Institut für Kernphysik
Technische Hochschule Darmstadt

Diplomarbeit

Impulsabhängigkeit des ρ-Meson-Propagators in kalter Kernmaterie

Michael Urban

September 1997
Korrigierte Version: Juli 1999

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Ein wesentliches Ziel von Experimenten mit Schwerionenstößen ist es, die Zustandsgleichung von Kernmaterie bei hohen Dichten und Temperaturen zu untersuchen. Insbesondere erwartet man bei sehr hohen Dichten oder Temperaturen einen Übergang von hadronischer Materie, in der Nukleonen, Resonanzen und Mesonen die entscheidenden Freiheitsgrade darstellen, in das sogenannte Quark-Gluon-Plasma, in dem das „Confinement" der Quarks aufgehoben ist, so daß Quarks und Gluonen die relevanten Freiheitsgrade werden. Außerdem wird ein weiterer Phasenübergang erwartet, nämlich die Wiederherstellung der sogenannten chiralen Symmetrie. Manche Theorien sagen voraus, daß bei der Annäherung an den chiralen Phasenübergang die Massen der Hadronen, die Pionmasse ausgenommen, mit zunehmender Dichte und Temperatur abnehmen („Brown-Rho-Scaling", Ref. [1]).
In den am CERN durchgeführten Schwerionenexperimenten mit sehr hohen Energien (z. B. S+Au mit 200 AGeV) wurden vermutlich so hohe Temperaturen erreicht, daß dort womöglich der Übergang zum Quark-Gluon-Plasma oder zur chiralen Symmetrie bereits stattgefunden hat. Jedoch sind solche Effekte anhand der Spektren stark wechselwirkender Teilchen nicht beobachtbar, da diese Teilchen den Detektor erst nach zahlreichen Wechselwirkungen im sogenannten „Freezeout"-Stadium erreichen. Die Spuren des Quark-Gluon-Plasmas, sofern es das überhaupt gegeben hat, sind dann verwischt. Geeignetere Objekte zur Untersuchung des Anfangsstadiums der Reaktion stellen deshalb Teilchen wie Photonen oder Leptonen dar, die nicht der starken Wechselwirkung unterliegen und die folglich nach ihrer Produktion fast ungehindert zum Detektor fliegen können (Shuryak [2]). Deshalb wurden am CERN Dileptonenpaare untersucht, d. h. e^+e^-- (CERES-Experiment, [3]) oder $\mu^+\mu^-$-Paare (HELIOS-3-Experiment, [4]) aus einem gemeinsamen Vertex. Die Entstehung eines Quark-Gluon-Plasmas würde sich in einem Anstieg der Dileptonenrate im Bereich hoher invarianter Massen oberhalb etwa 1 GeV bemerkbar machen, wogegen die Dileptonenpaare mit niedrigen invarianten Massen unter 1 GeV aus der hadronischen Phase stammen, und zwar vor allem aus Dalitz-Zerfällen von π^0-, η- und ω-Mesonen sowie aus der Annihilation von π^+ und π^--Mesonen. Während die Dalitz-Zerfälle mit zunehmender invarianter Masse des Dileptonenpaares schnell abnehmen, hat der elektromagnetische Formfaktor des Pions, der für die $\pi^+\pi^-$-Annihilation entscheidend ist, ein Maximum bei etwa 770 MeV, so daß derartige Prozesse vor allem zu invarianten Massen zwischen 500 und 1000 MeV beitragen sollten. Nach dem CERES-Experiment wurden die Beiträge dieser bekannten Dileptonenquellen einfach addiert („Cocktail"), und es stellte sich heraus, daß zwar die in p+Au-Stößen gemessenen Dileptonenspektren gut beschrieben werden konnten, nicht jedoch die Spektren der S+Au-Experimente [3]. Insbesondere

für invariante Massen zwischen 300 und 600 MeV sagte dieses Modell für S+Au viel weniger Dileptonen voraus, als gemessen wurden, während es die Dileptonenrate im Bereich um 770 MeV überschätzte.

Im Rahmen des Vektordominanzmodells (VDM) werden die elektromagnetischen Formfaktoren der Hadronen dadurch erklärt, daß Photonen nur über die Vektormesonen ρ, ω und ϕ an die Hadronen koppeln. So entsteht nach dem VDM bei der $\pi^+\pi^-$-Annihilation zunächst ein ρ-Meson, dieses wandelt sich in ein Photon um, und das zerfällt schließlich in ein Dileptonenpaar. Das Maximum und die Breite des Pion-Formfaktors entsprechen in diesem Modell der Masse und der Breite des ρ-Mesons. Nimmt man dieses Modell ernst, so sollte sich eine Änderung der Masse oder der Breite des ρ-Mesons entsprechend auf das Dileptonenspektrum auswirken. Beispielsweise sollte unter der Annahme, daß die im CERES-Experiment erreichten hohen Temperaturen bereits in der Nähe des kritischen Punktes für den chiralen Phasenübergang liegen, nach dem Brown-Rho-Scaling die ρ-Masse abnehmen. Das hätte eine Verschiebung des Dileptonenspektrums zu niedrigeren invarianten Massen zur Folge, die Überhöhung bei der Vakuum-ρ-Masse nähme ab und das Minimum zwischen 300 und 600 MeV würde aufgefüllt werden. Derartige Szenarien sind durchgerechnet worden und haben eine recht gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten ergeben (Li et al. [5], Cassing et al. [6]). Eine andere, „konventionellere" Erklärungsmöglichkeit besteht darin, daß sich die Eigenschaften des ρ-Mesons, insbesondere die Breite, in Materie durch die Wechselwirkung mit den umgebenden Teilchen ändern. Solche Modelle haben bereits eine fast ebenso gute Beschreibung des gemessenen Dileptonenspektrums ermöglicht wie die Modelle, denen das Brown-Rho-Scaling zugrunde liegt (Rapp et al. [7, 8]).

Aus den oben dargelegten Gründen ist es interessant, die Eigenschaften des ρ-Mesons in Kernmaterie allein unter Einbeziehung konventioneller und bewährter Hadron-Wechselwirkungen zu untersuchen. Konkret heißt das, daß man im ρ-Propagator eine Selbstenergie einführen muß, die die Wechselwirkung des ρ-Mesons mit den anderen Hadronen beschreibt. Dabei sind zwei verschiedenartige Beiträge wichtig: Erstens mischt das ρ-Meson in Materie mit Resonanz-Loch-Anregungen, die die Quantenzahlen des ρ-Mesons tragen. Die Beiträge dieser sogenannten „Rhosobars" wachsen linear mit der Dichte der Kernmaterie und quadratisch mit dem Dreier-Impuls $\vec{q}$ des ρ-Mesons, sie verschwinden also im Vakuum und bei $\vec{q} = 0$. Sie wurden bereits in mehreren Arbeiten eingehend untersucht (Friman und Pirner [9], Rapp et al. [8], Peters et al. [10]). Der zweite Beitrag ist bereits im Vakuum und auch bei $\vec{q} = 0$ wichtig. Er beschreibt die Mischung des ρ-Mesons mit $\pi^+\pi^-$-Zuständen und ist nötig, um die Zerfallsbreite des ρ-Mesons im Vakuum von etwa 150 MeV zu erklären. Da sich, wie seit langem bekannt ist, die Eigenschaften der Pionen in Kernmaterie durch die Kopplung an Teilchen-Loch- und Delta-Loch-Anregungen stark ändern [11], bewirkt eine Berechnung dieses Beitrags in Kernmaterie ebenfalls eine Änderung der Eigenschaften des ρ-Mesons. Es ist gezeigt worden, daß es nicht nur aus Gründen der „theoretischen Ästhetik" (Herrmann [12]), sondern auch für die Ergebnisse der Rechnungen sehr wichtig ist, dabei die Eichinvarianz nicht zu verletzen, was zur Folge hat, daß eine Vielzahl von Vertexkorrekturen berücksichtigt werden muß (Herrmann [12], Chanfray und Schuck [13], Korpa et al. [14, 15], ...). Wegen dieser Schwierigkeiten ist der $\pi\pi$-Beitrag zur ρ-Selbstenergie bisher nur für $\vec{q} = 0$ berechnet worden. Das Hauptziel dieser Arbeit war es, unter Berücksichtigung der Eichinvarianz diesen Beitrag auch bei endli-

