Diplomarbeit

Anwendung der $\mathrm{V}_{\text{low k}}$ Renormierungsgruppen-Methode auf Hyperon-Nukleon-Systeme

Mathias Wagner

September 2004

Eine farbige Version ist unter
`http://crunch.ikp.physik.tu-darmstadt.de/~wagner/mwdiplom.pdf`
im PDF-Format erhältlich.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1.

Einführung

Die Wechselwirkung zwischen Nukleonen ist eine der elementarsten Fragen der Kernphysik. Eine gute Beschreibung dieser Wechselwirkung ermöglicht theoretische Vorhersagen für ein großes Gebiet. Nach dem Standardmodell sind Nukleonen aus Quarks aufgebaut. Das Proton besteht aus zwei Up- und einem Down-Quark, das Neutron aus zwei Down- und einem Up-Quark. Die Wechselwirkung zwischen den Quarks wird durch die Quantenchromodynamik beschrieben. Es wäre also nur natürlich, wenn man die Wechselwirkung zwischen Nukleonen bestimmt, in dem man die Wechselwirkung zwischen zwei Systemen aus drei Quarks berechnet.

Dies ist jedoch zur Zeit noch nicht möglich. Da es auch keine Hinweise darauf gibt, dass Effekte auf dem Quarklevel die Wechselwirkung zwischen Nukleonen beeinflussen, kann und muss man die Wechselwirkung auf dem Level der Nukleonen beschreiben. Im vergangenen Jahrhundert hat sich die Beschreibung durch Mesonen-Austausch-Modelle bewährt.

Diese Modelle können nur bis zu einem bestimmten Grad aus physikalischen Parametern bestimmt werden. Es gibt immer einige freie Parameter, die durch Anpassen an experimentelle Daten gewonnen werden müssen. Die experimentellen Daten sind auf einen Energiebereich bis etwa 350 MeV beschränkt. Über diesen Bereich hinaus ist die Wechselwirkung nicht bekannt und die unterschiedlichen Nukleon-Nukleon-Potentiale liefern deutlich unterschiedliche Ergebnisse. Dieser unbekannte Hochenergiebereich hat allerdings auch Einflüsse auf die Potentiale bei niedrigen Energien; d.h. obwohl die Potentiale die experimentellen Daten gleich gut beschreiben, zeigen die Potentiale selbst bei niedrigen Energien deutliche Unterschiede.

Der Bereich bei hohen Energien entspricht kleinen Abstände zwischen den Nukleonen. Bei Abständen kleiner als ca. $1\,\mathrm{fm} = 10^{-15}\,\mathrm{m}$ wird die Wechselwirkung zwischen zwei Nukleonen stark abstoßend. Man spricht hier vom harten Kern der Wechselwirkung. Nicht nur, dass dieser Bereich nicht durch Experimente bekannt ist, es entstehen durch ihn große Probleme, wenn man versucht Atomkerne zu berechnen.

Das Berechnen eines ganzen Atomkerns ist ein Vielteilchenproblem. Man muss die Wechselwirkungen zwischen allen Nukleonen, die den Atomkern bilden, berücksichtigen. Diese Berechnungen sind folglich sehr komplex und empfindlich.

Benutzt man nun einfach die vorhanden Nukleon-Nukleon-Potentiale, ergeben sich auf

Grund des harten Kerns unendlich große Matrixelemente. Damit ist keine weitere Rechnung mehr möglich. Es werden somit Methoden benötigt, die es erlauben, die Probleme, die durch den harten Kern der Wechselwirkung entstehen, zu umgehen.

Es drängt sich die Frage auf, ob nicht alles viel einfacher wäre, wenn man den unbekannten Bereich bei hohen Energien bzw. kurzen Abständen einfach weglassen könnte. In der Tat ist diese Idee nicht allzu abwegig. Es zeigte sich bereits relativ früh, dass die Streuung zwischen zwei Nukleonen bei niedrigen Energien nicht sehr empfindlich auf Details des Potentials ist. Die Theorie der effektiven Reichweite von Bethe und Longmuir zeigte, dass die Streuung zwischen zwei Nukleonen bei niedrigen Energien durch nur zwei Parameter beschrieben werden kann: die Streulänge a und die effektive Reichweite r_0. Die zwei maßgeblichen Größen bei Streuprozessen, die T-Matrix und die Streuphase[1] δ sind in Abhängigkeit von der Streulänge und der effektiven Reichweite durch

$$k\cot(\delta) = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_0k^2 \tag{1.1}$$

gegeben. Entsprechend ist der on-shell Anteil der T-Matrix durch

$$\frac{-1}{2\mu T(k,k;E_k)} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_0k^2. \tag{1.2}$$

gegeben. Man kann nun mit diesen Beziehungen für die unterschiedlichen Potentiale die Streulänge und die effektive Reichweite angeben. Die genaue Form des Potentials hat keinen Einfluss auf die Streulänge und die effektive Reichweite. Sehr unterschiedliche Potentiale können die gleichen Werte für die effektive Reichweite und die Streulänge haben.

Folglich scheint es möglich zu sein, die Streuung zwischen Nukleonen bei niedrigen Energien unabhängig von der Wechselwirkung bei hohen Energien zu beschreiben. Wir können den Bereich bei niedrigen Energien getrennt vom Hochenergiebereich betrachten. Dazu beschränken wir uns auf einen Modellraum, in dem nur Energien bis zu einer festgelegten oberen Grenze auftreten. Leider können wir nicht einfach das Potential, das für den unbeschränkten Energiebereich berechnet wurde, in unserem Modellraum benutzen. Dies liefert die falschen Ergebnisse, da, obwohl sich die Streuung bei niedrigen Energien unabhängig vom Hochenergiebereich beschrieben lässt, dieser bei den Potentialen doch einen Einfluss auf den Niedrigenergiebereich hat. Wir benötigen folglich ein effektives Potential, das für unseren Modellraum die richtigen Ergebnisse liefert.

Eine Möglichkeit ein solches Potential zu erhalten, ist eine Renormierungsgruppen-Transformation. Diese wird bestimmt, in dem man von dem vollen Problem immer eine Scheibe mit den höchsten möglichen Impulsen k, und damit auch Energien abschneidet (ausintegriert), und dann das Potential so modifiziert (renormiert), dass es für den nun auf einen kleineren Energiebereich beschränkten Raum noch die physikalisch richtigen

[1] Details zu diesen beiden Größen sind im Moment noch nicht relevant. Sie werden im Hauptteil dieser Arbeit beschrieben.

Ergebnisse bei Streuung liefert. Man kann nun so lange kleine Schalen ausintegrieren, bis der Modellraum nur noch den gewünschten Bereich abdeckt. Da man in jedem Schritt das Potential angepasst hat, hat man am Ende dieser Prozedur ein effektives Potential für den Modellraum. Abbildung 1.1 zeigt diese Transformation noch einmal schematisch. Abbildung 1.2 zeigt den Modellraum (P-Raum) im Vergleich zum uneingeschränkten Raum. Dass dieses effektive Potential nur bei niedrigen Impulsen k definiert ist, gibt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \text{voller Hilbert-Raum}\, k = 0 \ldots \infty \\ \\ \text{Ausgangspotential}\, V_{\text{bare}} \end{pmatrix}}_{\text{„kompliziert“}} \overset{RG}{\Longrightarrow} \underbrace{\begin{pmatrix} \text{trunkierter Hilbert-Raum}\, k = 0 \ldots \Lambda \\ \\ \text{effektives Potential}\, V_{\text{low } k} \end{pmatrix}}_{\text{„einfach“}}$$

Abbildung 1.1.: *Anschauliche Darstellung der Renormierungsgruppen-Transformation*

ihm seinen Namen: $V_{\text{low } k}$.

Für die Wechselwirkung zwischen Nukleonen wurde dieses Vorgehen bereits von Kuo, Schwenk, Bogner, Brown et al. erfolgreich angewandt. Die Ergebnisse zeigten hier, dass man ausgehend von den unterschiedlichen, unbeschränkten Potentiale (V_{bare}) ein vom Ausgangspotential unabhängiges $V_{\text{low } k}$ erhält. Damit ist das Ziel erreicht, eine Wechselwirkung zu bestimmen, die weitgehend durch experimentelle Daten fixiert ist und keinen harten Kern mehr hat.

In dieser Arbeit wollen wir diese Methode auf Hyperon-Nukleon-Systeme anwenden. Hyperonen sind wie die Nukleonen aus drei Quarks aufgebaut. Sie enthalten neben den Up- und Down-Quarks mindestens ein Strange-Quark. Schon auf Grund des ähnlichen Aufbaus sind die Hyperonen sehr eng mit den Nukleonen verwandt. Es gibt allerdings in der zu Grunde liegenden Quantenchromodynamik noch weitere Symmetrien, die es erlauben, bestimmte Eigenschaften von Hyperonen und Nukleonen miteinander in Beziehung zu setzen. Hyperonen sind instabile Teilchen und zerfallen in Bruchteilen einer Sekunde. Sie kommen daher in der Natur so gut wie nicht vor; entsprechend wenig ist ihre Wechselwirkung experimentell untersucht worden. Die Beschäftigung mit Hyperonen ist interessant, da neben den Symmetrien noch weitere Eigenschaften der Quantenchromodynamik getestet werden können, die mit Nukleonen nicht erreichbar sind.

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut. In Kapitel 2 besprechen wir einige Grundlagen zu Hyperonen und effektiven Wechselwirkungen. Danach gehen wir in Kapitel 3 ausführlich auf die zur Behandlung der Hyperon-Nukleon-Streuung notwendige Lippmann-Schwinger-Gleichung ein, bevor wir in Kapitel 4 zu den Methoden zur Berechnung von $V_{\text{low } k}$ kommen. In Kapitel 5 besprechen wir die verwendeten Hyperon-Nukleon-Potentiale und die vorhandenen Daten für Hyperon-Nukleon-Streuung. Abschließend präsentieren wir in den Kapiteln 7 und 8 die Ergebnisse unserer Rechnungen und untersuchen die Abhängigkeit vom gewählten Cutoff und das Konvergenzverhalten der

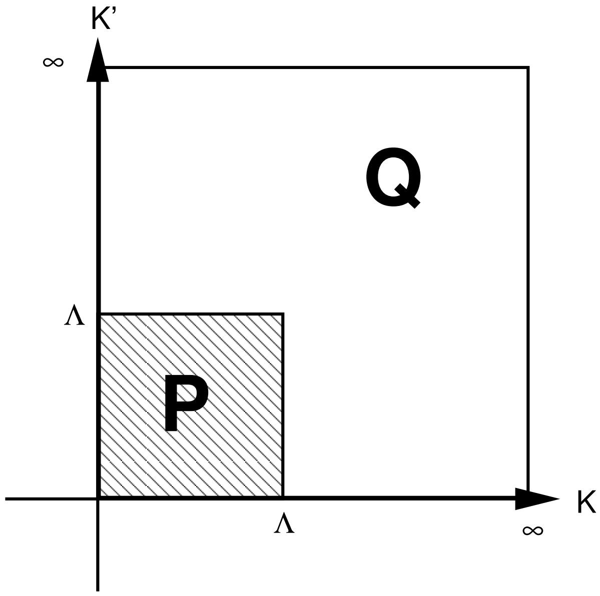


Abbildung 1.2.: *Anschauliche Darstellung des Modellraums (P-Raums) im Impulsraum*

verwendeten Methoden. Im Anhang geben wir weitere Details der numerischen Berechnungen an.

Kapitel 2.

Grundlagen

2.1. Hyperonen

In der Quantenchromodynamik (QCD) paaren sich Quarks (q) zu Mesonen ($q\bar{q}$), bestehend aus einem Quark und einem Antiquark, oder zu Baryonen, bestehend aus drei Quarks (qqq). Im letzten Jahr wurden erstmals auch Systeme aus fünf Quarks, so genannte Penta-Quarks ($qqqq\bar{q}$) nachgewiesen.

Hyperonen sind Baryonen, die keine Nukleonen (Neutron, Proton) sind. Beschränkt man sich auf die drei leichtesten Quarks (u, d, s), haben alle Hyperonen eine Strangeness kleiner null[1]. Es existieren folglich Hyperonen mit Strangeness $-1, -2$ und -3. Die bekannten Hyperonen lassen sich nach Strangeness sortieren. Im Fall $S = 1$ existieren das Λ- und die Σ-Hyperonen ($\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$). Weiterhin existieren die Ξ - Hyperonen (Ξ^0, Ξ^-) mit Strangeness -2 und das Ω-Hyperon mit Strangeness -3.

Wir beschränken uns auf die Hyperonen mit Strangeness -1, da hier zumindest einige experimentelle Daten für Hyperon-Nukleon-Streuung verfügbar sind.

Die folgenden Zahlenwerte sind [1] entnommen.

Λ-Hyperon

Das Λ-Hyperon war das erste Teilchen, mit dem der Nachweis des Strange-Quarks gelang. Es hat den Isospin $I = 0$. Der Quarkinhalt ist

$$\Lambda = uds \; . \tag{2.1}$$

Das Λ ist das leichteste Hyperon mit der Masse

$$m_\Lambda = 1115.683 \pm 0.006\,\mathrm{MeV} \; . \tag{2.2}$$

Es ist instabil und zerfällt mit einer mittleren Lebensdauer

$$\tau = (2.632 \pm 0.020) \times 10^{-10}\,\mathrm{s} \; , \tag{2.3}$$

[1] Strangeness gibt aus historischen Gründen die Anzahl der Anti-Strange-Quarks an, Strange Quarks haben ein Strangeness von -1.

bevorzugt über die Kanäle

$$\begin{aligned} \Lambda &\to p\pi^- \qquad (63.9 \pm 0.5)\% \\ \Lambda &\to n\pi^0 \qquad (35.8 \pm 0.5)\% \;. \end{aligned} \tag{2.4}$$

In den Klammern sind die Wahrscheinlichkeiten für die Kanäle angegeben.

Σ-Hyperonen

Die Familie der Σ-Hyperonen hat 3 Mitglieder, die nach ihrer Ladung unterschieden werden. Alle Σ-Hyperonen haben den Isospin 1. Ihr Quarkinhalt ist

$$\Sigma^+ = uus \quad \Sigma^0 = uds \quad \Sigma^- = dds. \tag{2.5}$$

Die Σ-Hyperonen sind schwerer als das Λ-Hyperon. Allerdings sind die Unterschiede in ihren Massen gering.

$$\begin{aligned} m_{\Sigma^+} &= 1189.37 \pm 0.07\,\text{MeV} \\ m_{\Sigma^0} &= 1192.642 \pm 0.024\,\text{MeV} \\ m_{\Sigma^-} &= 1197.449 \pm 0.030\,\text{MeV} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dies ermöglicht uns die einheitliche Behandlung in der Isospin-Basis mit einer gemittelten Σ-Masse

$$m_\Sigma = 1193.12\,\text{MeV} \;. \tag{2.7}$$

Wie auch das Λ sind die Σ-Hyperonen instabil.

$$\begin{aligned} \tau_{\Sigma^+} &= (0.8018 \pm 0.0026) \times 10^{-10}\,\text{s} \\ \tau_{\Sigma^0} &= (7.4 \pm 0.7) \times 10^{-20}\,\text{s} \\ \tau_{\Sigma^-} &= (1.479 \pm 0.011) \times 10^{-10}\,\text{s} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Die Σ-Hyperonen zerfallen hauptsächlich über die Zerfallskanäle

$$\begin{aligned} \Sigma^+ &\to p\pi^0 \qquad (51.57 \pm 0.30)\% \;, \\ \Sigma^+ &\to n\pi^+ \qquad (48.31 \pm 0.30)\% \;, \\ \Sigma^0 &\to \Lambda\gamma \qquad \sim 100\% \;, \\ \Sigma^- &\to n\pi^- \qquad (99.848 \pm 0.005)\% \;. \end{aligned} \tag{2.9}$$

In Klammern sind die Wahrscheinlichkeiten für die Kanäle angegeben.

Hier erkennt man, dass das Σ^0 hauptsächlich in ein Λ zerfällt. Dies erklärt die deutlich geringere Lebensdauer des Σ^0, da dieser Zerfall ein Prozess der starken Wechselwirkung ist.

2.2. Effektive Wechselwirkungen

$V_{\text{low } k}$ ist eine effektive Wechselwirkung. In der Vergangenheit gab es mehrere Entwicklungen im Bereich der effektiven Wechselwirkungen. Effektive Wechselwirkungen sind notwendig, da es meist unmöglich ist, das uneingeschränkte Problem exakt zu lösen.

Möchte man beispielsweise Kerne mit der Massenzahl A berechnen, steht man vor der Aufgabe, die Vielteilchen-Schrödinger-Gleichung

$$H\Psi_A = E_A\Psi_A \tag{2.10}$$

zu lösen, wobei Ψ_A die Wellenfunktion des Kerns mit A Nukleonen ist. Diese Gesamtwellenfunktion ist die Summe über alle möglichen Konfigurationen, in denen sich die Nukleonen befinden können. Diese Schrödinger-Gleichung lässt sich nicht exakt lösen.

Man muss sich folglich auf ein Problem beschränken, das man lösen kann. Im Schalenmodell (siehe z.B. [2]) separieren Kern und Valenznukleonen. Die Gesamtwellenfunktion Ψ_A lässt sich dann als Produkt aus der Wellenfunktion der abgeschlossenen Schale Ψ_{core} und der Valenznukleonen Ψ_{val} schreiben

$$\Psi_A = \Psi_{\text{core}}\Psi_{\text{val}} \ . \tag{2.11}$$

Das Problem, die Schrödinger-Gleichung für den Kern zu lösen, kann nun separiert werden

$$H\Psi_A = \Psi_{\text{val}}H_{\text{core}}\Psi_{\text{core}} + \Psi_{\text{core}}H_{\text{val}}\Psi_{\text{val}} \ . \tag{2.12}$$

Man muss nun die beiden Probleme

$$H_{\text{core}}\Psi_{\text{core}} = E_{\text{core}}\Psi_{\text{core}} \ , \tag{2.13}$$

$$H_{\text{val}}\Psi_{\text{val}} = E_{\text{val}}\Psi_{\text{val}} \tag{2.14}$$

separat lösen. H_{core} bezeichnet den Hamilton-Operator für den Kern, E_{core} die entsprechende Energie. H_{val} bezeichnet den Hamilton-Operator für die Valenznukleonen.

Geht man davon aus, dass man die Lösung für 2.13 kennt, muss man nur noch das Problem für die verbleibenden a Valenznukleonen lösen. Ψ_{val} ist die Summe über alle a-Teilchen-Wellenfunktionen $\Phi^{\text{a Teilchen}}$

$$\Psi_{\text{val}} = \sum_i^{\infty} \Phi_i^{\text{a Teilchen}} \ , \tag{2.15}$$

wobei i die möglichen unterschiedlichen Wellenfunktionen bezeichnet. Hier kann man nun Annahmen über den Konfigurationsraum der Valenznukleonen machen und das Problem damit trunkieren. Man summiert nicht mehr über alle möglichen a-Teilchen-Wellenfunktionen sondern nur noch über die N niedrigsten Anregungen

$$\Psi_{\text{val, trunk}} = \sum_i^{N} \Phi_i^{2 \text{ Teilchen}} \ . \tag{2.16}$$

Allerdings liefert die Anwendung des vollen Hamilton-Operators nicht mehr den richtigen Energieeigenwert.

$$H_{\mathrm{val}}\Psi_{\mathrm{val,\ trunk}} \neq E_{\mathrm{val}}\Psi_{\mathrm{val,\ trunk}} \ . \tag{2.17}$$

Man benötigt einen effektiven Hamilton-Operator $H_{\mathrm{eff,val}}$, der die Bedingung

$$H_{\mathrm{eff,val}}\Psi_{\mathrm{val,\ trunk}} = E_{\mathrm{val}}\Psi_{\mathrm{val,\ trunk}} \tag{2.18}$$

erfüllt.

Das Problem, den effektiven Hamilton-Operator zu bestimmen, kann auf das Bestimmen der effektiven Wechselwirkung V_{eff} zurückgeführt werden.

Der einfachste Ansatz, eine effektive Wechselwirkung zu erhalten, ist, eine Parametrisierung für diese zu wählen, die (beliebig viele) freie Parameter enthält. Eine Möglichkeit wäre

$$V_{\mathrm{eff}} = \sum_i V_i \frac{\exp(\mu_i r)}{\mu_i r} \ , \tag{2.19}$$

mit den Parametern μ_i und V_i. Diese Parameter kann man dann an bekannten Daten fitten und sie für andere Probleme benutzen. Diese Methode ist allerdings unbefriedigend, da sie keine mikroskopische Basis hat.

Eine weitere Möglichkeit ist eine störungstheoretische Behandlung. Hier gibt es unter anderem die Folded-Diagrams-Methode von Kuo [3] und die Rayleigh-Schrödinger-Theorie [4]. Problem aller störungstheoretischen Rechnungen ist die Konvergenz [5].

Die Herleitung der perturbativen Wechselwirkung verwendet die Projektionsoperatoren P und Q, wobei P der Projektor auf den Modellraum ist und $Q = 1 - P$ der Projektor auf den komplementären Raum.

Ausgehend von $|\Psi\rangle = (P + Q)|\Psi\rangle = |\phi\rangle + Q|\Psi\rangle$, wobei $|\phi\rangle = P|\Psi\rangle$ der Anteil der Wellenfunktion $|\Psi\rangle$ im Modellraum ist, lässt sich die Schrödinger-Gleichung $H|\Psi\rangle = (H_0 + V)|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ umschreiben, so dass man die Gleichungen

$$(H_0 - E + QVQ)\, Q|\Psi\rangle = -QVP|\Psi\rangle \tag{2.20}$$

und

$$(H_0 - E + PVP)\, P|\Psi\rangle = -PVQ|\Psi\rangle \tag{2.21}$$

erhält. Löst man nun (2.20) nach $Q|\Psi\rangle$ auf und setzt dies in (2.21) ein, erhält man nach Umformen

$$P(H_0 - E + \underbrace{V - VQ\,(H_0 - E + QVQ)^{-1}\,QV}_{=V_{\mathrm{eff}}})P|\Psi\rangle = 0 \ . \tag{2.22}$$

Dies ist die Schrödinger-Gleichung im Modellraum

$$(H_0 + V_{\mathrm{eff}})\,|\phi\rangle = E\,|\phi\rangle \ . \tag{2.23}$$

Der Ausdruck für die effektive Wechselwirkung kann zu

$$V_{\text{eff}} = V + V\frac{Q}{E - H_0}V + V\frac{Q}{E - H_0}V\frac{Q}{E - H_0}V + \mathcal{O}\left(V^3\right) \tag{2.24}$$

umgeformt werden.

Dies ist die Brillouin-Wigner Form für die effektive Wechselwirkung. Hier benötigt man allerdings die volle Energie E zur Berechnung des effektiven Potentials. Um diese zu erhalten, müsste man erst die volle Schrödinger-Gleichung lösen. Das war jedoch der Ausgangspunkt unserer Überlegungen. Es existieren Methoden, um diese Probleme zu vermeiden oder zu umgehen.

Man kann beispielsweise die Energie E als

$$E = E_0 + \Delta E \tag{2.25}$$

schreiben, wobei man die Zerlegung

$$H = H_0 + V = H_0 + U + \underbrace{V - U}_{\tilde{V}} \tag{2.26}$$

benutzt. Dabei ist U z.B. das Harmonischer-Oszillator-Potential. E_0 ist die Energie

$$(H_0 + U)\,|\Psi\rangle = E_0\,|\Psi\rangle \ . \tag{2.27}$$

E_0 kann man im Gegensatz zu E berechnen. Man hofft, dass ΔE klein genug ist, so dass E_0 eine gute Näherung für E ist und ersetzt in (2.24) die exakte Energie E durch die Näherung E_0.

Diese Methoden lösen allerdings nicht das Problem der ungeklärten Konvergenz der Reihe. Es ist in einigen Fällen trotzdem praktikabel die Störungstheorie anzuwenden. Zum einen gibt es Fälle, in denen die Reihe konvergiert, zum anderen kann man die niedrigen Ordnungen der Störungstheorie als Eingabe für weitere Methoden verwenden.

Die hiermit berechnete Wechselwirkung ist energieabhängig. Dadurch verliert sie viel von ihrer Nutzbarkeit, da sie für jede Energie neu berechnet werden muss. Die von uns berechnete effektive Wechselwirkung $V_{\text{low }k}$ ist nicht energieabhängig und keine perturbative Methode.

Es sei aber auch gesagt, dass es von Kuo und Brown sehr erfolgreiche Rechnungen mit dem störungstheoretisch gewonnen V_{eff} gab. Allerdings zeigten diese Rechnungen auch die Probleme der Störungstheorie, da sie je nach Ordnung der Störungstheorie unterschiedliche Ergebnisse lieferten.

2.3. NN-Kollaps

Die von uns verwendete $V_{\text{low }k}$-Renormierungsgruppen-Methode wurde bereits erfolgreich verwendet. Bogner, Schwenk und Kuo haben in [6] sehr umfangreiche Ergebnisse für den Nukleon-Nukleon-Fall publiziert. Beispielhaft zeigen wir hier zwei Abbildungen (2.1,2.2), die den Kollaps der unterschiedlichen Ausgangswechselwirkungen auf ein einziges effektives Potential in Abhängigkeit des Cutoffs Λ darstellen.

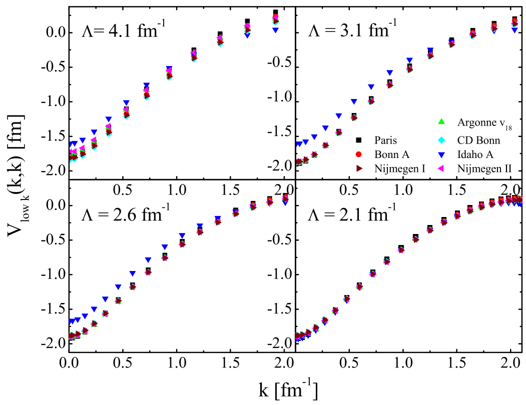


Abbildung 2.1.: *Nukleon-Nukleon $V_{low\ k}(k,k)$ für die $^1S_0$ Partialwelle und verschiedene Cutoffs. Aus[6].*

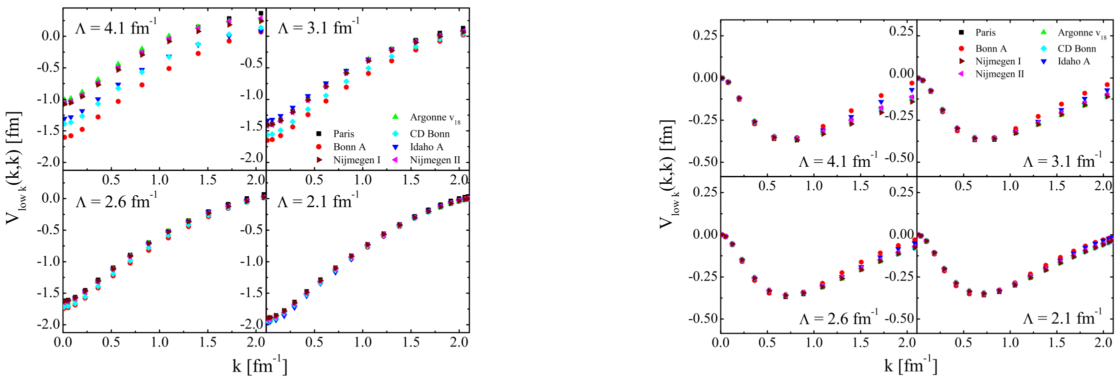


Abbildung 2.2.: *Nukleon-Nukleon $V_{low\ k}(k,k)$ für die $^3S_1$ und $^3S_1 - {}^3D_1$ Partialwellen und verschiedene Cutoffs. Aus[6].*

Kapitel 3.

Lippmann-Schwinger-Gleichung

Zweiteilchen-Wechselwirkungen lassen sich am besten an Streuexperimenten untersuchen. Bei der Streuung spielt nur das Potential zwischen den beiden Teilchen eine Rolle. Probleme, die bei Vielteilchenrechnungen auftreten, auch eine etwaige Drei-Teilchen-Wechselwirkung, werden somit von vorne herein vermieden.

Die Streuung wird quantenmechanisch durch die Lippmann-Schwinger-Gleichung (LSE, siehe z.B. [7]) beschrieben. Zentraler Bestandteil dieser Gleichung ist die T-Matrix. Sie verknüpft die freie Wellenfunktion ϕ mit der Wellenfunktion ψ für den vollen Hamilton-Operator.

