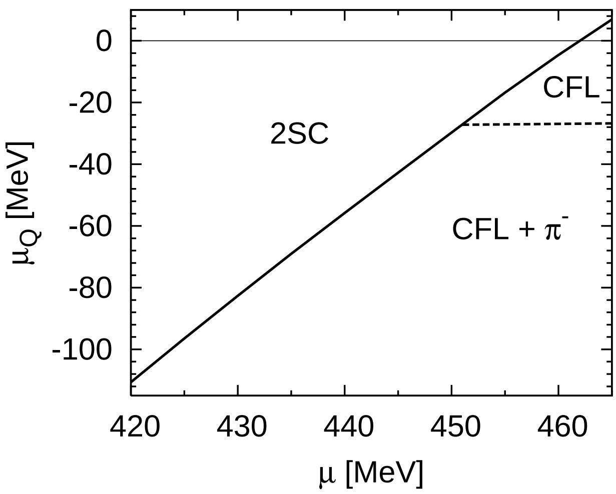

Abbildung 5.9: Ausschnitt aus dem Phasendiagramm farbneutraler (aber nicht ladungsneutraler) Quarkmaterie bei $T = 0$.

vor, in dem der Betrag ihres chemischen Potentials größer ist als ihre Masse. Dies ist für $\mu_Q \lesssim -27\,\mathrm{MeV}$ der Fall. Dort, wo Pionen vorhanden sind, verringern sie das thermodynamische Potential der CFL–Phase und verschieben die Phasengrenze zu kleineren $|\mu_Q|$. Der Einfluß der Pionen ist bei betragsmäßig größeren ladungschemischen Potentialen am größten. Bei $\mu = 425\,\mathrm{MeV}$ und $\mu_Q = -96,5\,\mathrm{MeV}$ verringern sie das thermodynamische Potential um $-4,02\,\mathrm{MeV/fm^3}$ auf $-118,86\,\mathrm{MeV/fm^3}$, was einem Einfluß von 3,4 Prozent entspricht. Von der Gesamtladungsdichte von $-0,102\,\mathrm{fm^{-3}}$ tragen die Pionen $-0,098\,\mathrm{fm^{-3}}$. Sie sind also fast vollständig für die negative Ladung der CFL–Phase verantwortlich. In Tabelle 5.2 sind die Ladungsdichten der beiden Komponenten der gemischten Phase aufgeführt. Beim Vergleich mit Tabelle 5.1 wird deutlich, wie stark die Ladungsdichte der CFL–Phase durch die Pionen zugenommen hat (bei $\mu = 425\,\mathrm{MeV}$ ist sie um Faktor 15 größer geworden, und bei $\mu = 445\,\mathrm{MeV}$ ist die Ladungsdichte mit Pionen sogar mehr als hundertmal so groß wie ohne Pionen).

μ [MeV]	425	430	435	440	445
n_Q^{CFL} [$\mathrm{fm^{-3}}$]	$-0,1020$	$-0,0879$	$-0,0736$	$-0,0584$	$-0,0402$
n_Q^{2SC} [$\mathrm{fm^{-3}}$]	$0,228$	$0,257$	$0,287$	$0,317$	$0,348$

Tabelle 5.2: Ladungsdichten der CFL– (mit Pionen) und der 2SC–Komponente

Wir betrachten nun wieder den Volumenanteil der 2SC–Komponente an der gemischten Phase. In Abbildung 5.10 sieht man sofort den starken Anstieg dieses Anteils im Vergleich zu dem Fall ohne Pionen (Abb. 5.8). Der Anteil der 2SC–Komponente steigt bei $\mu = 425\,\mathrm{MeV}$ von 3,5 Prozent (ohne Pionen) auf über 30 Prozent.

Auch die Differenz der thermodynamischen Potentiale fällt mit Pionen wesentlich größer aus. Abbildung 5.11 zeigt wieder die Differenz der thermodynamischen Potentiale der gemischten und der günstigsten neutralen homogenen Phase, welche weiterhin die CFL–Phase ist. Bei $\mu = 420\,\mathrm{MeV}$ ist die gemischte Phase mit $\Delta\Omega \approx -5,5\,\mathrm{MeV/fm^3}$ im Vorteil gegenüber der CFL–Phase.

Das alleine reicht allerdings noch nicht aus, um die günstigere Struktur zu identifizieren. Bei der gemischten Phase müssen noch Oberflächen– und Coulombenergien berücksichtigt werden. Die gemischte Phase ist dann günstiger, wenn gilt

$$\Omega^{mix} + \epsilon^S + \epsilon^C < \Omega^{hom} \,. \tag{5.29}$$

Die Oberflächen– (ϵ^S) und Coulombenergiedichten (ϵ^C) entnehmen wir Re-

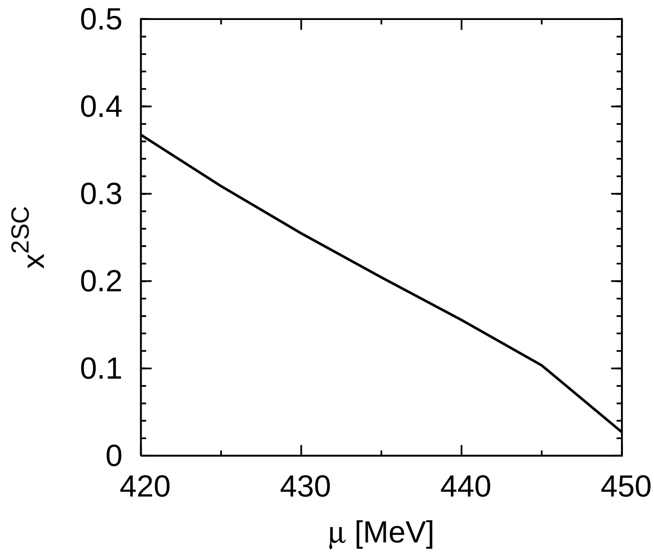

Abbildung 5.10: Volumenanteil der 2SC–Komponente bei $T = 0$ in Abhängigkeit vom chemischen Potential μ (unter Berücksichtigung der Pionen).

ferenz [32]

$$\epsilon^S = \frac{dx\sigma}{r_0} , \tag{5.30}$$

$$\epsilon^C = 2\pi\alpha_{em} f_d(x) x (\Delta n_Q)^2 r_0^2 . \tag{5.31}$$

Dabei ist d die Dimensionalität der Struktur. Sie gibt an, in welcher geometrischen Form die Phase mit dem geringeren Volumenanteil vorliegt. Die Dimensionaliät ist 1 für Platten, 2 für Stäbe[1] und 3 für Tropfen. x steht für den Anteil der selteneren Phase und r_0 für deren Ausdehnung (bei Tropfen und Stäben ist das der Radius, bei Platten die halbe Dicke). Die Oberflächenspannung wird mit σ bezeichnet. In die Berechnung der Coulombenergie fließen die Feinstrukturkonstante $\alpha_{em} \approx 1/137$ und die Differenz der Ladungsdichten $\Delta n_Q = n_Q^{2SC} - n_Q^{CFL}$ ein. Schließlich benötigen wir noch den geometrischen Faktor

$$f_d(x) = \frac{1}{d+2}\left(\frac{2 - d\,x^{1-2/d}}{d-2} + x\right) . \tag{5.32}$$

Die Ausdehnung der selteneren Phase r_0 läßt sich durch Minimierung der

[1] Man bezeichnet die gemischten Phase mit $d = 1$ und $d = 2$ auch als Pasta-Phasen. Dabei vergleicht man $d = 1$ mit Lasagne und $d = 2$ mit Spaghetti.

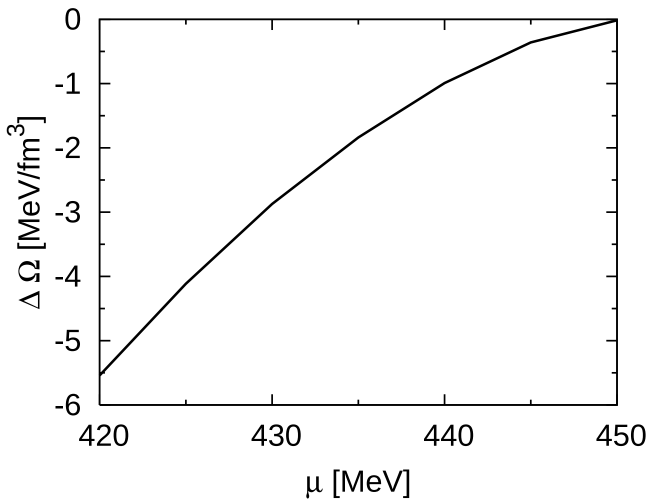

Abbildung 5.11: Differenz der thermodynamischen Potentiale der gemischten und der homogenen Phase bei $T = 0$ in Abhängigkeit vom chemischen Potential μ (unter Berücksichtigung der Pionen).

Summe aus Oberlächen– und Coulombenergiedichte bestimmen [32]

$$r_0 = \left(\frac{d\sigma}{4\pi\alpha_{em} f_d(x)(\Delta n_Q)^2} \right) \ . \tag{5.33}$$

Dies kann man nun in Gl. (5.30) und (5.31) einsetzen, um die Oberlächen– und Coulombbeiträge zu bestimmen

$$\epsilon^S + \epsilon^C = \frac{3}{2} \left(4\pi\alpha_{em} d^2 f_d(x) x^2 \right)^{1/3} (\Delta n_Q)^{2/3} \, \sigma^{2/3} \ . \tag{5.34}$$

Solange die Summe dieser beiden Beiträge kleiner ist als $-\Delta\Omega$ ist die Relation (5.29) erfüllt, und die gemischte Phase ist günstiger als die homogene CFL–Phase. Diese Bedingung ist in Abbildung 5.12 illustriert. Sie zeigt die günstigere Phase in Abhängigkeit vom quarkchemischen Potential und der Oberflächenspannung. Die maximalen Oberflächenspannungen, bis zu denen die gemischte Phase stabil ist, unterscheiden sich für die unterschiedlichen Geometrien kaum. Bei $\mu = 420\,\text{MeV}$ bleibt die gemischte Phase bis zu Oberflächenspannungen von $23 - 24\,\text{MeV/fm}^2$ stabil.

Wir benötigen nun eine Abschätzung über die Größe der Oberflächenspannung σ, um sie mit den maximal zulässigen Oberflächenspannungen zu vergleichen. Dort, wo die beiden Komponenten der gemischten Phase aufeinander stoßen, haben sie übereinstimmende μ und μ_Q. Die farbchemischen

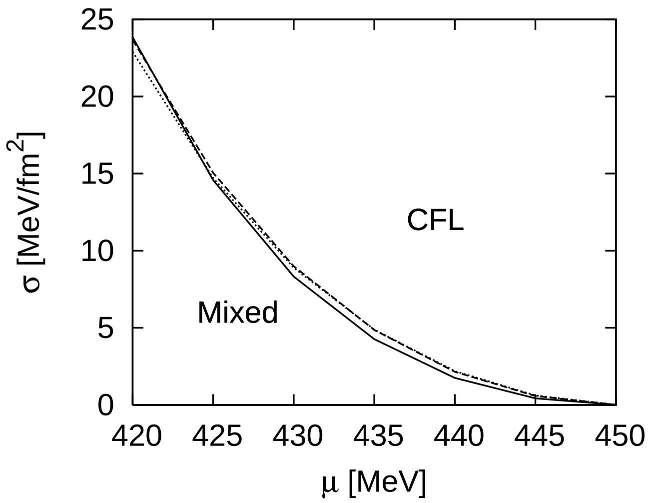

Abbildung 5.12: Phasendiagramm für verschiedene Dimensionalitäten in Abhängigkeit vom quarkchemischen Potential und der Oberflächenspannung. $d = 1$ (durchgezogene Linie), $d = 2$ (gestrichelt), $d = 3$ (gepunktet).

Potentiale μ_3 und μ_8 unterscheiden sich jedoch für die beiden Komponenten. Desweiteren existieren in der CFL–Phase nichtverschwindende Diquarkgaps Δ_5 und Δ_7, während diese in der 2SC–Phase null sind. Auch die Quarkkondensate ϕ_a stimmen in beiden Phasen nicht überein. Die sich unterscheidenden Größen (μ_3, μ_8, Δ_2, Δ_5, Δ_7, ϕ_u, ϕ_d und ϕ_s) müssen sich in einer kleinen Umgebung um die Grenzfläche einander angleichen. Wenn sie sich im Bereich der Grenzfläche bei konstanten μ und μ_Q ändern, befindet sich das System nicht mehr im Minimum des thermodynamischen Potentials. Innerhalb der Grenzschicht durchläuft das thermodynamische Potential ein Maximum. Die Höhe dieser Schwelle im thermodynamischen Potential ist entscheidend für die Oberflächenspannung.