chem Dreier-Impuls zu berechnen.
Im ersten Kapitel dieser Arbeit stellen wir, weitgehend der Arbeit von Herrmann [12] folgend, ein Modell für das ρ-Meson im Vakuum vor. Dazu berechnen wir den $\pi\pi$-Beitrag zur ρ-Selbstenergie, der wie gesagt im Vakuum nicht verschwindet. Das zweite Kapitel befaßt sich mit den Eigenschaften des Pions in Kernmaterie, wobei in nichtrelativistischer Näherung Delta-Loch- und Teilchen-Loch-Anregungen berücksichtigt werden. Im dritten Kapitel berechnen wir die zur Erfüllung der Eichinvarianz benötigten Vertexkorrekturen ebenfalls in nichtrelativistischer Näherung. Damit können wir im vierten Kapitel den $\pi\pi$-Beitrag zur ρ-Selbstenergie im Medium berechnen, wobei die Eichinvarianz auch bei endlichen ρ-Impulsen $\vec{q}$ gewährleistet ist. Als Anwendungen diskutieren wir im fünften Kapitel neben den Dileptonenspektren auch den Photoabsorptions-Wirkungsquerschnitt von Kernen.
Wenn nichts Gegenteiliges erwähnt wird, halten wir uns an die in den Büchern von Bjorken und Drell [16] angegebenen Konventionen. Eigenschaften wie Massen und Zerfallsbreiten der verschiedenen Teilchen entnehmen wir Ref. [17], sofern keine andere Quelle angegeben ist.

Kapitel 1

Das ρ-Meson im Vakuum

In diesem Kapitel geht es um ein Modell für das neutrale ρ-Meson im Vakuum, da dieses im Vektordominanzmodell zur Berechnung der elektromagnetischen Formfaktoren der Hadronen benötigt wird. Die drei ρ-Mesonen (ρ^+, ρ^- und ρ^0) haben wegen ihrer kurzen Lebensdauer eine Breite $\Gamma_\rho = 150$ MeV. Sie zerfallen zu fast 100% in zwei Pionen. Für ein Modell, das über eine phänomenologisch eingeführte Breite hinausgeht, ist also die Berücksichtigung der π-ρ-Wechselwirkung unerläßlich.

1.1 Lagrangedichte für ρ-Mesonen und Pionen

Da die drei Pionen (π^+, π^- und π^0) wie die ρ-Mesonen Isospin 1 haben, kann man sowohl die Pionen als auch die ρ-Mesonen durch dreikomponentige Vektoren im Isospinraum beschreiben. Man hat also für die Pionen (Spin 0) drei skalare reelle Felder ϕ_1, ϕ_2 und ϕ_3, die zu $\vec{\phi}$ zusammengefaßt werden. Da es sich bei den ρ-Mesonen um Vektorteilchen handelt (Spin 1), werden sie durch drei Vektorfelder ρ_1^μ, ρ_2^μ und ρ_3^μ beschrieben, die zu $\vec{\rho}^\mu$ zusammengefaßt werden. Die dritte Komponente des Isospinoperators T_3 soll eine Drehung um die 3-Achse im Isopinraum erzeugen und sieht deshalb in der hier verwendeten Darstellung mit dreikomponentigen Vektoren folgendermaßen aus:

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{d. h.} \quad (T_3)_{ab} = -i\varepsilon_{3ab}. \tag{1.1}$$

Die verschiedenen Ladungszustände (Eigenzustände zu T_3) der Teilchen erhält man aus den Eigenvektoren von T_3 zu den Eigenwerten $+1$, -1 und 0:

$$\vec{e}(+1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}(-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Wie man sieht, wird das ungeladene Pion bzw. ρ-Meson allein durch die dritte Komponente ϕ_3 bzw. ρ_3^μ beschrieben. Da wir in dieser Arbeit nur das neutrale ρ-Meson benötigen, berücksichtigen wir im folgenden nur die dritte Komponente des $\vec{\rho}$-Feldes und schreiben kurz ρ statt ρ_3.

Die freie Lagrangedichte für das skalare isovektorielle Pionfeld $\vec{\phi}$ und das neutrale Vektorfeld ρ^μ lautet [16]

$$\mathcal{L}_\pi + \mathcal{L}_\rho = \frac{1}{2}\partial_\mu\vec{\phi}\cdot\partial^\mu\vec{\phi} - \frac{1}{2}m_\pi^2\vec{\phi}\cdot\vec{\phi} - \frac{1}{4}\rho_{\mu\nu}\rho^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(m_\rho^{(0)})^2\rho_\mu\rho^\mu. \tag{1.3}$$

Hierbei ist $\rho_{\mu\nu}$ der Feldstärketensor des ρ-Feldes

$$\rho_{\mu\nu} = \partial_\mu\rho_\nu - \partial_\nu\rho_\mu, \tag{1.4}$$

und $m_\rho^{(0)}$ die nackte ρ-Masse, die sich, wie wir bald sehen werden, von der physikalischen Masse unterscheidet. Was noch fehlt, ist die π-ρ-Wechselwirkung. 1960 schlug Sakurai vor, auf der Isospinerhaltung in der starken Wechselwirkung eine Eichtheorie aufzubauen, deren Eichbosonen die Vektormesonen sein sollten [18]. Da wir uns auf das neutrale ρ-Meson beschränken, reduziert sich die „Eichgruppe" in unserem Fall auf die von T_3 erzeugten Drehungen um die 3-Achse des Isospinraums. Die Lagrangedichte soll also invariant unter Eichtransformationen der Form

$$\begin{aligned}\vec{\phi}(x) &\rightarrow e^{ig\chi(x)T_3}\vec{\phi}(x),\\ \rho_\mu(x) &\rightarrow \rho_\mu(x) - \partial_\mu\chi(x)\end{aligned}$$

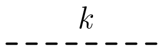
sein. Außer für den Massenterm des ρ-Mesons, den es in einer „echten" Eichtheorie gar nicht geben dürfte, erreicht man dies, wenn man in der Lagrangedichte $\mathcal{L}_\pi$ alle Ableitungen des Pionfeldes folgendermaßen ersetzt:

$$\partial_\mu\vec{\phi} \longrightarrow (\partial_\mu + ig\rho_\mu T_3)\vec{\phi}. \tag{1.5}$$

g ist die π-ρ-Kopplungskonstante. Durch diese minimale Substitution erhält man folgende Wechselwirkungs-Lagrangedichte:

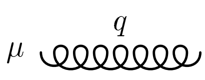
$$\mathcal{L}_{\pi\rho} = \frac{1}{2}ig\rho_\mu(T_3\vec{\phi}\cdot\partial^\mu\vec{\phi} + \partial^\mu\vec{\phi}\cdot T_3\vec{\phi}) - \frac{1}{2}g^2\rho_\mu\rho^\mu T_3\vec{\phi}\cdot T_3\vec{\phi}. \tag{1.6}$$

Die resultierenden Feynman-Regeln sind:
Pion-Propagator:



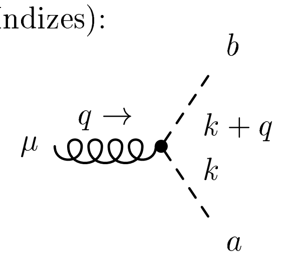
$$= iG_\pi(k) = i\frac{1}{k^2 - m_\pi^2 + i\varepsilon}, \tag{1.7}$$

(nackter) ρ-Propagator:

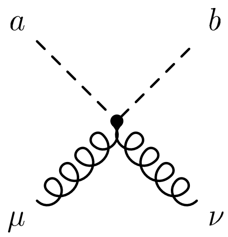


$$\nu = i(G_\rho^{(0)})^{\mu\nu}(q) = i\frac{-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{(m_\rho^{(0)})^2}}{q^2 - (m_\rho^0)^2 + i\varepsilon}, \tag{1.8}$$