Diese Wellenfunktionen erfüllen die Schrödinger-Gleichungen

$$H_0 \left|\phi\right\rangle = E \left|\phi\right\rangle \tag{3.1}$$

$$(H_0 + V) \left|\psi\right\rangle = H \left|\psi\right\rangle = E \left|\psi\right\rangle . \tag{3.2}$$

Für $V \to 0$ muss $\left|\psi\right\rangle \to \left|\phi\right\rangle$ gelten. Eine Lösung ist dann

$$\left|\psi\right\rangle = \left|\phi\right\rangle + \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} V \left|\psi\right\rangle \quad . \tag{3.3}$$

Die $T-$Matrix wird durch

$$V \left|\psi\right\rangle = T \left|\phi\right\rangle \tag{3.4}$$

definiert.

Multipliziert man (3.3) mit V erhält man

$$T \left|\phi\right\rangle = V \left|\phi\right\rangle + V \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} T \left|\phi\right\rangle \tag{3.5}$$

und daraus die Lippmann-Schwinger-Gleichung in Operatorform.

$$T = V + V \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} T \ . \tag{3.6}$$

Diese Gleichung kann nun in einer Ebene-Wellen-Basis in Partialwellen, gekennzeichnet durch Bahndrehimpuls L, Spin S und Gesamtdrehimpuls J, entwickelt werden (siehe

Anhang B.1.1). Im Folgenden arbeiten wir ausschließlich mit der in Partialwellen entwickelten Lippmann-Schwinger-Gleichung.

Die in der Gleichung enthaltenen Größen T und V bekommen nun einen Index, der die Partialwelle angibt: T_{LSJ}, V_{LSJ}. Dieser Index wird allerdings nur explizit geschrieben, wenn es notwendig ist.

Wir arbeiten in der Isospin-Basis. Das Nukleon hat den Isospin $I = 1/2$, das Λ-Hyperon $I = 0$ und das Σ-Hyperon $I = 1$. Daraus ergeben sich die möglichen Gesamtisospins $I = 1/2$ oder $I = 3/2$ und die nun genauer behandelten Kanäle.

3.1. Isospin-Kanäle

Die möglichen Gesamtisospins unterscheiden sich durch die Anzahl der zur Verfügung stehenden Kanäle. Dies resultiert in unterschiedlichen Formen der Lippmann-Schwinger-Gleichung.

3.1.1. Isospin $I = 3/2$

Ein Gesamtisospin von 3/2 lässt sich nur mit einem Σ-Hyperon erreichen. Der einzig mögliche Kanal ist dann

$$\Sigma N \to \Sigma N \; . \tag{3.7}$$

In der Teilchenbasis kann man die möglichen Kanäle nach Isospin und Ladung q sortieren. Für Isospin $I = 3/2$ sind die Kanäle in der Teilchenbasis

$$q = +2 \quad \Sigma^+ p \to \Sigma^+ p \tag{3.8}$$

$$q = -1 \quad \Sigma^- n \to \Sigma^- n. \tag{3.9}$$

Für den Isospin $I = 3/2$ Fall hat die Lippmann-Schwinger-Gleichung (LSE) eine relativ einfache Form:

$$T(k', k; E_k) = V(k', k) + \frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_0^\infty dqq^2 V(k', q)\frac{1}{E_k - H_0(q)}T(q, k; E_k) = V + VGT. \tag{3.10}$$

Die Notation $T(k', k; E_k)$ gibt an, dass die Energie E im Propagator an den Impuls k gekoppelt ist, $E_k = E(k)$. Diese Form nennt man Right-On-Shell T-Matrix, da die Energie im Propagator der eines Teilchens mit dem rechten Impulsargument k entspricht. Entsprechend gibt es auch eine Left-on-shell T-Matrix. Beide Formen sind so genannte Half-on-shell T-Matrizen, da die Energie nur zu einer Hälfte der Impulsargumente passt. Die Lippmann-Schwinger-Gleichung lässt sich auch graphisch darstellen (Abb. 3.1.1). Die T-Matrix ist durch die schraffierte Fläche dargestellt. Man erkennt hier auch deutlich, dass die Lippmann-Schwinger-Gleichung eine selbstkonsistente Gleichung ist.

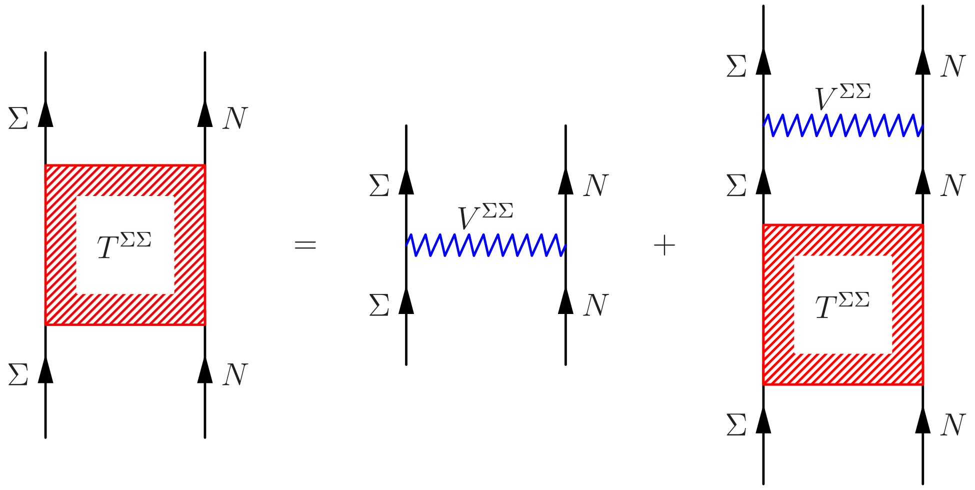


Abbildung 3.1.: *Graphische Darstellung der LSE für den Isospin $I = 3/2$ Prozess $\Sigma N \to \Sigma N$.*

Entwickelt man die Lippmann-Schwinger-Gleichung in V (Born-Serie) erkennt man deutlich die physikalische Bedeutung:

$$T = V + VGV + VGVGV + VGVGVGV + \mathcal{O}\left(V^5\right) \; . \tag{3.11}$$

Die T-Matrix ist die Summe über die mögliche Anzahl der Wechselwirkungen zwischen den beiden Teilchen. Der Term V beschreibt eine einfache Wechselwirkung, der Term VGV eine zweifache Wechselwirkung, wobei die Teilchen zwischen den beiden Wechselwirkungen mit dem Propagator G propagieren. Entsprechend beschreibt der Term $VGVGV$ eine dreifache Wechselwirkung.

Die Streuphase wird aus

$$\tan\left(\delta(k_0)\right) = -2\mu_\Lambda T\left(k_0, k_0; E_{k_0}\right) \tag{3.12}$$

berechnet.

3.1.2. Isospin $I = 1/2$

Für den Fall $I = \frac{1}{2}$ gibt es zusätzlich die Möglichkeit eines Übergangs von einem Λ- in ein Σ-Hyperon und umgekehrt, wenn dies kinetisch erlaubt ist. Es stehen die Kanäle $(\Lambda N, \Sigma N) \to (\Lambda N, \Sigma N)$ offen. Schreibt man diese wieder explizit in der Teilchenbasis erhält man die Kanäle

$$q = +1 \quad \left(\Lambda p, \Sigma^+ n, \Sigma^0 p\right) \to \left(\Lambda p, \Sigma^+ n, \Sigma^0 p\right) \tag{3.13}$$

$$q = 0 \quad \left(\Lambda n, \Sigma^0 n, \Sigma^- p\right) \to \left(\Lambda n, \Sigma^0 n, \Sigma^- p\right) . \tag{3.14}$$

Im Folgenden wird das Nukleon zur Bezeichnung des Kanals weggelassen. Sowohl für das Potential als auch für die T-Matrix wird die abkürzende Schreibweise

$$A^{XY} = \langle XN| A |YN\rangle \qquad \text{mit } A = T, V \quad X, Y = \Lambda, \Sigma \tag{3.15}$$

eingeführt.

$T^{\Lambda\Sigma}$ bezeichnet also die T-Matrix für den Prozess $\Sigma N \to \Lambda N$, $\langle \Lambda N| T |\Sigma N\rangle$. In der Lippmann-Schwinger-Gleichung muss nun über alle möglichen Kanäle summiert werden. Mit den oben definierten Abkürzungen kann sie dann in der Form

$$T^{XY}(k', k; E_k) = V^{XY}(k', k) + \sum_Z \frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_0^\infty dqq^2 V^{XZ}(k', q)\frac{1}{E_k - H_0^Z}T^{ZY}(q, k; E_k) \tag{3.16}$$

geschrieben werden.

Ohne Einschränkungen kann man dies auch in der Form

$$T^{XY} = V^{XY} + \sum_Z V^{XZ}G^Z T^{ZY} \tag{3.17}$$

schreiben. Die Summe über Z muss über alle möglichen Kanäle ausgeführt werden.

Die T-Matrix für den Prozess $\Lambda N \to \Lambda N$ ist dann durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$T^{\Lambda\Lambda} = V^{\Lambda\Lambda} + V^{\Lambda\Lambda}G^\Lambda T^{\Lambda\Lambda} + V^{\Lambda\Sigma}G^\Sigma T^{\Sigma\Lambda} \ . \tag{3.18}$$

Durch den letzten Term entsteht eine Kopplung an die $\Sigma N \to \Lambda N$ T-Matrix.

$$T^{\Sigma\Lambda} = V^{\Sigma\Lambda} + V^{\Sigma\Lambda}G^\Lambda T^{\Lambda\Lambda} + V^{\Sigma\Sigma}G^\Sigma T^{\Sigma\Lambda} \ . \tag{3.19}$$

Diese beiden gekoppelten Lippmann-Schwinger-Gleichungen lassen sich zur Verdeutlichung ebenfalls graphisch darstellen (Abb. 3.1.2).

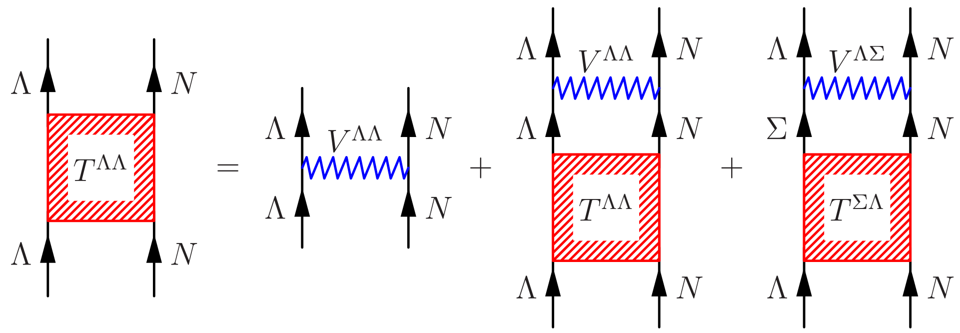
Schreibt man (3.18) aus erhält man

$$T^{\Lambda\Lambda}(k', k; E_k) = V^{\Lambda\Lambda}(k', k) \tag{3.20}$$
$$+ \frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_0^\infty dqq^2 V^{\Lambda\Lambda}(k', q)\frac{1}{E_k - H_0^\Lambda}T^{\Lambda\Lambda}(q, k; E_k) \tag{3.21}$$
$$+ \frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_0^\infty dqq^2 V^{\Lambda\Sigma}(k', q)\frac{1}{E_k - H_0^\Sigma}T^{\Sigma\Lambda}(q, k; E_k). \tag{3.22}$$

Zusätzlich kann man im Isospin $I = 1/2$ Fall noch zwei weitere Lippmann-Schwinger-Gleichungen aufstellen:

$$T^{\Sigma\Sigma} = V^{\Sigma\Sigma} + V^{\Sigma\Lambda}G^\Lambda T^{\Lambda\Sigma} + V^{\Sigma\Sigma}G^\Sigma T^{\Sigma\Sigma} \ , \tag{3.23}$$

$$T^{\Lambda\Sigma} = V^{\Lambda\Sigma} + V^{\Lambda\Lambda}G^\Lambda T^{\Lambda\Sigma} + V^{\Lambda\Sigma}G^\Sigma T^{\Sigma\Sigma} \ . \tag{3.24}$$



mit

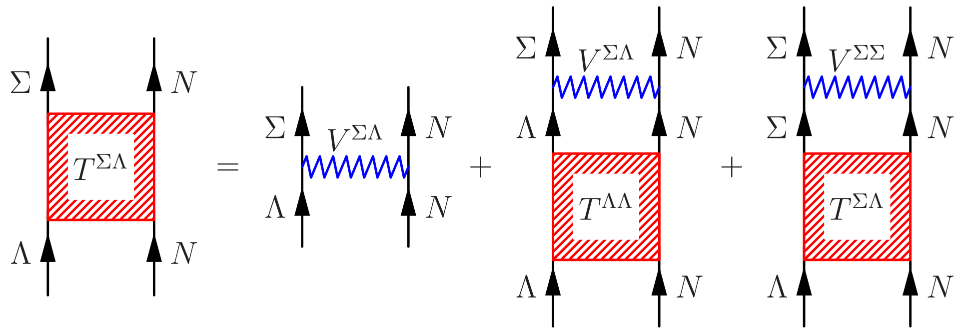


Abbildung 3.2.: *Graphische Darstellung der LSE für den Isospin* $I = 1/2$ *Prozess* $\Lambda N \to \Lambda N$.

Diese 4 gekoppelten Gleichungen (3.18,3.19,3.23,3.24) lassen sich nun in Matrixform schreiben. Definiert man hierzu die Matrizen

$$V = \begin{pmatrix} V^{\Lambda\Lambda} & V^{\Lambda\Sigma} \\ V^{\Sigma\Lambda} & V^{\Sigma\Sigma} \end{pmatrix} \quad , \quad T = \begin{pmatrix} T^{\Lambda\Lambda} & T^{\Lambda\Sigma} \\ T^{\Sigma\Lambda} & T^{\Sigma\Sigma} \end{pmatrix} \quad , \quad G = \begin{pmatrix} G^{\Lambda} & 0 \\ 0 & G^{\Sigma} \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

erhält man für die Lippmann-Schwinger-Gleichung wieder die bekannte Form

$$T = V + VGT \ . \tag{3.26}$$

Der Propagator G^Y ergibt sich mit

$$G^Y = \frac{1}{E - H_0^Y + i\epsilon} \tag{3.27}$$

und dem freien Hamilton-Operator

$$H_0^Y = \frac{q^2}{2\mu_Y} + m_Y + m_N \qquad Y = \Lambda, \Sigma \tag{3.28}$$

sowie der Energie

$$E^Y = \frac{k^2}{2\mu_Y} + m_Y + m_N \ . \tag{3.29}$$

μ_Y bezeichnet die reduzierte Masse des Hyperon-Nukleon-Systems im Schwerpunktsystem

$$\mu_Y = \frac{m_Y m_N}{m_Y + m_N} \qquad Y = \Lambda, \Sigma \; . \tag{3.30}$$

Hierbei ist m_Y die Masse des Hyperons und m_N die Masse des Nukleons.

Da E von außen vorgegeben wird, ist es in beiden Greensfunktionen gleich. Damit ergibt sich:

$$G^\Lambda = \frac{1}{E^\Lambda - H_0^\Lambda} = \frac{2\mu_\Lambda}{k^2 - q^2} \tag{3.31}$$

$$G^\Sigma = \frac{1}{E^\Lambda - H_0^\Sigma} = \frac{2\mu_\Sigma}{\frac{\mu_\Sigma}{\mu_\Lambda} k^2 - q^2 + 2\mu_\Sigma (m_\Lambda - m_\Sigma)} \; . \tag{3.32}$$

G^Σ hat nur einen Pol, wenn die Energie im Schwerpunktsystem ausreicht, um die Massendifferenz zwischen einem Λ- und einem Σ-Hyperon zu überwinden.

Unterhalb dieser Schwelle kann die Integration einfach ausgeführt werden (kein Hauptwertintegral).

Oberhalb der Schwelle kann man G^Σ in die Form

$$G^\Sigma = \frac{2\mu_\Sigma}{x_0^2 - q^2} \qquad \text{mit } x_0 = \sqrt{2\mu_\Sigma (m_\Lambda - m_\Sigma) + \frac{\mu_\Sigma}{\mu_\Lambda} k_0^2} \tag{3.33}$$

mit Pol bei $k = x_0$ bringen.

Hieraus kann man auch leicht den im Schwerpunktsystem nötigen Relativimpuls ablesen, der zur Produktion des Σ-Hyperons gebraucht wird. Sobald der Ausdruck unter der Wurzel positiv ist, kann ein Σ-Hyperon erzeugt werden. Die Schwelle k_{tr} liegt bei

$$k_{tr} > \sqrt{2\mu_\Lambda (m_\Sigma - m_\Lambda)} \approx 281\,\text{MeV} \; . \tag{3.34}$$

Die Streuphase für den Prozess $\Lambda N \to \Lambda N$ ist durch

$$\tan\left(\delta^\Lambda(k_0)\right) = -2\mu_\Lambda T^{\Lambda\Lambda}\left(k_0, k_0; E^\Lambda_{k_0}\right) \tag{3.35}$$

gegeben.

3.2. Drehimpulskopplung

In beiden Isospin-Fällen muss zusätzlich berücksichtigt werden, dass L nicht für alle LSJ-Kombinationen eine gute Quantenzahl ist. Für die Partialwellen $(S = 1, L = J \pm 1,\ J)$, beispielsweise ${}^3S_1$ und ${}^3D_1$ mischen die physikalischen Zustände. Dies bedeutet für uns, dass ein Zustand ${}^3S_1$ Zustand durch die Streuung in einen ${}^3D_1$ Zustand übergehen kann. Es ergeben sich hierdurch die vier Kanäle

$$(S = 1, L = J \pm 1, J) \to (S = 1, L = J \pm 1, J). \tag{3.36}$$

Diese Kanäle existieren zusätzlich zu den bereits vorhandenen. Im Isospin 3/2 Fall erhöht sich für die betroffenen Partialwellen die Anzahl der Kanäle von einem auf vier, für Isospin 1/2 von vier auf 16.

Da die Anzahl der Kanäle sowohl im Isospin 1/2 ohne Drehimpulskopplung als auch im Isospin 3/2 Fall mit Drehimpulskopplung vier ist, ergibt sich eine ähnliche Struktur für die Lippmann-Schwinger-Gleichung.

Die Lippmann-Schwinger-Gleichung für den Prozess

$$(S = 1, L = J - 1, J) \rightarrow (S = 1, L = J - 1, J)$$

ergibt sich dann wie folgt:

$$T_{--} = V_{--} + V_{--}\, G\, T_{--} + V_{-+}\, G\, T_{+-} \ , \tag{3.37}$$

wobei die Indizes den Wert von L angeben. Ein $+$ steht für $L = J + 1$, ein $-$ für L=$J-1$. Es ist also $T_{+-} = \langle S = 1, L = J + 1, J |\, T\, | S = 1, L = J - 1, J \rangle$. Die Lippmann-Schwinger-Gleichung lässt sich wieder in Matrixstruktur schreiben. Dazu definiert man die Matrizen als

$$V = \begin{pmatrix} V_{--} & V_{-+} \\ V_{+-} & V_{++} \end{pmatrix} \ , \quad T = \begin{pmatrix} T_{--} & T_{-+} \\ T_{+-} & T_{++} \end{pmatrix} \ . \tag{3.38}$$

Der freie Hamilton-Operator unterscheidet nicht zwischen $L = J - 1$ und $L = J + 1$, es gibt folglich hier nur einen Propagator G. In der verwendeten Matrixschreibweise hat er die Form

$$G = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \ . \tag{3.39}$$

Da die Partialwellen mischen, ergeben sich auch Konsequenzen für die Berechnung der Streuphasen. Hier gibt es nun zwei verschiedene Konventionen. Zum einen die Eigenstreuphasen[8] und zum anderen die Nuclear-Bar-Streuphasen[9]. Wir berechnen zunächst die Eigenstreuphasen und rechnen diese dann in Nuclear-Bar-Streuphasen um. Zur Unterscheidung schreiben wir Eigenstreuphasen als δ und Nuclear-Bar-Streuphasen als $\bar{\delta}$. Im ungekoppelten Fall gibt es diese Unterscheidung nicht. Es gilt $\delta = \bar{\delta}$.

Die Eigenstreuphasen sind die Eigenwerte der S-Matrix. Der Mischungsparameter[1] ϵ beschreibt eine unitäre Transformation auf das Eigensystem.

$$S = U^{-1} \exp{(2i\Delta)} U \tag{3.40}$$

mit

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_- & 0 \\ 0 & \delta_+ \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad U = \begin{pmatrix} \cos(\epsilon) & \sin(\epsilon) \\ -\sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) \end{pmatrix} \ . \tag{3.41}$$

Für kleine Impulse haben die Eigenstreuphasen und der Mischungsparameter die Eigenschaften

$$\delta_- \propto k^{2J-1} \ , \qquad \delta_+ \propto k^{2J+3} \ , \quad \epsilon \propto k^2 \ . \tag{3.42}$$

[1]Der Mischungsparameter ist für jeden Gesamtdrehimpuls unabhängig. Wir schreiben wie bei den Streuphasen den Index J von ϵ_J nur explizit, wenn es notwendig ist.

Zur Berechnung der Streuphasen werden nur die Elemente der T-Matrix $T(k_0, k_0)$ benötigt. Da dies zu keinerlei Unklarheiten führen sollte, werden die Argumente der T-Matrix nicht immer explizit geschrieben. Wo immer im Folgenden Streuphasen aus der T-Matrix berechnet werden, verwenden wir die Notation

$$T = T\left(k_0, k_0; E_{k_0}\right) \ , \quad \delta = \delta(k_0) \ , \quad \epsilon = \epsilon(k_0) \ .$$

Weiterhin benötigt man zur Berechnung der Eigenstreuphasen den Mischungsparameter ϵ

$$\tan\left(2\epsilon\right) = \frac{T_{+-} + T_{-+}}{T_{--} - T_{++}} \ . \tag{3.43}$$

Die Eigenstreuphasen ergeben sich dann aus

$$\tan\delta_{\pm} = -\frac{1}{2}\mu k_0 \left[T_{--} + T_{++} \mp \frac{T_{--} - T_{++}}{\cos(2\epsilon)}\right] \ . \tag{3.44}$$

Die Eigenstreuphasen $\delta_{\pm}$ sind nicht die Streuphasen für die Zustände $L = J \pm 1$.

Die Nuclear-Bar-Streuphasen ergeben sich aus folgender Parametrisierung für die S-Matrix

$$S = \begin{pmatrix} e^{i\bar{\delta}_-} & 0 \\ 0 & e^{i\bar{\delta}_+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\bar{\epsilon}) & i\sin(2\bar{\epsilon}) \\ i\sin(2\bar{\epsilon}) & \cos(2\bar{\epsilon}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\bar{\delta}_-} & 0 \\ 0 & e^{i\bar{\delta}_+} \end{pmatrix} \ . \tag{3.45}$$

Hier zeigt besonders der Mischungsparameter ein schöneres Verhalten für kleine Impuls. Es gilt

$$\bar{\delta}_- \propto k^{2J-1} \ , \qquad \bar{\delta}_+ \propto k^{2J+3} \ , \qquad \bar{\epsilon} \propto k^{2J+1} \ . \tag{3.46}$$

Der Mischungsparameter der Nuclear-Bar-Streuphasen hat eine anschauliche physikalische Interpretation. Er gibt an, zu welchem Grad der Drehimpuls L bei der Streuung erhalten ist.

Die Umrechnung der Werte von Eigen- nach Nuclear-Bar-Streuphasen folgt mit Hilfe der Beziehungen (nach [10]):

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_- + \bar{\delta}_+ &= \delta_- + \delta_+ \ , \\ \sin\left(\bar{\delta}_- - \bar{\delta}_+\right) &= \frac{\tan\left(2\bar{\epsilon}\right)}{\tan\left(2\epsilon\right)} \\ \sin\left(\delta_- - \delta_+\right) &= \frac{\sin\left(2\bar{\epsilon}\right)}{\sin\left(2\epsilon\right)} \ . \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Nuclear-Bar-Streuphasen aus den Eigenstreuphasen wie folgt:

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2}\arcsin\left(\sin(\delta_- - \delta_+)\sin(2\epsilon)\right) \ , \tag{3.47}$$

$$\bar{\delta}_- = \frac{1}{2}\left(\delta_- + \delta_+ + \arcsin\left(\frac{\tan\left(2\bar{\epsilon}\right)}{\tan\left(2\epsilon\right)}\right)\right) \ , \tag{3.48}$$

$$\bar{\delta}_+ = \delta_- + \delta_+ - \bar{\delta}_- \ . \tag{3.49}$$

Im Fall Isospin $I = 1/2$ muss diese Matrixstruktur in jeden der vier schon bestehenden Blöcke für die verschiedenen Teilchen eingesetzt werden.

Die Lippmann-Schwinger-Gleichung kann dann mit den Matrixdefinitionen

$$T = \begin{pmatrix} T^{\Lambda\Lambda}_{--} & T^{\Lambda\Lambda}_{-+} & T^{\Lambda\Sigma}_{--} & T^{\Lambda\Sigma}_{-+} \\ T^{\Lambda\Lambda}_{+-} & T^{\Lambda\Lambda}_{++} & T^{\Lambda\Sigma}_{+-} & T^{\Lambda\Sigma}_{++} \\ T^{\Sigma\Lambda}_{--} & T^{\Sigma\Lambda}_{-+} & T^{\Sigma\Sigma}_{--} & T^{\Sigma\Sigma}_{-+} \\ T^{\Sigma\Lambda}_{+-} & T^{\Sigma\Lambda}_{++} & T^{\Sigma\Sigma}_{-+} & T^{\Sigma\Sigma}_{++} \end{pmatrix} , \qquad V = \begin{pmatrix} V^{\Lambda\Lambda}_{--} & V^{\Lambda\Lambda}_{-+} & V^{\Lambda\Sigma}_{--} & V^{\Lambda\Sigma}_{-+} \\ V^{\Lambda\Lambda}_{+-} & V^{\Lambda\Lambda}_{++} & V^{\Lambda\Sigma}_{+-} & V^{\Lambda\Sigma}_{++} \\ V^{\Sigma\Lambda}_{--} & V^{\Sigma\Lambda}_{-+} & V^{\Sigma\Sigma}_{--} & V^{\Sigma\Sigma}_{-+} \\ V^{\Sigma\Lambda}_{+-} & V^{\Sigma\Lambda}_{++} & V^{\Sigma\Sigma}_{-+} & V^{\Sigma\Sigma}_{++} \end{pmatrix} \tag{3.50}$$

und

$$\begin{pmatrix} G^{\Lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G^{\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G^{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G^{\Sigma} \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

wieder in der bekannten Form geschrieben werden.

3.3. Kinematik

Die Behandlung der Lippmann-Schwinger-Gleichung erfolgt im Schwerpunktsystem. Zum Vergleich mit Literaturwerten müssen die Größen auf Laborwerte umgerechnet werden [11]. Im Folgenden werden zur Unterscheidung Größen im Laborsystem mit dem Index $_{\mathrm{lab}}$ gekennzeichnet.

Sei $\vec{p}$ der Relativimpuls im Schwerpunktsystem. Wir betrachten zwei Teilchen A und B, wobei B in Ruhe sei. Dann gilt $\vec{p}_{\mathrm{lab}} = (\vec{p}_A)_{\mathrm{lab}}$.

In Schwerpunktsystem gilt

$$E_A = \sqrt{(\vec{p})^2 + m_A^2} , \quad E_B = \sqrt{(\vec{p})^2 + m_A^2} , \tag{3.52}$$

$$s = (E_A + E_B)^2 \ . \tag{3.53}$$

s ist in invariant unter Lorentztransformationen. Damit gilt

$$(s)_{\mathrm{lab}} = s \ . \tag{3.54}$$

Im Laborsystem gelten entsprechende Relationen:

$$(s)_{\mathrm{lab}} = (m_A + m_B)^2 + 2m_B \left(K_A\right)_{\mathrm{lab}} \tag{3.55}$$

wobei $(K_A)_{\mathrm{lab}} = (E_A)_{\mathrm{lab}} - m_A$ die kinetische Energie von Teilchen A. Hier fließt erneut ein, dass Teilchen B in Ruhe ist

$$(E_A)^2_{\mathrm{lab}} - (\vec{p}_A)^2_{\mathrm{lab}} = m_A^2 \ . \tag{3.56}$$

Auflösen liefert

$$|\vec{p}_{\mathrm{lab}}| = \sqrt{-m_A^2 + \left(m_A + \frac{-(m_A+m_B)^2 + \left(\sqrt{m_A^2+p^2} + \sqrt{m_B^2+p^2}\right)^2}{2m_B}\right)^2} \tag{3.57}$$

In unseren Rechnungen bezeichnet B ein Nukleon und A das Λ- oder Σ-Hyperon. Mit Hilfe dieser Formeln lässt sich nun leicht der Relativimpuls im Schwerpunktsystem in den Impuls des einkommenden Teilchens im Laborsystem umrechnen.