Die Form der Schwelle hängt davon ab, auf welche Weise sich die einzelnen Größen von der 2SC– zur CFL–Komponente verändern. Wir machen hier die einfachste Abschätzung. Wir verändern alle Größen gleichmäßig entlang einer Gerade von ihrem Wert in der 2SC–Komponente zu dem in der CFL–Komponente

$$X = X^{2SC} + (X^{CFL} - X^{2SC})\, t \,, \tag{5.35}$$

wobei X die jeweiligen Größen (μ_3, μ_8, Δ_2, Δ_5, Δ_7, ϕ_u, ϕ_d und ϕ_s) bezeichnet und t von null bis eins läuft. Auf diese Weise können wir Ω in Abhängigkeit von Δ_5 entlang der Grenzschicht berechnen. Das Ergebnis zeigt Abbildung 5.13. Das linke Minimum entspricht der 2SC–Komponente und das rech-

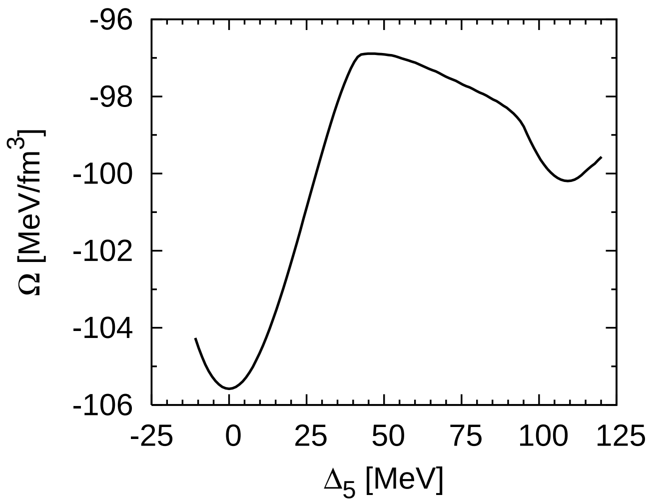

Abbildung 5.13: Thermodynamisches Potential entlang der Grenzschicht in Abhängigkeit von Δ_5 für $\mu = 420\,\mathrm{MeV}$ und $\mu_Q = -110,6\,\mathrm{MeV}$

te der CFL–Komponente. Normalerweise müßten die beiden Minima gleich hoch liegen, da gleicher Druck eine Bedingung für die Phasengrenze ist, entlang derer sich die gemischte Phase ausbilden kann. Die unterschiedliche Höhe der Minima entsteht dadurch, daß wir bei der Berechnung des Verlaufs von Ω die Pionen nicht berücksichtigt haben. Die Schwelle hat eine Höhe von ca. $8{,}7\,\mathrm{MeV/fm}^3$.

Die Breite der Übergangsschicht läßt sich aufgrund von Dimensionsüberlegungen mit $1/\Delta_5^{CFL}$ abschätzen. Man kann die Oberflächenspannung grob mit

$$\sigma \approx \frac{\text{Höhe der Schwelle}}{\Delta_5^{CFL}} \tag{5.36}$$

abschätzen [33]. Mit einer Schwellenhöhe von $8{,}7\,\mathrm{MeV/fm}^3$ und $\Delta_5 = 109,3\,\mathrm{MeV}$ ergibt sich so eine Oberflächenspannung von knapp $16\,\mathrm{MeV/fm}^2$. Nach dieser Abschätzung der Oberflächenspannung wäre die gemischte Phase stabil (vergleiche Abb. 5.12). Um eine zuverlässigere Aussage treffen zu können, ist es nötig, den Einfluß unterschiedlicher Veränderungen der Parameter entlang des Weges durch die Grenzschicht zu untersuchen und die Pionen ebenfalls in das Vorgehen einzubauen.

Eine genauere Behandlung de Oberflächenspannung wurde in [32] für eine gemischte Phase aus einer normalen und einer 2SC–Komponente durchgeführt. Es ist wünschenswert ähnliche Überlegungen für die von uns untersuchte gemischte Phase durchzuführen.

Kapitel 6

Protoneutronensterne

Wenn ein massereicher Stern (1,4 bis 3 Sonnenmassen) sein Brennmaterial verbraucht hat, also die Fusionsprozesse bis zum Element Eisen abgelaufen sind[1], kollabiert der Stern aufgrund des Gravitationsdrucks und explodiert in einer Supernova. Der daraus zunächst entstehende Protoneutronenstern ist heiß (Temperaturen von einigen zehn MeV) und extrem dicht. Aufgrund der hohen Dichte ist die freie Weglänge der Neutrinos wesentlich geringer, als der Sternradius. Die Neutrinos sind zu diesem Zeitpunkt im Stern gefangen („getrappt“). Sie verlassen nach ca. zehn Sekunden den Stern. Dabei nehmen sie Energie mit, wodurch der Stern sich abkühlt und schließlich zum „kalten“ Neutronenstern wird.

6.1 Zusätzliche Bedingungen

In einem Protoneutronenstern sind die Neutrinos zunächst noch getrappt. Dies verschafft uns zwei weitere Erhaltungsgrößen: die Leptonenzahlen der vorkommenden Leptonenfamilien. Zwei zusätzliche Erhaltungsgrößen bringen auch zwei zusätzliche chemische Potentiale mit sich. Die chemischen Potentiale der Leptonen sind daher gegeben durch

$$\mu_{e^-} = -\mu_Q + \mu_{l_e} \ , \tag{6.1}$$
$$\mu_{\mu^-} = -\mu_Q + \mu_{l_\mu} \ , \tag{6.2}$$
$$\mu_{\nu_e} = \mu_{l_e} \ , \tag{6.3}$$
$$\mu_{\nu_\mu} = \mu_{l_\mu} \ . \tag{6.4}$$

Dabei ist μ_{l_e} das chemische Potential der Leptonen der ersten Familie und μ_{l_μ} das chemische Potential der Leptonen der zweiten Familie. Die Teilchendich-

[1]Eisen ist das Element mit der größten Bindungsenergie pro Nukleon

ten der Leptonen setzen sich aus den Teilchendichten der jeweiligen geladenen Leptonen und denen der Neutrinos zusammen

$$n_{l_e} = n_e + n_{\nu_e} \ , \tag{6.5}$$

$$n_{l_\mu} = n_\mu + n_{\nu_\mu} \ . \tag{6.6}$$

Wir nehmen an, daß die Teilchendichte der myonischen Leptonen verschwindet, da der Stern, der zur Supernova wurde ebenfalls eine verschwindende Dichte an Leptonen dieser Familie enthielt. Der Anteil der elektronischen Leptonen ist mit der Baryonenzahl n_B verknüpft

$$n_{l_e} = Y_e \, n_B \ , \tag{6.7}$$

$$n_{l_\mu} = 0 \ . \tag{6.8}$$

Da ein Baryon aus drei Quarks besteht beträgt die Baryonendichte ein Drittel der Quarkdichte

$$n_B = \frac{n}{3} \ . \tag{6.9}$$

Für die chemischen Potentiale und Teilchendichten der Quarks ändert sich durch die beiden zusätzlichen leptonischen Erhaltungsgrößen nichts. Sie werden weiter durch die Beziehungen aus Kapitel 5.1 beschrieben.

Wie im letzten Kapitel auch variieren wir wieder das quarkchemische Potential μ und erhalten die restlichen fünf chemischen Potentiale (μ_3, μ_8, μ_Q, μ_{l_e} und μ_{l_μ}) aus den fünf erhaltenen Teilchendichten.

Wir werden im folgenden Ergebnisse für drei Anteile Y_e an Leptonen der ersten Familie präsentieren ($Y_e = 0$; $Y_e = 0,1$; und $Y_e = 0,32$). Der erste Fall enspricht dem Spezialfall, in dem in der Summe keine Leptonen der ersten Familie vorhanden sind. Der letzte Fall ($Y_e = 0,32$) beschreibt ein realistisches Szenario. Den Leptonenanteil $Y_e = 0,1$ betrachten wir als Zwischenschritt.

Wenn im folgenden von der Leptonenzahl die Rede ist, soll immer die Zahl der Leptonen der ersten Familie gemeint sein, da wir bei jedem Fall von verschwindender Leptonenzahl für die zweite (und natürlich auch die dritte) Familie ausgehen.

6.2 $Y_e = 0$

Zunächst betrachten wir den Extremfall verschwindender Leptonenzahl. Für $T = 0$ unterscheidet sich die CFL–Phase bei $Y_e = 0$ nicht von der CFL–Phase ohne Leptonenzahlerhaltung, da die farblose CFL-Phase auch ladungsneutral ist (ohne daß dazu Elektronen oder Myonen nötig sind). Für die ohne Elektronen und Myonen positiv geladene farbneutrale 2SC–Phase bedeutet eine verschwindende Leptonenzahl, daß ebensoviele Antineutrinos vorhanden sein müssen, wie Elektronen (bzw. Myonen) zum Erreichen der Neutralität nötig sind. Dieser Umstand erfordert ein negatives leptonchemisches Potential. Abbildung 6.1 zeigt wieder den Druck in Abhängigkeit vom quarkchemischen Potential. Der Übergang von der 2SC– in die CFL–Phase findet hier schon bei $\mu \approx 410\,\mathrm{MeV}$ statt. Die Bedingung $Y_e = 0$ begünstigt also aus den oben genannten Gründen die CFL–Phase gegenüber der 2SC–Phase.

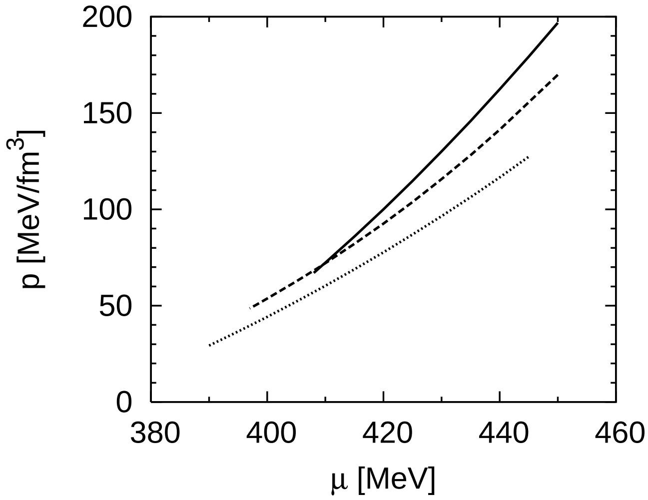

Abbildung 6.1: Drücke der Quarkphasen für $Y_e = 0$ bei $T = 0$ in Abhängigkeit vom quarkchemischen Potential μ. CFL–Phase (durchgezogene Linie), 2SC–Phase (gestrichelte Linie), normale Phase (gepunktete Linie).

Wie oben erwähnt, verändert die Bedingung der Leptonenzahlerhaltung bei $Y_e = 0$ und $T = 0$ nur die 2SC–Phase im Vergleich zu dem in Kapitel 5.4 besprochenen Szenario. Es ist daher sinnvoll, sich an dieser Stelle die veränderten Leptonendichten und die dazu nötigen ladungs- und leptonchemischen Potentiale anzuschauen (Abbildung 6.2). In der Abbildung sind nur die Elektronen- und Myonendichten gezeigt. Da aber bei beiden Leptonenfamilen die Leptonzahl verschwinden soll, ist die Dichte der Neutrinos das jeweils Negative der Dichten der geladenen Leptonen.

Die Leptonendichten sind um etwa einen Faktor zehn kleiner als in Abbildung 5.4. Die fehlende negative Ladung wird durch zusätzliche Strange–Quarks aufgebracht.

Bei einigen Temperaturen haben wir im Druckdiagramm keinen Schnitt-

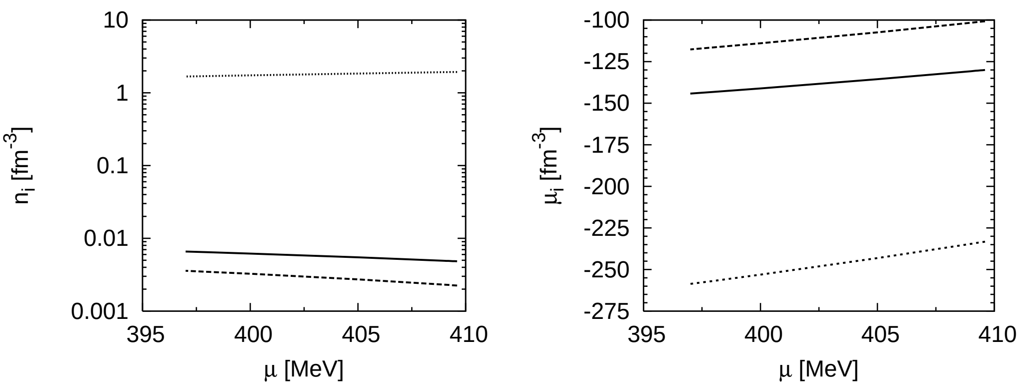

Abbildung 6.2: Dichten und chemische Potentiale in der 2SC-Phase für $Y_e = 0$ bei $T = 0$. Links: Gesamtquarkdichte (gepunktet), Elektronendichte (durchgezogen) und Myonendichte (gestrichelt). Rechts: ladungschemisches Potential μ_Q (kurz gestrichelt), μ_{l_e} (durchgezogen), μ_{l_μ} (lang gestrichelt).

punkt zwischen der Druckkurve der 2SC– und der CFL–Phase gefunden, da wir unterhalb eines bestimmten quarkchemischen Potentials μ erneut keine neutrale CFL–Phase mehr konstruieren konnten. Bei einem Leptonenanteil $Y_e = 0$ ist dieser Effekt gering. Hier kommt es jeweils fast zu einem Schnittpunkt, was bedeutet, daß die Druckdifferenz zischen der 2SC–Phase und dem Endpunkt der CFL–Phase sehr gering ist. Das ist vergleichbar mit der Situation bei den Rechnungen für den Neutronenstern (Kap. 5.4). Wir werden im nächsten Kapitel noch genauer auf dieses Problem zu sprechen kommen, da es dort bedeutend ausgeprägter auftritt.