Vertizes (a, b: Isospin-Indizes):



$$= g\varepsilon_{3ab}(2k+q)_\mu, \tag{1.9}$$



$$= 2ig^2(\delta_{ab} - \delta_{3a}\delta_{3b})g_{\mu\nu}. \tag{1.10}$$

1.2 Das Vektordominanzmodell

Der elektromagnetische Formfaktor $F_\pi(q^2)$ des Pions für zeitartige Photonimpulse ($q^2 > 0$) kann über den Wirkungsquerschnitt für den Prozeß $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$ gemessen werden (siehe Abb. 1.1 links). Man beobachtet ein Maximum für $q^2 \approx m_\rho^2$, und die Breite des Maximums entspricht etwa der Breite Γ_ρ des ρ-Mesons. Eine einfache Erklärung hierfür bietet das Vektordominanzmodell (VDM) von Sakurai (siehe z. B. Bhaduri [19]). Nach diesem Modell wandelt sich das Photon zunächst in ein virtuelles ρ^0-Meson um, welches anschließend in π^+ und π^- zerfällt (siehe Abb. 1.1 rechts). Die dicke ρ-Linie in Abb. 1.1 bedeutet, daß hier ein physikalisches ρ-Meson mit der gemessenen Masse und Breite gemeint ist, und nicht ein nacktes ρ-Meson wie in Gl. (1.8).
Die allgemeine Aussage des VDM ist, daß ein Photon nie direkt an ein Hadron koppelt, sondern sich stets zuvor in ein neutrales Vektormeson (ρ-, ω- oder ϕ-Meson) umwandelt. Dies läßt sich mit Hilfe der sog. Current-Field-Identity ausdrücken, wonach der isovektorielle Anteil des elektromagnetischen Hadronenstrom-Operators proportional zum Feldoperator des neutralen ρ-Mesons ist, d. h.

$$J^\mu_{isovektor} = \frac{(m_\rho^{(0)})^2}{g}\rho^\mu. \tag{1.11}$$

Der isoskalare Anteil wird entsprechend von den ω- und ϕ-Mesonen gebildet. Im Gegensatz zur Ladung der Baryonen ist die Pionenladung aber proportional zu T_3, d. h. der isoskalare Anteil des Pionenstroms ist null. Die Current-Field-Identity erhält man dadurch, daß man

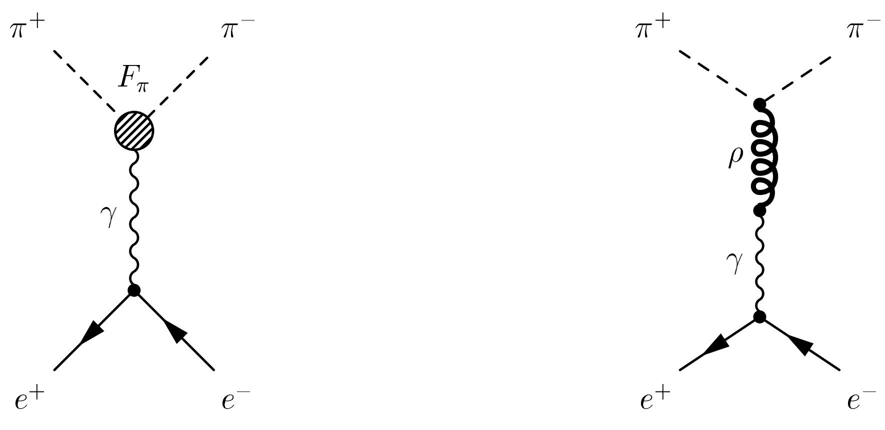


Abbildung 1.1: *Links: Experimentelle Bestimmung des elektromagnetischen Pion-Formfaktors im zeitartigen Bereich, rechts: Beschreibung im Vektordominanzmodell*

der Lagrangedichte einen Wechselwirkungsterm

$$\mathcal{L}_{\gamma\rho} = eA_\mu J^\mu = \frac{e}{g}(m_\rho^{(0)})^2 A_\mu \rho^\mu, \tag{1.12}$$

jedoch keine direkte Photon-Hadron-Wechselwirkung hinzufügt. Es gibt allerdings auch eine verbesserte Version des VDM von Kroll, Lee und Zumino [20], die sowohl eine Photon-ρ-Kopplung als auch eine direkte Photon-Hadron-Wechselwirkung enthält, aber trotzdem auf die Current-Field-Identity führt.
Dem $\rho\gamma$-Vertex in Abb. 1.1 entspricht also ein Faktor

$$= -i\frac{e}{g}(m_\rho^{(0)})^2 g_{\mu\nu} \tag{1.13}$$

Der volle ρ-Propagator $G_\rho^{\mu\nu}(q)$, für den die dicke ρ-Linie in Abb. 1.1 steht, hat wegen der Lorentzinvarianz die Form

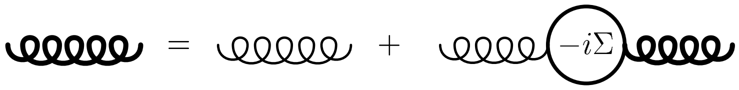
$$G_\rho^{\mu\nu}(q) = -g^{\mu\nu} G_\rho(q^2) + q^\mu q^\nu\text{-Terme} \tag{1.14}$$

Die $q^\mu q^\nu$-Terme liefern aber zum rechten Diagramm in Abb. 1.1 wegen der Stromerhaltung am $\rho\pi\pi$-Vertex keinen Beitrag. Durch Vergleich der beiden Diagramme in Abb. 1.1 erhält man damit für den Pion-Formfaktor

$$|F_\pi(q^2)|^2 = (m_\rho^{(0)})^4 |G_\rho(q^2)|^2. \tag{1.15}$$

1.3 ρ-Selbstenergie und ρ-Propagator im Vakuum

Den vollen ρ-Propagator im Vakuum erhält man durch Aufsummieren der ρ-Selbstenergie (Dyson-Gleichung):



$$iG_\rho^{\mu\nu} \quad = \quad i(G_\rho^{(0)})^{\mu\nu} \quad + \quad i(G_\rho^{(0)})^{\mu\lambda}(-i\Sigma_{\lambda\kappa}) iG_\rho^{\kappa\nu} \tag{1.16}$$

Die Selbstenergie Σ bewirkt eine Verschiebung der ρ-Masse von $m_\rho^{(0)}$ auf den physikalischen Wert m_ρ und die Verbreiterung des ρ-Mesons.
Um die Dyson-Gleichung nach dem vollen Propagator aufzulösen, ist es nötig, wenigstens die Tensorstruktur von $\Sigma_{\mu\nu}$ und $G_\rho^{\mu\nu}$ zu kennen. Da das ρ-Meson im Vektordominanzmodell (VDM) direkt an das Photon gekoppelt wird, muß die Selbstenergie bestimmten Forderungen genügen. Eine davon ist die Eichinvarianz. Da wir die π-ρ-Wechselwirkung analog zur üblichen γ-π-Wechselwirkung durch die minimale Substitution (1.5) konstruiert haben, koppelt das ρ-Meson an einen erhaltenen Strom. Im VDM muß das auch so sein, weil das Photon, das sich in ein ρ-Meson umwandeln kann, nur an einen erhaltenen Strom koppeln darf. Das führt dazu, daß die Selbstenergie vierdimensional transversal ist (s. Herrmann [12]):

$$q^\mu \Sigma_{\mu\nu} = q^\nu \Sigma_{\mu\nu} = 0. \tag{1.17}$$

Zusammen mit der Lorentzinvarianz folgt hieraus, daß $\Sigma_{\mu\nu}$ die Form

$$\Sigma_{\mu\nu}(q) = \Big(- g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \Big) \Sigma(q^2) \tag{1.18}$$

haben muß. Um die Tensorstruktur des Propagators zu erhalten, ist es nützlich, den nackten ρ-Propagator (1.8) in zwei Anteile zu zerlegen:

$$(G_\rho^{(0)})^{\mu\nu}(q) = \frac{-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{(m_\rho^{(0)})^2}}{q^2 - (m_\rho^{(0)})^2 + i\varepsilon} = \frac{-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}}{q^2 - (m_\rho^{(0)})^2 + i\varepsilon} + \frac{q^\mu q^\nu}{(m_\rho^{(0)})^2 q^2}. \tag{1.19}$$