Kapitel 4.

$V_{\text{low k}}$

4.1. Flussgleichung

Mit der Forderung der Äquivalenz der Half-on-shell T-Matrix der effektiven Wechselwirkung zur T-Matrix der vollen Wechselwirkung lässt sich aus der Lippmann-Schwinger-Gleichung eine Flussgleichung zur Bestimmung der effektiven Wechselwirkung $V_{\text{low }k}$ herleiten[12].

Ausgehend von der Lippmann-Schwinger-Gleichung für den vollen Hilbert-Raum

$$T(k', k, E_k) = V(k', k) + \frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_0^\infty dq q^2 V(k', q)\frac{1}{E_k - H_0}T(q, k, E_k) \tag{4.1}$$

führt man einen Cutoff Λ ein, der den Modellraum definiert. Die Integration läuft jetzt nicht mehr von 0 bis ∞, sondern nur noch von 0 bis Λ.

Damit wird die T-Matrix cutoff-abhängig. Um dies kompensieren zu können, erlauben wir zusätzlich, dass das Potential vom Cutoff Λ abhängen kann. Die Abhängigkeit vom Cutoff wird durch den Index Λ angedeutet.

$$T_\Lambda(k', k, E_k) = V_\Lambda(k', k) + \frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_0^\Lambda dq q^2 V_\Lambda(k', q)\frac{1}{E_k - H_0}T_\Lambda(q, k, E_k) \tag{4.2}$$

Da die T-Matrix für das Ausgangspotential und die effektive Wechselwirkung identisch sein sollen, darf die T-Matrix nicht vom Cutoff Λ abhängen.

$$\frac{d}{d\Lambda}T_\Lambda(k, k', k^2) = 0 \tag{4.3}$$

Die Abhängigkeit vom Cutoff wird komplett durch das Potential kompensiert. Das Λ-abhängige Potential ist unsere gesuchte effektive Wechselwirkung.

$$V_\Lambda(k, k') = V_{\text{low }k}(k, k') \tag{4.4}$$

Dies führt zu einer Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\Lambda}V_{\text{low }k}(k, k') = \frac{2}{\pi}\frac{2\mu V_{\text{low }k}(k, \Lambda)T(\Lambda, k'; E_\Lambda)}{1 - (k/\Lambda)^2} \tag{4.5}$$

Zur Lösung dieser Differentialgleichung benötigt man einen geeigneten Startwert. Es gilt offensichtlich

$$V(k,k') = V_\infty(k,k') \ . \tag{4.6}$$

Da ∞ kein geeigneter Startwert ist, muss man ein ausreichend großes Λ_0 wählen, für das

$$V_{\Lambda_0}(k,k') \approx V(k,k') \tag{4.7}$$

Prinzipiell könnte man diese Differentialgleichung nun lösen und so $V_{\text{low }k}$ erhalten. Allerdings treten hierbei Schwierigkeiten auf, die nicht ohne weiteres zu lösen sind. Dies lässt sich für seperable Potentiale[1] $V(k,k') = L(k)R(k')$ veranschaulichen [6, 13], denn für diese lässt sich die T-Matrix analytisch bestimmen

$$T(k,k',k^2) = \frac{L(k)R(k')}{1+\frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_0^\infty \frac{L(p)R(p)}{p^2-k^2}p^2dp} \ . \tag{4.8}$$

Setzt man dies in die Flussgleichung ein, erhält man

$$\frac{d}{d\Lambda}V_{\text{low }k}(k,k') = \frac{2/\pi}{1-(k/\Lambda)^2}\frac{V_{\text{low }k}(k,k)V_{\text{low }k}(\Lambda,\Lambda)}{1+\frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_0^\Lambda \frac{V_{\text{low }k}(p,p)}{p^2-\Lambda^2}p^2dp} \ . \tag{4.9}$$

Hier taucht nun ein Hauptwertintegral mit Pol bei $p = \Lambda$ auf. Allerdings ist Λ auch die obere Grenze des Hauptwertintegrals. Die exakte Behandlung des Integrals ist nun nicht mehr möglich.

Um dieses Problem zu umgehen, kann man nun einen Parameter ϵ einführen und als Integrationsgrenze $\Lambda \pm \epsilon$ verwenden oder statt eines scharfen Cutoffs einen weichen Cutoff benutzen. Mit beiden Variante lässt sich die Flussgleichung lösen, allerdings ist das Ergebnis im ersten Fall von der Wahl des Parameters ϵ abhängig [14].

Die numerische Lösung ist sehr aufwendig, da in jedem Schritt beim Lösen der Differentialgleichung die T-Matrix berechnet werden muss.

Aus Lippmann-Schwinger-Gleichung für $V_{\text{low }k}$ (4.2) lässt sich eine weitere, interessante Eigenschaft von $V_{\text{low }k}$ ablesen. Betrachtet man den Grenzfall $\Lambda \to 0$, so gilt

$$V_{\text{low }k}(0,0) \to T(0,0;0) = \frac{a}{2\mu} \ . \tag{4.10}$$

a ist hierbei die Streulänge aus (1.2). Diese Eigenschaft gilt, da

$$\lim_{\Lambda\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_0^\Lambda dq q^2 V_{\text{low }k}(k',q)\frac{1}{E_k - H_0}T_(q,k,E_k)\right) \to 0 \ . \tag{4.11}$$

[1] Für dieses Beispiel verwenden wir die Konvention $\hbar^2/m = 1$. Damit gilt $E(k) = k^2$.

4.2. Andreozzi-Lee-Suzuki Iteration

Obwohl die Flussgleichung nicht ohne Komplikationen lösbar ist, lässt sich $V_{\text{low }k}$ trotzdem bestimmen. Man benutzt die von Andreozzi beschriebene Andreozzi-Lee-Suzuki-Iteration. Die Lösung ist identisch mit der, die man durch Lösen der Flussgleichung erhält.[15] Unsere Rechnungen haben wir ausschließlich mit der ALS-Iteration bestimmt.

Ursprünglich wurde die Methode beschrieben, um effektive Hamilton-Operatoren zu bestimmen. Die Anwendung zur Bestimmung des effektiven Potentials $V_{\text{low }k}$ ist allerdings sehr einfach möglich.

4.2.1. Idee

Die Separation des Hilbert-Raums wird durch Projektionsoperatoren P und Q

$$P = \frac{2}{\pi}\int_0^\Lambda p^2 dp\, |p\rangle \langle p| \qquad Q = 1 - P \tag{4.12}$$

realisiert.

Diese erfüllen die üblichen Eigenschaften für Projektionsoperatoren

$$P^2 = P \quad Q^2 = Q \quad PQ = QP = 0\ . \tag{4.13}$$

Der Operator P projiziert auf Zustände mit Impulsen kleiner Λ und definiert damit den Modellraum.

Wir benötigen den vollen Hamilton-Operator. Dieser ist als Summe des kinetischen Anteils und der Wechselwirkung gegeben

$$H = H_0 + V_{\text{bare}}\ . \tag{4.14}$$

Für H_0 verwenden wir

$$H_0 = \frac{k^2}{2\mu} + m_{\text{tot}}\ . \tag{4.15}$$

Den Term m_{tot} können wir allerdings vernachlässigen, wenn wir nur eine Teilchenkombination haben. Hierauf werden wir aber später noch eingehen.

Mit der Lee-Suzuki Transformation [16, 17] lässt sich aus dem Hamilton-Operator H für den vollen Hilbert-Raum - in unserem Fall Impulse von 0 bis ∞ - der transformierte Hamilton-Operator über eine Ähnlichkeitstransformation gewinnen

$$\mathcal{H} = \Omega^{-1} H \Omega\ . \tag{4.16}$$

Der effektive Hamilton-Operator für den Modellraum berechnet sich aus $\mathcal{H}$ durch die Trunkierung auf den P-Raum.

$$H_{\text{eff}} = P\mathcal{H}P \tag{4.17}$$

Damit $P\mathcal{H}P$ der effektive Hamilton-Operator für den Modellraum ist, muss zusätzlich die Bedingung

$$Q\mathcal{H}P = 0 \tag{4.18}$$

erfüllt sein.

Dies kann man sich wie folgt verdeutlichen. $|\phi\rangle$ bezeichnet eine auf unseren Modellraum trunkierte Wellenfunktion

$$|\phi\rangle = P\,|\Psi\rangle \, .$$

Die Anwendung des effektiven Hamilton-Operators auf eine Wellenfunktion des Modellraums soll den gleichen Eigenwert liefern, wie die Anwendung des vollen Hamilton-Operators auf die volle Wellenfunktion

$$\mathcal{H}\,|\phi\rangle = E\,|\phi\rangle \qquad H\,|\Psi\rangle = E\,|\Psi\rangle \ . \tag{4.19}$$

Führt man nun eine $1 = (P+Q)$ ein, erhält man

$$(P+Q)\mathcal{H}\,|\phi\rangle = P\mathcal{H}P\,|\Psi\rangle + Q\mathcal{H}P\,|\Psi\rangle = EP\,|\Psi\rangle = E\,|\phi\rangle \ . \tag{4.20}$$

Der Term $Q\mathcal{H}P$ würde die Beschränkung unserer Modellraum-Wellenfunktion durchbrechen. Daraus folgt unsere Bedingung $Q\mathcal{H}P = 0$.

Eine mögliche Form für die Ähnlichkeitstransformation ist ein Exponentialansatz

$$\Omega = \exp(\omega) \ , \tag{4.21}$$

wobei der Wellenoperator ω die Bedingung $Q\omega P = \omega$ erfüllt. Damit erhält man

$$\omega^2 = Q\omega \underbrace{PQ}_{=0} \omega P = 0 \quad \omega^2 = \omega^3 = \ldots = 0 \ . \tag{4.22}$$

ω transformiert Zustände aus dem P-Raum in den Q-Raum. Damit lässt sich (4.21) in der Form

$$\Omega = 1 + \omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega & 1 \end{pmatrix} \qquad \Omega^{-1} = 1 - \omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega & 1 \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

schreiben.

Für den transformierten Hamilton-Operator $\mathcal{H}$ lassen sich die einzelnen Terme dann in der Form

$$P\mathcal{H}P = PHP + PHQ\omega \ , \tag{4.24}$$
$$P\mathcal{H}Q = PHQ \ , \tag{4.25}$$
$$Q\mathcal{H}P = \omega PHQ\omega + \omega PHP + QHQ\omega + QHP \ , \tag{4.26}$$
$$Q\mathcal{H}Q = QHQ - \omega PHQ \tag{4.27}$$
$$\tag{4.28}$$

schreiben.

Mit (4.18) erhält man hieraus die Entkopplungsgleichung

$$\omega PHQ\omega + \omega PHP + QHQ\omega + QHP = 0 \ . \tag{4.29}$$

Diese nichtlineare Matrixgleichung lässt sich nicht durch allgemeine Verfahren lösen. Wir verwenden deshalb die von Andreozzi beschriebenen iterativen Lösungsverfahren [18].

Hat man eine Lösung für ω gefunden, lässt sich der effektive Hamilton-Operator einfach durch Anwendung der Ähnlichkeitstransformation bestimmen.

Aus dem effektiven Hamilton-Operator gewinnt man das effektive Potential durch Subtraktion des kinetischen Anteils

$$V_{\text{low }k} = P\mathcal{H}P - PH_0P \tag{4.30}$$

Weiterhin definieren wir

$$p\left(\omega\right) = P\mathcal{H}P = PHP + PHQ\omega \ . \tag{4.31}$$

und

$$q\left(\omega\right) = Q\mathcal{H}Q = QHQ - \omega PHQ \ . \tag{4.32}$$

4.2.2. Iteration

Die numerische Bestimmung der Lösung der Entkopplungsgleichung (4.29) wird im Anhang B.2 ausführlich behandelt. Wir möchten hier nur die wichtigsten Punkte angeben. Die Lösung wird iterativ bestimmt. Ein mögliches Iterationsschema ist

$$x_0 = \frac{-1}{QHQ} QHP \ , \tag{4.33}$$

$$x_1 = \frac{1}{q\left(x_0\right)} x_0 p\left(x_0\right) \ , \tag{4.34}$$

$$x_n = \frac{1}{q\left(x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}\right)} x_{n-1} p\left(x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}\right) \ . \tag{4.35}$$

Die Lösung der Entkopplungsgleichung ist dann durch

$$\sigma = \sum_i x_i \tag{4.36}$$

gegeben. Da $x_i \to 0$ erhält man nach endlich vielen Iterationen eine Lösung, die eine geforderte Genauigkeit erreicht.

Die beschriebene Methode hat mehrere Vorteile. Die Methode ist nicht-perturbativ und somit abgesehen von numerischen Ungenauigkeiten exakt. Die Konvergenz der Iteration ist leicht zu kontrollieren. Abgesehen davon, dass $x_i \to 0$ ein einfaches Abbruchkriterium für die Iteration erlaubt, hat man mit der Entkopplungsgleichung (4.29) eine weitere Kontrolle, ob die gefundene Lösung auch wirklich die Entkopplungsgleichung erfüllt.

4.2.3. Konvergenz

Andreozzi hat in [18] auch die Bedingungen für die Konvergenz der Iteration angegeben. Die hier verwendete Methode konvergiert, wenn

$$|\lambda_{pM}| < |\lambda_{qm}| \tag{4.37}$$

erfüllt ist. Dabei bezeichnet $|\lambda_{pM}|$ den Eigenwert von $p\,(\sigma_{n-1})$ mit dem größten Absolutbetrag und $|\lambda_{qm}|$ den Eigenwert von $q\,(\sigma_{n-1})$ mit dem kleinsten Absolutbetrag. Dies ergibt auch die für die Konvergenz notwendige Bedingung, dass die Eigenwerte von $p\,(\sigma_{n-1})$ die d vom Absolutbetrag kleinsten Eigenwerte von H sind. d bezeichnet hierbei die Anzahl der Stützstellen und damit auch die Anzahl der Eigenwerte im P-Raum. Dies wird im Folgenden besonders für den Isospin 1/2 Fall interessant, in dem wir nicht nur eine Teilchenkombination haben, sondern mit ΛN und ΣN zwei, die auch eine nicht zu vernachlässigende Massendifferenz haben. Wir werden darauf noch genauer eingehen.

Durch eine konstante Verschiebung der Eigenwerte mittels Addition von cI_n kann man die Eigenwerte in den gewünschten Bereich verschieben. Die Prozedur konvergiert dann auf die Eigenwerte, die am nächsten an c liegen, d.h. bei denen der Absolutbetrag der Differenz zu c am kleinsten ist. Das ist auch der Grund, warum die totale Masse m_{tot} in H_0 in einigen Fällen vernachlässigt werden kann. Wenn die Eigenwerte von H alle positiv sind, verschiebt m_{tot} die Eigenwerte lediglich. Die vom Absolutbetrag kleinsten Eigenwerte bleiben dies auch nach der Addition der totalen Masse.

Die hier nicht verwendete zweite Iterationsmethode konvergiert auf die vom Absolutbetrag größten Eigenwerte von H und hat die Konvergenzbedingung

$$|\lambda_{qM}| < |\lambda_{pm}|\,. \tag{4.38}$$

Beide Methoden konvergieren nur auf einen zusammenhängenden Satz von Eigenwerten. Dies ist nicht immer erwünscht. Geht man davon aus, dass man ein Hamilton-Operator hat, der die Eigenwerte $\lambda = 10, 20, 30, 40$ hat. Die vom Absolutbetrag kleinsten Eigenwerte sind 10 und 20. Durch eine Verschiebung der Eigenwerte mit $c = 25$ konvergiert die Methode auf die Eigenwerte 20 und 30. Es besteht allerdings keine Möglichkeit, dass die Methode beispielsweise auf die Eigenwerte 10 und 30 konvergiert. Für $c < 20$ konvergiert die Methode auf die Eigenwerte 10 und 20, für $c > 20$ auf die Eigenwerte 20 und 30.

Im Nukleon-Nukleon-Fall sowie im Hyperon-Nukleon-Fall für einen Isospin von 3/2 ist dies kein Problem, da H_0 hier für eine günstige Sortierung sorgt (siehe hierzu Abschnitt 4.2.4). Im Isospin 1/2 Fall kann dies aber durchaus zu Problemen führen. Es kann vorkommen, dass die Eigenwerte des P-Raums nicht die kleinsten zusammenhängenden Eigenwerte sind.

Dies kann man sich verdeutlichen, wenn man annimmt, dass das Potential sehr klein gegenüber dem diagonalen kinetischen Term ist. Da in diesem Fall $QHP \approx 0$ gilt, und damit auch $H \approx \mathcal{H}$, kann man in guter Näherung einfach PHP als effektive Wechselwirkung nutzen.

Wenn das Potential sehr klein gegenüber dem kinetischen Anteil ist, ist die resultierende Hamilton-Matrix diagonaldominant und die Diagonalelemente sind eine gute Näherung für die Eigenwerte. Die Diagonalelemente sind dann

$$H(k,k) = H_0(k,k) + V(k,k) \approx H_0(k,k) \ . \tag{4.39}$$

Betrachtet man nun die größten Diagonalelemente im P-Raum und die kleinsten Elemente im Q-Raum, erkennt man, dass es durchaus vorkommen kann, dass der kleinste Werte im Q-Raum kleiner ist als der größte im P-Raum. Dies kann am besten an einem Beispiel verdeutlicht werden.

Wir betrachten für einen Cutoff $\Lambda = 500\,\mathrm{MeV}$ und ein Problem mit ΛN und ΣN Kanälen den kinetischen Anteil.

$$H_0^\Lambda = \frac{k^2}{2\mu_\Lambda} + m_N + m_\Lambda \qquad H_0^\Sigma = \frac{k^2}{2\mu_\Sigma} + m_N + m_\Sigma \tag{4.40}$$

Da wir für die numerische Rechnung eine Diskretisierung verwenden[2], betrachten wir auch dieses Beispiel bereits auf dem Gitter. Die Stützstellen des P-Raums bezeichnen wir mit x_i^P, die des Q-Raums entsprechend mit x_i^Q. Die kritischen Werte können an der kleinsten Stützstelle im Q-Raum $x_{\mathrm{min}}^Q = \min_i x_i^Q$ und der größten Stützstelle $x_{\mathrm{max}}^P = \max_i x_i^P$ im P-Raum. Als typische Zahlenwerte[3] ergeben sich bei einem Cutoff von $\Lambda = 500\,\mathrm{MeV}$ die Werte für die Stützstellen

$$x_{\mathrm{max}}^P \approx 499\,\mathrm{MeV} \ , \qquad x_{\mathrm{min}}^Q \approx 505\,\mathrm{MeV} \ .$$

Damit ergibt sich folgende Situation:

$$H_0^\Lambda\left(x_{\mathrm{max}}^P\right) = 2298.88\,\mathrm{MeV} \ , \qquad H_0^\Lambda\left(x_{\mathrm{min}}^Q\right) = 2304.79\,\mathrm{MeV} \ , \tag{4.41}$$

$$H_0^\Sigma\left(x_{\mathrm{max}}^P\right) = 2369.04\,\mathrm{MeV} \ , \qquad H_0^\Sigma\left(x_{\mathrm{min}}^Q\right) = 2374.77\,\mathrm{MeV} \ . \tag{4.42}$$

Man erkennt, dass der kleinste Eigenwert des Q-Raums kleiner ist, als der größte Eigenwert des P-Raums. Dies hätte zur Folge, dass die ALS-Iteration auf die falschen Eigenwerte konvergieren würde. Für die Berechnung des $V_{\mathrm{low}\,k}$ muss die Iteration auf die Eigenwerte des P-Raums konvergieren.

An einem einfachen Beispiel, kann man sich verdeutlichen, welche Auswirkungen die obige Situation hat. Wir wählen hierzu einen einfachen Hamilton-Operator H der die folgende Struktur hat.

$$H = \begin{pmatrix} 10 & 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.7 & 30 & 0.9 & 0.8 \\ 0.3 & 0.6 & 20 & 1 \\ 0.3 & 0.7 & 1 & 40 \end{pmatrix} \tag{4.43}$$

[2]Details im Anhang B.2

[3]abhängig von der Anzahl der Stützstellen im P- und Q-Raum und der oberen Grenze des Q-Raums Λ_Q

Dieser hat die Eigenwerte $\lambda = \{9.97727, 29.9942, 19.9135, 40.115\}$. Definiert man jetzt die Projektionsoperatoren $P = \text{diag}(1, 1, 0, 0)$ und $Q = 1 - P$, gehören offensichtlich die ersten beiden Eigenwerte zum P-Raum. Berechnet man nun aber für dieses Beispiel mit der ALS-Iteration einfach $\mathcal{H}$, erhält man

$$P\mathcal{H}P = \begin{pmatrix} 9.98877 & 0.162342 \\ 0.677136 & 19.9239 \end{pmatrix}. \tag{4.44}$$

Man erkennt sofort, dass dieser nicht die richtigen Eigenwerte liefert. Berechnet man sie explizit, erhält man $\lambda = \{9.97727, 19.9135\}$. Berechnet man aus diesem auf die falschen Eigenwerte konvergierten $\mathcal{H}$ dann das effektive Potential $V_{\text{low }k}$ liegt dies ebenfalls bei den falschen Eigenwerten. In Abbildung 4.1 sind die Eigenwerte von $P\mathcal{H}P$ und $Q\mathcal{H}Q$ im Verlauf der Iteration dargestellt. Man erkennt deutlich, dass die Iteration auf die niedrigsten Eigenwerte konvergiert.

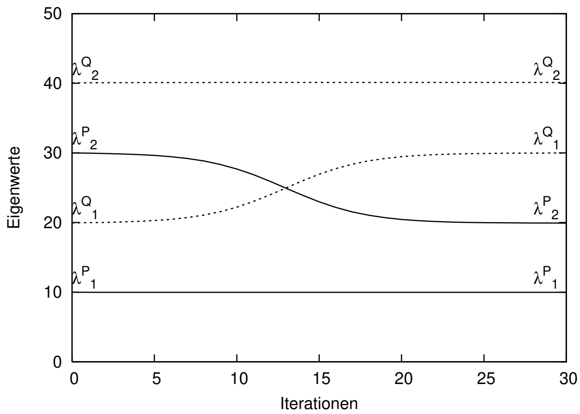


Abbildung 4.1.: *Veränderung der Eigenwerte des P- und Q-Raums im Verlauf der ALS-Iteration. λ_i^P bezeichnet einen Eigenwert im P-Raum, λ_i^Q einen Eigenwert im Q-Raum.*

In [18] ist allerdings ebenfalls eine Methode beschrieben, wie die Iteration dahingehend beeinflusst werden, dass sie auf die gewünschten Eigenwerte konvergiert.

Im folgenden bezeichnet die Schreibweise $(A)_i$ die i-te Spalte der Matrix A. Definiert man eine Matrix M als

$$M = \text{diag}\,(m_1, \ldots, m_d)\,. \tag{4.45}$$

Die Entkopplungsgleichung lässt sich dann in die Form

$$\omega PHQ(\omega)_i + \omega\,(PHP - M)_i - (QHQ - m_i I_q)\,(\omega)_i - (QHP)_i \quad i = 1, \ldots, d \tag{4.46}$$

zerlegen, wobei I_q die Einheitsmatrix im Q-Raum bezeichnet.

Nun kann man folgende Iteration verwenden

$$(x_n)_i = \frac{1}{q\,(\sigma_{n-1}) - m_i I_q} x_{n-1}\,(p\,(\sigma_{n-1} - M))\ . \tag{4.47}$$

Diese konvergiert, wenn

$$|\lambda_{P\,i} - m_i| \leq |\lambda_{Q\,m} - m_i| \quad \forall\, m, i\ . \tag{4.48}$$

Anschaulich bedeutet dies, dass die Iteration auf die Eigenwerte von H konvergiert, die den Werten m_i am nächsten sind.

Wählt man für den Beispiels-Hamilton (4.43)

$$M = \mathrm{diag}\,(10, 30)\ , \tag{4.49}$$

erhält man den effektiven Hamilton-Operator

$$P\mathcal{H}P = \begin{pmatrix} 9.98095 & 0.187169 \\ 0.659913 & 29.9717 \end{pmatrix}\ . \tag{4.50}$$

Dieser hat die Eigenwerte $\lambda = \{29.9779, 9.97477\}$, die bis auf numerische Fehler denen des ursprünglichen Hamilton-Operators entsprechen. Die Iteration ist nun folglich wirklich auf die Eigenwerte des P-Raums konvergiert. Der Verlauf der Eigenwerte ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Man erkennt, dass die Eigenwerte jetzt nicht mehr ihre Reihenfolge vertauschen.

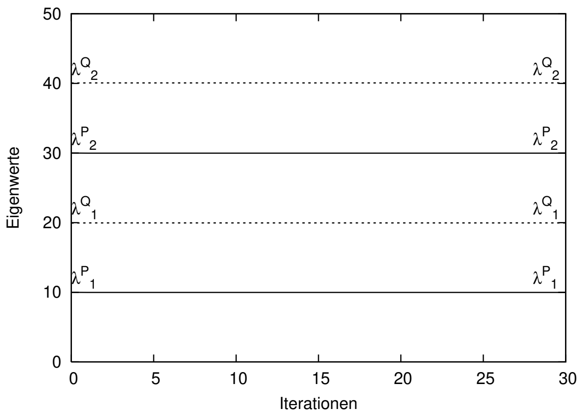


Abbildung 4.2.: *Veränderung der Eigenwerte des P- und Q-Raums im Verlauf der ALS-Iteration mit Vorgabe M-Matrix. λ_i^P bezeichnet einen Eigenwert im P-Raum, λ_i^Q einen Eigenwert im Q-Raum.*

Für unsere Rechnungen stellt sich nun die Frage nach der Wahl der Werte m_i. Diese ist leider nicht eindeutig. Wünschenswert ist eine Wahl, die möglichst genau die Eigenwerte des P-Raums darstellt. Andreozzi schlägt die Möglichkeit vor, da die Wahl von M für jeden Iterationsschritt neu erfolgen kann, in jedem Schritt die Eigenwerte von $p(\sigma_{n-1})$ zu wählen. Ein erste Näherung für die Werte in M ist einfach den kinetischen Anteil H_0 zu benutzen, so dass $M = PH_0P$ ist.

4.2.4. Bedeutung von H_0 für die ALS-Iteration

Man kann sich nun die Frage stellen, warum wir überhaupt erst einen effektiven Hamilton-Operator ausrechnen. Die Vorgehensweise scheint auf den ersten Blick etwas verwirrend. Man berechnet erst $H = H_0 + V$, bestimmt den effektiven Hamilton-Operator und subtrahiert anschließend wieder den kinetischen Anteil $V_{\text{low } k} = P(\mathcal{H} - H_0)$. Die Transformation (4.16) kann wie folgt umgeschrieben werden

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \Omega^{-1} H \Omega = \Omega^{-1}(H_0 + V)\,\Omega = \Omega^{-1}(H_0 + V)\,\Omega \\ &= \Omega^{-1} H_0 \Omega + \Omega^{-1} V \Omega = H_0 + \Omega^{-1} V \Omega\end{aligned} \tag{4.51}$$

Damit kann man die effektive Wechselwirkung direkt schreiben als

$$V_{\text{low } k} = P\mathcal{H}P - PH_0P = P\left(H_0 + \Omega^{-1}V\Omega\right)P - PH_0P = P\left(\Omega^{-1}V\Omega\right)P \tag{4.52}$$

Da $QH_0P = PH_0Q = 0$, kann man die Bedingung, dass $\mathcal{H}$ der effektive Hamilton-Operator ist, auch als

$$Q\mathcal{V}P = 0 \tag{4.53}$$

schreiben, wobei $\mathcal{V}$ das effektive Potential bezeichnet, das noch nicht auf den P-Raum trunkiert ist.

$$V_{\text{low } k} = P\mathcal{V}P \tag{4.54}$$

Die Entkopplungsgleichung kann nun auch direkt für V geschrieben werden.