Der oben beschriebene Fall tritt z. B. auch bei $T = 20\,\mathrm{MeV}$ auf. Unterhalb von $\mu \approx 420\,\mathrm{MeV}$ haben wir keine neutrale CFL-Lösung mehr gefunden. Das gleiche gilt für $T = 35\,\mathrm{MeV}$, wo wir unterhalb von $\mu = 434\,\mathrm{MeV}$ keine neutrale CFL–Phase mehr konstruieren konnten. Die zugehörigen Diagramme sind in den Abbildungen 6.3 und 6.4 zu sehen.

In Abbildung 6.5 betrachten wir wieder die Leptonendichten und die chemischen Potentiale, diesmal für $T = 20\,\mathrm{MeV}$. Wie schon erwähnt ist die CFL–Phase bei endlichen Temperaturen nicht automatisch ladungsneutral, sondern erst durch die Anwesenheit geladener Leptonen. Dies erfordert den Ausgleich durch Antineutrinos. Da die Ladung der puren CFL–Phase (ohne Leptonen) jedoch sehr viel geringer ist als die der 2SC-Phase, sind auch die erforderlichen leptonchemischen Potentiale für den vorliegenden Fall wesentlich geringer als für die 2SC–Phase.

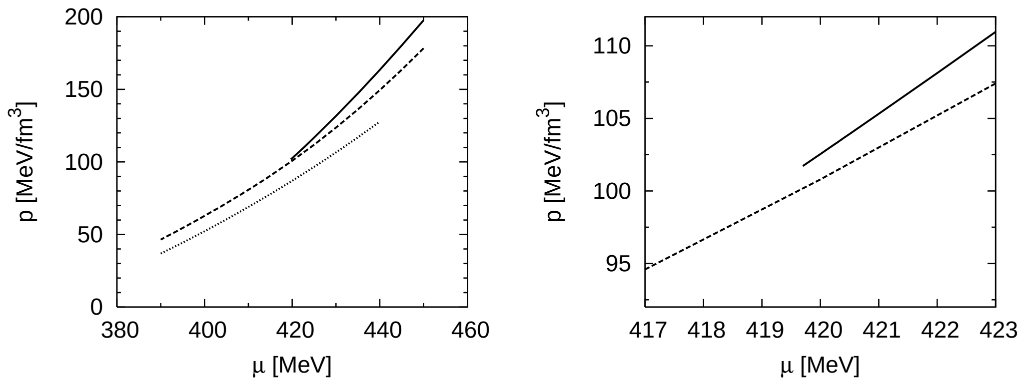

Abbildung 6.3: Drücke der Quarkphasen für $Y_e = 0$ bei $T = 20\,\mathrm{MeV}$ in Abhängigkeit vom quarkchemischen Potential μ. CFL–Phase (durchgezogene Linie), 2SC–Phase (gestrichelte Linie), normale Phase (gepunktete Linie). Die rechte Abbildung ist ein Ausschnitt aus dem linken Diagramm.

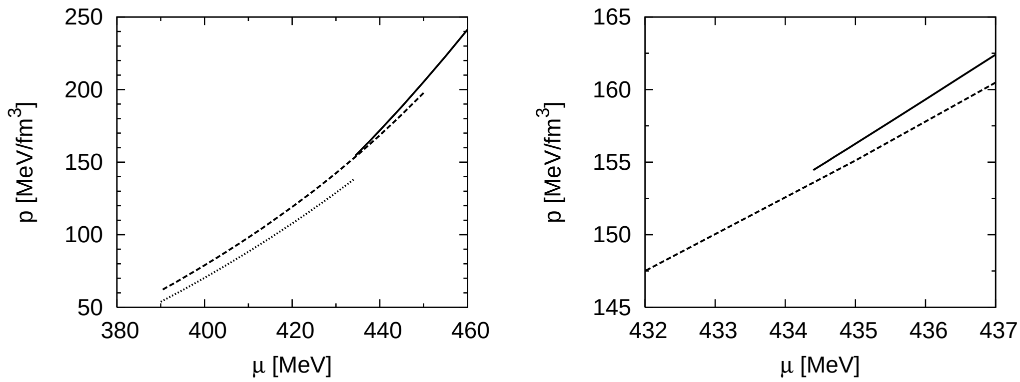

Abbildung 6.4: Drücke der Quarkphasen für $Y_e = 0$ bei $T = 35\,\mathrm{MeV}$ in Abhängigkeit vom quarkchemischen Potential μ. CFL–Phase (durchgezogene Linie), 2SC–Phase (gestrichelte Linie), normale Phase (gepunktete Linie). Die rechte Abbildung ist ein Ausschnitt aus dem linken Diagramm.

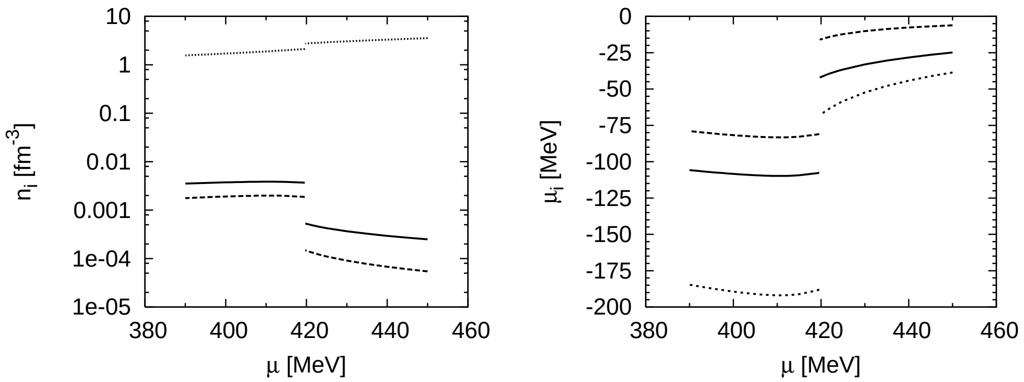

Abbildung 6.5: Dichten und chemische Potentiale der jeweils günstigsten Phase für $Y_e = 0$ bei $T = 20\,\mathrm{MeV}$. Links: Gesamtquarkdichte (gepunktet), Elektronendichte (durchgezogen) und Myonendichte (gestrichelt). Rechts: ladungschemisches Potential μ_Q (kurz gestrichelt), μ_{l_e} (durchgezogen), μ_{l_μ} (lang gestrichelt).

6.3 $Y_e = 0,1$

Als Zwischenschritt zu einem realistischen Leptonenanteil wollen wir nun den Fall $Y_e = 0,1$ betrachten. Ein Leptonenanteil Y_e von zehn Prozent sollte die CFL–Phase nun auch mehr beeinträchtigen.

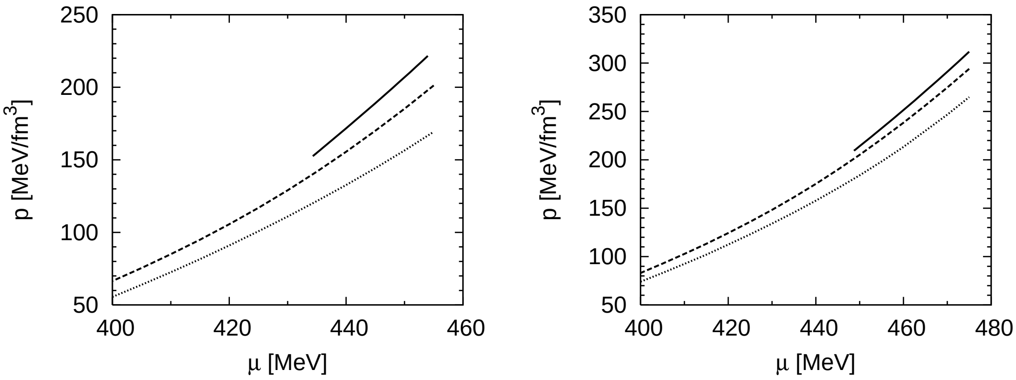

Abbildung 6.6: Drücke der Quarkphasen für $Y_e = 0,1$ bei $T = 20\,\mathrm{MeV}$ (links) und $T = 35\,\mathrm{MeV}$ (rechts) in Abhängigkeit vom quarkchemischen Potential μ. CFL–Phase (durchgezogene Linie), 2SC–Phase (gestrichelt), normale Phase (gepunktet).

Bei einem Leponenanteil Y_e von 10 Prozent finden wir im Druckdiagramm bei keiner Temperatur einen Schnittpunkt zwischen den Linien der CFL– und der 2SC–Phase. Unterhalb eines bestimmten quarkchemischen Potentials (für $T = 20\,\mathrm{MeV}$ unterhalb von $\mu \approx 456\,\mathrm{MeV}$) ist die neutrale CFL–Phase nicht mehr stabil. Es ist dort nicht mehr möglich, bestimmte Quarks zu paaren.

Bei der Bildung eines Diquarkkondensats wird die Paarungsenergie 2Δ frei. Paaren können die beiden Quarks aber nur, wenn sie den gleichen Fermiimpuls haben. Für unterschiedliche Quarkspezies sind die Fermiimpulse der verschiedenen Quarks allerdings aufgrund der unterschiedlichen chemischen Potentiale und Massen i. a. nicht gleich. Man kann sich vorstellen, daß das Quark mit dem niedrigeren Fermiimpuls zunächst auf den Fermiimpuls des anderen Quarks gehoben werden muß, um dann die Paarung einzugehen. Dafür muß Energie aufgewandt werden. Eine Paarung ist also nur solange günstig, wie mehr Energie frei wird als zuvor aufgewendet werden muß.

In [34] wird die Energie die nötig ist, um die Quarks auf gleiche Fermiimpulse zu bringen mit M_s^2/μ abgeschätzt. Die CFL–Phase ist dann nur stabil für

$$\frac{M_s^2}{\mu} < 2\,\Delta\,. \tag{6.10}$$

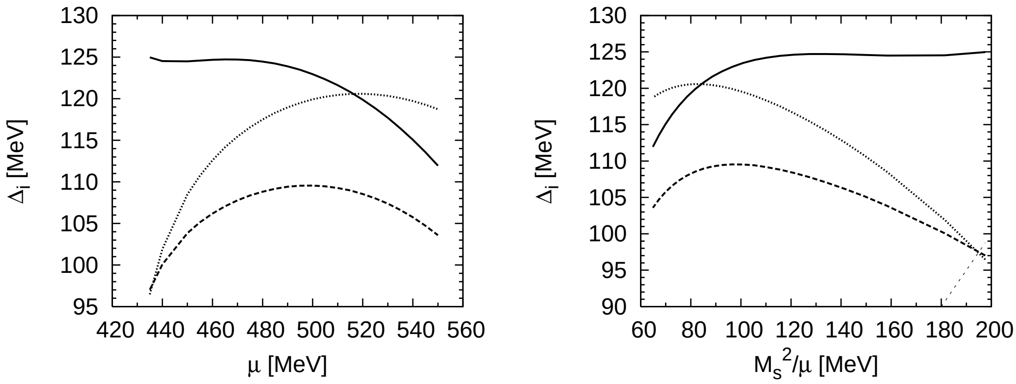

Abbildung 6.7: Gaps in der CFL–Phase für $Y_e = 0,1$ bei $T = 20\,\mathrm{MeV}$. Δ_2 (durchgezogen), Δ_5 (gestrichelt), Δ_7 (gepunktet). Links: Gaps in Abhängigkeit von μ. Rechts: Gaps in Abhängigkeit von M_s^2/μ, dünn gestrichelte Linie: $M_s^2/2\mu$.

Abbildung 6.7 zeigt die Gaps in der CFL-Phase. Auf der rechten Seite sind die Gaps in Abhängigkeit von M_s^2/μ abgebildet. Rechts von der leicht gestrichelten Linie ist das Stabilitätskriterium (6.10) für Δ_5 und Δ_7 nicht mehr erfüllt. Die Abschätzung fällt mit der Region zusammen, in der unsere CFL–Phase nicht mehr stabil ist.