Der zweite Anteil ($\propto q^\mu q^\nu$) ergibt wegen Gl. (1.17) bei der Multiplikation mit $\Sigma_{\mu\nu}$ null. Der erste Term ändert seine Tensorstruktur, die mit der von $\Sigma_{\mu\nu}$ übereinstimmt, dagegen nicht, wenn man ihn mit $\Sigma_{\mu\nu}$ multipliziert, da

$$\Big(- g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \Big) \Big(- g_{\nu\lambda} + \frac{q_\nu q_\lambda}{q^2} \Big) = - \Big(- g^\mu_\lambda + \frac{q^\mu q_\lambda}{q^2} \Big).$$

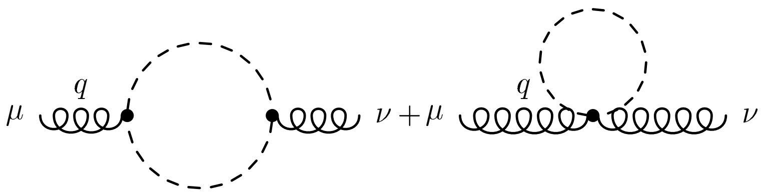
Folglich hat der volle ρ-Propagator die Form

$$G_\rho^{\mu\nu}(q) = G_\rho(q^2) \Big(- g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \Big) + \frac{q^\mu q^\nu}{(m_\rho^0)^2 q^2}. \tag{1.20}$$

Schließlich erhält man aus Gl. (1.16) hiermit und mit Gl. (1.18)

$$G_\rho(q^2) = \frac{1}{q^2 - (m_\rho^{(0)})^2 - \Sigma(q^2)}. \tag{1.21}$$

Nachdem wir die Dyson-Gleichung formal aufgelöst haben, wollen wir nun die darin auftretende Selbstenergie Σ berechnen. In niedrigster Ordnung in der Kopplungskonstanten g gibt es zwei Beiträge zu $\Sigma_{\mu\nu}$ (beide $\propto g^2$):

$-i\Sigma_{\mu\nu}(q) =$  (1.22)

Wir berechnen nun diese Diagramme mit den Feynman-Regeln (1.7) bis (1.10). Dabei ist zu beachten, daß beide Diagramme einen Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$ erhalten, da jedem Vertex ein Term in der Wechselwirkungs-Lagrangedichte entspricht, der den Feldoperator $\vec{\phi}$ quadratisch enthält. Hätten wir anstelle des Isospinformalismus komplexe Felder ϕ zur Beschreibung der geladenen Pionen verwendet (wie z. B. Herrmann [12]), gäbe es diesen Faktor nicht, da die Lagrangedichte dann nur Produkte der unterschiedlichen Feldoperatoren ϕ und $\phi^\dagger$ enthielte. Beide Formalismen ergeben aber das gleiche Ergebnis, da sich der Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$ genau gegen den Faktor 2 wegkürzt, der im Isospinformalismus von der Summe über die Isospinindizes der Pionen im Loop kommt:

$$
\begin{aligned}
-i\Sigma_{\mu\nu}(q) &= \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, g\varepsilon_{3ab}(2k+q)_\mu iG_\pi(k+q) g\varepsilon_{3ba}(2k+q)_\nu iG_\pi(k) \\
&\quad +\frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, 2ig^2(\delta_{aa}-\delta_{3a}\delta_{3a})g_{\mu\nu} iG_\pi(k) \\
&= g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(2k+q)_\mu(2k+q)_\nu}{((k+q)^2-m_\pi^2+i\varepsilon)(k^2-m_\pi^2+i\varepsilon)} \\
&\quad -2g^2 g_{\mu\nu}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m_\pi^2+i\varepsilon}.
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

Wie bereits erwähnt, muß die Selbstenergie bestimmten Forderungen genügen, von denen eine die vierdimensionale Transversalität (1.17) ist. Eine weitere Forderung kommt daher, daß der elektromagnetische Formfaktor des Pions am Photopunkt ($q^2 = 0$) gleich 1 ist, weil ein reelles Photon nur die Ladung des Pions und nicht seine Ausdehnung „sieht". Nach Gl. (1.15) bedeutet das

$$
G_\rho(q^2=0) = -\frac{1}{(m_\rho^{(0)})^2}. \tag{1.24}
$$

Daraus folgt wegen Gl. (1.21)

$$
\Sigma(q^2=0) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Sigma_{\mu\nu}(q^2=0) = 0. \tag{1.25}
$$

Der Ausdruck (1.23) für die Selbstenergie erfüllt formal beide Forderungen (1.17) und (1.25) (siehe [12]), aber die Integrale divergieren. Um sie endlich zu machen, wird z. B. von Chanfray und Schuck [13] ein Formfaktor am $\rho\pi\pi$-Vertex eingeführt, der aber dazu führt, daß die Lorentzinvarianz und die Forderungen (1.17) und (1.25) nicht mehr erfüllt sind. Um dies zu korrigieren, müssen Chanfray und Schuck den nicht-transversalen und nicht-lorentzinvarianten Anteil $\Sigma_{\mu\nu}(q=0)$ subtrahieren. Wir werden hier wie [12] ein von vorneherein lorentzinvariantes Regularisierungsverfahren verwenden, nämlich das Regularisierungsverfahren von Pauli und Villars [16]. Dadurch bleibt nicht nur die Lorentzinvarianz erhalten, sondern auch die Forderungen (1.17) und (1.25) bleiben erfüllt. Die Regularisierung besteht darin, daß man zur Selbstenergie (1.23) gleichartige Terme addiert, in denen man aber andere (große) Massen M_i anstelle der Pionmasse m_π einsetzt,

$$
\Sigma_{\mu\nu}(q;m_\pi) \longrightarrow \Sigma_{\mu\nu}(q;m_\pi) + \sum_{i=1}^{2} c_i \Sigma_{\mu\nu}(q;M_i), \tag{1.26}
$$

wobei die c_i und M_i so bestimmt werden, daß sich die Integrale an den oberen Grenzen wegheben und nur die Beiträge der unteren Grenzen übrig bleiben. Möchte man die beiden quadratisch divergenten Integrale getrennt regularisieren, so benötigt man zwei Regulatoren mit

$$
1 + c_1 + c_2 = 0, \quad m_\pi^2 + c_1 M_1^2 + c_2 M_2^2 = 0. \tag{1.27}
$$

Wir treffen hier die spezielle Wahl

$$
\begin{aligned}
c_1 &= -2, \qquad & M_1 &= \sqrt{m_\pi^2+\Lambda^2}, \\
c_2 &= 1, \qquad & M_2 &= \sqrt{m_\pi^2+2\Lambda^2}.
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

Hierbei hat Λ die Bedeutung eines Abschneideparameters. Es sei noch angemerkt, daß sich, wenn man beide Integrale gleichzeitig regularisiert, die quadratischen Divergenzen beider Integrale wegheben und nur die logarithmischen übrig bleiben, so daß man dann mit nur einem Regulator auskommt (vgl. [12]). Die Ergebnisse beider Regularisierungsverfahren unterscheiden sich aber praktisch erst oberhalb der zweifachen Regulatormasse, d. h. außerhalb des Gültigkeitsbereichs dieser Theorie.
Kontrahiert man Gl. (1.18) mit $g^{\mu\nu}$, so sieht man

$$\Sigma(q^2) = -\frac{1}{3} g^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}. \tag{1.29}$$

Wir wenden dies auf Gl. (1.23) an und berechnen die Integrale mit der oben beschriebenen Regularisierung.
Unterhalb der $\rho \to \pi\pi$-Schwelle ist die Selbstenergie reell, und als Endergebnis erhalten wir [12]:

$$\Sigma(q^2 < 4m_\pi^2) = -\frac{g^2}{24\pi^2} q^2 \left(-\ln m_\pi + \left(\frac{4m_\pi^2}{q^2} - 1 \right)^{3/2} \arctan\left(\left(\frac{4m_\pi^2}{q^2} - 1 \right)^{-1/2} \right) \right) + \text{Reg.} \tag{1.30}$$