Hier entsteht allerdings wieder das Problem der Eigenwerte. Der kinetische Anteil ist eine streng monoton steigende Funktion des Impulses. Dadurch sind die Eigenwerte von H_0 bereits sortiert und die Eigenwerte im P-Raum sind die kleinsten Eigenwerte, d.h. die ALS-Iteration konvergiert auf die Eigenwerte des P-Raums. Wenn diese Sortierung auch für H erhalten bleibt, konvergiert die ALS-Iteration bereits auf die richtigen Eigenwerte. Wie oben beschrieben, gilt diese Argumentation nur, wenn es nur einen Kanal gibt.

Ohne H_0 besteht erst einmal keine Sortierung der Eigenwerte, d.h. i.A. sind die Eigenwerte des P-Raums nicht die kleinsten Eigenwerte. Die ALS-Iteration würde folglich nicht auf die richtigen Eigenwerte konvergieren. Hier bestünde prinzipiell die Möglichkeit, wieder mit der Variante der ALS-Iteration zu arbeiten, die besser auf die gewünschten Eigenwerte aus der Matrix M konvergiert.

Dies bietet allerdings für die Physik keinen Vorteil und hat numerisch einige Nachteile. Zum ersten sind die Werte, die für die Matrix M benötigt werden, unbekannt. Hier könnte man versuchen, eine möglichst gute Näherung für die Eigenwerte zu berechnen. Weiterhin wird nun pro Iterationsschritt nicht nur eine Matrixinversion (bzw. LU-Zerlegung) benötigt, sondern so viele, wie es Stützstellen im P-Raum gibt, da in der Iteration jede Spalte des x_i einzeln berechnet wird.

Es spricht vom numerischen Standpunkt viel dafür, erst einen effektiven Hamilton-Operator zu berechnen.

4.3. Hermitesches $V_{\text{low } k}$

Für die oben beschriebene Methode ist das energieunabhängige effektive Potential $V_{\text{low } k}$ nicht hermitesch. Dies ist zumindest für unsere Zwecke kein Problem. Allerdings gibt es eine Reihe von realistischen Vielteilchen-Anwendungen, beispielsweise Schalenmodell-Rechnungen, die als Eingabe ein hermitesches Potential voraussetzen.

Die Nicht-Hermizität des Potentials liegt an der ungleichen Behandlung der Impulse. Betrachtet man die Flussgleichung

$$\frac{d}{d\Lambda} V_{\text{low } k}(k, k') = \frac{2}{\pi} \frac{2\mu V_{\text{low } k}(k, \Lambda) T(\Lambda, k'; \Lambda^2)}{1 - (k/\Lambda)^2}, \tag{4.55}$$

sieht man, dass die Impulse k und k' nicht gleichmäßig behandelt werden. Auch die Bedingung der ALS-Iteration $Q\mathcal{H}P = 0$ behandelt die Argumente nicht gleich. Am anschaulichsten ist dies, wenn man $k < \Lambda$ und $k' > \Lambda$ wählt. Dann gilt

$$\langle k' > \Lambda | \, \mathcal{H} \, | k < \Lambda \rangle = \langle k' > \Lambda | \, Q\mathcal{H}P \, | k < \Lambda \rangle = 0 \ , \tag{4.56}$$

aber

$$\langle k < \Lambda | \, \mathcal{H} \, | k' > \Lambda \rangle = \langle k < \Lambda | \, P\mathcal{H}Q \, | k' > \Lambda \rangle \neq 0 \ . \tag{4.57}$$

Es existiert eine von Andreozzi in [18] beschriebene Methode, wie aus dem nicht-hermiteschen effektiven Hamilton-Operator ein hermitescher effektiver Hamilton-Operator gewonnen werden kann. Aus diesem lässt sich dann ein ebenfalls hermitesches $V_{\text{low } k}$ durch Subtraktion des kinetischen Anteils gewinnen.

Ausgehend von (4.16) kann man unter der Ausnutzung der Symmetrie von H folgende Gleichung für $\mathcal{H}$ aufstellen

$$\Omega\mathcal{H} = H\Omega \ , \qquad \Omega^\dagger\Omega\mathcal{H} = \mathcal{H}^\dagger\Omega^\dagger\Omega \ . \tag{4.58}$$

Setzt man $\Omega = 1 + \omega$ ein und betrachtet nur den Anteil im P-Raum $p(\omega)$, erhält man

$$(1_P + \omega^\dagger\omega)p(\omega) = p^\dagger(\omega)(1_P + \omega^\dagger\omega) \ . \tag{4.59}$$

Unter Ausnutzung der Cholesky-Zerlegung

$$(1_P + \omega^\dagger\omega) = LL^T \tag{4.60}$$

lässt sich dies zu

$$LL^T p(\omega) = p^\dagger(\omega) LL^T \tag{4.61}$$

umformen.

Multipliziert man nun mit L^{-1} von links und mit $\left(L^T\right)^{-1} = \left(L^{-1}\right)^T$ von rechts, kann man aus der resultierenden Gleichung

$$L^{-1}p^\dagger(\omega)L = L^T p(\omega) \left(L^{-1}\right)^T = \left(L^{-1}p^\dagger(\omega)^T L\right) \tag{4.62}$$

ablesen, das

$$(P\mathcal{H}P)_{herm} = L^T p(\omega) \left(L^{-1}\right)^T \tag{4.63}$$

hermitesch ist und die selben Eigenwerte wie $P\mathcal{H}P$ hat. Die hermitesche effektive Wechselwirkung ist dann durch

$$(V_{\text{low }k})_{herm} = (P\mathcal{H}P)_{herm} - PH_0P \tag{4.64}$$

gegeben.

Kapitel 5.

Hyperon-Nukleon-Wechselwirkung

Die Datenlage für Hyperon-Nukleon-Streuung ist heute weitem nicht so gut, wie die Datenlage für die Nukleon-Nukleon-Streuung. Die meisten verfügbaren Daten stammen aus den 60er und 70er Jahren und wurden mit Blasenkammer-Experimenten gewonnen. Eine Auflistung der verfügbaren Daten findet sich in [19]. Ein Teil der experimentellen Daten ist in Abbildung 5.1 dargestellt, wobei die großen Fehler der Daten beachtet werden sollten.

Ähnlich ist die Lage für die Potentiale. Es gibt bei weitem nicht so viele hochwertige Potentiale wie im Nukleon-Nukleon-Fall. Wir werden unsere Rechnungen im Folgenden mit den Potentialen der Nijmegen-Gruppe durchführen. Wir sind aber in keiner Weise auf die Nijmegen-Potentiale festgelegt. Es ist sogar wünschenswert, weitere Potentiale zu verwenden. Da wir nur die verschiedenen Modelle des Nijmegen-Potentials NSC97 verwenden, haben wir nur eine Modellierung der Wechselwirkung. Die Unterschiede liegen lediglich in den Parametern. Zusätzlich eine unterschiedliche Modellierung der Wechselwirkung als Ausgangspunkt für unsere $V_{\text{low }k}$-Rechnungen zu haben, ist durchaus notwendig. Diese Rechnungen sind geplant, können aber nicht mehr im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt werden, da uns noch kein Code für andere Potentiale vorliegt.

Neben dem schon angesprochenen Nijmegen NSC97 Potential gibt es noch ältere und neuere Potentiale der Nijmegen Gruppe. Die älteren Modelle konnten nicht ohne weiteres auf den Hyperon-Hyperon-Fall erweitert werden. Sie lieferten in einigen Fällen Ergebnisse, die nicht im Einklang mit experimentellen Daten waren. Es gibt noch ein neueres Potential der Nijmegen-Gruppe (Extended-Soft-Core ESC03). Dies wurde bisher nur auf Konferenzen vorgetragen [21] und noch nicht veröffentlicht. Dieses Potential steht ebenfalls auf unserer Wunschliste für zukünftige Rechnungen.

Erster Kandidat für weitere Rechnungen ist das Jülich-Potential. Weitere Hyperon-Nukleon-Potentiale sind das Tübingen Modell [22] und ein $SU(6)$ Quark-Modell aus Japan [23]. Auf diese werden wir im folgenden jedoch nicht mehr eingehen. Es ist aber auch möglich, ausgehend von diesen Potentialen ein Hyperon-Nukleon-$V_{\text{low }k}$ zu berechnen.

Hyperon-Nukleon-Potentiale sind gut dafür geeignet, die $SU(3)$-Symmetrie und deren Brechung in hadronischen Systemen zu untersuchen. Die Symmetrie ermöglicht es, Beziehungen zwischen den Kopplungskonstanten aufzustellen. Dies reduziert die Anzahl

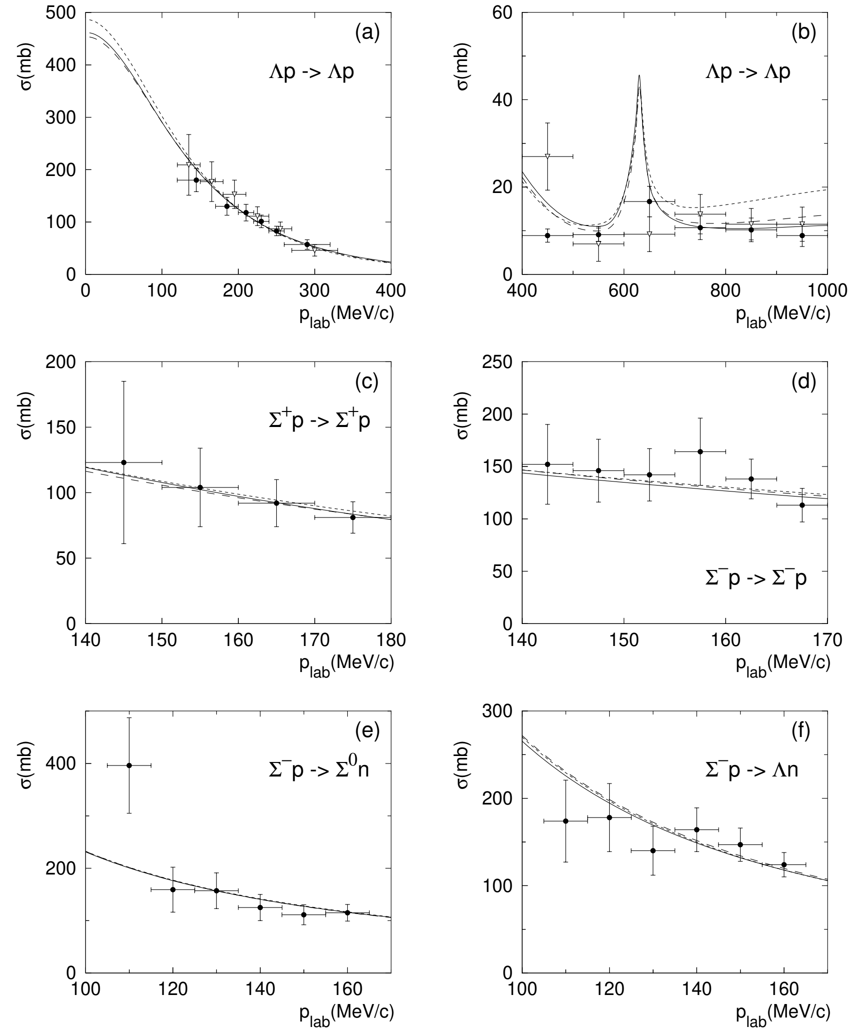


Abbildung 5.1.: *Totale Wirkungsquerschnitte für die Nijmegen-Potentiale NSC97a (durchgezogen), NSC97c (gestrichelt) und NSC97f (gepunktet) im Vergleich mit experimentellen Werte. Aus [20].*

der Freiheitsgrade deutlich. Außerdem ist es durch die Symmetrie möglich, kombinierte Nukleon-Nukleon und Hyperon-Nukleon-Potentiale zu erstellen. Die experimentellen Daten erlauben allerdings noch kein Aussage darüber, ob die Annahme der $SU(3)$ Symmetrie gerechtfertigt ist.

Das Nijmegen-Potential und das Jülich-Potential werden wir im Folgenden genauer beschreiben. Aufgrund der engen Verwandtschaft der Hyperon-Nukleon-Potentiale zu den Nukleon-Nukleon-Potentialen beschreiben wir zunächst die wichtigsten Eigenschaften der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung.

5.1. Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung

Die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung wird meist durch Mesonenaustausch beschrieben [10, 24, 25]. Die unterschiedlichen Mesonen erzeugen Bestandteile, die unterschiedliche Reichweiten haben. Die Reichweite R kann durch

$$R \approx \frac{\hbar c}{mc^2} \tag{5.1}$$

abgeschätzt werden, wobei m die Masse des ausgetauschten Mesons ist. Betrachtet man nur die leichtesten Mesonen bis einschließlich des ω-Mesons, ergeben sich die Reichweiten in Tabelle 5.1. Diese reichen aus, um die wichtigsten Beiträge der Wechselwirkung zu erklären. Ohne auf die Details der einzelnen Prozesse eingehen zu wollen, möchten wir

Meson	Masse [MeV]	Reichweite [fm]
π	140	1.5
σ	~ 500	0.4
ρ	770	0.26
ω	782	0.25

Tabelle 5.1.: *Reichweiten der einzelnen Bestandteile der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung.*

trotzdem die für uns wichtigen Details erläutern. Für unsere effektive Wechselwirkung verwenden wir einen Cutoff im Impulsraum, der uns auf niedrige Impulse beschränkt. Im Ortsraum entspricht dies einem Abschneiden der kurzreichweitigen Bestandteile.

Das π-Meson ist der Bestandteil mit der längsten Reichweite. Man spricht auch vom langreichweitigen π-Schwanz der Wechselwirkung. Das σ ist kein physikalisches Meson, sondern ein zusätzlich eingeführtes Teilchen um den Austausch von $\pi\pi$ zu modellieren. Der Austausch des σ führt zu dem attraktiven Teil des Potentials bei mittlerer Reichweite. Der abstoßende Kern bei kurzer Reichweite kann hingegen gut durch die niedrigen Resonanzen von 3π (ω, ϕ, η) beschrieben werden. Die einzelnen Bereiche sind in Abbildung 5.2 dargestellt. Hier treten auch erste Unterschiede zwischen der Nukleon-Nukleon-

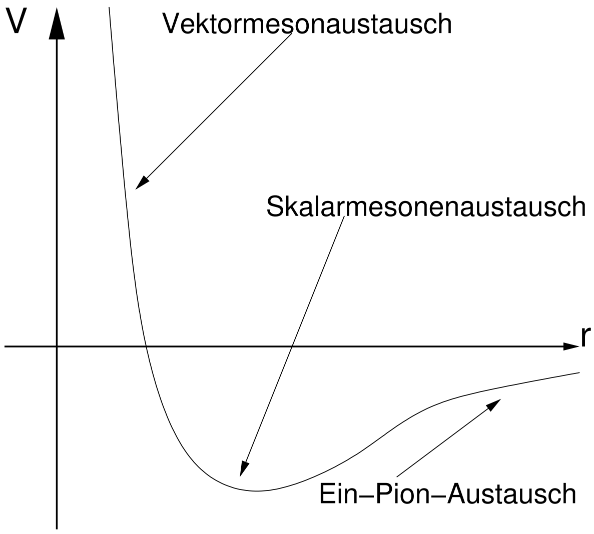


Abbildung 5.2.: *Schematisches Nukleon-Nukleon-Potential im Ortsraum.*

und der Hyperon-Nukleon-Wechselwirkung auf. Das ϕ-Meson koppelt nicht an das Nukleon. Da die Nukleon-Nukleon-Streuphasen nicht sensitiv auf die $\omega - \phi$ Mischung sind, kann es bei der Konstruktion von Nukleon-Nukleon-Potentialen vernachlässigt werden. Für die Hyperon-Nukleon-Wechselwirkung ist es allerdings von Bedeutung, da das ϕ-Meson an Hyperon-Nukleon-Vertizes koppelt.

5.2. Nijmegen-Potentiale

Für unsere Rechnungen haben wir das Nijmegen-Soft-Core (NSC97) Hyperon-Nukleon-Potential [20] verwendet. Der Hauptanteil des Potentials ist der Ein-Boson-Austausch (one-boson exchange, OBE). Dieser ergibt eine gute Basis, um die Wechselwirkung in erster Näherung zu beschreiben.

Der Wechselwirkung wird durch $\pi, \eta, \eta', \rho, \omega, \phi, \delta, \epsilon$ und S^* Regge Trajektorien erzeugt [26]. Dieser Ansatz wurde zuerst erfolgreich für Nukleon-Nukleon-Potentiale angewandt.

Die Potentiale beschreiben sowohl die Nukleon-Nukleon-, als auch die Hyperon-Nukleon- und die Hyperon-Hyperon-Wechselwirkung. Diese kombinierte Beschreibung hat den Vorteil, dass die notwendigen Parameter weitgehend an der sehr guten Nukleon-Nukleon-Streudaten fixiert werden können. Damit müssen nur noch wenige (fünf) Parameter an den deutlich schlechteren (siehe Abb.5.1) Hyperon-Nukleon-Daten fixiert werden. Für Hyperon-Hyperon-Streuung existierten, zumindest bei der Entwicklung des Potentials, überhaupt keine Daten.

Weiterhin lässt sich mit diesem Ansatz die SU$(3)_F$ - Symmetrie untersuchen. Die Kopplungskonstanten wurden unter Anwendung der SU$(3)_F$- Symmetrie bestimmt. Die

	Σ^+p		Λp		Λn		Σ^-n	
Modell	$^1S_0$	$^3S_1$	$^1S_0$	$^3S_1$	$^1S_0$	$^3S_1$	$^1S_0$	$^3S_1$
NSC97a	−4.35	−0.14	−0.71	−2.18	−0.76	−2.14	−6.13	−0.15
NSC97b	−4.32	−0.17	−0.90	−2.13	−0.97	−2.08	−6.06	−0.18
NSC97c	−4.28	−0.25	−1.20	−2.08	−1.28	−2.06	−5.98	−0.28
NSC97d	−4.23	−0.29	−1.71	−1.95	−1.82	−1.93	−5.89	−0.33
NSC97e	−4.23	−0.28	−2.10	−1.86	−2.24	−1.86	−5.90	−0.32
NSC97f	−4.25	−0.25	−2.51	−1.75	−2.68	−1.66	−6.16	−0.29

Tabelle 5.2.: *Streulängen in fm der Nijmegen NSC97 Potentiale für unterschiedliche Kanäle. Aus [20].*

Brechung der Symmetrie wurde durch Verwendung der physikalischen Massen, der Mesonen-Mischung im Nonet,der Brechung der Ladungssymmetrie und durch die Coulomb-Wechselwirkung realisiert.

Es existieren 6 unterschiedliche Fits (a-f) an die Hyperon-Nukleon-Streudaten. Die unterschiedlichen Potentiale werden im folgenden mit NSC97a - NSC97f bezeichnet.

Aufgrund der Datenlage ergeben die unterschiedlichen Fits in einigen Kanälen deutlich unterschiedliche Streuphasen (Abbildung 5.3) und Streulängen (siehe Tabelle 5.2).

Dies wird auch Auswirkungen auf die effektiven Potentiale haben. Im Nukleon-Nukleon-Fall sind die Streuphasen und -längen durch die gute Datenlage bei allen hochwertigen Potentialen fast identisch.

5.3. Jülich-Potential

Die Jülich-Potentiale [27, 28] verwenden als Ausgangspunkt das bekannte Bonn-Nukleon-Nukleon-Potential. In früheren Versionen des Potentials wurde die Kopplungskonstante des σ an Vertizes mit Strangeness als freier Parameter behandelt. In neueren Versionen wurde dies durch explizite Berechnung des korrelierten $\pi\pi$-Austausch behoben. Die Jülich-Potentiale beschreiben die vorhandenen Daten ähnlich gut wie die Nijmegen-Potentiale.

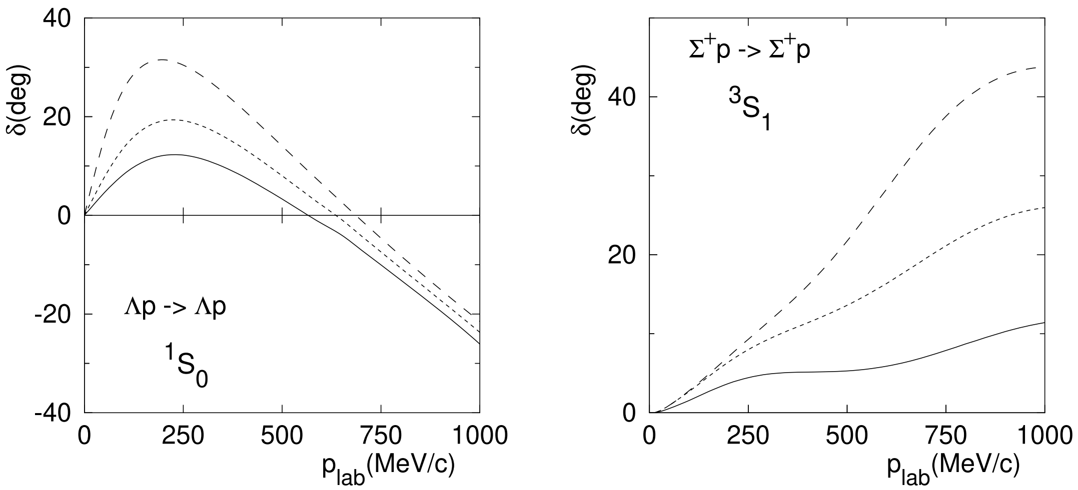


Abbildung 5.3.: *Streuphasen für den Prozess $\Lambda p \rightarrow \Lambda p$ im $^1S_0$ Kanal (links) und den Prozess $\Sigma^+ p \rightarrow \Sigma^+ p$ im $^3S_1$ Kanal. Es sind nur die Modelle NSC97a (durchgezogen), NSC97c (gestrichelt) und NSC97f (gepunktet) gezeigt. Aus [20].*

Kapitel 6.

Nukleon-Nukleon-Resultate

In der Nukleon-Nukleon-Streuung gibt es in der Isospin-Basis nur den Kanal $NN \to NN$. Dies entspricht in der Hyperon-Nukleon-Streuung dem Isospin $I = 3/2$ Fall, in dem es nur den Kanal $\Sigma N \to \Sigma N$ gibt. Die Rechnungen haben folglich die gleiche Struktur.

Zusätzlich zur Überprüfung, ob die Streuphasen des effektiven Potentials $V_{\text{low }k}$ mit denen des Ausgangspotentials V_{bare} übereinstimmen, kann man die Numerik durch Berechnen des Nukleon-Nukleon-$V_{\text{low }k}$ und anschließenden Vergleich mit den veröffentlichen Resultaten testen.

Die veröffentlichten Ergebnisse benutzen Einheiten in fm. Zur Vergleichbarkeit haben wir unsere Ergebnisse für den Nukleon-Nukleon Fall von MeV Einheiten nach fm umgerechnet. Weiterhin wurde ein Cutoff $\Lambda = 2.1\,\text{fm}^{-1}$, entsprechend $E_{\text{lab}} \approx 350\,\text{MeV}$ benutzt. Dies entspricht dem Cutoff, der für den Nukleon-Nukleon Fall als optimaler Cutoff angesehen wird. Ergebnisse für den Nukleon-Nukleon Fall sind u.a. in den Referenzen [13, 6, 29] zu finden.

Abbildung 6.1 zeigt unsere Ergebnisse für den Nukleon-Nukleon-Fall für einige Partialwellen.

Als zusätzlichen Test der Numerik lohnt es sich, die Streuphasen zu vergleichen. Im Nukleon-Nukleon Fall kann hier auf die enorme Menge der veröffentlichen Streuphasen der Nijmegen-Gruppe und der Nijmegen Phaseshift-Analyse [19] zurückgegriffen werden. Weiterhin haben wir einen Vergleich mit den von uns aus dem Ausgangspotential gewonnenen Streuphasen durchgeführt. Abbildung 6.2 zeigt die Streuphasen für $V_{\text{low }k}$ und V_{bare} in den ausgewählten Partialwellen.

Die Resultate für den Nukleon Nukleon Fall zeigen eine beeindruckende Genauigkeit. In den gezeigten Plots lassen sich praktisch keine Unterschiede zwischen Streuphasen des Ausgangswechselwirkung und der $V_{\text{low }k}$-Streuphasen erkennen. Der Diagonalanteil entspricht den veröffentlichten Ergebnissen [29, 6, 13] von Bogner, Schwenk, Kuo et al.

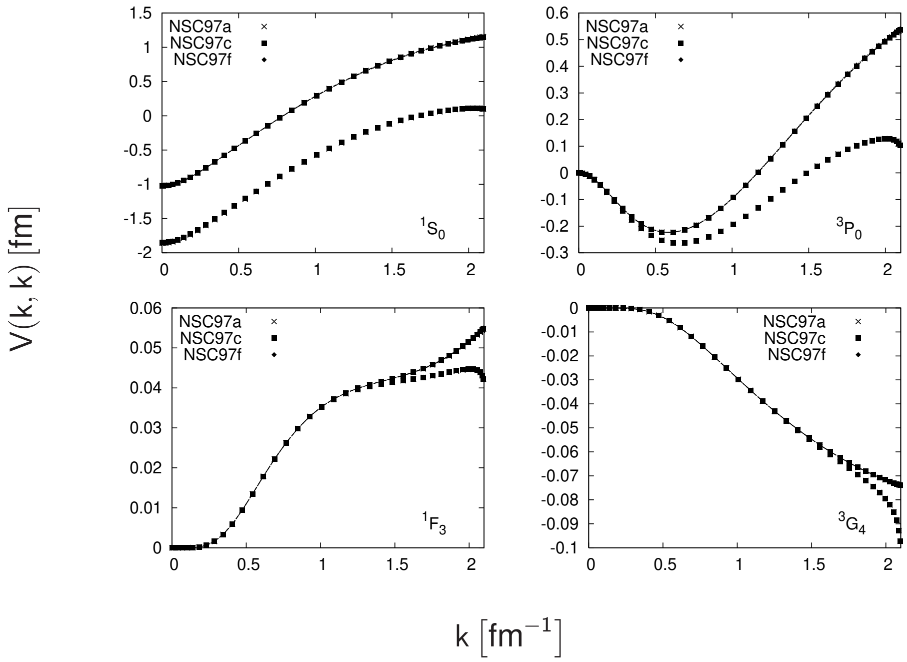


Abbildung 6.1.: *$V_{low\,k}(k,k)$ (Punkte) und $V_{bare}(k,k)$ (Linien mit Punkten) für $NN \to NN$.*

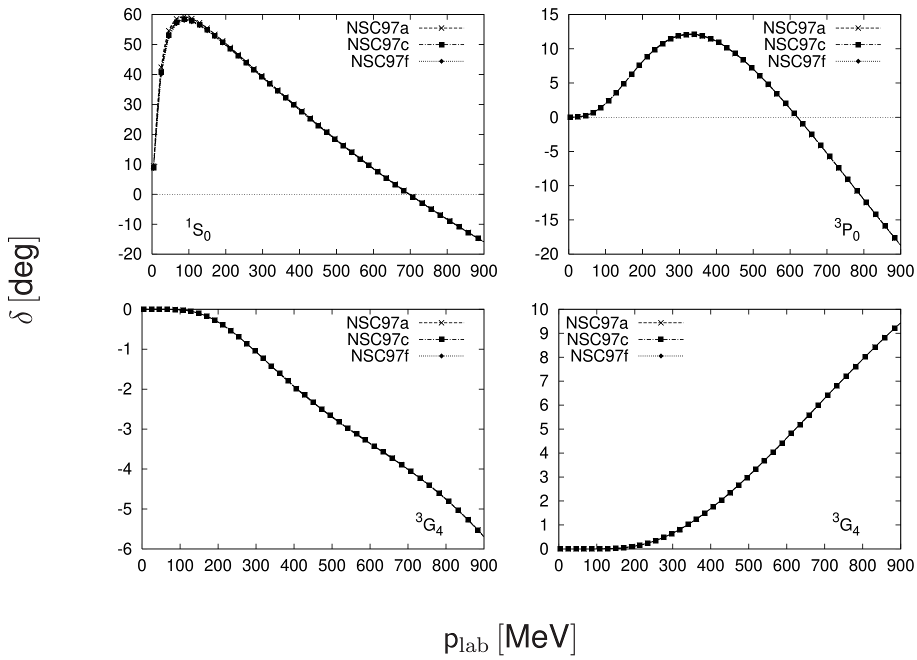


Abbildung 6.2.: *Streuphasen für $V_{low\,k}$ (Punkte) und V_{bare} (Linien mit Punkten) für $NN \to NN$.*

Kapitel 7.

Hyperon-Nukleon-Resultate für $I = 3/2$

Wir betrachten hier den einzig möglichen Kanal $\Sigma N \to \Sigma N$.