Solange wir eine neutrale CFL–Phase finden, ist sie günstiger als eine neutrale 2SC–Phase mit dem gleichen quarkchemischen Potential. Wenn wir also ein vorgegebenes μ haben, können wir eine Aussage darüber machen, welche Phase in unserem Modell die günstigste ist. In dem Bereich, in dem wir eine CFL–Phase gefunden haben, ist es diese. Bei niedrigeren Werten des chemischen Potentials, bei denen wir keine neutrale CFL–Phase finden konnten, ist es die 2SC–Phase. Schwieriger ist es bei einem sich ändernden chemischen Potential. Wir können zwar immer sagen, welche Phase die günstigere ist, aber wie würde ein Übergang aussehen? Was passiert an dem Sprung im Druckdiagramm? Wir gehen davon aus, daß es in diesem Bereich noch andere Phasen gibt, die wir bislang nicht untersucht haben. Dabei könnte es sich zum Beispiel um gaplose CFL–Phasen [34, 35] handeln[2]. Nach [34] findet der Übergang zur gaplosen CFL–Phase dort statt, wo Kriterium (6.10) nicht mehr erfüllt ist. Bei gaplosen Phasen ist die Bildung bestimmter Diquarkkondensate nicht mit einer Lücke im Energiespektrum verbunden.

Wir erwarten also eine reichere Phasenstruktur, die dann keine Sprünge mehr aufweist.

[2] In [36, 37] wird eine gaplose 2SC–Phase vorgeschlagen.

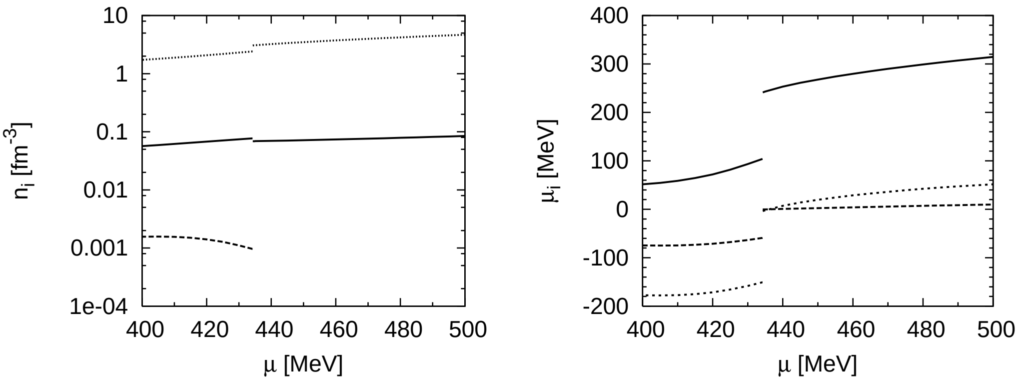

Abbildung 6.8: Dichten und chemische Potentiale der jeweils günstigsten Phase für $Y_e = 0,1$ bei $T = 20\,\text{MeV}$. Links: Gesamtquarkdichte (gepunktet), Elektronendichte (durchgezogen) und Myonendichte (gestrichelt). Rechts: ladungschemisches Potential μ_Q (kurz gestrichelt), μ_{l_e} (durchgezogen), μ_{l_μ} (lang gestrichelt).

Schon bei einem Leptonenanteil Y_e von zehn Prozent ist die recht gute Ladungsneutralität der CFL–Phase von Nachteil. Ohne Leptonenzahlerhaltung (Kap. 5.4) und bei $Y_e = 0$ findet der Übergang zur CFL–Phase bei $T = 20$ bereits bei einem quarkchemischen Potential von ca. 420 MeV statt, wohingegen er sich bei $Y_e = 0,1$ bereits auf $\mu = 434\,\text{MeV}$ verschiebt.

Wenn man die rechte Seite von Abbildung 6.8 betrachtet, erkennt man, daß das elektronleptonchemische Potential in der CFL–Phase zwischen 250 und 300 MeV liegt. In der 2SC–Phase liegt es lediglich bei 50-100 MeV. Dies führt jedoch für beide Phasen aufgrund der sehr unterschiedlichen ladungschemischen Potentiale (0-50 MeV für die CFL–Phase, $-200 - -150\,\text{MeV}$ für die 2SC–Phase) zu vergleichbaren chemischen Potentialen für die Elektronen, für die $\mu_{e^-} = -\mu_Q + \mu_{l_e}$ gilt (siehe Gl.(6.1)). Dementsprechend sind die Elektronendichten in beiden Phasen ähnlich (linkes Diagramm der gleichen Abbildung). Die Hauptursache für das elektronchemische Potential ist in beiden Fällen eine unterschiedliche. In der CFL–Phase kommt es hauptsächlich durch die Forderung nach einem entsprechend hohen Anteil an Leptonen der ersten Familie zustande, wohingegen bei der 2SC–Phase die Ladungsneutralität die treibende Kraft ist.

6.4 $Y_e = 0,32$

Ein Leptonenanteil Y_e von 32 Prozent entspricht einem realistischen Szenario.

Wie in den vorangegangenen Abschnitten, beginnen wir mit dem Vergleich der Drücke der unterschiedlichen Phasen (Abbildung 6.9). Wie auch schon in Kapitel 6.3 finden wir keine Schnittpunkte der Druckkurven mehr. Die CFL–Phase ist jedoch dort, wo sie noch existiert, erneut die günstigste Phase.

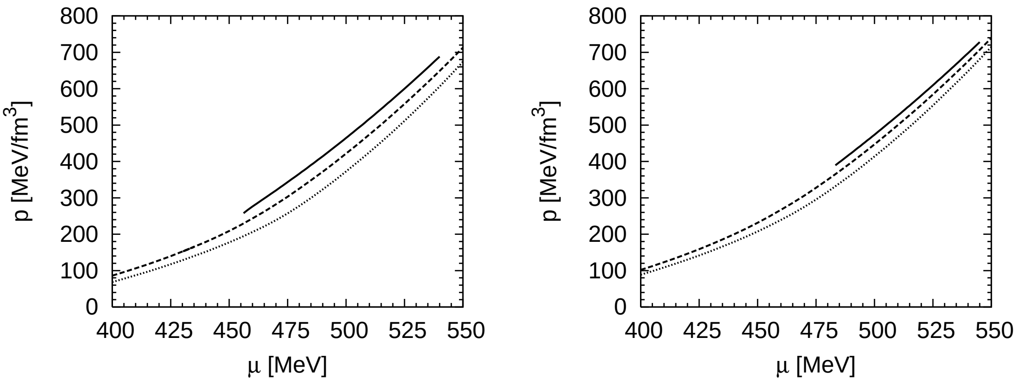

Abbildung 6.9: Drücke der Quarkphasen für $Y_e = 0,32$ bei $T = 20\,\mathrm{MeV}$ (links) und $T = 35\,\mathrm{MeV}$ (rechts) in Abhängigkeit vom quarkchemischen Potential μ. CFL–Phase (durchgezogene Linie), 2SC–Phase (gestrichelt), normale Phase (gepunktet).

Bei einem Leptonenanteil Y_e von 32 Prozent wird die Benachteiligung der CFL–Phase gegenüber der 2SC–Phase deutlicher. Während der Übergang zur CFL–Phase für $Y_e = 0,1$ noch bei $\mu = 434,3\,\mathrm{MeV}$ stattfindet, verschiebt er sich nun bereits auf $\mu = 456,2\,\mathrm{MeV}$. Es ist jedoch weiterhin so, daß überall dort, wo eine neutrale CFL–Phase existiert, diese auch die günstigste Phase ist. Bei steigender Temperatur endet die CFL–Phase bei noch höheren quarkchemischen Potentialen. So finden wir für $T = 35\,\mathrm{MeV}$ den Endpunkt bei $\mu = 483,3\,\mathrm{MeV}$.

In Abbildung 6.10 ist deutlich zu erkennen, daß M_s^2/μ wieder größer wird als Δ_5 und Δ_7, was erneut für eine gaplose CFL–Phase spricht. Wir finden hier noch für chemische Potentiale Lösungen, bei denen Δ_5 und Δ_7 bereits kleiner sind als $M_s^2/(2\mu)$. Dies hängt wahrscheinlich damit zusammen, daß die Relation (6.10) nur eine Näherung ist. Auch die zusätzliche Bedingung der Leptonenzahlerhaltung könnte einen Einfluß haben.

Betrachten wir nun die Leptonendichten und die chemischen Potentiale. Abbildung 6.11 unterscheidet sich qualitativ kaum von Abbildung 6.8. Die

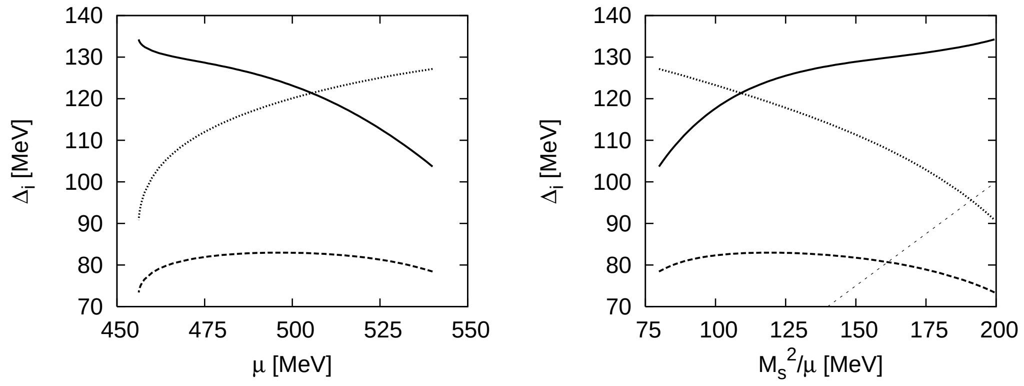

Abbildung 6.10: Gaps in der CFL–Phase für $Y_e = 0,32$ bei $T = 20\,\text{MeV}$. Δ_2 (durchgezogen), Δ_5 (gestrichelt), Δ_7 (gepunktet). Links: Gaps in Abhängigkeit von μ. Rechts: Gaps in Abhängigkeit von M_s^2/μ, dünn gestrichelte Linie: $M_s^2/2\mu$.

leptonchemischen Potentiale liegen erwartungsgemäß höher als für $Y_e = 0,1$. Für die CFL–Phase steigt μ_{l_e} bis auf etwa 500 MeV an und für die 2SC–Phase bis auf etwa 300 MeV. Wie auch für $Y_e = 0,1$ sind die elektronchemischen μ_e–Potentiale wieder vergleichbar.

Abbildung 6.12 veranschaulicht die Temperaturabhängigkeit der einzelnen Quarkphasen. Auf den ersten Blick fällt auf, daß die Phasen für steigende Temperaturen näher „zusammenrücken“. Die CFL–Phase ist wie auch bei den zuvor betrachteten Temperaturen überall dort, wo sie existiert bevorzugt. Allerdings werden die Druckunterschiede geringer. In Abbildung 6.13 sind die Diquarkgaps der jeweils günstigeren Phase in Abhängigkeit von der Temperatur aufgetragen. Man erkennt deutlich, daß Δ_5 und Δ_7 in der CFL–Phase stark abfallen, bevor die Phase endet. Der Gap der Up– und Down–Quarks Δ_2 steigt hingegen in diesem Temperaturbereich etwas. Dies weist auf eine Entwicklung in Richtung der 2SC–Phase hin, in der nur dieser Gap existiert und die anderen beiden verschwinden. In der 2SC–Phase sinkt Δ_2 mit zunehmender Temperatur. Der Diquarkgap fällt schließlich bei $\mu \approx 77\,\text{MeV}$ auf null. Ab diesem Punkt befindet sich die Materie in der normalen, nicht supraleitenden Phase. Dies ist auch das Verhalten, wie es in Phasendiagrammen typischerweise dargestellt wird (siehe Abbildung 1.1), obwohl diese meist ohne die Nebenbedingungen Neutralität und Leptonenzahlerhaltung abgeschätzt werden. Das Abfallen des Diquarkgaps bei höheren Temperaturen entspricht auch den allgemeinen Erwartungen für das Verhalten eines Supraleiters. Oberhalb einer kritischen Temperatur bricht die Supraleitfähigkeit zusammen.