„+ Reg." bezieht sich hierbei auf die Vorschrift (1.26). Dadurch erhält auch der Term $\ln m_\pi$ einen Sinn, er wird wegen der Wahl (1.28) der Regulatoren zu $\ln\left(\frac{m_\pi M_2}{M_1^2}\right)$.
Oberhalb der $\rho \to \pi\pi$-Schwelle bekommt Σ einen Imaginärteil, der für die Breite des ρ-Mesons verantwortlich ist. Das Ergebnis in diesem Bereich lautet

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\Sigma(q^2 > 4m_\pi^2) &= -\frac{g^2}{24\pi^2} q^2 \left(-\ln m_\pi - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4m_\pi^2}{q^2}\right)^{3/2} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{q^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{q^2}}} \right) \right) + \text{Reg.}, \\ \operatorname{Im}\Sigma(q^2 > 4m_\pi^2) &= -\frac{g^2}{48\pi} q^2 \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{q^2}\right)^{3/2} + \text{Reg.} \end{aligned} \tag{1.31}$$

1.4 Anpassung der Parameter

In unserem Modell für das ρ-Meson im Vakuum gibt es noch drei unbestimmte Größen, nämlich den Abschneideparameter Λ aus Gl. (1.28), die $\pi\rho$-Kopplungskonstante g und die nackte ρ-Masse $m_\rho^{(0)}$.
Wie Herrmann [12] setzen wir den Abschneidewert auf

$$\Lambda = 1000 \text{ MeV}. \tag{1.32}$$

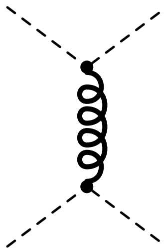
Damit berücksichtigen wir die endliche Ausdehnung des ρ-Mesons, denn unsere Regularisierung hat einen ähnlichen Effekt wie das Abschneiden des Integrals mit einem Formfaktor. Unser Λ hat also etwa die Bedeutung des Parameters q_d im $\rho\pi\pi$-Formfaktor (4.9) von Chanfray und Schuck [13], der in derselben Größenordnung liegt. Wir können Λ nicht an experimentelle Daten anpassen, da alle Ergebnisse im Gültigkeitsbereich der Theorie

(d. h. für $q^2 < 4M_1^2 \approx 4\Lambda^2$) praktisch nicht von Λ abhängen, solange $m_\rho^{(0)}$ und g so gewählt werden, daß sich die richtige physikalische Masse m_ρ und Breite Γ_ρ ergibt.
g und $m_\rho^{(0)}$ bestimmen wir, indem wir den Pion-Formfaktor nach Gl. (1.15) an die experimentellen Daten anpassen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} g &= 5.9, \\ m_\rho^{(0)} &= 853 \text{ MeV}. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Das Ergebnis der Anpassung ist in Abb. 1.2 (links) zu sehen.
Eine weitere Möglichkeit, unser Modell mit experimentellen Werten zu vergleichen, bieten die $\pi\pi$-Streuphasen im Kanal mit den Quantenzahlen des ρ-Mesons, d. h. Isospin $I = 1$, Drehimpuls $J = 1$. Die Streuamplitude der $\pi\pi$-Streuung ist in diesem Kanal vor allem durch die ρ-Resonanz bestimmt:

$$f_1^1 \propto$$



$$\propto G_\rho(q^2) \propto \sin\delta_1^1 e^{i\delta_1^1}. \tag{1.34}$$

Dividiert man den Imaginärteil durch den Realteil, so ergibt sich

$$\tan\delta_1^1 = \frac{\operatorname{Im} G_\rho(q^2)}{\operatorname{Re} G_\rho(q^2)}. \tag{1.35}$$

Mit den oben angegebenen Parametern für g und $m_\rho^{(0)}$ erhält man eine passable Beschreibung der Streuphasen, wie in Abb. 1.2 (rechts) zu sehen ist. Mit etwas größeren Werten für g und $m_\rho^{(0)}$ könnten die Streuphasen in bessere Übereinstimmung mit den experimentellen Daten gebracht werden, aber dann wäre der Pion-Formfaktor viel zu flach.

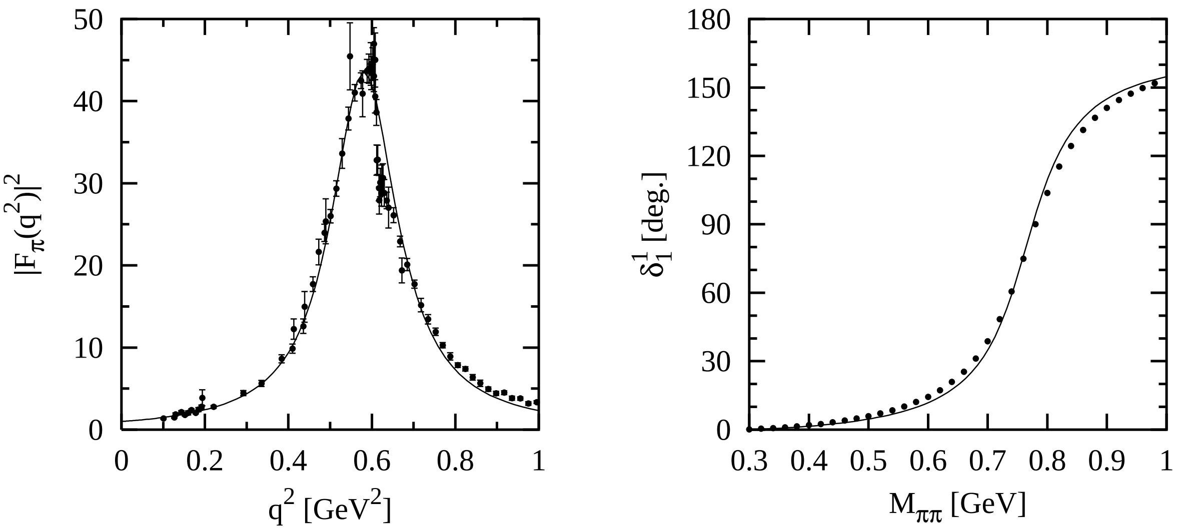


Abbildung 1.2: *Links: Elektromagnetischer Pion-Formfaktor* $|F_\pi(q^2)|^2$ *als Funktion von* q^2 *in* GeV^2*. Die Daten stammen aus Ref. [21] und [22]. Rechts:* $\pi\pi$*-Streuphase* δ_1^1 *in Grad als Funktion der invarianten Masse* $M_{\pi\pi} = \sqrt{q^2}$ *in* GeV*. Die Daten stammen aus Ref. [23].*

Kapitel 2

Das Pion in Kernmaterie

2.1 Teilchen-Loch-Anregungen

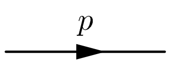
Das Pion erhält in Kernmaterie eine Selbstenergie, die vor allem durch Teilchen-Loch- und Delta-Loch-Anregungen verursacht wird. Das bedeutet, daß das Pion beim Zusammenstoß mit einem Nukleon unterhalb der Fermikante absorbiert wird, und sich das Nukleon nach dem Stoß in einem Zustand oberhalb der Fermikante befindet (Teilchen-Loch-Anregung), oder beim Stoß eine Nukleonresonanz angeregt wird, wobei die $\Delta(1232)$-Resonanz besonders wichtig ist (Delta-Loch-Anregung).
Um die Teilchen-Loch-Anregungen zu berechnen, gehen wir ursprünglich von der freien Lagrangedichte des Nukleons [16]

$$\mathcal{L}_N = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m_N)\psi \tag{2.1}$$