7.1. Vergleich $V_{\text{low }k}$ mit dem Ausgangspotential

Für den Hyperon-Nukleon-Fall haben wir zuerst einen Cutoff von $\Lambda = 500\,\text{MeV}$ gewählt. Dies diente zur ersten Einschätzung. Auf die Wahl eines geeigneten Cutoffs wird im Folgenden noch eingegangen. Wir werden zunächst die Partialwellen ohne Drehimpulskopplung betrachten. Der Grund hierfür ist hauptsächlich die einfachere Struktur, da wir hier jede Partialwelle separat betrachten können.

Man erkennt in den Abbildungen 7.1, 7.2 und 7.3, dass in einigen Kanälen bereits die Ausgangspotentiale entweder sehr nahe beieinander liegen oder sogar nicht unterscheidbar sind. Vor allem in den höheren Partialwellen erkennt man in dem Potential und auch in den Streuphasen (siehe Abschnitt 7.2) kaum Unterschiede zwischen den einzelnen Modellen. Trotzdem kann man in vielen Kanälen zumindest ein leichtes Kollabieren auf eine einzige Wechselwirkung feststellen. Ein Beispiel hierfür ist die $^3P_0$-Partialwelle.

In den höheren Partialwellen ist der Unterschied zwischen der Ausgangswechselwirkung und $V_{\text{low }k}$ nur noch bei höheren Impulsen zu sehen ist. Betrachtet man den Impuls, ab dem Abweichungen zwischen dem Ausgangspotential und $V_{\text{low }k}$ auftreten, erkennt man, dass dies bei S-Wellen schon bei einem Impuls von 0 der Fall ist. Mit steigendem Drehimpuls wandert der Impuls immer höher. Bei F-Wellen liegt der Impuls im Bereich zwischen 300 und 400 MeV. Die Ursache für dieses Verhalten ist vermutlich die Drehimpulsbarriere. Diese ist proportional zu $l(l+1)$. Bei höheren Drehimpulsen werden die kurzreichweitigen Bestandteile immer weniger getestet. Mit unserem Cutoff im Impulsraum integrieren wir gerade diese Komponenten aus. Das Zusammenfallen der Ausgangswechselwirkung mit der effektiven Wechselwirkung zeigt, dass diese Komponenten offenbar nur einen geringen Einfluss in den betroffenen Partialwellen haben.

Zusätzlich zeigt Abbildung 7.4 noch $V_{\text{low }k}(k, k')$ für die $^1S_0$ Partialwelle. Man erkennt, dass die Potentiale auch im Nichtdiagonalbereich übereinstimmen.

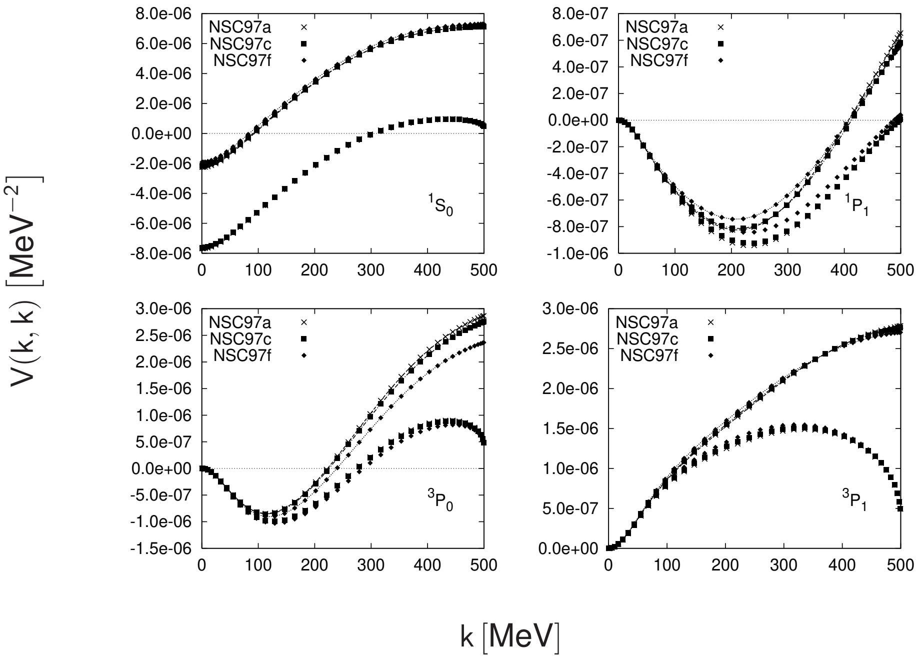


Abbildung 7.1.: $V_{low\,k}(k,k)$ *(Punkte) und* $V_{bare}(k,k)$ *(Linien mit Punkten) für* $\Sigma N \to \Sigma N$.

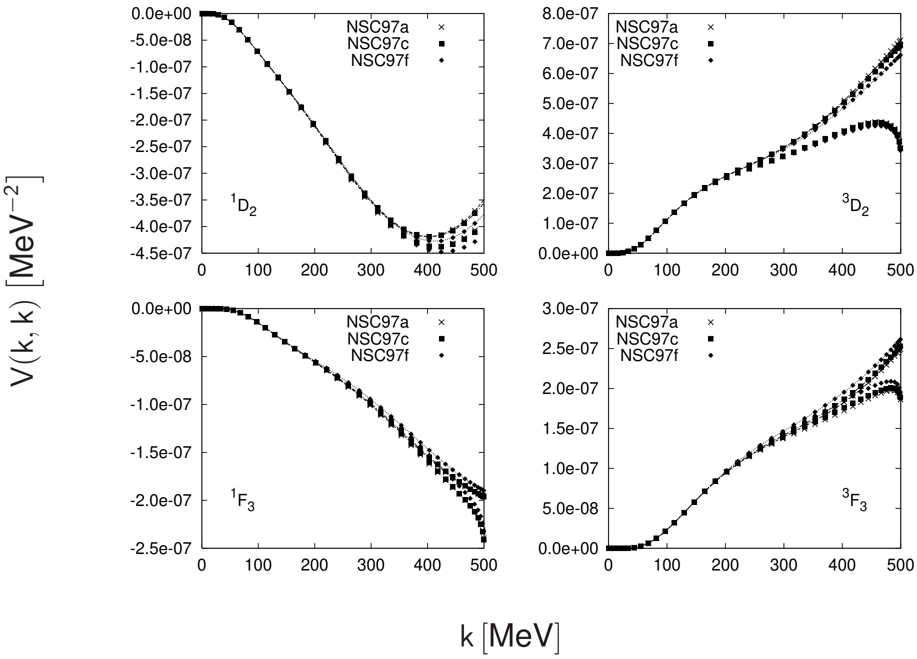


Abbildung 7.2.: $V_{low\,k}(k,k)$ *(Punkte) und* $V_{bare}(k,k)$ *(Linien mit Punkten) für* $\Sigma N \to \Sigma N$.

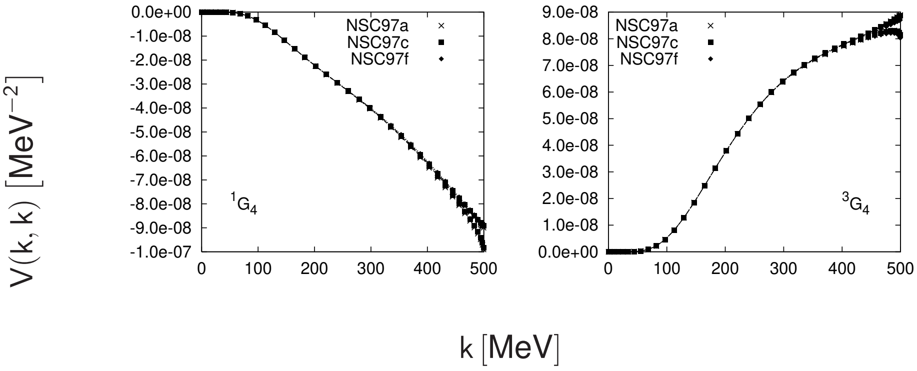


Abbildung 7.3.: *$V_{low\,k}(k,k)$ (Punkte) und $V_{bare}(k,k)$ (Linien mit Punkten) für $\Sigma N \rightarrow \Sigma N$.*

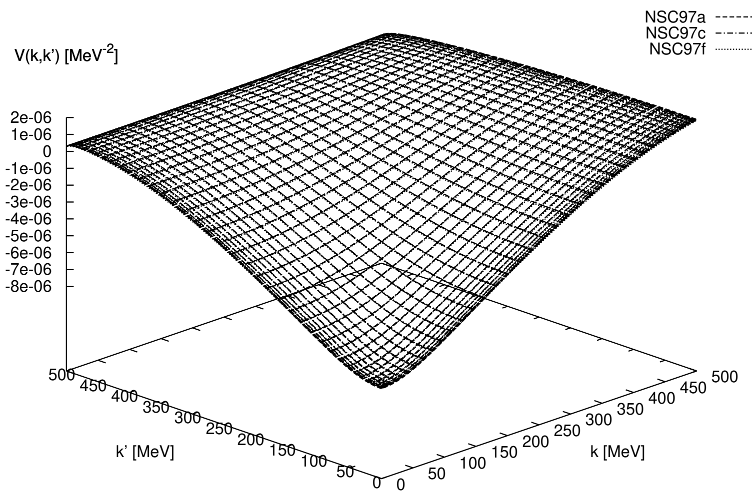


Abbildung 7.4.: *Alle $V_{low\,k}$-Matrixelemente für die $^1S_0$-Partialwelle, $\Lambda = 500\,MeV$*

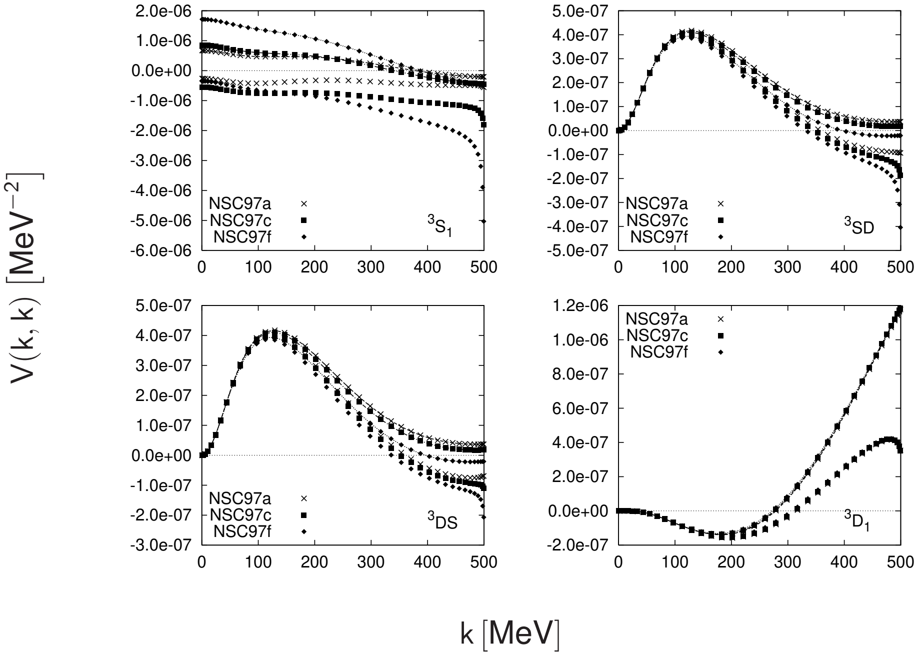


Abbildung 7.5.: $V_{low\,k}(k,k)$ *(Punkte) und* $V_{bare}(k,k)$ *(Linien mit Punkten) für* $\Sigma N \rightarrow \Sigma N$.

Für die gekoppelten Kanäle (Abbildungen 7.5, 7.6, 7.7 und 7.8) sind die Abweichungen zwischen den einzelnen Modellen größer. Dies liegt vor allem an der Tensorkraft. Man erkennt, wie schon vorher, dass die Unterschiede zwischen dem Ausgangspotential und dem $V_{\text{low }k}$ mit steigendem Drehimpuls erst bei höheren Impulsen auftreten. Ein Kollaps ist hier bis jetzt nicht zu sehen, allerdings kann dies durchaus noch vom gewählten Cutoff abhängig sein.

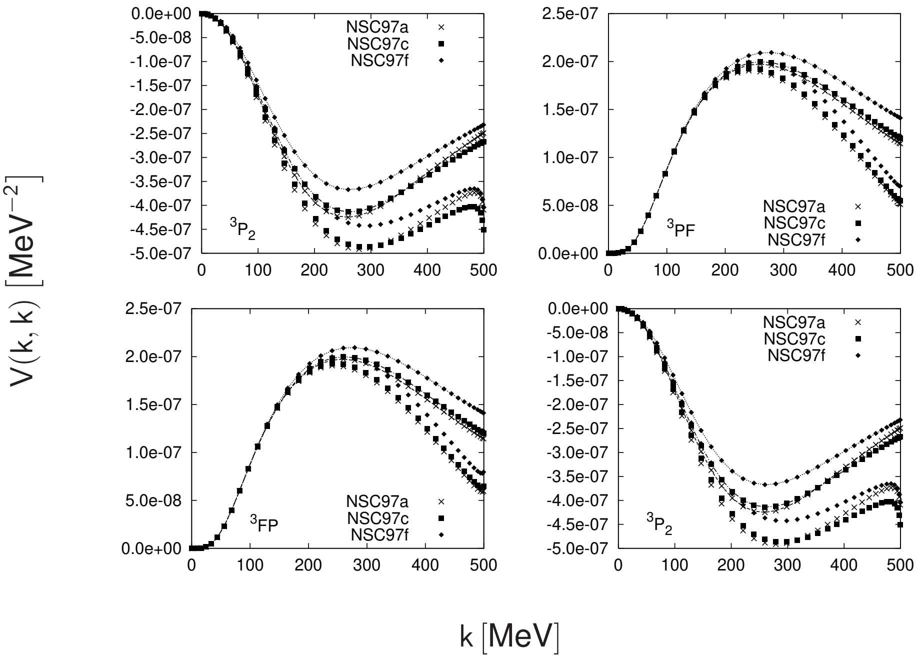


Abbildung 7.6.: *$V_{low\ k}(k,k)$ (Punkte) und $V_{bare}(k,k)$ (Linien mit Punkten) für $\Sigma N \to \Sigma N$.*

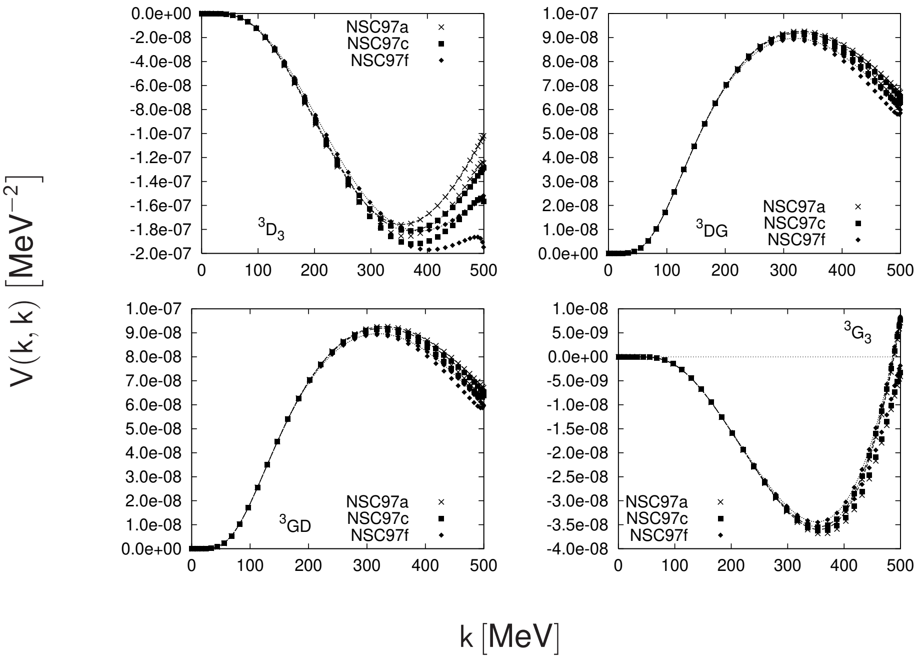


Abbildung 7.7.: *$V_{low\ k}(k,k)$ (Punkte) und $V_{bare}(k,k)$ (Linien mit Punkten) für $\Sigma N \to \Sigma N$.*

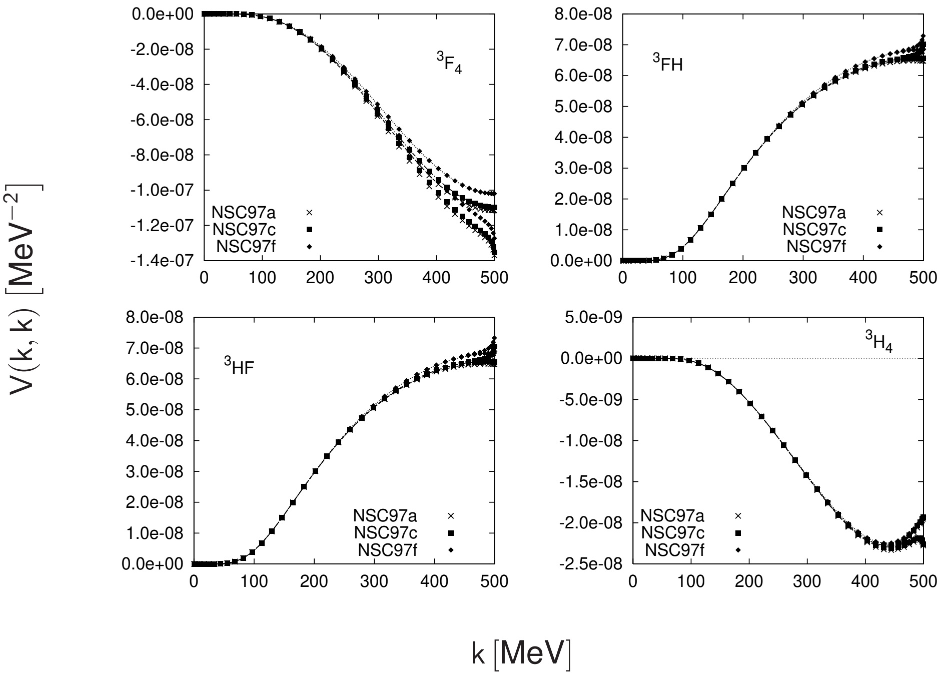


Abbildung 7.8.: $V_{low\,k}(k,k)$ *(Punkte) und* $V_{bare}(k,k)$ *(Linien mit Punkten) für* $\Sigma N \to \Sigma N$.

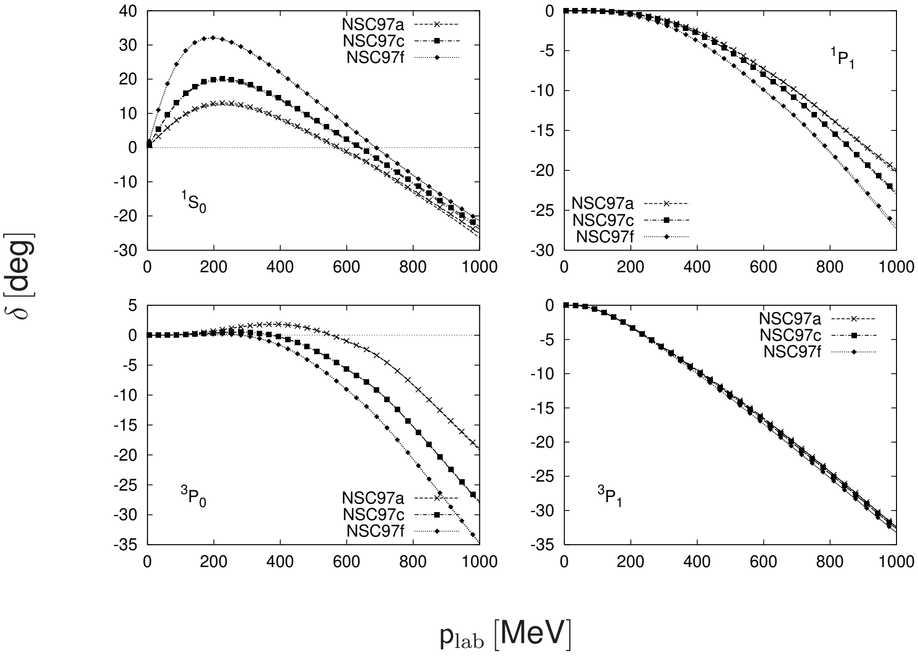


Abbildung 7.9.: *Streuphasen für $V_{low\ k}$ (Punkte) und V_{bare} (Linien mit Punkten) für $\Sigma N \to \Sigma N$.*

7.2. Streuphasen-Äquivalenz

Sowohl in den ungekoppelten (Abbildungen 7.9,7.9 und 7.11) als auch in den gekoppelten Kanälen (Abbildungen 7.12 und 7.13) reproduziert $V_{\text{low } k}$ die Streuphasen perfekt. In den gekoppelten Kanälen wird auch der Mischungsparameter ϵ_J (Abbildung 7.14) reproduziert. Dies ist unabhängig vom Cutoff, wobei natürlich keine Streuphasen für Relativimpulse größer Λ berechnet werden können.

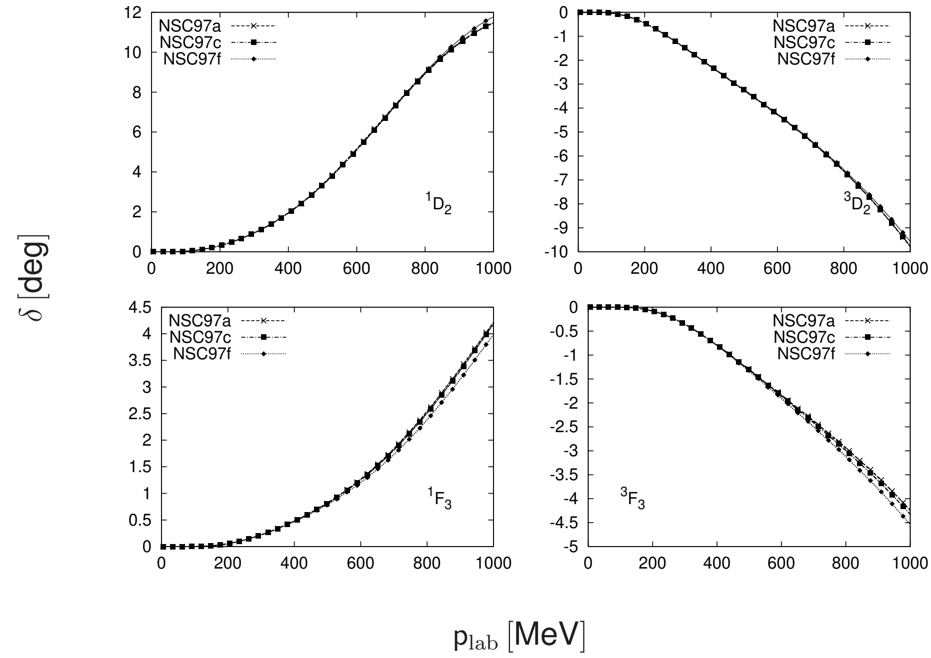


Abbildung 7.10.: *Streuphasen* $V_{low\,k}$ *(Punkte) und* V_{bare} *(Linien mit Punkten) für* $\Sigma N \rightarrow \Sigma N$.

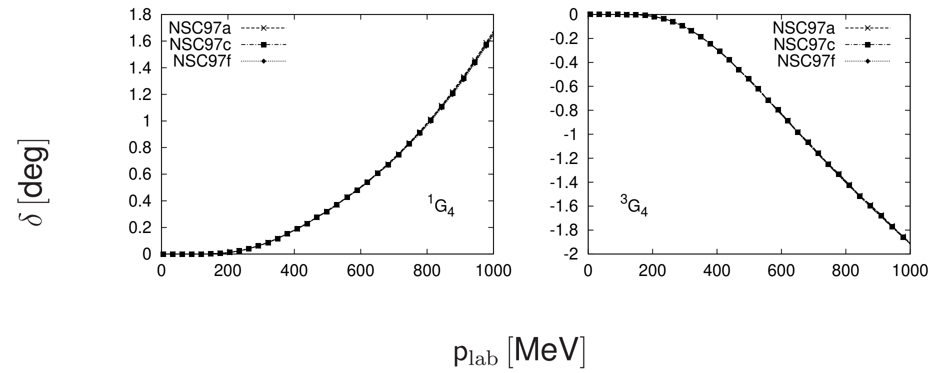


Abbildung 7.11.: *Streuphase* $V_{low\,k}$ *(Punkte) und* V_{bare} *(Linien mit Punkten) für* $\Sigma N \rightarrow \Sigma N$.

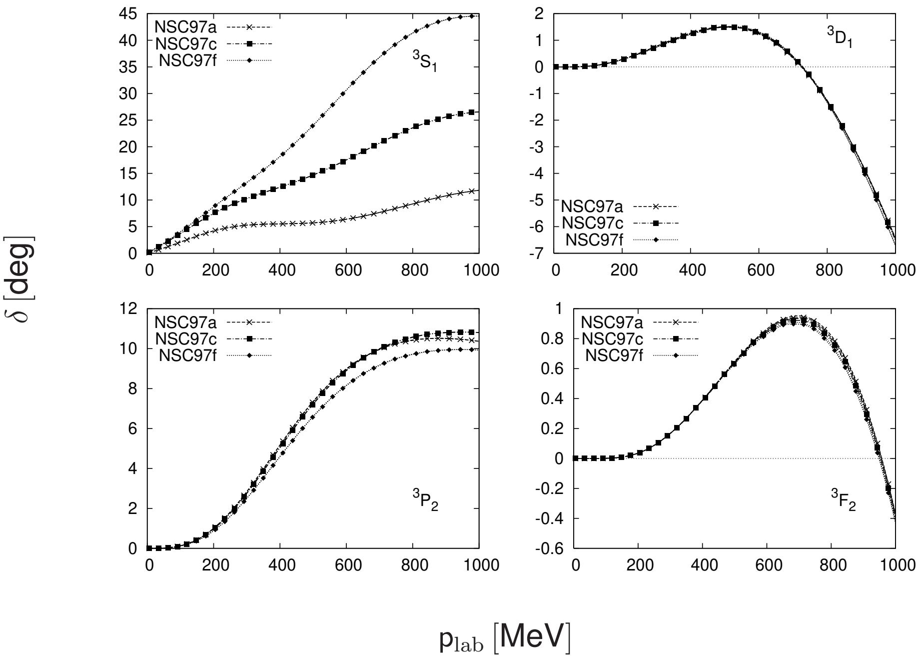


Abbildung 7.12.: *Streuphasen für $V_{low\ k}$ (Punkte) und V_{bare} (Linien mit Punkten) für $\Sigma N \to \Sigma N$.*

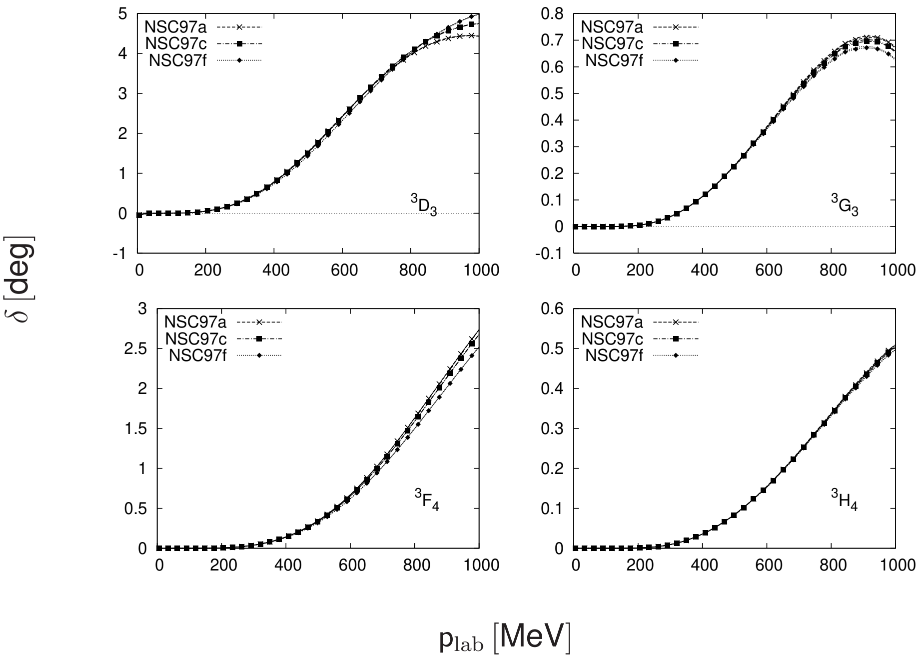


Abbildung 7.13.: *Streuphasen für $V_{low\ k}$ (Punkte) und V_{bare} (Linien mit Punkten) für $\Sigma N \to \Sigma N$.*

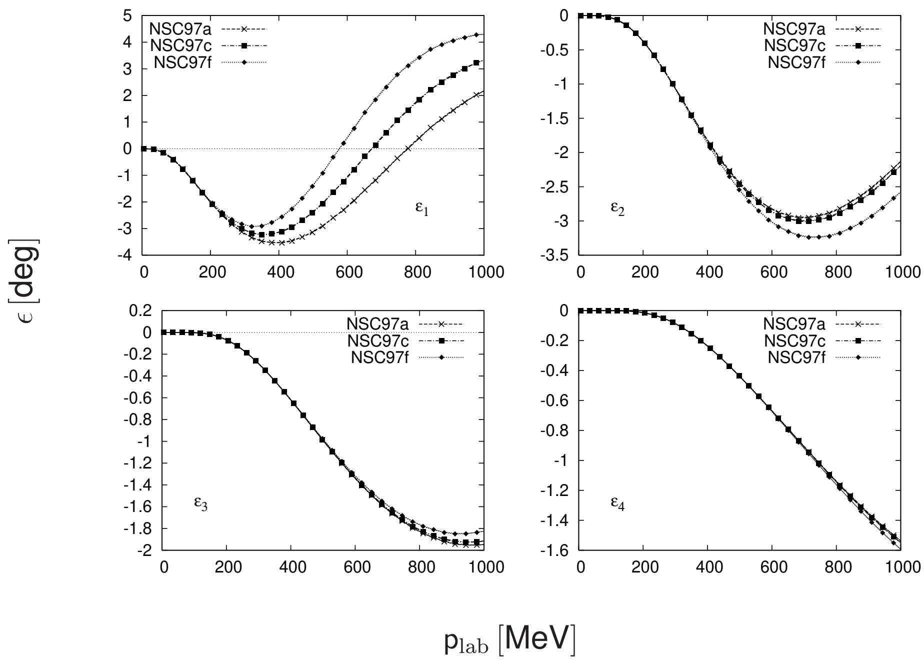


Abbildung 7.14.: *Mischungswinkel für $V_{low\ k}$ (Punkte) und V_{bare} (Linien mit Punkten) für $\Sigma N \to \Sigma N$.*

7.3. Wahl des Cutoffs

Im Nukleon-Nukleon-Fall wurde der Cutoff von $\Lambda = 2.1\,\mathrm{fm}^{-1}$ im Wesentlichen durch zwei Argumente motiviert. Eine wirkliche Wahl des Cutoffs nach harten Kriterien ist nicht möglich. Zum einen entspricht der Cutoff von $2.1\,\mathrm{fm}^{-1}$ einer Laborenergie von $E_{lab} \approx 350\,\mathrm{MeV}$. Dies ist der Wert bis zu dem die realistischen Potentiale durch das Experiment festgelegt sind. Es ist deshalb sinnvoll, den Cutoff so hoch zu wählen, dass die experimentellen Daten berücksichtigt werden. Andererseits ist es wünschenswert den Cutoff so niedrig zu wählen, dass der gewählte Bereich möglichst gut beschrieben wird.