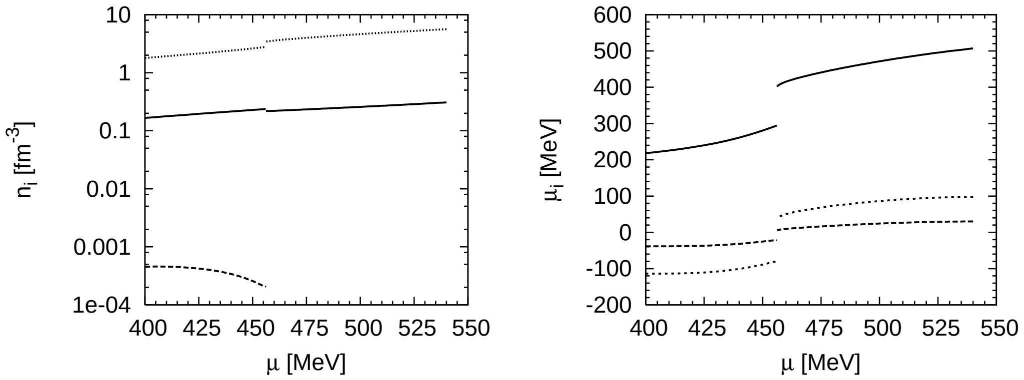

Abbildung 6.11: Dichten und chemische Potentiale der jeweils günstigsten Phase für $Y_e = 0,32$ bei $T = 20\,\mathrm{MeV}$. Links: Gesamtquarkdichte (gepunktet), Elektronendichte (durchgezogen) und Myonendichte (gestrichelt). Rechts: ladungschemisches Potential μ_Q (kurz gestrichelt), μ_{l_e} (durchgezogen), μ_{l_μ} (lang gestrichelt).

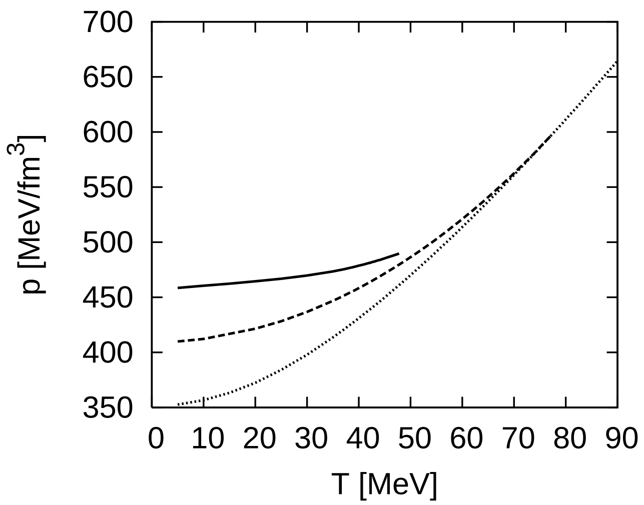

Abbildung 6.12: Drücke der Quarkphasen für $Y_e = 0,32$ bei $\mu = 500\,\mathrm{MeV}$ in Abhängigkeit von der Temperatur. CFL–Phase (durchgezogene Linie), 2SC–Phase (gestrichelt), normale Phase(gepunktet).

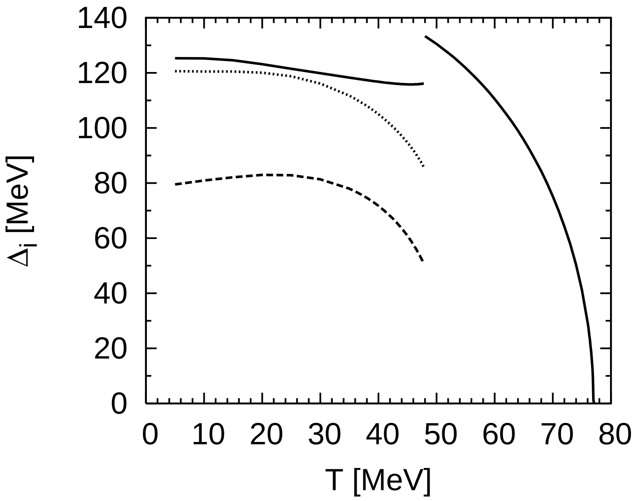

Abbildung 6.13: Gaps der jeweils günstigsten Quarkphase für $Y_e = 0,32$ bei $\mu = 500\,\mathrm{MeV}$ in Abhängigkeit von der Temperatur. Δ_2 (durchgezogene Linie), Δ_5 (gestrichelt), Δ_7 (gepunktet).

6.4.1 Eine zusätzliche Phase

Wir suchen nun nach Phasen, die die Lücke im Druckdiagramm schließen können. Es sind verschiedene Kombinationen der drei berücksichtigten Diquarkkondensate möglich. Wir betrachten jetzt den Fall

$$\Delta_2 = 0\,, \qquad \Delta_5 \neq 0\,, \qquad \Delta_7 \neq 0\,. \tag{6.11}$$

Diese Phase nennen wir sSC–Phase, da hier nur die beiden Diquarkkondensate, die ein Strange–Quark enthalten, von Null verschieden sind.

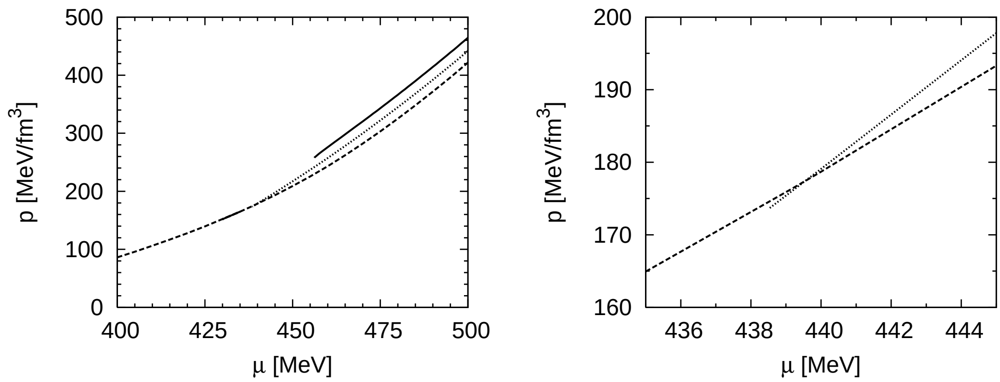

Abbildung 6.14: Drücke der neutralen Quarkphasen bei $Y_e = 0,32$ und $T = 20\,\mathrm{MeV}$ in Abhängigkeit vom quarkchemischen Potential μ. Links: CFL–Phase (durchgezogene Linie), sSC–Phase (gepunktet), 2SC–Phase (gestrichelt). Rechts: Ausschnitt aus dem linken Diagramm.

Abbildung 6.14 zeigt die Drücke der CFL–, sSC– und der 2SC–Phase. Man kann deutlich sehen, daß die CFL–Phase, solange sie existiert, die günstigste ist. Unterhalb des chemischen Potentials, bei dem die CFL–Phase endet ($\mu \approx 452\,\mathrm{MeV}$), ist die sSC–Phase günstiger als die 2SC–Phase. Bei $\mu = 439,5$ MeV schneidet die Druckkurve der sSC–Phase die der 2SC–Phase. Dort findet der Übergang statt. Das zu diesem Phasenübergang gehörende chemische Potential läßt sich wieder mit einer Maxwell–Konstruktion finden.

Wir betrachten zunächst die Quarkdichten in den einzelnen Phasen (Abb. 6.15). Die Dichte der Up-Quarks unterscheidet sich in der sSC–Phase kaum von der in der CFL–Phase, obwohl kein ud-Kondensat mehr vorhanden ist. Insgesamt sind mehr Up–Quarks vorhanden als Strange–Quarks. Es müssen also viele Up–Quarks entweder ungepaart oder vielleicht in einem anderen als den berücksichtigten Kondensaten vorliegen (z. B. als Kondensat zweier Up–Quarks). Die Dichte der Down–Quarks sinkt beim Übergang in

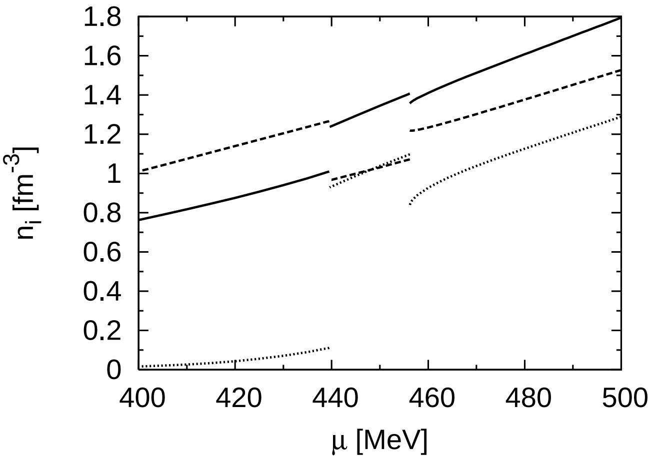

Abbildung 6.15: Quarkdichten in den jeweils günstigsten neutralen farbsupraleitenden Phasen bei $Y_e = 0,32$ und $T = 20\,\mathrm{MeV}$ in Abhängigkeit vom quarkchemischen Potential μ. Dichte der Up–Quarks n_u (durchgezogene Linie), n_d (gestrichelt), n_s (gepunktet).

die sSC–Phase etwas und die der Strange–Quarks steigt. Die Dichten dieser beiden Flavors sind etwa gleich groß. Da die Strange–Quarks aber auch mit den Up–Quarks paaren, bleiben auch ungepaarte, oder auf andere Weise gepaarte Down–Quarks übrig. Beim Übergang zur 2SC–Phase ergibt sich dann ein gewohntes Bild: Es liegt eine hohe Dichte an Up– und Down–Quarks vor und eine geringe Dichte an Strange–Quarks. Es sind mehr Down– als Up–Quarks vorhanden, da die Down–Quarks durch das negative ladungschemische Potential (Abb. 6.16) begünstigt werden.

Ein Blick auf die Teilchendichten und die chemischen Potentiale (Abb. 6.16) zeigt, daß sich die sSC–Phase bei diesen Größen an die CFL–Phase anschließt. Einen ganz anderen Eindruck vermittelt Abbildung 6.17. Die sSC–Phase paßt hier nicht so recht ins Bild. Die Gaps der CFL–Phase verändern sich unterhalb von 460 MeV deutlich in Richtung auf eine 2SC–Phase hin: Δ_2 steigt an, während Δ_5 und Δ_7 stark abfallen. Die daran anschließende sSC–Phase unterbricht diese Entwicklung: Δ_2 ist nicht mehr vorhanden und Δ_5 und Δ_7 werden wieder größer.

Die Klärung der Ursache für das Auftreten einer sSC–Phase und das Fehlen von uSC– oder dSC–Phasen an dieser Stelle bedarf weiterer Untersuchungen.

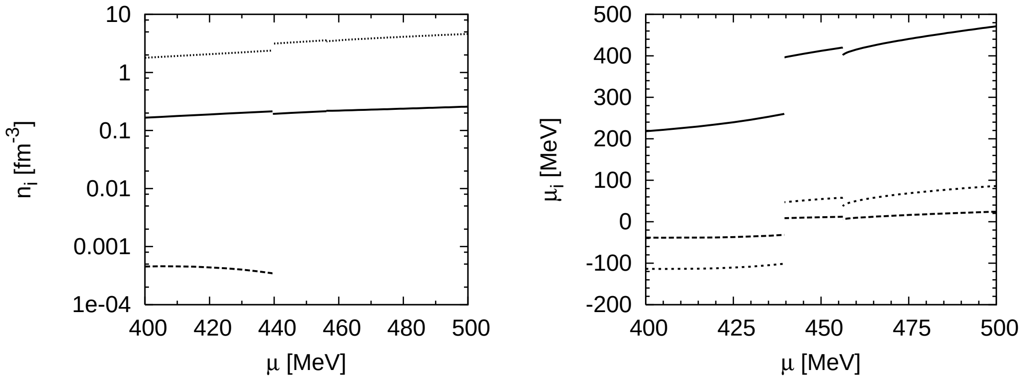

Abbildung 6.16: Teilchendichten und chemische Potentiale in der jeweils günstigsten neutralen Quarkphasen bei $Y_e = 0,32$ und $T = 20\,\text{MeV}$ in Abhängigkeit vom quarkchemischen Potential μ. Links: Gesamtquarkdichte (gepunktet), Elektronendichte (durchgezogen) und Myonendichte (gestrichelt). Rechts: ladungschemisches Potential μ_Q (kurz gestrichelt), μ_{l_e} (durchgezogen), μ_{l_μ} (lang gestrichelt).

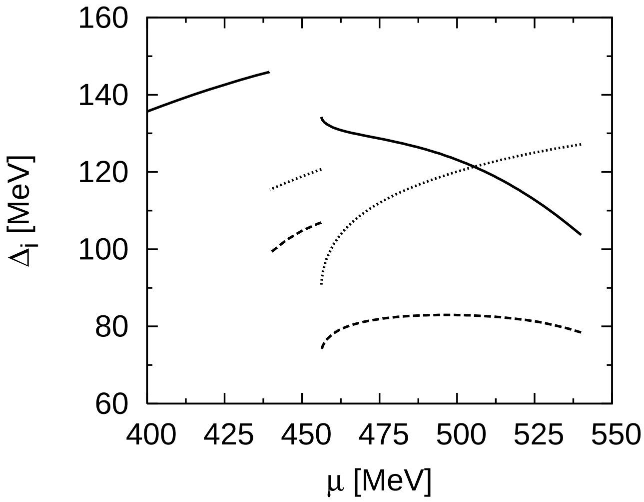

Abbildung 6.17: Gaps in der jeweils günstigsten Quarkphasen bei $Y_e = 0,32$ und $T = 20\,\text{MeV}$ in Abhängigkeit vom quarkchemischen Potential μ. Δ_2 (durchgezogen), Δ_5 (gestrichelt), Δ_7 (gepunktet).