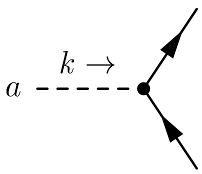
und der Pion-Nukleon-Wechselwirkung [24]

$$\mathcal{L}_{\pi N} = \frac{f_N}{m_\pi}\,\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\vec{\tau}\psi \cdot \partial_\mu\vec{\phi} \tag{2.2}$$

aus, aus denen in nichtrelativistischer Näherung folgende Feynmanregeln folgen (siehe Anhänge A und B):



$$= \; iG_N(p) = i\Big(\frac{\Theta(|\vec{p}| - p_F)}{p^0 - \omega_N(\vec{p}) + i\varepsilon} + \frac{\Theta(p_F - |\vec{p}|)}{p^0 - \omega_N(\vec{p}) - i\varepsilon}\Big). \tag{2.3}$$



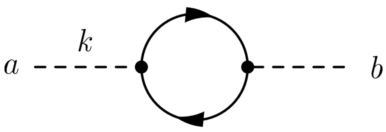
$$= \; \frac{f_N}{m_\pi}\,\vec{k} \cdot \vec{\sigma}\tau_a. \tag{2.4}$$

p_F im Propagator ist dabei der Fermiimpuls, der von der Dichte ϱ der Kernmaterie abhängt, und $\omega_N(\vec{p})$ ist die Energie eines Nukleons mit Impuls $\vec{p}$,

$$\omega_N(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m_N^2}. \tag{2.5}$$

Trotz unserer nichtrelativistischen Näherungen behalten wir also die relativistische Kinematik bei. Wegen der nichtrelativistischen Näherungen sind der Propagator und der Vertex im Spinraum nicht mehr 4×4-, sondern nur noch 2×2-Matrizen.
Den Teilchen-Loch-Anregungen entspricht folgendes Pion-Selbstenergiediagramm:

$$-i(\Sigma_{Nh})_{ab}(k) \quad = $$



$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (-)\mathrm{Sp}\Big(\Big(\frac{f_N}{m_\pi}\,\vec{k}\cdot\vec{\sigma}\tau_a\Big) iG_N(p)\Big(\frac{f_N}{m_\pi}\,(-\vec{k})\cdot\vec{\sigma}\tau_b\Big) iG_N(p+k)\Big) \\
&= -i\vec{k}^2\delta_{ab}\Pi_{Nh}(k), \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

mit der Lindhardfunktion

$$\Pi_{Nh}(k) = -i\,4\Big(\frac{f_N}{m_\pi}\Big)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, G_N(p)G_N(p+k). \qquad (2.7)$$

Beim Ausmultiplizieren der beiden Propagatoren $G_N(p)$ und $G_N(p+k)$ erhält man vier Terme. Führt man die p^0-Integration mit Hilfe des Residuensatzes durch, so sieht man, daß nur die beiden Terme etwas zum Integral beitragen, in denen der eine Propagator ein Loch ($|\vec{p}| < p_F$) und der andere ein Teilchen ($|\vec{p}| > p_F$) beschreibt. Man erhält (siehe Ref. [26], S. 158ff)

$$\begin{aligned}
\Pi_{Nh}(k) \quad = \quad & 4\Big(\frac{f_N}{m_\pi}\Big)^2 \int_{|\vec{p}|<p_F} \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \Theta(|\vec{p}+\vec{k}| - p_F) \\
& \Big(\frac{1}{k^0 - \omega_N(\vec{p}+\vec{k}) + \omega_N(\vec{p}) + i\varepsilon} - \frac{1}{k^0 + \omega_N(\vec{p}+\vec{k}) - \omega_N(\vec{p}) - i\varepsilon}\Big). \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Nun ist es zweckmäßig, Real- und Imaginärteil getrennt zu behandeln. Für den Realteil läßt sich noch die Winkelintegration analytisch ausführen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,\Pi_{Nh}(k) \quad = \quad & 4\Big(\frac{f_N}{m_\pi}\Big)^2 \frac{-1}{(2\pi)^2|\vec{k}|} \int_0^{p_F} dp\; p\Big(2(\omega_+ - \omega_-) \\
& + (\omega_N(p) + k^0)\ln\Big|\frac{\omega_+ - k^0 - \omega_N(p)}{\omega_- - k^0 - \omega_N(p)}\Big| \\
& + (\omega_N(p) - k^0)\ln\Big|\frac{\omega_+ + k^0 - \omega_N(p)}{\omega_- + k^0 - \omega_N(p)}\Big|\Big), \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung definiert wurde

$$\omega_\pm = \sqrt{(p \pm |\vec{k}|)^2 + m_N^2}.$$

Das verbleibende Integral wird numerisch berechnet. Der Imaginärteil läßt sich in geschlossener Form angeben:

$$\operatorname{Im}\Pi_{Nh}(k) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad p_{min} > p_F \quad \text{oder} \quad k^0 > |\vec{k}|, \\ 4\left(\frac{f_N}{m_\pi}\right)^2 \frac{-1}{8\pi|\vec{k}|}\left(k^0(p_F^2 - p_{min}^2) + \frac{2}{3}\left((p_F^2 + m_N^2)^{3/2} - (p_{min}^2 + m_N^2)^{3/2}\right)\right) & \text{sonst,} \end{cases} \tag{2.10}$$

wobei folgende Abkürzungen definiert wurden:

$$\begin{aligned} p_{min} &= \max\Big(\Theta(\epsilon_F - k^0 - m_N)\sqrt{(\epsilon_F - k^0)^2 - m_N^2}, \quad \Big|d - \frac{|\vec{k}|}{2}\Big|\Big), \\ \epsilon_F &= \sqrt{p_F^2 + m_N^2}, \\ d &= \frac{k^0}{2}\sqrt{1 - \frac{4m_N^2}{k_\mu k^\mu}}. \end{aligned}$$

Die Teilchen-Loch-Selbstenergie hat als Funktion der Energie k^0 einen unterschiedlichen Verlauf, je nachdem, in welchem der beiden Bereiche $|\vec{k}| < 2p_F$ oder $|\vec{k}| > 2p_F$ der Impuls liegt [26], siehe Abb. 2.1. Für die Kopplungskonstante wurde der gebräuchliche Wert

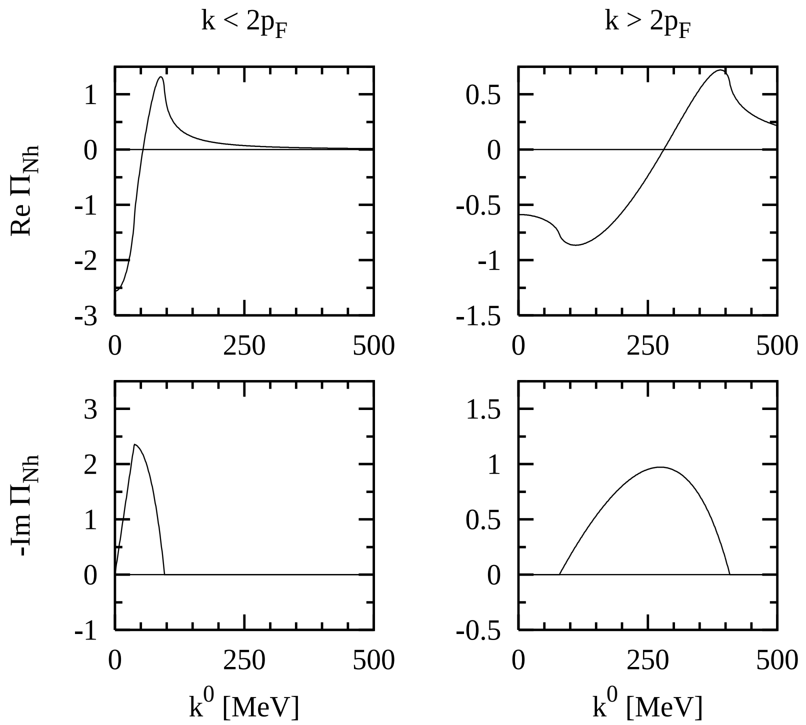


Abbildung 2.1: *Real- und Imaginärteil des Teilchen-Loch-Beitrags zur Pion-Selbstenergie bei einfacher Kernmateriedichte* $\varrho = \varrho_0$ *(*p_F = 268 MeV*); links für* $|\vec{k}|$ = 250 MeV, *rechts für* $|\vec{k}|$ = 750 MeV

$f_N = 1.01$ eingesetzt [7]. Die Punkte, in denen Π_{Nh} nicht differenzierbar ist, liegen auf den Kurven

$$\Omega_{Knick\ 1,2}(\vec{k}) = \left|\sqrt{m_N^2 + (|\vec{k}| \mp p_F)^2} - \epsilon_F\right|. \tag{2.11}$$

Das Maximum des Imaginärteils liegt ungefähr bei der Energie

$$\Omega_{Nh}(\vec{k}) = \omega_N(\vec{k}) - m_N, \tag{2.12}$$

wie im Abschnitt 2.5 näher erläutert wird.