Als zweites Argument, auch wenn dies nicht unabhängig vom ersten ist, dient die Tatsache, dass bei dem gewählten Cutoff die effektiven Potentiale weitgehend zu einem einzigen effektiven Potential kollabieren. Weitere Details zur Wahl des Cutoffs im Nukleon-Nukleon-Fall finden sich z.B. in [29, 6, 13].

Die Frage ist nun, wie der Cutoff im Hyperon-Nukleon-Fall zu wählen ist. Leider ist die Antwort hier nicht so eindeutig wie im Nukleon-Nukleon-Fall. Dies hat verschiedene Ursachen. Betrachtet man als eine Motivation des Cutoffs die experimentelle Datenlage, stellt man fest, dass die wenigen vorhandenen Daten alle im Bereich $p_{\mathrm{lab}} \leq 1000\,\mathrm{MeV}$ liegen. Je nach Kanal reichen die Daten allerdings auch nur bis $p_{\mathrm{lab}} \approx 200\,\mathrm{MeV}$. Wählt man den Cutoff nun so, dass er die obere Grenze der experimentellen Daten wiedergibt, würde dies einen sehr niedrigen Cutoff im Bereich zwischen $E_{\mathrm{lab}} \sim 400\,\mathrm{MeV}$ und $E_{\mathrm{lab}} \sim 100\,\mathrm{MeV}$ motivieren. Die obere Grenze entspricht in etwa dem Cutoff im Nukleon-Nukleon Fall $\Lambda = 2.1\,\mathrm{fm}^{-1}(\approx 414\,\mathrm{MeV})$. Die experimentellen Daten sind allerdings mit großen Fehlern behaftet und bestimmen daher die Wechselwirkung im angegeben Energiebereich, wie bereits mehrfach angedeutet, nicht eindeutig. Zum anderen ist die Hyperon-Nukleon-Wechselwirkung nicht unabhängig von der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung. Diese Verbindung über den Isospin-Formalismus, die bei der Konstruktion des Nijmegen-Potentials ausgenutzt wurde, sollte auch bei der Wahl des Cutoffs berücksichtigt werden. Dies motiviert einen Cutoff im Bereich des Nukleon-Nukleon-Cutoffs.

Ein weiterer zu untersuchender Punkt ist der Kollaps auf eine einzige Wechselwirkung. Dies ist allerdings auf Grund der teilweise deutlich unterschiedlichen Streuphasen etwas uneindeutiger. Da ein Kollaps bei unterschiedlichen Streuphasen nicht zu erwarten ist, sondern eher ein Widerspruch wäre, ist es sinnlos, in Partialwellen mit unterschiedlichen Streuphasen den Cutoff so lange zu variieren, bis ein vollständiger Kollaps eintritt.

Da man zeigen kann (siehe Abschnitt 4.1), dass $V_{\mathrm{low}\,k}$ für $\Lambda \to 0$ den Wert der Streulänge annimmt, ist ein Kollaps in den Kanälen mit unterschiedlicher Streulänge (vergleiche Tabelle 5.2) nie zu erwarten.

Es ist aber durchaus lohnenswert, in den Kanälen die unterschiedlichen Modelle ähnliche Streuphasen aufweisen, den Cutoff zu variieren, um zu sehen, ob ein Kollaps eintritt. Als Kandidaten haben wir uns die Kanäle ${}^1S_0, {}^3P_0, {}^3P_2, {}^3P_2 - {}^3F_2$ ausgesucht.

Die Resultate geben allerdings in allen gezeigten Partialwellen keinen eindeutigen Hinweis auf einen günstigen Cutoff. In der ${}^1S_0$-Partialwelle liegen die verschiedenen Modelle sehr eng beieinander. Die Variation des Cutoffs zeigt hier keine wesentlichen Unterschie-

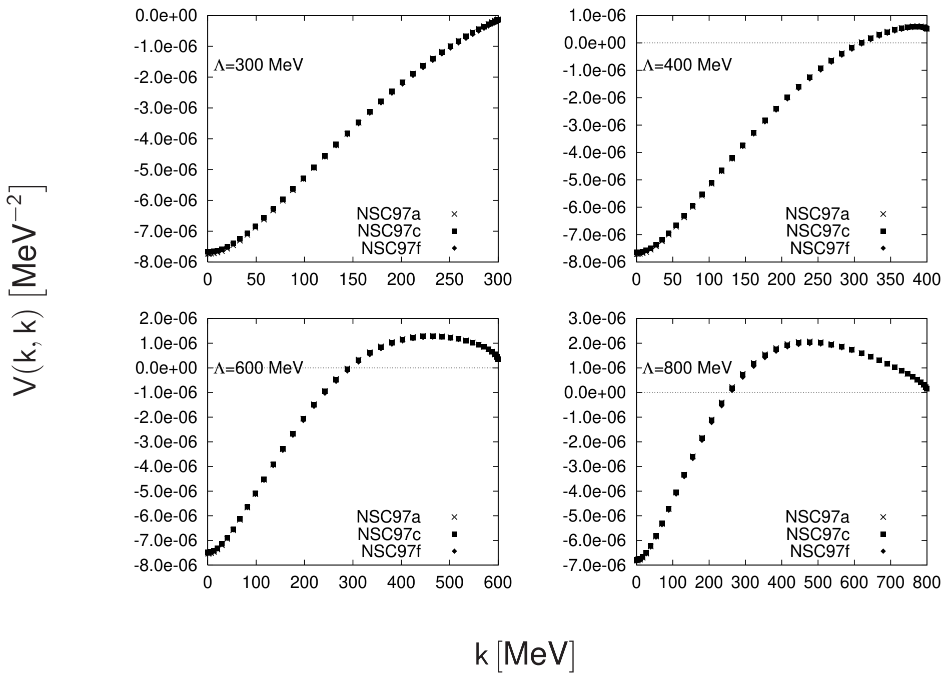


Abbildung 7.15.: $V_{low\ k}(k,k)$ *für verschiedene Cutoffs,* $^1S_0$ *Partialwelle.*

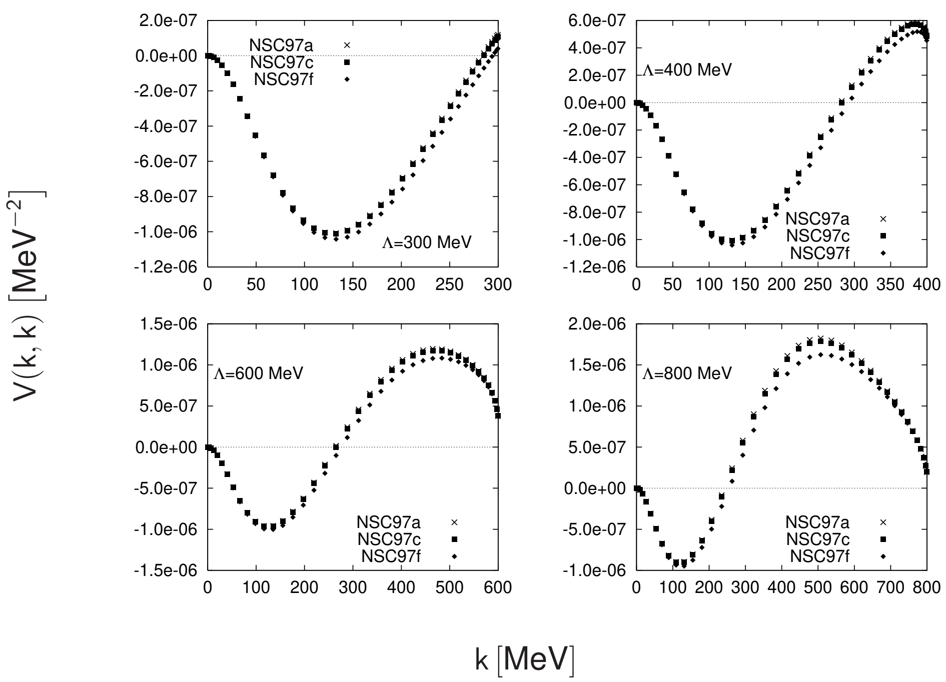


Abbildung 7.16.: $V_{low\ k}(k,k)$ *für verschiedene Cutoffs,* $^3P_0$ *Partialwelle.*

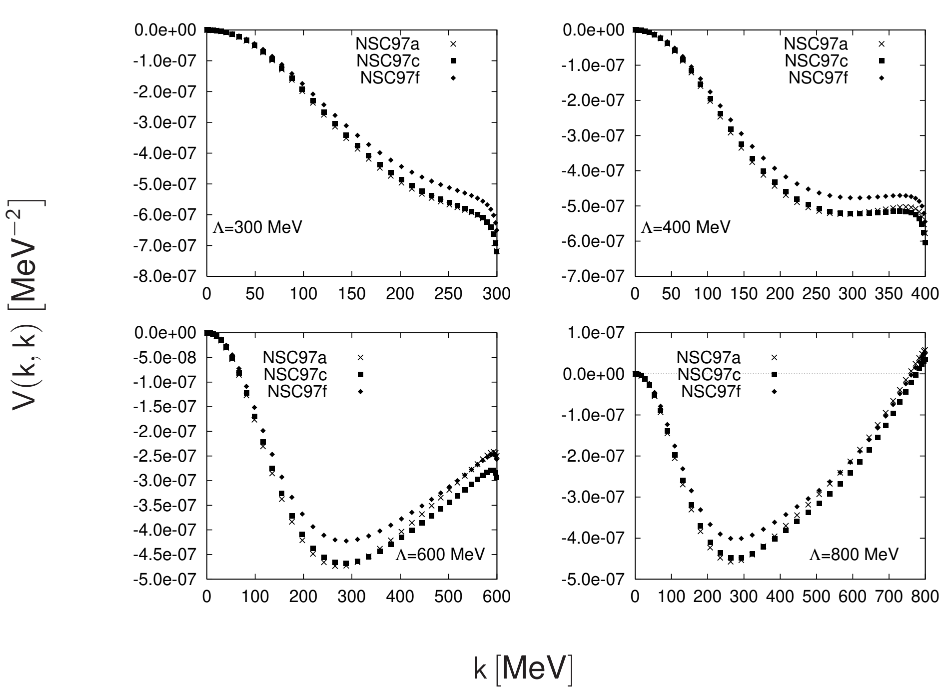


Abbildung 7.17.: $V_{low\,k}(k,k)$ *für verschiedene Cutoffs,* $^3P_2$ *Partialwelle.*

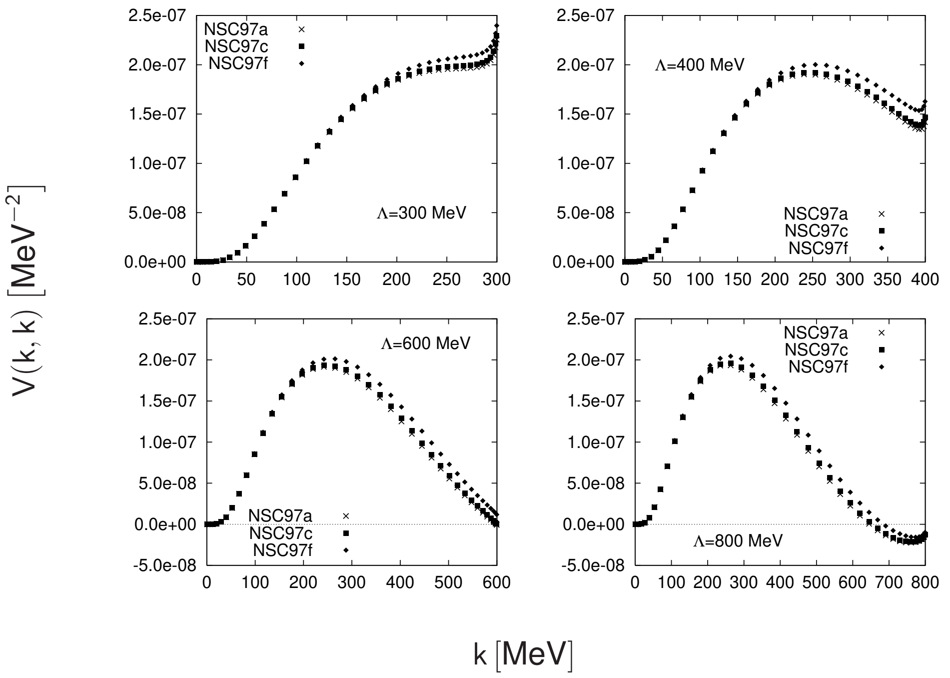


Abbildung 7.18.: $V_{low\,k}(k,k)$ *für verschiedene Cutoffs,* $^3P_2 - {}^3F_2$ *Partialwelle.*

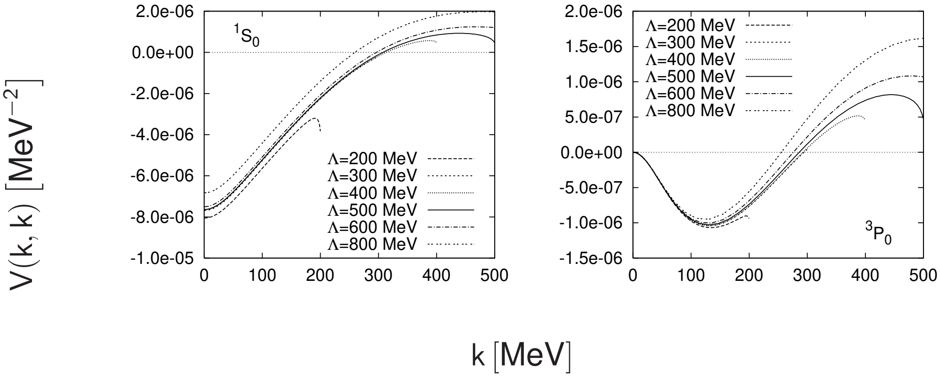


Abbildung 7.19.: $V_{low\ k}(k,k)$ *(NSC97f) für verschiedene Cutoffs.*

de. In der $^3P_0$ Streuphase ist kein Kollaps auf eine einzige effektive Wechselwirkung zu erkennen. Die Modelle a und c liegen relativ dicht beieinander. Das Modell f zeigt aber einen im wesentlichen vom Cutoff unabhängigen Abstand zu den beiden anderen.

Zusätzlich haben wir in Abbildung 7.19 die effektiven Potentiale für das Modell NSC97f für verschiedene Cutoffs übereinander gelegt. Hier erkennt man sehr deutlich, dass sich $V_{\text{low }k}$ für einen Cutoff im Bereich $\Lambda = 300 \ldots 600$ MeV nur sehr wenig ändert. Man erreicht in diesem Bereich scheinbar eine Sättigung, d.h. eine weitere Trunkierung des Hilbert-Raums hat nur noch sehr geringe Auswirkungen auf das effektive Potential. Die Wahl eines Cutoffs in diesem Bereich ist deshalb sinnvoll, weil eine Änderung im Cutoff $V_{\text{low }k}$ nur unwesentlich ändert. Senkt man den Cutoff weiter bis $\Lambda = 200\,\text{MeV}$, erkennt man, dass $V_{\text{low }k}$ sich nun wieder ändert.

7.4. Konvergenz der ALS-Iteration

Ein weiterer wichtiger Punkt ist die Konvergenz der ALS Iteration. Da die Lösung iterativ bestimmt wird und die $x_i \to 0$, haben wir als Abbruchkriterium

$$\max_{\alpha,\beta} \left|(x_i)_{\alpha\beta}\right| < \xi \tag{7.1}$$

gewählt. Bei den bisherigen Rechnungen wurde als Kriterium $\xi = 10^{-10}$ gewählt. Zur Verifikation wurde ξ variiert.

Weiter definieren wir

$$d = \max \left|(\sigma PHQ\sigma + \sigma PHP + QHQ\sigma + QHP)_{\alpha\beta}\right| \ . \tag{7.2}$$

d ist also das vom Absolutbetrag größte Element der Entkopplungsgleichung. $d = 0$ würde der exakten Lösung entsprechen. Für die verschiedenen ξ geben wir zusätzlich d an.

Eine ausreichende Konvergenz ist erreicht, wenn sich das berechnete $V_{\text{low } k}$ nicht mehr ändert und die Streuphasen reproduziert werden. Wir zeigen deshalb im Folgenden für einige ausgewählte Partialwellen Streuphasen und $V_{\text{low } k}$ bei verschiedenen Werten für ξ.

Wir haben zur Untersuchung der Konvergenz die Partialwellen ${}^1S_0$ und ${}^3S_1 - {}^3D_1$ ausgewählt.

Abbildung 7.20 zeigt die Konvergenz des Potentials in der ${}^1S_0$-Partialwelle. Hier lassen sich zwei Eigenschaften des Konvergenzverhalten festhalten. Zum einen ändert sich für niedrige Relativimpulse das Potential nur sehr wenig. Deutliche Effekte sind in der Nähe des Cutoffs zu beobachten, wobei ein Wert von $\xi \approx 10^{-3}$ ausreichend erscheint. Zumindest sind ab diesem Wert in den Abbildungen keine Änderungen mehr erkennbar. Bei den Streuphasen zeigt sich ein ähnliches Verhalten. Obwohl hier in die Berechnung der T-Matrix alle Werte von V eingehen, werden die Streuphasen für niedrige Energien schon bei niedrigem ξ gut reproduziert. Der Einfluss der Matrixelemente nahe des Cutoffs, die noch nicht konvergiert sind, scheint gering. Der für die Rechnungen verwendete Wert von $\xi = 10^{-10}$ könnte von diesem Standpunkt aus etwas vergrößert werden. Allerdings erlaubt uns der sehr effiziente ALS-Algorithmus den Luxus dieser strengen Bedingung. Die Rechenzeiten lagen im Bereich von wenigen Sekunden.

Da sich die Rechnung für gekoppelte Kanäle von der für ungekoppelte Kanäle unterscheidet, haben wir das Konvergenzverhalten auch für den ${}^3S_1 - {}^3D_1$ Fall untersucht. Die Resultate sind in den Abbildungen 7.21 und 7.22 gezeigt. Zusätzlich sind in Tabelle 7.1 noch numerische Werte für den in Gleichung (7.2) definierten Grad der Erfüllung der Entkopplungsgleichung an.

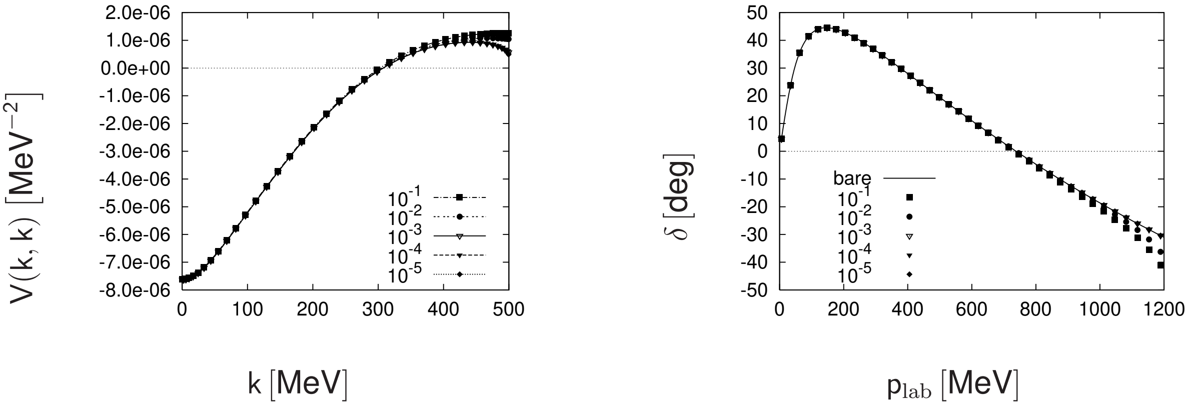


Abbildung 7.20.: $V_{low\,k}(k,k)$ *und Streuphase für unterschiedliche Werte von* ξ *für die* $^1S_0$ *Partialwelle (Modell NSC97f).*

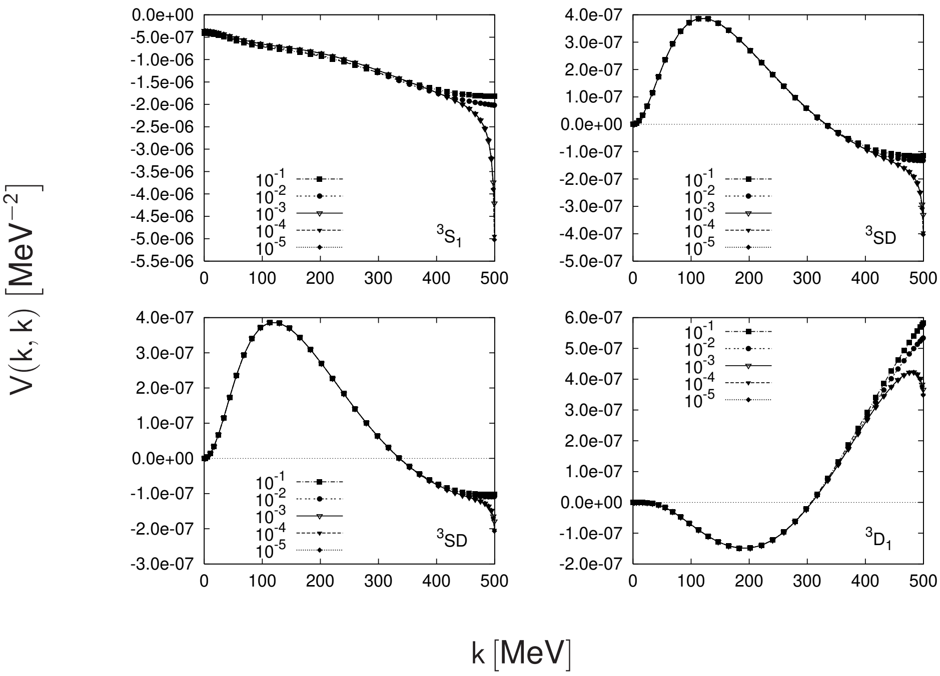


Abbildung 7.21.: $V_{low\,k}(k,k)$ *für verschiedene Werte von* ξ *(NSC97f) in den* $^3S_1 - {}^3D_1$*-Partialwellen.*

ξ		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-10}
d	$^1S_0$	2.50	1.75	0.23	$2.37 \cdot 10^{-2}$	$2.37 \cdot 10^{-3}$	$2.32 \cdot 10^{-8}$
d	^3SD	2.10	1.70	0.24	$2.36 \cdot 10^{-2}$	$2.36 \cdot 10^{-3}$	$2.27 \cdot 10^{-8}$

Tabelle 7.1.: *Werte für d für verschiedene Werte von ξ.*

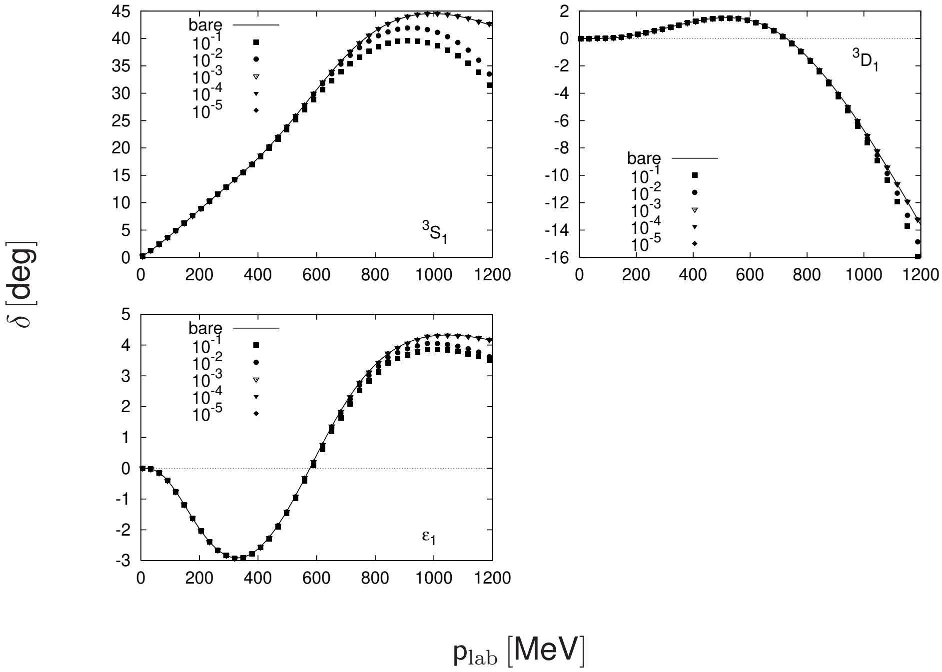


Abbildung 7.22.: *Streuphasen für verschiedene Werte von ξ (NSC97f) in den $^3S_1 - {}^3D_1$-Partialwellen.*

Kapitel 8.

Hyperon-Nukleon-Resultate für $I = 1/2$

Wir betrachten hier exemplarisch den Prozess $\Lambda N \to \Lambda N$.