6.4.2 CFL–Phase mit Kaon–Kondensat

Ähnlich wie wir in Kapitel 5.5 Pionen in unsere Rechnungen eingebaut haben, wollen wir nun Kaonen berücksichtigen. Nach [38] enthält die CFL–Phase bei endlichem leptonchemischen Potential μ_{l_e} ein K^+–Kondensat. Wir wollen nun den Einfluß dieses Kondensats abschätzen. Dabei gehen wir vor wie in Kapitel 5.5. Wir verwenden die Formeln für die Masse des Kaons und die Pionzerfallskonstante aus [3]

$$f_\pi^2 = \frac{21 - 8\,\ln 2}{36\,\pi^2}\mu^2 \tag{6.12}$$

$$M_{K^+} = \frac{3\,\Delta^2}{\pi^2\, f_\pi^2} m_d(m_u + m_s)\ . \tag{6.13}$$

Die Masse der Kaonen bewegt sich bei unseren Rechnungen im Bereich von 18 bis 19 MeV.

Da wir in der CFL–Phase drei verschiedene Gaps haben, wählen wir wieder

$$\Delta^2 = \frac{1}{3}(\Delta_2^2 + \Delta_5^2 + \Delta_7^2)\ . \tag{6.14}$$

Die Vorschrift zur Berechnung des effektive chemischen Potentials entnehmen wir [31]

$$\mu_{K^+} = \mu_Q + \frac{m_s^2 - m_u^2}{2\,\mu}\ . \tag{6.15}$$

Dort finden wir auch folgenden Ausdruck für den Beitrag der Kaonen zum thermodynamischen Potential

$$\Omega_{K^+} = -\frac{f_\pi^2}{2}\mu_{K^+}^2\left(1 - \frac{M_{K^+}^2}{\mu_{K^+}^2}\right)^2 \Theta(\mu_{K^+}^2 - M_{K^+}^2) \tag{6.16}$$

Wir haben dabei den in [31] vorkommenden Parameter b erneut vernachlässigt.

Die Kaondichte bestimmen wir durch die Ableitung des thermodynamischen Potentials nach dem chemischen Potential

$$\begin{aligned} n_{K^+} &= -\frac{\partial\Omega_{K^+}}{\partial\mu_{K^+}} \\ &= f_\pi^2\mu_{K^+}\left(1 - \frac{M_{K^+}^4}{\mu_{K^+}^4}\right)\Theta(\mu_{K^+}^2 - M_{K^+}^2) \end{aligned} \tag{6.17}$$

Durch die Anwesenheit der positiv geladenen Kaonen wirkt sich die Forderung nach einer erhaltenen Leptonenzahl weniger ungünstig aus, da ein Teil der Elektronen nun zur Erhaltung der Neutralität benötigt wird. Dies wird durch Abbildung 6.18 bestätigt. Dort sieht man (vgl. Abb. 6.9 links) die Drücke der Quarkphasen bei $T = 20\,\text{MeV}$ in Abhängigkeit vom quarkchemischen Potential μ. Der Beitrag der Kaonen ist jedoch recht gering, so daß man ihn nur im vergrößerten Ausschnitt auf der rechten Seite erkennt.

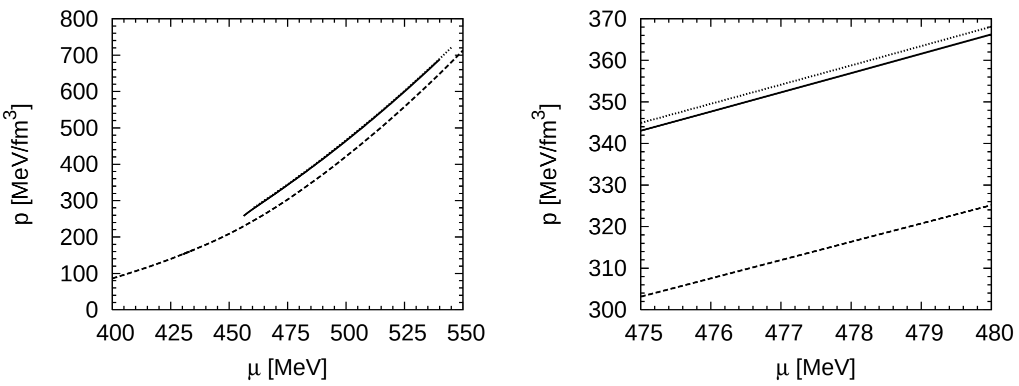

Abbildung 6.18: Drücke der neutralen Quarkphasen bei $Y_e = 0,32$ und $T = 20\,\text{MeV}$ in Abhängigkeit vom quarkchemischen Potential μ. Links: CFL–Phase (durchgezogene Linie), CFLK$^+$ (gepunktet), 2SC–Phase (gestrichelt). Rechts: Ausschnitt aus dem linken Diagramm.

Der Einfluß der Kaonen nimmt mit zunehmendem quarkchemischen Potential ebenfalls zu. Der durch die Kaonen verursachte Druck beträgt bei $\mu = 540\,\text{MeV}$ $p = 7,2\,\text{MeV}\,\text{fm}^{-3}$ bei einem Gesamtdruck von $689\,\text{MeV}\,\text{fm}^{-3}$. Bei $\mu = 470\,\text{MeV}$ verursachen die Kaonen einen Druck von $3{,}1\,\text{MeV}\,\text{fm}^{-3}$ bei einem Gesamtdruck von $322\,\text{MeV}\,\text{fm}^{-3}$. Die Kaonen erhöhen den Druck also um ca. 1 % (bei hohen chemische Potentialen etwas mehr, bei niedrigen chemischen Potentialen etwas weniger).

Abbildung 6.19 zeigt das ladungschemische und die leptonchemischen Potentiale in den beiden CFL–Phasen bei $T = 20\,\text{MeV}$. Auf diesen Diagrammen ist deutlich der mit steigendem chemischen Potential zunehmende Einfluß der Kaonen zu erkennen. Das ladungschemische Potential wird durch die Kaonen deutlich reduziert (vgl. durchgezogene und gestrichelte Linie im linken Diagramm). Bei $\mu = 540\,\text{MeV}$ wird es von 97,7 MeV auf 77,6 MeV gesenkt. Damit verbunden werden auch die leptonchemischen Potentiale gesenkt. μ_{l_e} sinkt von 506,7 MeV ohne Kaonen auf 494,9 MeV mit Kaonen (ebenfalls bei $\mu = 540\,\text{MeV}$); μ_{l_μ} wird von 29,9 MeV auf 20,2 MeV reduziert.

In Abbildung 6.20 sind die Teilchendichten dargestellt. Die Elektronendichte steigt um ca. $0{,}02\,\text{fm}^{-3}$ (gestrichelte gegenüber durchgezogene Linie im linken Diagramm); dementsprechend sinkt auch die Neutrinodichte (gestrichelte gegenüber durchgezogene Linie im rechten Diagramm). Es fällt

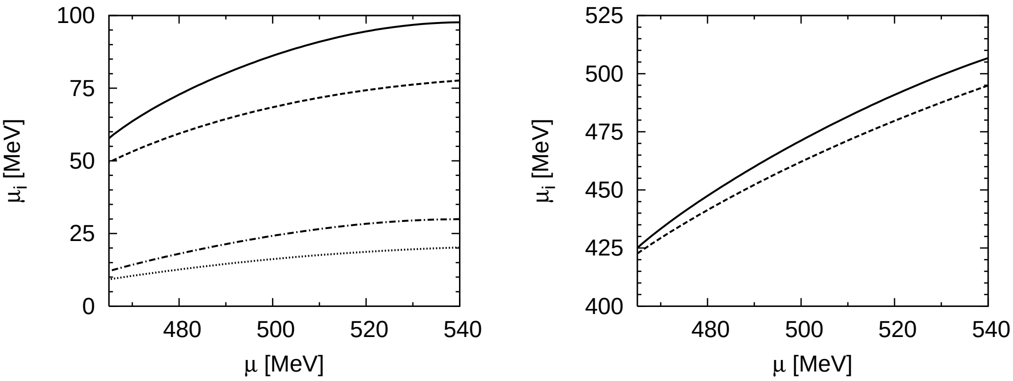

Abbildung 6.19: Chemische Potentiale in der neutralen CFL–Phase bei $Y_e = 0,32$ und $T = 20\,\mathrm{MeV}$ in Abhängigkeit vom quarkchemischen Potential μ. Links: μ_Q^{CFL} (durchgezogene Linie), $\mu_{l_\mu}^{CFL}$ (strichpunktiert) $\mu_Q^{CFLK^+}$ (gestrichelt), $\mu_{l_\mu}^{CFLK^+}$ (gepunktet). Rechts: $\mu_{l_e}^{CFL}$ (durchgezogene Linie), $\mu_{l_e}^{CFLK^+}$ (gestrichelt)

unmittelbar auf, daß die Kaondichte (gepunktet) wesentlich größer ist als die Zunahme an Elektronen. Dies lässt sich durch eine Zunahme der Dichten der Down– und Strange–Quarks und eine Abnahme der Dichte der Up–Quarks erklären. Durch das veränderte ladungschemische Potential werden auch diese Dichten beeinflußt.

Insgesamt ergeben sich nach unserer Abschätzung nur geringe Änderungen durch die Berücksichtigung eines Kaonkondensats. Das Kondensat trägt auch nicht dazu bei, die neutrale CFL–Phase zu niedrigeren chemischen Potentialen hin zu stabilisieren. Zu prüfen wäre der Einfluß der Kaonen jedoch noch in einer aufwendigeren Behandlung, bei der man die Goldstone–Bosonen durch pseudoskalare Diquarkkondensate der Form $\langle \psi^T C \tau_A \lambda_{A'} \psi \rangle$ zuläßt.

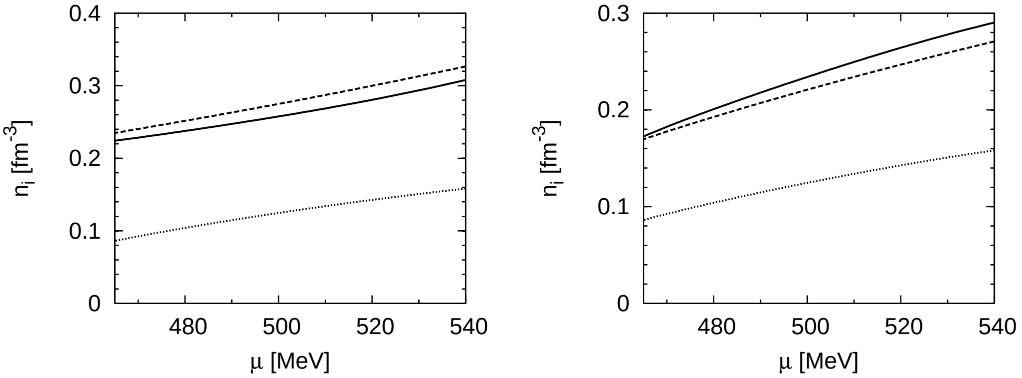

Abbildung 6.20: Teilchendichten in der neutralen CFL–Phase bei $Y_e = 0,32$ und $T = 20\,\text{MeV}$ in Abhängigkeit vom quarkchemischen Potential μ. Links: $n_{e^-}^{CFL}$ (durchgezogene Linie), $n_{e^-}^{CFLK^+}$ (gestrichelt), n_{K^+} (gepunktet). Rechts: $n_{\nu_e}^{CFL}$ (durchgezogene Linie), $n_{\nu_e}^{CFLK^+}$ (gestrichelt), n_{K^+} (gepunktet)

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war es, unterschiedliche farbsupraleitende Phasen (2SC und CFL) mit verschiedenen Nebenbedingungen (z. B. Neutralität) zu berechnen. Die Kalkulationen sollten zeigen, welche Phase unter den jeweiligen Bedingungen die günstigste ist. Wir haben unsere Rechnungen im Nambu–Jona-Lasinio–Modell durchgeführt

Wir haben uns zunächst mit möglichen farbsupraleitenden Phasen im Inneren von Neutronensternen beschäftigt. Neutronensterne, die älter als einige Sekunden sind, konnten wir bei $T = 0$ behandeln. Bei der Untersuchung farb– und ladungsneutraler homogener Phasen im β–Gleichgewicht haben wir bei $\mu = 414\,\mathrm{MeV}$ einen Phasenübergang von der 2SC– zur CFL–Phase gefunden. Wir haben uns auch die Temperaturabhängigkeit der Phasen angesehen. Dies ist zwar für den Neutronenstern nicht relevant, aber wir können diese Ergebnisse mit denen für den heißen Protoneutronenstern vergleichen. Wir haben gesehen, daß sich der Übergang für zunehmende Temperaturen zu höheren chemischen Potentialen verschiebt.