2.2 Delta-Loch-Anregungen

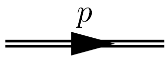
Im letzten Abschnitt berechneten wir den Teilchen-Loch-Beitrag zur Pion-Selbstenergie. Es zeigt sich aber, daß der Beitrag der Delta-Loch-Anregungen der wichtigste ist, so daß manche Autoren (z. B. [12] und [13]) überhaupt nur diesen berücksichtigen. Um die Delta-Loch-Anregungen zu berechnen, gehen wir von der relativistischen freien Delta-Lagrangedichte von Rarita und Schwinger [27]

$$\mathcal{L}_\Delta = -\bar{\psi}_\mu(i\not{\partial} - m_\Delta)\psi^\mu + \frac{i}{3}\bar{\psi}_\mu(\gamma^\mu\partial_\nu + \gamma_\nu\partial^\mu)\psi^\nu - \frac{1}{3}\bar{\psi}_\mu\gamma^\mu(i\not{\partial} + m_\Delta)\gamma_\nu\psi^\nu \tag{2.13}$$

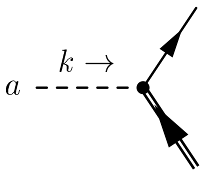
und der $\pi N\Delta$-Wechselwirkung [24]

$$\mathcal{L}_{\pi N\Delta} = -\frac{f_\Delta}{m_\pi}\bar{\psi}\vec{T}^\dagger\psi_\mu \cdot \partial^\mu\vec{\phi} \quad + \quad \text{h. c.} \tag{2.14}$$

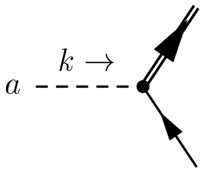
aus („h. c." steht für „hermitesch konjugiert"). Wie beim Nukleon machen wir nichtrelativistische Näherungen (s. Anhang C) und erhalten folgende Feynmanregeln:



$$= \quad iG_\Delta(p) = i\frac{1}{p^0 - \omega_\Delta(\vec{p}) + i\varepsilon}. \tag{2.15}$$

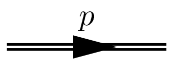


$$= \quad \frac{f_\Delta}{m_\pi}\,\vec{k}\cdot\vec{S}^\dagger T_a^\dagger. \tag{2.16}$$



$$= \quad \frac{f_\Delta}{m_\pi}\,\vec{k}\cdot\vec{S}T_a. \tag{2.17}$$

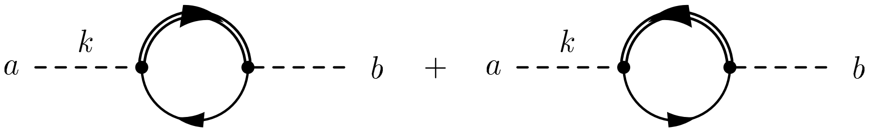
Die Spin- bzw. Isospinübergangsmatrizen $\vec{S}$ bzw. $\vec{T}$ sind in Anhang C definiert (Gl. C.9). Das Delta ist nicht stabil, sondern es zerfällt in Nukleon und Pion und erhält dadurch eine Breite $\Gamma_\Delta \approx 120$ MeV. Wir berücksichtigen diese Breite auf die einfachste denkbare Art, nämlich indem wir im Nenner des Delta-Propagators (2.15) einen konstanten Imaginärteil einführen:



$$= iG_\Delta(p) = i\frac{1}{p^0 - \omega_\Delta(\vec{p}) + \frac{i}{2}\Gamma_\Delta}. \tag{2.18}$$

Wie wir später sehen werden, würde jede realistischere Behandlung der Delta-Breite dazu führen, daß bei der Behandlung des ρ-Mesons in Kernmaterie die Eichinvarianz nur unter größten Schwierigkeiten gewährleistet werden könnte.
Nun berechnen wir den Delta-Loch-Beitrag zur Pion-Selbstenergie, der folgenden Diagrammen entspricht:

$$-i(\Sigma_{\Delta h})_{ab}(k) \;=$$



$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,(-)\mathrm{Sp}\Big(\Big(\frac{f_\Delta}{m_\pi}\vec{k}\cdot\vec{S}T_a\Big)iG_N(p)\Big(\frac{f_\Delta}{m_\pi}(-\vec{k})\cdot\vec{S}^\dagger T_b^\dagger\Big)iG_\Delta(p+k)\Big) \\
&\quad +\Big(k,a\longleftrightarrow -k,b\Big) \\
&= -i\vec{k}^2\delta_{ab}\Pi_{\Delta h}(k),
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

mit

$$\Pi_{\Delta h}(k) = -i\,\frac{16}{9}\Big(\frac{f_\Delta}{m_\pi}\Big)^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,G_N(p)\Big(G_\Delta(p+k)+G_\Delta(p-k)\Big). \tag{2.20}$$

Hierbei wurde die Spurformel

$$\mathrm{Sp}(S_iS_j^\dagger) = \frac{4}{3}\delta_{ij}$$

(und dasselbe mit T statt S) verwendet. Wie bei der Teilchen-Loch-Selbstenergie führen wir zunächst die p^0-Integration aus. Dabei bleiben nur Terme übrig, in denen der Nukleon-Propagator ein Loch beschreibt ($|\vec{p}| < p_F$):

$$
\begin{aligned}
\Pi_{\Delta h}(k) \;=\; & \frac{16}{9}\Big(\frac{f_\Delta}{m_\pi}\Big)^2\int_{|\vec{p}|<p_F}\frac{d^3p}{(2\pi)^3} \\
& \Big(\frac{1}{k^0-\omega_\Delta(\vec{p}+\vec{k})+\omega_N(\vec{p})+\frac{i}{2}\Gamma_\Delta} - \frac{1}{k^0+\omega_\Delta(\vec{p}+\vec{k})-\omega_N(\vec{p})-\frac{i}{2}\Gamma_\Delta}\Big).
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Auch das Ergebnis der Winkelintegration läßt sich noch analytisch angeben:

$$
\begin{aligned}
\Pi_{\Delta h}(k) \;=\; & \frac{16}{9}\Big(\frac{f_\Delta}{m_\pi}\Big)^2\frac{-1}{(2\pi)^2|\vec{k}|}\int_0^{p_F}dp\,p\Big(2(\omega_+-\omega_-) \\
& +(\omega_N(p)+\frac{i}{2}\Gamma_\Delta+k^0)\ln\Big(\frac{\omega_+-k^0-\omega_N(p)}{\omega_--k^0-\omega_N(p)}\Big) \\
& +(\omega_N(p)+\frac{i}{2}\Gamma_\Delta-k^0)\ln\Big(\frac{\omega_++k^0-\omega_N(p)}{\omega_-+k^0-\omega_N(p)}\Big)\Big),
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

mit der Abkürzung

$$\omega_\pm = \sqrt{(p\pm|\vec{k}|)^2+m_\Delta^2} - \frac{i}{2}\Gamma_\Delta.$$

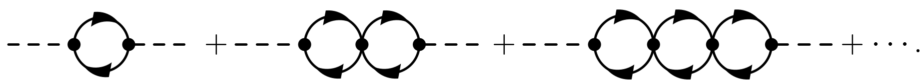
In Abb. 2.2 ist $\Pi_{\Delta h}$ bei einfacher Kernmateriedichte ($\varrho = \varrho_0$) als Funktion von k^0 bei festem $\vec{k}$ aufgetragen. Wie [7] wählen wir als Kopplungskonstante $f_\Delta = 2f_N = 2.02$. Das Maximum des Imaginärteils liegt etwa bei

$$\mathrm{Re}\,\Omega_{\Delta h}(\vec{k}) = \omega_\Delta(\vec{k}) - m_N, \tag{2.23}$$

siehe Abschnitt 2.5. Daß der Imaginärteil für $k^0 \to 0$ nicht verschwindet, ist ein unphysikalischer Effekt, der durch die konstante Delta-Breite verursacht wird.