8.1. Vergleich $V_{\text{low } k}$ mit dem Ausgangspotential

Wie bereits in Abschnitt 4.2.3 erwähnt, gibt es in diesem Bereich leider Probleme mit der Konvergenz der ALS-Iteration. Die Entkopplungsgleichung (4.29) wird nicht so gut erfüllt, wie im Isospin $I = 3/2$-Fall. Das Problem der Konvergenz der Iteration ist nicht nur möglich, sondern tritt ernsthaft auf. Wir werden in Abschnitt 8.5 noch genauer auf die Konvergenz der Iteration eingehen. In den Abbildungen 8.1,8.2 und 8.3 zeigen wir die Ergebnisse für den $\Lambda N \to \Lambda N$ Anteil des Potentials für einen Cutoff $\Lambda = 500\,\text{MeV}$.

8.2. Streuphasen-Äquivalenz

Obwohl die Konvergenz der ALS-Iteration noch Probleme bereitet, können wir die Streuphasen erstaunlich gut reproduzieren. In den Abbildungen 8.4,8.5 und 8.6 sind die Streuphasen für die verschiedenen Partialwellen für das Ausgangspotential und $V_{\text{low } k}$ gezeigt.

Die gute Reproduktion der Streuphasen deutet darauf hin, dass die effektive Wechselwirkung in den für die Streuphasen relevanten Impulsbereichen bereits gut konvergiert ist. Bei der Konvergenz der ALS-Iteration ist am ehesten im $\Sigma N \to \Sigma N$ Block mit Problemen zu rechnen, da hier der größte Eigenwert im P-Raum vorliegt. Die Streuphasen scheinen aber nicht allzu sensitiv auf diesen Bereich zu sein.

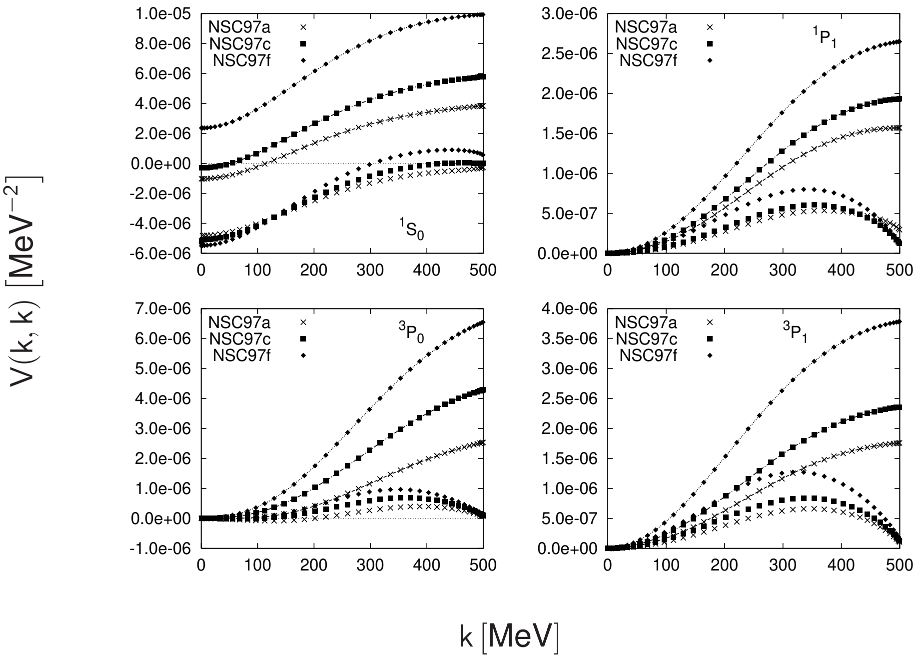


Abbildung 8.1.: $V_{low\,k}(k,k)$ *(Punkte) und* $V_{bare}(k,k)$ *(Linien mit Punkten) für* $\Lambda N \rightarrow \Lambda N$.

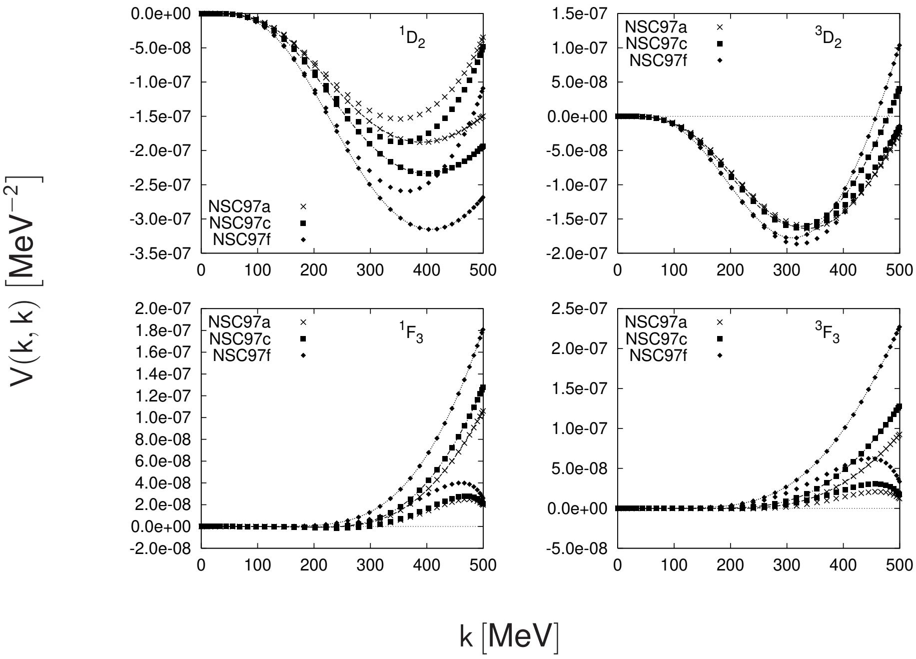


Abbildung 8.2.: $V_{low\,k}(k,k)$ *(Punkte) und* $V_{bare}(k,k)$ *(Linien mit Punkten) für* $\Lambda N \rightarrow \Lambda N$.

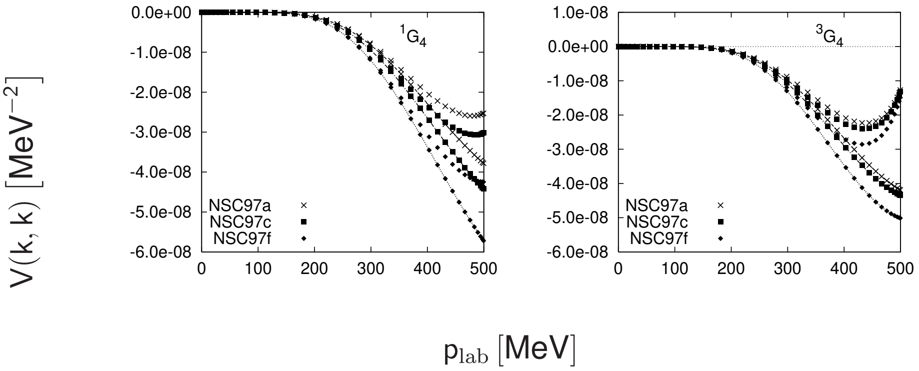


Abbildung 8.3.: *$V_{low\ k}(k,k)$ (Punkte) und $V_{bare}(k,k)$ (Linien mit Punkten) für $\Lambda N \to \Lambda N$.*

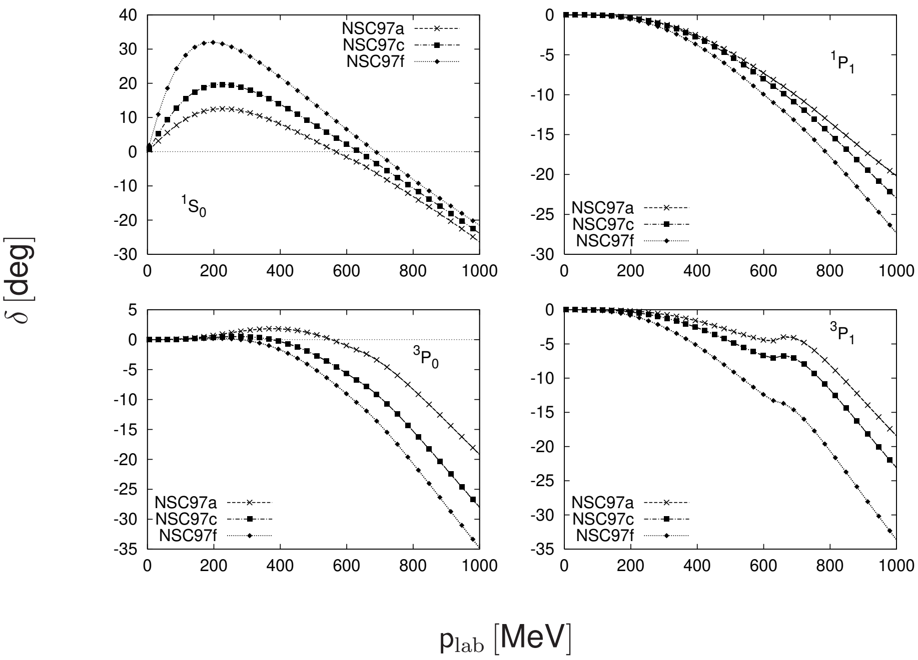


Abbildung 8.4.: *Streuphasen für $V_{low\ k}$ (Punkte) und V_{bare}) (Linien mit Punkten) für $\Lambda N \to \Lambda N$.*

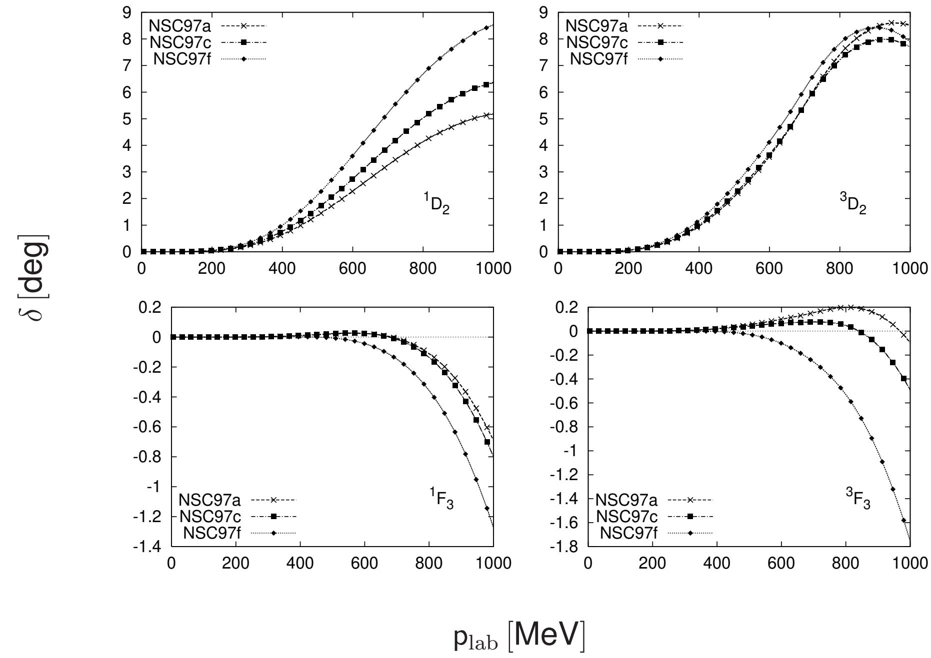


Abbildung 8.5.: *Streuphasen für $V_{low\,k}$ (Punkte) und V_{bare} (Linien mit Punkten) für $\Lambda N \to \Lambda N$.*

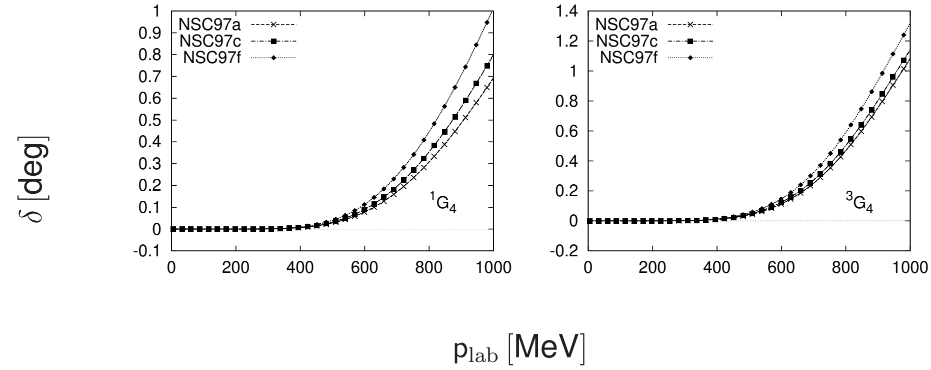


Abbildung 8.6.: *Streuphasen für $V_{low\,k}$ (Punkte) und V_{bare} (Linien mit Punkten) für $\Lambda N \to \Lambda N$.*

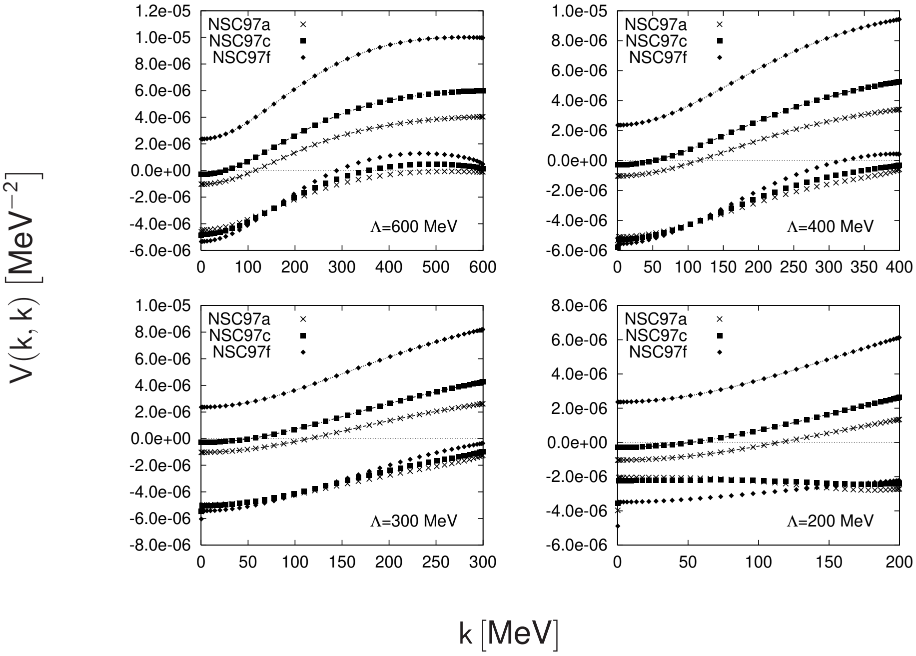


Abbildung 8.7.: *$V_{low\ k}(k,k)$ (Punkte) und $V_{bare}(k,k)$ (Linien mit Punkten) für die $^1S_0$ Partialwelle $\Lambda N \to \Lambda N$ für verschiedene Cutoffs.*

8.3. Wahl des Cutoffs

Ähnlich wie im Isospin $I = 3/2$-Fall ist kein eindeutiger Kollaps in allen Partialwellen zu erkennen. In der $^1S_0$-Partialwelle (Abbildung 8.7) sind die verschiedenen $V_{\text{low } k}$ deutlich enger beisammen als die Ausgangspotentiale. Allerdings ist bei den deutlich unterschiedlichen Streuphasen auch kein vollständiger Kollaps zu erwarten. Für einen Cutoff $\Lambda \approx 300\,\text{MeV}$ liegen die Potentiale am dichtesten zusammen. In der $^3P_0$-Partialwelle (Abbildung 8.8) erkennt man, dass die verschiedenen $V_{\text{low } k}$ deutlich kollabieren. Bei einem Cutoff im Bereich von $200 - 300\,\text{MeV}$ kann man schon von einem eindeutigen $V_{\text{low } k}$ sprechen. In diesem Bereich liegen die Streuphasen der Modelle sehr eng beieinander, so dass der Kollaps hier zu erwarten war. Der Cutoff im Bereich von $200 - 300\,\text{MeV}$ ist allerdings nach den vorhergehenden Argumentation eher zu niedrig. Das Verhalten in einer Partialwelle ist bei weitem aber noch nicht ausreichend um einen Cutoff zu motivieren.

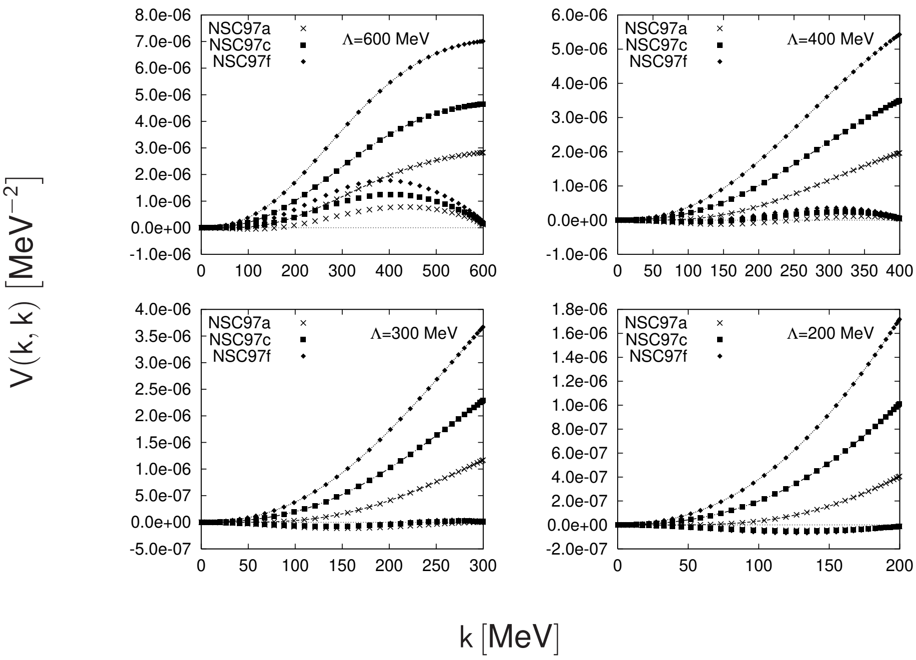


Abbildung 8.8.: $V_{low\,k}(k,k)$ *(Punkte) und* $V_{bare}(k,k)$ *(Linien mit Punkten) für die* $^3P_0$ *Partialwelle* $\Lambda N \to \Lambda N$ *für verschiedene Cutoffs.*

8.4. Kanäle mit Drehimpulskopplung

Das Konvergenz-Problem der ALS-Iteration tritt hier noch stärker auf als bisher. Dies liegt vor allem daran, dass wir nun nicht mehr vier Blöcke in unseren Matrizen haben, sondern 16. Neben der allgemein zu erwartenden numerischen Ungenauigkeiten bei den größeren Matrizen, gibt es nun auch entsprechend mehr Eigenwerte und somit auch eine höhere Wahrscheinlichkeit, dass die Iteration auf einen oder mehrere falsche Eigenwerte konvergiert. Erschwerend kam hinzu, dass es im Rahmen dieser Arbeit leider nicht gelungen ist, die in [20] veröffentlichen Streuphasen und Mischungsparameter zu reproduzieren. Dies war unabhängig davon, ob wir die Streuphasen direkt aus dem Ausgangspotential V_{bare} oder aus dem effektiven Potential $V_{\text{low }k}$ berechnet haben. Die momentanen Ergebnisse zeigen noch keine gute Konvergenz, auch die Reproduktion der T-Matrix hat noch nicht die gewünschte Genauigkeit erreicht. Wir verzichten deshalb hier auf die Angabe dieser.

8.5. Konvergenz

Da wir im Isospin 1/2-Fall noch keine stabile Konvergenz erreicht haben, können wir hier keine Aussagen über das Konvergenzverhalten der Iteration machen. Die nicht sortierten Eigenwerte erfordern ein ausführliche Behandlung. Sobald eine stabile Konvergenz auf die richtigen Eigenwerte erreicht ist, kann die Geschwindigkeit der Iteration untersucht werden.

Zumindest der $\Lambda N \to \Lambda N$ Block des Potentials scheint bei der verwendeten Anzahl der Iterationen stabil.

Kapitel 9.

Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben die $V_{\text{low }k}$-Renormierungsgruppen-Methode erfolgreich auf Hyperon-Nukleon-Systeme angewandt. Die Ergebnisse reproduzieren die Streuphasen mit sehr hoher Genauigkeit. Trotz teilweise sehr unterschiedlicher Streuphasen der verschiedenen Modelle ist in einigen Partialwellen eine Konvergenz zu einem eindeutigen Hyperon-Nukleon-Potential zu erkennen. Über einen breiten Bereich ist $V_{\text{low }k}$ sogar unabhängig vom gewählten Cutoff. Dies ermöglicht eine Wahl des Cutoffs in diesem Bereich. Auf Grund der teilweise sehr unterschiedlichen Streuphasen der Potentiale ist nicht in allen Partialwellen eine Konvergenz auf ein einheitliches $V_{\text{low }k}$ erfolgt. Dies erschwert die Wahl eines idealen Cutoffs. Hier scheint eine Orientierung am Cutoff für den Nukleon-Nukleon-Fall von $\Lambda = 2.1\,\text{fm}$ sinnvoll.

Die Ergebnisse dieser Arbeit ermöglichen einige interessante Projekte für die Zukunft. Aufbauend auf der jetzt gewonnenen Wechselwirkung können Rechnungen für Hyperkerne begonnen werden. Dies ermöglicht einen weiteren Einblick in die Stärken und die Schwächen der Methode. Im Nukleon-Nukleon-Fall konnte aus der Abhängigkeit vom Cutoff der Ergebnisse bei der Berechnung von Drei- und Viernukleonensystemen eine Dreikörper-Wechselwirkung motiviert werden [30]. Im Nukleon-Nukleon-Fall gibt es bereits erfolgreiche Schalemodellrechnungen mit $V_{\text{low }k}$ [31].

Die Matrixelemente sind im Nukleon-Nukleon-Fall den der Unitary Correlation Operator Method (UCOM) [32, 33] sehr ähnlich. Hier sind ebenfalls vergleichende Rechnungen geplant.

Ein Vergleich mit anderen Methoden, z.B. auch solchen im Ortsraum [34], steht noch aus.

Im Bereich der effektiven Wechselwirkung bleibt die Verbesserung der Konvergenz der ALS-Iteration. Der Einsatz der Eigenwerte nach jedem Iterationsschritt ist zwar von der Rechenzeit sehr aufwendig, verspricht aber eine gute und stabile Konvergenz der Iteration. Die Berechnung der Streuphasen für den Isospin 1/2 Fall mit Drehimpulskopplung steht ebenfalls noch an. Auch in diesem Fall verspricht die Verwendung der aktuellen Eigenwerte des effektiven Hamilton-Operators eine stabilere Konvergenz.

Der Kollaps der verschiedenen Ausgangspotentiale ist in einigen Partialwellen bereits erkennbar. Hier wäre es sehr interessant so bald wie möglich Rechnungen mit weiteren Potentialen durchzuführen. Die Umrechnung des Potentials auf ein hermitesches $V_{\text{low }k}$

sollte ebenfalls noch durchgeführt werden. Dafür erwarten wir keine weiteren Probleme. Diese Rechnungen konnten im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr komplett durchgeführt werden. Wir haben für unsere Zwecke allerdings auch kein hermitesches Potential benötigt.

Bis jetzt haben wir immer in der Isospin-Basis gearbeitet. Eine Berechnung auf der Teilchenbasis ist im Moment in Arbeit. Hier wird die Konvergenz der Iteration vermutlich allerdings noch instabiler werden, da nun nicht mehr maximal vier mal vier Blöcke im Potential auftauchen, sondern sechs mal sechs.[1]. Hier könnte sich das Problem mit der Konvergenz auf die richtigen Eigenwerte noch verstärken.

Abschließend bleibt noch anzumerken, das unsere Ergebnisse genau wie die Ausgangspotentiale unter der schlechten Datenlage für Hyperon-Nukleon-Streuung leiden. Verbesserte Daten und damit weniger Unterschiede in den Potentialen bzw. deren Streuphasen würden einen großen Schritt zu einer modellunabhängigen, effektiven Hyperon-Nukleon-Wechselwirkung bedeuten. Bis dahin sind hoffentlich alle im Moment noch offenen Probleme weitgehend geklärt, so dass mit den verbesserten Daten relativ schnell neue Rechnungen auf Basis der $V_{\mathrm{low}\,k}$-Wechselwirkung angestellt werden können.

[1] Vier Blöcke treten im Isospin 1/2 Fall mit Drehimpulskopplung auf, da wir zwei Teilchen haben und diese noch zwei Bahndrehimpulsen betrachtet werden müssen. In der Teilchenbasis gibt es zwar auch nur zwei Bahndrehimpulse, allerdings mehr Teilchenkanäle, da die Entartung des Σ aufgehoben wird.

Anhang A.

Konventionen

A.1. Basis

Wir verwenden in dieser Arbeit folgende Konventionen:

$$\hbar = c = 1$$

Die Potentiale und die Lippmann-Schwinger-Gleichung geben wir in einer in Partialwellen entwickelten Ebene-Wellen-Basis an. Diese hat die Normierung

$$\langle p|p'\rangle = \frac{\pi}{2}\frac{\delta\left(p-p'\right)}{p^2} \qquad 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dpp^2\left|p\right\rangle\left\langle p\right| \tag{A.1}$$

A.2. Wichtige Funktionen

Zur Partialwellenentwicklung benötigen wir die Kugelflächenfunktionen. Für $m \geq 0$ sind diese definiert als

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = (-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{l+m}}!P_{lm}\left(\cos(\theta)\right)e^{im\phi} \tag{A.2}$$

für $m < 0$ gilt

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = (-1)^{|m|}Y^*_{l|m|}(\theta,\phi) \tag{A.3}$$

mit

$$P_{lm}\left(\cos(\theta)\right) = \left(1-\cos^2(\theta)\right)^{m/2}\frac{d^m}{d\left(\cos(\theta)\right)^m}P_l\left(\cos(\theta)\right) \tag{A.4}$$

sowie

$$P_l\left(\cos(\theta)\right) = \frac{(-1)^l}{2^l l!}\frac{d^l\left(1-\cos(\theta)\right)^l}{d\left(\cos(\theta)\right)}\ . \tag{A.5}$$

Weiter benötigen wir die sphärischen Bessel-Funktionen

$$j_l(\rho) = \left(\frac{\pi}{2\rho}\right)^{1/2}J_{l+1/2}(\rho) \tag{A.6}$$

wobei J die Bessel-Funktionen bezeichnet.

Anhang B.

Details der Rechnungen und Numerik

B.1. Lippmann-Schwinger-Gleichung

B.1.1. Partialwellenentwicklung

Die Partialwellenentwicklung der Lippmann-Schwinger-Gleichung wird im Folgenden beschrieben.

$$\begin{aligned}
\langle k' | T | k \rangle &= \langle k' | V | k \rangle + \left\langle k' \middle| V \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} T \middle| k \right\rangle \\
&= \langle k' | V | k \rangle + \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \langle k' | V | q \rangle \langle q | \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} T | k \rangle \\
&= \langle k' | V | k \rangle + \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \langle k' | V | q \rangle \frac{1}{E - q^2/(2m) + i\epsilon} \langle q | T | k \rangle
\end{aligned}$$

Die drei Terme werden jetzt einzeln betrachtet. Zuerst berechnen wir $\left\langle \vec{k} | V | \vec{k'} \right\rangle$.Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen für Kugelkoordinaten:

$$\vec{k} = (k, \alpha, \beta), \vec{x} = (r, \theta, \phi), \vec{k'} = (k', \alpha', \beta'), \vec{x'} = (r', \theta', \phi')$$

.