Im Anschluß an diese Behandlung haben wir noch gemischte Phasen bei $T = 0$ betrachtet. Wir haben dabei Farbneutralität der einzelnen Komponenten verlangt, da zu erwarten ist, daß unterschiedliche Farbladungen der einzelnen Komponenten sich besonders negativ auf die Stabilität der gemischten Phasen auswirken. Es zeigte sich, daß es sehr wichtig ist, die geladenen Pionen als Goldstone-Bosonen der chiralen Symmetriebrechung in der CFL–Phase zu berücksichtigen, da sie fast die gesamte Ladung in dieser Phase stellen. Wir haben auf diesem Weg gemischte Phasen konstruiert, deren Hauptbestandteil die negativ geladene CFL–Phase ist. Wir fanden Anteile der positiv geladenen 2SC–Phase bis zu 37 Prozent. Dort war die gemischte Phase um $\Delta\Omega = -5,5\,\mathrm{Mev/fm}^3$ günstiger als die homogene CFL–Phase (günstigste neutrale homogene Phase bei dem jeweils betrachteten chemischen Potential). Eine Abschätzung der Oberflächenspannung ergab, daß die gemischte

Phase stabil sein könnte. Hier sind jedoch weitere Untersuchungen nötig, um die Oberflächenspannung genauer bestimmen zu können.

Im Anschluß an diese Überlegungen haben wir uns mit Protoneutronensternen beschäftigt. Die wesentliche Änderung dabei ist die zusätzliche Berücksichtigung der getrappten Neutrinos, die durch die Forderung nach erhaltenen Leptonenzahlen berücksichtigt wurde. Wir haben unterschiedliche Leptonenanteile für die erste Leptonenfamilie betrachtet. Bei den Rechnungen trat ein Problem bei der Konstruktion des Phasenübergangs auf. Es existiert keine neutrale CFL-Phase mehr, bevor ein ordentlicher Übergang zur 2SC–Phase stattfinden kann. In dem Bereich, in dem wir keine neutrale CFL–Phase mehr finden konnten, erwarten wir die Existenz anderer Phasen, die von uns noch nicht untersucht wurden. So steht für die Zukunft die Berechnung von gaplosen Phasen in diesem Bereich an. Außerdem erscheint es sinnvoll unter den gegebenen Bedingungen gemischte Phasen zu konstruieren, wie wir es für den Neutronenstern getan haben. Dabei können wir fordern, daß das quarkchemische und ladungschemische Potential in beiden Phasen übereinstimmt.

Für den Fall des Protoneutronensterns wäre auch ein Vergleich mit einer hadronischen Zustandsgleichung wünschenswert, ähnlich wie dies in [39] für Neutronensterne gemacht wurde.

Anhang A

Konventionen

Wir verwenden die ülichen Konventionen

$$\hbar = 1, \quad c = 1, \quad k_B = 1 \; .$$

Für die γ-Matrizen verwenden wir die Standarddarstellung aus [40]

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \qquad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \tag{A.1}$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \tag{A.2}$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{A.3}$$

Die Generatoren der SU(3)–Gruppe, die Gell-Mann-Matrizen, sind gegeben durch

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.4}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.5}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{A.6}$$

Anhang B

Linearisierung der Sechs–Punkt–Wechselwirkung

Die Lagrangedichte der Sechs–Punkt–Wechselwirkung

$$\mathcal{L}_6 = -K \left[\det{}_f \left(\bar{\psi}(\mathbb{1} + \gamma_5)\psi \right) + \det{}_f \left(\bar{\psi}(\mathbb{1} - \gamma_5)\psi \right) \right]$$

setzt sich aus zwei Determinanten zusammen. Wir wollen an dieser Stelle die Linearisierung für die erste Determinante

$$\det{}_f \left(\bar{\psi}(\mathbb{1} + \gamma_5)\psi \right) = \det \begin{pmatrix} \bar{u}(\mathbb{1} + \gamma_5)u & \bar{u}(\mathbb{1} + \gamma_5)d & \bar{u}(\mathbb{1} + \gamma_5)s \\ \bar{d}(\mathbb{1} + \gamma_5)u & \bar{d}(\mathbb{1} + \gamma_5)d & \bar{d}(\mathbb{1} + \gamma_5)s \\ \bar{s}(\mathbb{1} + \gamma_5)u & \bar{u}(\mathbb{1} + \gamma_5)d & \bar{u}(\mathbb{1} + \gamma_5)s \end{pmatrix}$$

durchführen. Wenn wir die Determinante ausführen, können wir direkt alle Terme, die γ_5 enthalten, weglassen, da

$$\langle \bar{a} i \gamma_5 b \rangle = 0 \quad \forall \quad a, b$$

Nun führen wir die Determinante aus

$$\begin{aligned} \det{}_f \left(\bar{\psi}(\mathbb{1} + \gamma_5)\psi \right) &\approx \bar{u}u\,\bar{d}d\,\bar{s}s + \bar{d}u\,\bar{s}d\,\bar{u}s\, + \bar{s}u\,\bar{u}d\,\bar{d}s - \bar{s}u\,\bar{d}d\,\bar{u}s - \bar{d}u\,\bar{u}d\,\bar{s}s - \bar{u}u\,\bar{s}d\,\bar{d}s \\ &\approx \left(\phi_u + \delta(\bar{u}u)\right)\left(\phi_d + \delta(\bar{d}d)\right)\left(\phi_s + \delta(\bar{s}s)\right) \end{aligned}$$

Man muß von der ersten auf die zweite Spalte nur den ersten der sechs Terme berechnen, da die anderen fünf jeweils mindestens zwei Terme der Form

$$\langle \bar{a} b \rangle = 0 \quad \text{für} \quad a \neq b$$

enthalten. Ein Term der Form $\bar{a}b$ mit $a \neq b$ ist von $\mathcal{O}(\delta)$. Das Produkt zweier dieser Terme ist $\mathcal{O}(\delta^2)$ und kann vernachlässigt werden.

Wir berechnen nun weiter

$$
\begin{aligned}
&(\phi_u + \delta(\bar{u}u)) \left(\phi_d + \delta(\bar{d}d)\right) (\phi_s + \delta(\bar{s}s)) \\
&\quad = \phi_u\phi_d\phi_s + \phi_u\phi_d\delta(\bar{s}s) + \phi_u\phi_s\delta(\bar{d}d) + \phi_d\phi_s\delta(\bar{u}u) \\
&\quad = \phi_u\phi_d\phi_s + \phi_u\phi_d\bar{s}s - \phi_u\phi_d\phi_s + \phi_u\phi_s\bar{d}d - \phi_u\phi_s\phi_d + \phi_d\phi_s\bar{u}u - \phi_d\phi_s\phi_d \\
&\quad = -2\phi_u\phi_d\phi_s + \bar{u}\,\phi_d\phi_s\,u + \bar{d}\,\phi_u\phi_s\,d + \bar{s}\,\phi_u\phi_d\,s\ .
\end{aligned}
$$

Für die zweite Determinante erhält man das gleiche Ergebnis, da sich die Argumente der beiden Determinanten nur im Vorzeichen vor des γ_5 unterscheiden. Da diese Terme bei der Berechnung des Meanfields wegfallen, erhalten wir insgesamt

$$
\mathcal{L}_6^{MF} = 4\,\phi_u\phi_d\phi_s - 2\,\bar{u}\,\phi_d\phi_s\,u - 2\,\bar{d}\,\phi_u\phi_s\,d - 2\,\bar{s}\,\phi_u\phi_d\,s\ .
$$

Anhang C

Koeffizienten von $\det \mathcal{M}_{uds}$

Wir führen hier die Koeffizzienten aus Gl. (4.24) an. Dazu verwenden wir die abkürzenden Schreibweisen

$$
\begin{aligned}
x_u^+ &= (i\omega_n + \mu_{ur})^2 - \vec{p}^{\,2} - M_u^2 \\
x_u^- &= (i\omega_n - \mu_{ur})^2 - \vec{p}^{\,2} - M_u^2 \\
x_d^+ &= (i\omega_n + \mu_{dg})^2 - \vec{p}^{\,2} - M_d^2 \\
x_d^- &= (i\omega_n - \mu_{dg})^2 - \vec{p}^{\,2} - M_d^2 \\
x_s^+ &= (i\omega_n + \mu_{sb})^2 - \vec{p}^{\,2} - M_s^2 \\
x_s^- &= (i\omega_n - \mu_{sb})^2 - \vec{p}^{\,2} - M_s^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{ud}^+ &= (i\omega_n + \mu_{ur})\,(i\omega_n + \mu_{dg}) - \vec{p}^{\,2} - M_u\,M_d \\
x_{us}^+ &= (i\omega_n + \mu_{ur})\,(i\omega_n + \mu_{sb}) - \vec{p}^{\,2} - M_u\,M_s \\
x_{ds}^+ &= (i\omega_n + \mu_{dg})\,(i\omega_n + \mu_{sb}) - \vec{p}^{\,2} - M_d\,M_s \\
x_{ud}^- &= (i\omega_n - \mu_{ur})\,(i\omega_n - \mu_{dg}) - \vec{p}^{\,2} - M_u\,M_d \\
x_{us}^- &= (i\omega_n - \mu_{ur})\,(i\omega_n - \mu_{sb}) - \vec{p}^{\,2} - M_u\,M_s \\
x_{ds}^- &= (i\omega_n - \mu_{dg})\,(i\omega_n - \mu_{sb}) - \vec{p}^{\,2} - M_d\,M_s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_u &= i\omega_n^2 - \vec{p}^{\,2} - \mu_{ur}^2 - M_u^2 \\
y_d &= i\omega_n^2 - \vec{p}^{\,2} - \mu_{dg}^2 - M_d^2 \\
y_s &= i\omega_n^2 - \vec{p}^{\,2} - \mu_{sb}^2 - M_s^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{ud} &= i\omega_n^2 + i\omega_n\,(\mu_{ur} - \mu_{dg}) - \vec{p}^{\,2} - \mu_{ur}\,\mu_{dg} - M_u\,M_d \\
y_{us} &= i\omega_n^2 + i\omega_n\,(\mu_{ur} - \mu_{sb}) - \vec{p}^{\,2} - \mu_{ur}\,\mu_{sb} - M_u\,M_s \\
y_{du} &= i\omega_n^2 + i\omega_n\,(\mu_{dg} - \mu_{ur}) - \vec{p}^{\,2} - \mu_{ur}\,\mu_{dg} - M_u\,M_d \\
y_{ds} &= i\omega_n^2 + i\omega_n\,(\mu_{dg} - \mu_{sb}) - \vec{p}^{\,2} - \mu_{dg}\,\mu_{sb} - M_d\,M_s \\
y_{su} &= i\omega_n^2 + i\omega_n\,(\mu_{sb} - \mu_{ur}) - \vec{p}^{\,2} - \mu_{ur}\,\mu_{sb} - M_u\,M_s \\
y_{sd} &= i\omega_n^2 + i\omega_n\,(\mu_{sb} - \mu_{dg}) - \vec{p}^{\,2} - \mu_{dg}\,\mu_{sb} - M_d\,M_s
\end{aligned}
$$