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{k} | V | \vec{k'} \right\rangle &= \int d^3 x \int d^3 x' \left\langle \vec{k} | \vec{x} \right\rangle \left\langle \vec{x} | V | \vec{x'} \right\rangle \left\langle \vec{x'} | \vec{k'} \right\rangle \\
&= \int d^3 x \int d^3 x' e^{-i\vec{k}\vec{x}} \left\langle \vec{x} | V | \vec{x'} \right\rangle e^{i\vec{k'}\vec{x'}} \\
&= \int d^3 x \int d^3 x' \left[4\pi \sum_{l=0}^{\infty} i^l j_l(kr) Y^*_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}(\alpha, \beta) \right]^* V(r) \delta(\vec{x} - \vec{x'}) \times \\
&\quad \left[4\pi \sum_{l'=0}^{\infty} i^{l'} j_{l'}(k'r') Y^*_{l'm'}(\theta', \phi') Y_{l'm'}(\alpha', \beta') \right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int drr^2 V(r) 16\pi^2 \sum_{l,l'} \sum_{m,m'} i^{-l} i^{l'} j_l(kr) j_{l'}(kr) Y_{l'm'}(\alpha', \beta') Y^*_{lm}(\alpha, \beta) \times \\
&\underbrace{\int d\phi \int d\theta \sin(\theta) Y_{lm}(\theta, \phi) Y^*_{l'm'}(\theta, \phi)}_{=\delta_{ll'}\delta_{mm'}} \\
&= 16\pi^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \int drr^2 j_l(kr) j_l(k'r) Y_{lm}(\alpha', \beta') Y^*_{lm}(\alpha, \beta) V(r) \\
&= 16\pi^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\alpha', \beta') Y^*_{lm}(\alpha, \beta) \underbrace{\int drr^2 j_l(kr) j_l(kr) V(r)}_{=:V_l(k,k')} \\
&= 16\pi^2 \sum_{l=0}^{\infty} V_l(k, k') \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\alpha', \beta') Y^*_{lm}(\alpha, \beta)
\end{aligned}
$$

Mit den abkürzenden Schreibweisen $Y_{lm}(\hat{v}) = Y_{lm}(\theta, \phi)$ wobei $\hat{v} = \vec{v}/|\vec{v}|$ und $\vec{v}$ ist ein beliebiger Vektor in Kugelkoordinaten mit $\vec{v} = (v, \theta, \phi)$ erhält man

$$
\langle k' | V | k \rangle = 16\pi^2 \sum_{l=0}^{\infty} V_l(k', k) \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\hat{k}) Y^*_{lm}(\hat{k}') \ .
$$

Auf die gleiche Weise erhält man

$$
\langle k' | T | k \rangle = 16\pi^2 \sum_{l=0}^{\infty} T_l(k', k) \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\hat{k}) Y^*_{lm}(\hat{k}') \ .
$$

Für den letzten Term ergibt sich unter Ausnutzung der Vollständigkeitsrelation und

Orthonormalität der Kugelflächenfunktionen:

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \langle k' |V| q\rangle \frac{1}{E - q^2/(2m) + i\epsilon} \langle q |T| k\rangle \\
=&\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left[16\pi^2 \sum_{l=0}^{\infty} V_l(k',q) \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\hat{q}) Y^*_{lm}(\hat{k}')\right] \frac{1}{E - q^2/(2m) + i\epsilon} \times \\
&\left[16\pi^2 \sum_{l=0}^{\infty} T'_l(q,k) \sum_{m'=-l'}^{l'} Y_{l'm'}(\hat{q}) Y^*_{l'm'}(\hat{k}')\right] \\
=&\frac{(16\pi^2)^2}{(2\pi)^3} \sum_{l,l'} \sum_{m,m'} \int dq q^2 Y^*_{lm}(\hat{k}') \frac{1}{E - q^2/(2m) + i\epsilon} Y^*_{l'm'}(\hat{k}') V_l(k',q) T'_l(q,k) \times \\
&\underbrace{\int_0^{\pi} d\theta_q \int_0^{2\pi} d\phi_q Y_{lm}(\hat{q}) Y_{l'm'}(\hat{q})}_{=\delta_{ll'}\delta_{mm'}} \\
=&\frac{(16\pi^2)^2}{(2\pi)^3} \sum_{l=0}^{\infty} \int dq q^2 V_l(k',q) \frac{1}{E - q^2/(2m) + i\epsilon} T_l(q,k) \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\hat{k}') Y^*_{lm}(\hat{k}')
\end{aligned}
$$

Setzt man die Terme zusammen kann man $16\pi^2 \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\hat{k}')Y^*_{lm}(\hat{k}')$ kürzen und die Gleichung für ein spezielles l betrachten. Damit erhält man die Lippmann-Schwinger-Gleichung für eine Partialwelle

$$
T_l(k',k) = V_l(k',k) + \frac{2}{\pi} \int dq q^2 V_l(k',q) \frac{1}{E - q^2/(2m) + i\epsilon} T_l(q,k) \ .
$$

Das Integral lässt sich mit der Hilbert-Transformation umschreiben[1] umschreiben:

$$
\begin{aligned}
&\int dq q^2 V_l(k',q) \frac{1}{E - q^2/(2m) + i\epsilon} T_l(q,k) \\
=&\int dq q^2 V_l(k',q) \frac{2m}{(k-q)(k+q) + i\epsilon'} T_l(q,k) \\
=&\int dq q^2 V_l(k',q) \frac{2m}{k+q} \frac{1}{k-q+i\epsilon''} T_l(q,k) \\
=&\mathcal{P} \int dq q^2 V_l(k',q) \frac{2m}{k+q} \frac{1}{k-q} T_l(q,k) - i\pi \left(k^2 V_l(k',k) \frac{2m}{k+k} T_l(k,k)\right) \\
=&\mathcal{P} \int dq q^2 V_l(k',q) \frac{2m}{k^2-q^2} T_l(q,k) - i\pi m k V_l(k',k) T_l(k,k)
\end{aligned}
$$

[1]unter Verwendung von $E = k^2/(2\mu)$ und $H_0 = q^2/(2\mu)$

Nach Subtrahieren einer Null erhält man für den ersten Term

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{P}\int dq q^2 V_l(k',q)\frac{2m}{k^2-q^2}T_l(q,k)\\
=&\int dq \frac{q^2V_l(k',q)2mT_l(q,k)-k^2V_l(k',k)2mT_l(k,k)}{k^2-q^2}\quad .
\end{aligned}
$$

B.1.2. Haftel-Tabakin

Zur numerischen Lösung der Lippmann-Schwinger-Gleichung verwenden wir das von Haftel und Tabakin [35] beschriebene Matrixinversionsverfahren. Das Hauptwertintegral in der Lippmann-Schwinger-Gleichung kann durch eine geschickte Umformung auf ein glattes Integral umgeformt werden. Auf die Details der Umformung wird im folgenden (B.1.3) noch genauer eingegangen. Nach der Umformung hat die Lippmann-Schwinger-Gleichung die Form

$$
T(k',k;E)=V(k',k)+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dq q^2 V(k',q)\frac{2m}{k^2-q^2}T(q,k;E)-k^2V(k',k)\frac{2m}{k^2-q^2}T(k,k;E) \tag{B.1}
$$

Schreibt man die Lippmann-Schwinger-Gleichung in einer diskretisierten Form mit den Stützstellen k_i und den Gewichten ω_i, wobei $i=1\dots N$ erhält man die folgende Form.

$$
T_{ij}=V_{ij}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\omega_n\frac{k_n^2V_{in}T_{nj}-k_j^2V_{i0}T_{00}}{\left(k_0^2-k_n^2\right)/(2m)} \tag{B.2}
$$

Dabei bedeutet die Notation $T_{ij}=T(k_i,k_j;E)$. Definiert man weiter $k_{n+1}=k_0$ und

$$
D_i=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\frac{(2m)k_i^2\omega_i}{k_0^2-k_i^2} & i\leq N,\\ -\frac{2}{\pi}\sum_{l=1}^{N}\frac{(2mk_0^2\omega_l}{k_0^2-k_l^2} & i=N+1\end{cases} \tag{B.3}
$$

lässt sich die Gleichung noch kompakter schreiben.

$$
T_{ij}=V_{ij}+\sum_{n=1}^{N+1}D_nV_{in}T_{nj} \tag{B.4}
$$

Durch Umstellen erhält man

$$
V_{ij}=\sum_{n=1}^{N+1}\underbrace{(\delta_{in}+D_nV_{in})}_{=F_{in}}T_{nj} \tag{B.5}
$$

Diese Gleichung lässt sich als Matrixgleichung

$$
V=FT \tag{B.6}
$$

schreiben und dann mit bekannten numerischen Methoden wie der LU-Zerlegung lösen.

Diese Methode kann ohne Probleme auch auf die Lippmann-Schwinger-Gleichungen angewandt werden, die bereits in Matrixstruktur geschrieben sind. Hierzu kombiniert man einfach die hier beschriebene Methode mit der bereits vorhandenen Matrixstruktur und erhält entsprechend größere Matrizen, statt $N+1 \times N+1$ sind diese dann $2N+2 \times 2N+2$ oder $4N+4 \times 4N+4$ groß. Das Gitter wird einfach verdoppelt oder vervierfacht, so dass beispielsweise $k_{i+N+1} = k_i$ gilt.

B.1.3. Numerische Behandlung des Hauptwertintegrals

Das in der Lippmann-Schwinger Gleichung vorkommende Hauptwertintegral wird in der Haftel-Tabakin Methode durch Subtraktion einer 0 behandelt. Es gilt

$$\mathcal{P}\int_0^\infty dx \frac{1}{x^2 - x_0^2} = 0 \tag{B.7}$$

Damit gilt auch

$$\mathcal{P}\int_0^\infty dx \frac{f(x)}{x^2 - x_0^2} = \int_0^\infty dx \frac{f(x) - f(x_0)}{x^2 - x_0^2} \tag{B.8}$$

Durch die Einschränkung auf den Modellraum, ist die obere Grenze des Integrals nicht mehr ∞ sondern Λ und (B.7) wird nicht mehr gelten.

$$\mathcal{P}\int_0^\Lambda dx \frac{1}{x^2 - x_0^2} \neq 0 \tag{B.9}$$

Um das Hauptwertintegral dennoch exakt behandeln zu können, hilft folgender Trick. Ausgehend von (B.7) lässt sich (B.9) berechnen.

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\int_0^\Lambda dx \frac{f(x)}{x^2 - x_0^2} &= \mathcal{P}\int_0^\Lambda dx \frac{f(x)}{x^2 - x_0^2} - \underbrace{\mathcal{P}\int_0^\infty dx \frac{f(x_0)}{x^2 - x_0^2}}_{=0} \\
&= \int_0^\Lambda dx \frac{f(x) - f(x_0)}{x^2 - x_0^2} - \int_\Lambda^\infty dx \frac{f(x_0)}{x^2 - x_0^2} \\
&= \int_0^\Lambda dx \frac{f(x) - f(x_0)}{x^2 - x_0^2} - f(x_0) \int_\Lambda^\infty dx \frac{1}{x^2 - x_0^2} \\
&= \int_0^\Lambda dx \frac{f(x) - f(x_0)}{x^2 - x_0^2} - f(x_0) \frac{1}{2x_0} \log\left(\frac{\Lambda + x_0}{\Lambda - x_0}\right)
\end{aligned} \tag{B.10}$$

In der Haftel-Tabakin Methode hat dies zu Folge, dass D_{N+1} mit diesem Korrekturterm versehen werden muss

$$D_{N+1} = -\frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{N} \frac{2m\omega_m}{k_m^2 - k_0^2} k_0^2 - 2m \frac{k_0}{\pi} \log\left(\frac{\Lambda + k_0}{\Lambda - k_0}\right) \tag{B.11}$$

Dieses Resultat stimmt mit der Behandlung des Hauptwertintegrals für den Fall ohne Cutoff überein. Setzt man in den obigen Gleichungen $\Lambda \to 0$ verschwindet die Korrektur und man erhält die Gleichungen für die Rechnung ohne Cutoff.

B.2. Andreozzi-Lee-Suzuki Iteration

Wir geben im folgenden noch weitere Details zur ALS Iteration an. Zuerst möchten wir das Iterationsschema motivieren.

B.2.1. Motivation der ALS Iteration

Das iterative Verfahren zur Lösung der Entkopplungsgleichung motiviert sich wie folgt. Nimmt man an, dass ω_1 und ω_2 Lösungen der Entkopplungsgleichung (4.29). Für die Differenz $y = \omega_2 - \omega_1$ gilt

$$yPHQy + yp(\omega_1) - q(\omega_1)y = 0 \tag{B.12}$$

.

Nimmt man an, dass ω die Entkopplungsgleichung erfüllt und definiert

$$\begin{aligned} \omega &= x_0 + y_1 \\ y_1 &= x_1 + y_2 \\ &\dots \\ y_{n-1} &= x_{n-1} + y_n \end{aligned} \tag{B.13}$$

und $x_{n+1} = g(x_n)$, wobei $g(x)$ bestimmte Eigenschaften erfüllen muss.

Setzt man dies in die Entkopplungsgleichung ein, erhält man

$$y_{n+1}PHQy_{n+1} + y_{n+1}p(x_0 + \ldots + x_n) - q(x_0 + \ldots + x_n)y_{n+1} + x_n f(x_0, \ldots, x_{n-1}). \tag{B.14}$$

Wenn nun $x_n \to 0$ und $f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ endlich bleibt, stimmt dies mit Gleichung (B.12) überein. y_{n+1} ist dann die Differenz der Lösungen ω und

$$\sigma = \sum_i^\infty x_i. \tag{B.15}$$

Die Bestimmung der $x_{i+1} = g(x_i)$ und des Startwerts x_0 muss in einer Weise erfolgen, die die oben genannten Bedingungen erfüllt.

Schreibt man die Entkopplungsgleichung für den Startwert $x_0 = \omega - y_1$ auf, erhält man

$$\begin{aligned} &(x_0 + y_1)\, PHQ\, (x_0 + y_1) + (x_0 + y_1)\, PHP - QHQ\, (x_0 + y_1) - QHP \\ &\quad = y_1 PHQ y_1 + y_1 p(x_0) - q(x_0) y_1 + \underbrace{x_0 PHQ x_0 + x_0 PHP - QHQ x_0 - QHP}_{= x_0 f(x_0)} \end{aligned} \tag{B.16}$$

Ein möglicher Startwert ist nun

$$x_0 = \frac{-1}{QHQ} QHP \tag{B.17}$$

Damit erhält man für den letzten Term

$$x_0 f(x_0) = x_0 PHQx_0 + x_0 PHP - \underbrace{QHQx_0}_{=-\frac{QHQ}{QHQ}QHP} - QHP = x_0 \left(\underbrace{PHQx_0 + PHQ}_{p(x_0)} \right) \tag{B.18}$$

Setzt man nun weiter $y_{n-1} = x_{n-1} + y_n$ ein, erhält man ein mögliches Iterationsschema.

$$x_n = \frac{1}{q\left(x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}\right)} x_{n-1} p\left(x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}\right) \tag{B.19}$$

Dies ist allerdings nicht die einzige Möglichkeit. Eine weitere Möglichkeit, die ebenfalls zum Typ der Lee-Suzuki Lösungen gehört ist.

$$\begin{aligned} x_0 &= QHP \frac{1}{PHP} \\ &\cdots \\ x_n &= q(\sigma_{n-1}) x_{n-1} \frac{1}{p(\sigma_{n-1})} \end{aligned} \tag{B.20}$$

B.2.2. Numerische Umsetzung

Zur numerischen Umsetzung der ALS-Iteration muss die kontinuierliche Basis zunächst diskretisiert werden. Wir sind dabei wie folgt vorgegangen.

Diskretisierung des Hilbert-Raums

Zunächst gilt es für die ALS-Iteration notwendigen Projektionsoperatoren zu definieren. Diese sind in einer Ebene-Wellen-Basis (PWB) gegeben durch

$$P = \frac{2}{\pi} \int_0^{\Lambda_P} p^2 dp \left|p\right\rangle \left\langle p\right| \quad Q = \frac{2}{\pi} \int_{\Lambda_P}^{\infty} p^2 dp \left|p\right\rangle \left\langle p\right| \tag{B.21}$$

Für die numerische Umsetzung müssen die kontinuierlichen Ausdrücke diskretisiert werden. Dies kann auf unterschiedlichen Wegen geschehen.

Der 1–Operator ist in der PWB gegeben durch

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} p^2 dp \left|p\right\rangle \left\langle p\right| \tag{B.22}$$

Das Integral bis ∞ lässt sich umschreiben, in dem man entweder eine Substitution auf ein Integral über ein endliches Intervall (z.B. mit $z = \tan\left(\frac{\pi}{4}\left(1 + x\right)\right)$) durchführt oder einen ausreichend großen Cutoff (ohne physikalische Bedeutung) Λ_Q ein. Wir verwenden die zweite Variante. Durch Variation von Λ_Q stellen wir sicher, dass die Ergebnisse nicht von der Wahl von Λ_Q abhängen.

Die Diskretisierung kann nun mittels Gauss-Legendre-Quadratur durchgeführt werden. Das Gitter wird im Bereich $[0, \Lambda_Q]$ mit N Stützstellen erzeugt. Anschließend wird das Gitter in den P und Q-Raum geteilt. Die Anzahl der Punkte im P-Raum ist N_P und die Anzahl der Punkte im Q-Raum $N_Q = N - N_P$.

Die diskretisierte 1 ist dann durch

$$1 = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{N} p_i^2 \omega_i \left| p_i \right\rangle \left\langle p_i \right| \tag{B.23}$$

gegeben.

Die zweite und vorteilhaftere Variante ist P und Q getrennt voneinander zu diskretisieren. Hierzu erstellt man ein Gitter mit N_P Punkten $x_i, i = 1 \dots N_P$ im Bereich $[0, \Lambda_p]$ für den P-Raum und ein zweites mit N_Q Punkten $x_i, i = N_P{+}1 \dots N$ im Bereich $[\Lambda_p, \Lambda_q]$.

Die Projektionsoperatoren sind in der diskretisierten Form durch die Ausdrücke

$$P = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{N_P} p_i^2 \omega_i \left| p_i \right\rangle \left\langle p_i \right| \quad Q = \frac{2}{\pi} \sum_{i=N_P+1}^{N} p_i^2 \omega_i \left| p_i \right\rangle \left\langle p_i \right| \tag{B.24}$$

gegeben.

Der 1-Operator ist durch die Summe der beiden Operatoren gegeben.

$$1 = P + Q \tag{B.25}$$

Stellt man die Basis mit Einheitsvektoren da, d.h. der i-te Einheitsvektor repräsentiert den Zustand $|p_i\rangle$, kann man P, Q und 1 als Matrix darstellen, z.B. mit $N_P = 2$

$$P = \begin{pmatrix} p_1^2\omega_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & p_2^2\omega_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{B.26}$$

Diese Form bereitet allerdings gewisse Problem, da die Normierung der Basis bei der Matrixmultiplikation berücksichtigt werden müsste. Die Relationen

$$P^2 = P \quad Q^2 = Q \quad \text{und} \quad 1^2 = 1 \tag{B.27}$$

gelten mit der üblichen Matrixmultiplikation nicht.

Das Problem sollte also in einer Basis behandelt werden, in der diese Relationen erfüllt sind.

Die ALS-Basis

Wir führen hierzu eine neue Basis ein, die durch $\{|k_i\rangle\}$ gekennzeichnet wird. Auch hier sollen die einzelnen Zustände durch entsprechende Einheitsvektoren dargestellt werden. Um die Relationen (B.27) zu erfüllen, müssen diese Zustände mit einem Kronecker-Delta normiert sein.

$$\langle k_i|k_j\rangle = \delta_{ij} \ . \tag{B.28}$$

In dieser Basis können P, Q und 1 als Matrizen mit Elementen 0 oder 1 dargestellt werden.

Die Verbindung zur Ebene-Wellen-Basis ($\{|p_i\rangle\}$) ist durch

$$\langle p_i|k_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{\omega_i}p_i}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta_{ij} \ . \tag{B.29}$$

gegeben.

Da die Nijmegen-Routinen die Matrixelemente in der Ebene-Wellen Basis liefern, müssen diese in unsere neue Basis umgerechnet werden.

$$\begin{aligned}
\langle k_i |V| k_j\rangle &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sum_{\alpha,\beta} \langle k_i|p_\alpha\rangle \langle p_\alpha |V| p_\beta\rangle \langle p_\beta|k_j\rangle\, p_\alpha^2\omega_\alpha p_\beta^2\omega_\beta && \text{(B.30)}\\
&= \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sum_{\alpha,\beta} \delta_{\alpha i} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 \frac{p_\alpha^2\omega_\alpha}{p_\alpha\sqrt{\omega_\alpha}} \langle p_\alpha |V| p_\beta\rangle\, \delta_{\beta j} \frac{p_\beta^2\omega_\beta}{p_\beta\sqrt{\omega_\beta}} && \text{(B.31)}\\
&= \frac{2}{\pi} \langle p_i |V| p_j\rangle\, p_i p_j \sqrt{\omega_i\omega_j} && \text{(B.32)}
\end{aligned}$$

Unsere Ergebnisse erhalten wir dann zunächst in der ALS-Basis und müssen diese zum Vergleich mit dem Ausgangspotential wieder in die Ebene-Wellen-Basis zurückrechnen.

$$\langle p_i |V_{lowk}| p_j\rangle = \frac{\pi}{2}\frac{1}{p_i p_j\sqrt{\omega_i\omega_j}} \langle k_i |V_{lowk}| k_j\rangle \tag{B.33}$$

Gekoppelte Kanäle

Für gekoppelte Kanäle erfolgt die Erweiterung wie folgt. Der Hilbert-Raum wird als Tensorprodukt definiert

$$|k_{\Lambda\Sigma}\rangle = |k_\Lambda\rangle \otimes |k_\Sigma\rangle \tag{B.34}$$

Zur numerischen Umsetzung werden die Zustände wieder durch Einheitsvektoren dargestellt. Der diskretisierte Raum hat nun statt N $2N$ Zustände, wobei die ersten N Einheitsvektoren Λ Zustände repräsentieren und die zweiten N Σ Zustände.

Der Hamilton-Operator H hat dann die Form

$$H = \begin{pmatrix} H^{\Lambda\Lambda} & H^{\Lambda\Sigma} \\ H^{\Sigma\Lambda} & H^{\Sigma\Lambda} \end{pmatrix} \tag{B.35}$$

Die für die Iteration benötigten Matrizen PHP, PHQ, QHP, QHQ werden dann aus den einzelnen Blöcken zusammengesetzt.

$$PHP = \begin{pmatrix} PH^{\Lambda\Lambda}P & PH^{\Lambda\Sigma}P \\ PH^{\Sigma\Lambda}P & PH^{\Sigma\Lambda}P \end{pmatrix} \tag{B.36}$$

Mit dieser Vorgehensweise kann die Iteration dann wie im einfachen Fall mit nur einem Teilchen durchgeführt werden.

Die über den Drehimpuls gekoppelten Kanäle werden analog behandelt. Dies hat zur Folge, dass im Kanal $\Lambda N \to \Lambda N$ jede Matrix aus 16 Blöcken zusammengesetzt wird. Dies geschieht analog zum Vorgehen bei der Lippmann-Schwinger-Gleichung (3.50).

Literaturverzeichnis

[1] Particle Data Group, *Particle Physics Booklet* (2002).

[2] A. L. Fetter und J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems* (Dover Publications, 2003).

[3] T. T. S. Kuo, *Folded-diagram theory of the effective interaction in nuclei, atoms, and molecules* (Springer-Verlag, 1990).

[4] K. Gottfried, *Quantum Mechanics*, Band 1 (W. A. Benjamin, 1966).

[5] K. Heyde, *Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics* (Institue of Physics Publishing, 1999).

[6] S. K. Bogner, T. T. S. Kuo und A. Schwenk, Phys. Rep. **386**, 1 (2003), `nucl-th/0305035`.

[7] J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, 1985).

[8] J. M. Blatt und L. Biedenharn, Phys. Rev. **86**, 399 (1952).

[9] H. P. Stapp und T. J. Ypsilantis, Phys. Rev. **105**, 320 (1957).

[10] G. E. Brown und A. D. Jackson, *The nucleon-nucleon interaction* (North-Holland, 1976).

[11] C. J. Joachain, *Quantum Collision Theory*, Band 1 (North-Holland, 1979).

[12] S. K. Bogner, A. Schwenk, T. T. S. Kuo und G. E. Brown (2001), `nucl-th/0111042`.

[13] A. Schwenk, Dissertation, State University of New York, Stony Brook (2002).

[14] K. Hebeler, *Gespräch*.

[15] S. K. Bogner und T. T. S. Kuo (2000), `nucl-th/0009077`.

[16] S. Lee und K. Suzuki, Phys. Lett. **91B**, 173 (1980).

[17] K. Suzuki und S. Y. Lee, Progress of Theoretical Physics **64**, 2091 (1980).

[18] F. Andreozzi, Phys. Rev. C **54**, 684 (1996).

[19] *NN-Online*, URL `http://nn-online.org`.

[20] T. A. Rijken, V. G. J. Stoks und Y. Yamamoto, Phys. Rev. C **59**, 21 (1999).

[21] T. A. Rijken und Y. Yamamoto, THEF-NIJM 03.02 (2003), `http://nn-online.org`.

[22] Z. Yang, Y. Yu, P. Shen, L. Dai, A. Faessler und U. Straub, Nucl. Phys. A **625**, 59 (1997).

[23] Y. Fujiwara, T. Fujita, M. Kohno, C. Nakamoto und Y. Suzuki (2001), `nucl-th/0101014`.

[24] T. Mayer-Kuckuck, *Kernphysik - Eine Einführung* (Teubner, 2002), 7. Auflage.

[25] H. Feldmeier, *Theoretische Kernphysik*, Skript zur Vorlesung an der TU Darmstadt (2002).

[26] P. M. M. Maessen, T. A. Rijken und J. J. de Swart, Phys. Rev. C **40**, 2226 (1989).

[27] J. Haidenbauer, W. Melnitchouk und J. Speth (2001), `nucl-th/0108062`.

[28] J. Haidenbauer, W. Melnitchouk und J. Speth (1998), `nucl-th/9808014`.

[29] S. K. Bogner, Dissertation, State University of New York, Stony Brook (2002).

[30] A. Nogga, S. K. Bogner und A. Schwenk (2004), `nucl-th/0405016`.

[31] S. K. Bogner, T. T. S. Kuo, L. Coraggio, A. Covello und N. Itaco, Phys. Rev. C **65**, 051301(R) (2002).

[32] H. Feldmeier, T. Neff, R. Roth und J. Schnack, Nucl. Phys. A **632**, 61 (1998).

[33] H. Feldmeier und T. Neff, Nucl. Phys. A **714**, 311 (2003).

[34] J. W. Holt und G. E. Brown (2004), `nucl-th/0408047`.

[35] M. I. Haftel und F. Tabakin, Nucl. Phys. A **158**, 1 (1970).

Danksagung

Mein Dank gilt Prof. Wambach, der mir die Anfertigung dieser Arbeit ermöglicht hat und auch die Kontakte zu Prof. Kuo und Achim Schwenk hergestellt hat.
Bernd-Jochen Schaefer gilt mein besonderer Dank für seine Betreuung dieser Arbeit, zahlreiche Diskussionen und die angenehme und dadurch sehr produktive Zusammenarbeit.
Thomas Roth danke ich für seine nicht nur auf die Rechneradministration bezogene Unterstützung.
Prof. Robert Roth hat mir wichtige Rechenleistung zu Verfügung gestellt und hilfreiche Tipps zur Verwendung von Mathematica beigesteuert.
Axel Maas hat durch seine hervorragende Übungsbetreuung in der theoretischen Physik maßgeblich dazu beigetragen, dass ich mich für eine Diplomarbeit in der Gruppe von Prof. Wambach entschieden habe.
Allen anderen Mitgliedern der Theorie-Gruppen des Instituts für Kernphysik danke ich für die angenehme Atmosphäre, zahlreiche Kuchen und ihre Unterstützung.
Für zahlreiche anregende Diskussionen möchte ich mich bei Prof. Tom Kuo und Achim Schwenk bedanken. Beide haben mit wertvollen Tipps und zahlreichen Details zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Verena Werth möchte ich an dieser Stelle ganz besonders danken. Seit sie sich bei der Einschreibung neben mich gesetzt hat, ist sie mit mir gemeinsam den Weg durch das Physikstudium gegangen. Mittlerweile sitzt sie mir im selben Zimmer gegenüber. Dieser gemeinsame Weg hat vieles einfacher und vieles auch angenehmer gemacht. Danke auch für zahlreiche Cappuccinos und Duplos.

Meinen Eltern und meiner Schwester danke ich besonders für ihre bedingungslose Unterstützung meines Studiums.

Britta danke ich für den Rückhalt und die Unterstützung während des gesamten Physikstudiums. Sie hat mir damit durch viele schwere Phasen geholfen. Besonders für das Verständnis in der Endphase dieser Arbeit bin ich unendlich dankbar.

Ein besonderer Dank auch an alle, die ich im Stress der Endphase der Arbeit vergessen habe namentlich zu erwähnen.

Erklärung zur Diplomarbeit gemäß §19 Abs. 6 DPO/AT

Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit ohne Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus den Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht worden. Diese Arbeit hat in gleicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Darmstadt, 9.09.2004