Auf diese Weise können wir die Koeffizienten C_{klm} schreiben als

$$C_{444} = 16$$

$$C_{622} = -8\,y_s$$
$$C_{262} = -8\,y_d$$
$$C_{226} = -8\,y_u$$

$$C_{442} = -8\,(y_{ds} + y_{sd})$$
$$C_{244} = -8\,(y_{ud} + y_{du})$$
$$C_{424} = -8\,(y_{us} + y_{su})$$

$$C_{800} = x_s^+\,x_s^-$$
$$C_{080} = x_d^+\,x_d^-$$
$$C_{008} = x_u^+\,x_u^-$$

$$C_{620} = 2\,(x_s^+\,x_{ds}^- + x_{ds}^+\,x_s^-)$$
$$C_{602} = 2\,(x_s^+\,x_{us}^- + x_{us}^+\,x_s^-)$$
$$C_{260} = 2\,(x_d^+\,x_{ds}^- + x_{ds}^+\,x_d^-)$$
$$C_{062} = 2\,(x_d^+\,x_{ud}^- + x_{ud}^+\,x_d^-)$$
$$C_{206} = 2\,(x_u^+\,x_{us}^- + x_{us}^+\,x_u^-)$$
$$C_{026} = 2\,(x_u^+\,x_{ud}^- + x_{ud}^+\,x_u^-)$$
$$C_{440} = 4\,x_{ds}^+\,x_{ds}^- + x_d^+\,x_s^- + x_d^-\,x_s^+$$
$$C_{044} = 4\,x_{ud}^+\,x_{ud}^- + x_d^+\,x_u^- + x_d^-\,x_u^+$$
$$C_{404} = 4\,x_{us}^+\,x_{us}^- + x_s^+\,x_u^- + x_s^-\,x_u^+$$

$$\begin{aligned}
C_{422} = {} & 2\,(x_{ud}^+\,x_s^- + x_s^+\,x_{ud}^-) - 4\,(x_{us}^+\,x_{ds}^- + x_{ds}^+\,x_{us}^-) + 8\,(y_{us}\,y_{sd} + y_{su}\,y_{ds}) \\
& + 8\,y_s\,(y_{ud} + y_{du}) \\
C_{242} = {} & 2\,(x_{us}^+\,x_d^- + x_d^+\,x_{us}^-) - 4\,(x_{ud}^+\,x_{ds}^- + x_{ds}^+\,x_{ud}^-) + 8\,(y_{ud}\,y_{ds} + y_{du}\,y_{sd}) \\
& + 8\,y_d\,(y_{us} + y_{su}) \\
C_{224} = {} & 2\,(x_{ds}^+\,x_u^- + x_u^+\,x_{ds}^-) - 4\,(x_{ud}^+\,x_{us}^- + x_{us}^+\,x_{ud}^-) + 8\,(y_{du}\,y_{us} + y_{ud}\,y_{su}) \\
& + 8\,y_u\,(y_{ds} + y_{sd})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{222} = {} & 2\,(y_{ds} + y_{sd})\,(x_{ds}^+\,x_u^- + x_{ds}^-\,x_u^+) + 2\,(y_{us} + y_{su})\,(x_{us}^+\,x_d^- + x_{us}^-\,x_d^+) \\
& + 2\,(y_{ud} + y_{du})\,(x_{ud}^+\,x_s^- + x_{ud}^-\,x_s^+) - 4\,y_u\,(x_d^+\,x_s^- + x_s^+\,x_d^-) \\
& - 4\,y_d\,(x_u^+\,x_s^- + x_s^+\,x_u^-) - 4\,y_s\,(x_u^+\,x_d^- + x_d^+\,x_u^-) \\
& - 10\,(y_{ud}\,y_{ds}\,y_{su} + y_{us}\,y_{sd}\,y_{du}) \\
& - 2\,\Big(y_{ud}\,y_{us}\,(y_{ds} + y_{sd}) + y_{ud}\,y_{su}\,y_{sd} + y_{du}\,y_{us}\,y_{ds} + y_{du}\,y_{su}\,(y_{ds} + y_{sd})\Big) \\
& - 8\,i\omega_n\,\Bigg(M_u^2\,(\mu_{dg} - \mu_{sb})^2 + M_s^2\,(\mu_{dg} - \mu_{ur})^2 + M_d^2\,(\mu_{sb} - \mu_{ur})^2 \\
& - 2\,M_d\,M_u\,(\mu_{sb}^2 - \mu_{dg}\,\mu_{ur}) - 2\,M_s\,\Big(M_u\,(\mu_{dg}^2 - \mu_{sb}\,\mu_{ur}) + M_d\,(\mu_{ur}^2 - \mu_{dg}\,\mu_{sb})\Big)\Bigg)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C_{600} &= -\,2\,x_s^+\,x_s^-\,(y_{ud} + y_{du})\\
C_{060} &= -\,2\,x_d^+\,x_d^-\,(y_{us} + y_{su})\\
C_{006} &= -\,2\,x_u^+\,x_u^-\,(y_{sd} + y_{ds})\\
C_{420} &= -\,2\,x_s^+\,(x_d^-\,y_{us} + 2\,x_{ds}^-\,y_{du}) - 2\,x_s^-\,(x_d^+\,y_{su} + 2\,x_{ds}^+\,y_{ud})\\
C_{402} &= -\,2\,x_s^+\,(x_u^-\,y_{ds} + 2\,x_{us}^-\,y_{ud}) - 2\,x_s^-\,(x_u^+\,y_{sd} + 2\,x_{us}^+\,y_{du})\\
C_{042} &= -\,2\,x_d^+\,(x_u^-\,y_{sd} + 2\,x_{ud}^-\,y_{us}) - 2\,x_d^-\,(x_u^+\,y_{ds} + 2\,x_{ud}^+\,y_{su})\\
C_{240} &= -\,2\,x_d^+\,(x_s^-\,y_{ud} + 2\,x_{ds}^-\,y_{su}) - 2\,x_d^-\,(x_s^+\,y_{du} + 2\,x_{ds}^+\,y_{us})\\
C_{204} &= -\,2\,x_u^+\,(x_s^-\,y_{du} + 2\,x_{us}^-\,y_{sd})2\,x_u^-\,(x_s^+\,y_{ud} + 2\,x_{us}^+\,y_{ds})\\
C_{024} &= -\,2\,x_u^+\,(x_d^-\,y_{su} + 2\,x_{ud}^-\,y_{ds}) - 2\,x_u^-\,(x_d^+\,y_{us} + 2\,x_{ud}^+\,y_{sd})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{400} &= x_s^+\,x_s^-\,(x_u^+\,x_d^- + x_u^-\,x_d^+ + 4\,y_{ud}\,y_{du})\\
C_{040} &= x_d^+\,x_d^-\,(x_u^+\,x_s^- + x_u^-\,x_s^+ + 4\,y_{us}\,y_{su})\\
C_{004} &= x_u^+\,x_u^-\,(x_d^+\,x_s^- + x_d^-\,x_s^+ + 4\,y_{ds}\,y_{sd})\\
C_{220} &= 2\,(x_u^+\,x_d^-\,x_s^-\,x_{ds}^+ + x_u^-\,x_d^+\,x_s^+\,x_{ds}^-) + 4\,(x_d^+\,x_s^-\,y_{ud}\,y_{su} + x_d^-\,x_s^+\,y_{du}\,y_{us})\\
C_{022} &= 2\,(x_s^+\,x_d^-\,x_u^-\,x_{ud}^+ + x_s^-\,x_d^+\,x_u^+\,x_{ud}^-) + 4\,(x_d^+\,x_u^-\,y_{sd}\,y_{us} + x_d^-\,x_u^+\,y_{ds}\,y_{su})\\
C_{202} &= 2\,(x_d^+\,x_s^-\,x_u^-\,x_{us}^+ + x_d^-\,x_s^+\,x_u^+\,x_{us}^-) + 4\,(x_s^+\,x_u^-\,y_{ds}\,y_{ud} + x_s^-\,x_u^+\,y_{sd}\,y_{du})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{200} &= -\,2\,x_s^+\,x_s^-\,(x_u^+\,x_d^-\,y_{du} + x_u^-\,x_d^+\,y_{ud})\\
C_{020} &= -\,2\,x_d^+\,x_d^-\,(x_u^+\,x_s^-\,y_{su} + x_u^-\,x_s^+\,y_{us})\\
C_{002} &= -\,2\,x_u^+\,x_u^-\,(x_d^+\,x_s^-\,y_{sd} + x_d^-\,x_s^+\,y_{ds})
\end{aligned}
$$

$$
C_{000} = (x_u^+\,x_u^-)\,(x_d^+\,x_d^-)\,(x_s^+\,x_s^-)
$$

Literaturverzeichnis

[1] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8**, 214 (1964).

[2] G. Zweig, CERN TH. **401** (1964).

[3] K. Rajagopal und F. Wilczek, *The Condensed Matter Physics of QCD*, World Scientific (2001), Chapter 35 in der Festschrift zu Ehren von B. L. Ioffe, „At the Frontier of Particle Physics / Handbook of QCD“, herausgegeben von M. Shifman, hep-ph/0011333.

[4] J. C. Collins und M. J. Perry, Phys. Rev. Lett. **34**, 1353 (1975).

[5] M. Alford, K. Rajagopal und F. Wilczek, Phys. Lett. B **422**, 247 (1998).

[6] R. Rapp, T. Schäfer, E. V. Shuryak und M. Velkovsky, Phys. Rev. Lett. **81**, 53 (1998).

[7] M. Alford, K. Rajagopal und F. Wilczek, Nucl. Phys. B **537**, 443 (1999).

[8] Frederik Neumann, Diplomarbeit, TU Darmstadt (2003).

[9] J. F. Donoghue, E. Golowich und B. R. Holstein, *Dynamics of the Standard Model*, Cambridge University Press, Camebridge (1996).

[10] P. Amore, M. C. Birse, J. A. McGovern und N. R. Walet, Phys. Rev. D **65**, 074005 (2002).

[11] A. L. Fetter und J. D. Walecka, *Quantum theory of many-particle systems*, Dover Publications, Mineola (2003).

[12] I. A. Shovkovy und L. C. R. Wijewardhana, Physics Letters B **470**, 189 (1999).

[13] K. Rajagopal und F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **86**, 3492 (2001).

[14] M. Buballa und M. Oertel, Nucl. Phys. A **703**, 770 (2002).

[15] M. Alford, J. Berges und K. Rajagopal, Nucl. Phys. B **558**, 219 (1999).

[16] Y. Nambu und G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).

[17] Y. Nambu und G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **124**, 246 (1961).

[18] M. K. Volkov, Ann. Phys. **157**, 282 (1984).

[19] T. Hatsuda und T. Kunihiro, **145**, 7 (1984).

[20] T. Hatsuda und T. Kunihiro, Phys. Rep. **247**, 221 (1994).

[21] S. P. Klevansky, Reviews of Modern Physics **64**, 649 (1992).

[22] M. Buballa, *NJL-model analysis of quark matter at large density*, hep-ph/0402234 (2003), Habilitationsschrift.

[23] U. Vogl und W. Weise, Progress in Particle and Nuclear Physics **27**, 195 (1991).

[24] P. Rehberg, S. P. Klevansky und J. Hüfner, Phys. Rev. C **53**, 410 (1996).

[25] J. I. Kapusta, *Finite-temperature field theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1989).

[26] A. Das, *Finite temperature field theory*, World Scientific Publishing, Singapore (1999).

[27] N. K. Glendenning, *Compact Stars*, Springer, New York (2000).

[28] L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Theoretische Physik V – Statistische Physik*, Akademie-Verlag, Berlin (1975).

[29] M. Alford, K. Rajagopal, S. Reddy und F. Wilczek, Phys. Rev. D **64**, 074017 (2001).

[30] F. Neumann, M. Buballa und M. Oertel, Nucl. Phys. A **714**, 481 (2003).

[31] D. B. Kaplan und S. Reddy, Phys. Rev. D **65**, 054042 (2002).

[32] S. Reddy und G. Rupak, nucl-th/0405054.

[33] S. Reddy, private Mitteilung.

[34] M. Alford, C. Kouvaris und K. Rajagopal, Phys. Rev. Lett. **92**, 222001 (2004).

[35] M. Alford, C. Kouvaris und K. Rajagopal, hep-ph/0406137.

[36] I. Shovkovy und M. Huang, Phys. Lett. B **564**, 205 (2003).

[37] M. Huang und I. Shovkovy, Nucl. Phys. A **729**, 835 (2003).

[38] A. W. Steiner, S. Reddy und M. Prakash, Phys. Rev. D **66**, 094007 (2002).

[39] M. Baldo, M. Buballa, G. F. Burgio, F. Neumann, M. Oertel und H.-J.Schulze, Phys Lett. B **562**, 153 (2003).

[40] J. D. Bjorken und S. D. Drell, *Relativistische Quantenmechanik*, BI-Wissenschaftsverlag (1992).

Danksagung

Zuerst möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Wambach für die Möglichkeit bedanken, diese interessante Diplomarbeit durchführen zu können.

Ein herzlicher Dank gilt meinem Betreuer Herrn Dr. Michael Buballa, der mir den Zugang zu diesem Thema ermöglicht und durch interessante Diskussionen erleichtert hat.

Ganz besonders bedanke ich mich bei Mathias Wagner und Thomas Roth für überwältigende Hilfsbereitschaft in allen Computerangelegenheiten.

Ich danke allen, die meine Arbeit korrektur gelesen haben.

Der gesamten Arbeitsgruppe möchte ich für die angenehme und hilfsbereite Arbeitsatmosphäre danken.

Herrn Dipl. Phys. Frederik Neumann danke ich für die Bereitstellung seines Programmcodes und die dazugehörigen Erläuterungen.

An dieser Stelle möchte ich mich noch einmal ganz herzlich bei Mathias Wagner für fünf tolle Studienjahre bedanken, in denen wir Vorlesungen, Übungen und vor allem Pausen gemeinsam verbracht haben. DANKE!

Meinen Eltern danke ich für die geduldige Unterstützung während meines gesamten Studiums.

Meinem Freund Jörn danke ich für seine Geduld, besonders in der Endphase dieser Arbeit.

Erklärung zur Diplomarbeit gemäß § 19 Abs. 6 DPO/AT

Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit ohne Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus den Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht worden. Diese Arbeit hat in gleicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Darmstadt, 09. September 2004

Verena Werth