2.3 Kurzreichweitige Korrelationen

Wenn man zum Berechnen der Pion-Selbstenergie einfach die Teilchen-Loch und Delta-Loch-Beiträge addiert, so erhält man unrealistische Ergebnisse, z. B. die sogenannte Pion-kondensation (s. Migdal [28]). Eine solche Rechnung vernachlässigt nämlich den kurzreichweitigen, stark repulsiven Anteil der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung. Wegen der kurzen Reichweite dieser Wechselwirkung kann sie näherungsweise als punktförmig, d. h. im Impulsraum als konstant angesehen werden. Zu den bisherigen Teilchen-Loch-Graphen müssen also weitere Graphen hinzugenommen werden, die diese Wechselwirkung enthalten, die hier durch 4-Punkt-Vertizes dargestellt wird:


(2.24)

Der 4-Punkt-Vertex muß proportional zu

$$f_{11} + f'_{11}\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 + (g_{11} + g'_{11}\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2)\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \tag{2.25}$$

sein [28], wobei Operatoren mit dem Index 1 auf das linke, und Operatoren mit dem Index 2 auf das rechte Nukleon wirken. Da aber am linken (und rechten) Ende von (2.24) ein Pion an das Nukleon koppelt, und der πNN-Vertex sowohl $\vec{\tau}$ als auch $\vec{\sigma}$ enthält, liefert

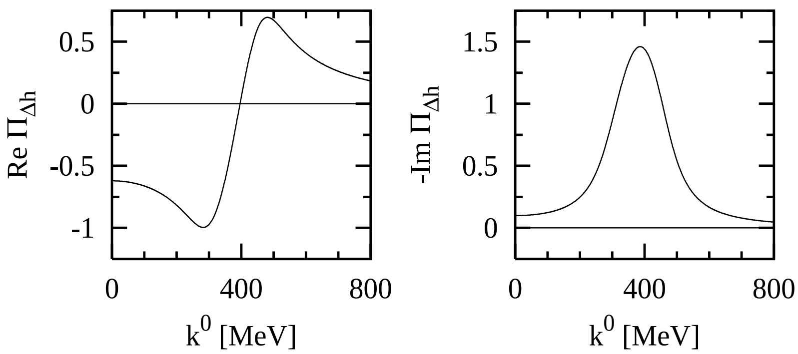
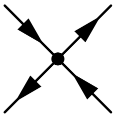
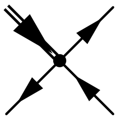


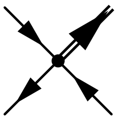
Abbildung 2.2: *Real- und Imaginärteil des Delta-Loch-Beitrags zur Pion-Selbstenergie bei einfacher Kernmateriedichte ($p_F = 268$ MeV) für $|\vec{k}| = 500$ MeV*

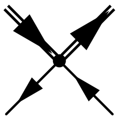
nur der Term $g'_{11}\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$ einen Beitrag, weil die Spur über eine einzelne τ- oder σ-Matrix verschwindet.
Damit der Migdal-Parameter g'_{11} dimensionslos wird, geben wir ihn in Einheiten der πNN-Kopplung $(\frac{f_N}{m_\pi})^2$ an. Die f_{11}, f'_{11} und g_{11}-Terme benötigen wir nicht, so daß gilt:

1  2 $$= -ig'_{11}\Big(\frac{f_N}{m_\pi}\Big)^2 \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2. \quad (2.26)$$

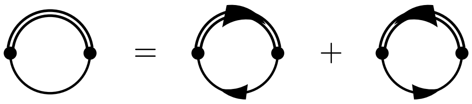
Die ebenfalls wichtige Nukleon-Delta- und Delta-Delta-Wechselwirkung wird nun auf die gleiche Weise parametrisiert:

1  2 $$= -ig'_{12}\frac{f_N}{m_\pi}\frac{f_\Delta}{m_\pi}\vec{S}_1^\dagger \cdot \vec{\sigma}_2 \vec{T}_1^\dagger \cdot \vec{\tau}_2, \quad (2.27)$$

1  2 $$= -ig'_{12}\frac{f_N}{m_\pi}\frac{f_\Delta}{m_\pi}\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{S}_2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{T}_2, \quad (2.28)$$

1  2 $$= -ig'_{22}\Big(\frac{f_\Delta}{m_\pi}\Big)^2 \vec{S}_1^\dagger \cdot \vec{S}_2 \vec{T}_1^\dagger \cdot \vec{T}_2. \quad (2.29)$$

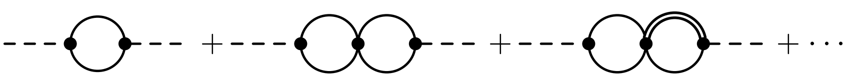
Bevor wir nun alle Diagramme wie in (2.24) aufsummieren, definieren wir zur Abkürzung (auch für die folgenden Kapitel dieser Arbeit):

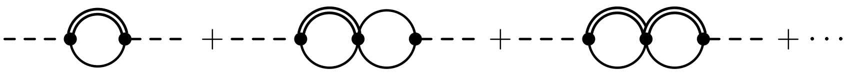
 (2.30)

Auch bei den Teilchen-Loch-Graphen werden wir der Übersichtlichkeit halber die Pfeile weglassen. Nun schreiben wir die gesamte Pion-Selbstenergie als Summe zweier Beiträge

$$-i\Sigma_{ab}(k) = -i\vec{k}^2\delta_{ab}\Pi(k) = -i\vec{k}^2\delta_{ab}(\Pi_1(k) + \Pi_2(k)), \quad (2.31)$$

wobei Π_1 alle Terme enthält, die am „linken Ende" eine Teilchen-Loch Anregung haben, und Π_2 alle restlichen Terme, also

$-i\vec{k}^2\delta_{ab}\Pi_1(k) =$ 

$-i\vec{k}^2\delta_{ab}\Pi_2(k) =$ 

(2.32)

Dividiert man diese beiden Gleichungen durch $-i\vec{k}^2\delta_{ab}$, so erhält man

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= \Pi_{Nh} + \Pi_{Nh}g'_{11}\Pi_1 + \Pi_{Nh}g'_{12}\Pi_2, \\
\Pi_2 &= \Pi_{\Delta h} + \Pi_{\Delta h}g'_{12}\Pi_1 + \Pi_{\Delta h}g'_{22}\Pi_2.
\end{aligned} \quad (2.33)$$

Durch Invertieren einer 2×2-Matrix läßt sich dies nach Π_1 und Π_2 auflösen [7],

$$\begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - g'_{11}\Pi_{Nh} & -g'_{12}\Pi_{Nh} \\ -g'_{12}\Pi_{\Delta h} & 1 - g'_{22}\Pi_{\Delta h} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Pi_{Nh} \\ \Pi_{\Delta h} \end{pmatrix}, \tag{2.34}$$

und das Endergebnis lautet

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \frac{\Pi_{Nh} + \Pi_{\Delta h} - (g'_{11} - 2g'_{12} + g'_{22})\Pi_{Nh}\Pi_{\Delta h}}{1 - g'_{11}\Pi_{Nh} - g'_{22}\Pi_{\Delta h} + (g'_{11}g'_{22} - g'^2_{12})\Pi_{Nh}\Pi_{\Delta h}}. \tag{2.35}$$

Der wichtigste Effekt der Migdal-Parameter besteht darin, daß die Maxima von $-\mathrm{Im}\,\Pi$ im Vergleich zu denen von $-\mathrm{Im}\,\Pi_{Nh}$ und $-\mathrm{Im}\,\Pi_{\Delta h}$ zu höheren Energien hin verschoben sind, wie in Abschnitt 2.5 erläutert wird. Bei kleinen Impulsen $|\vec{k}|$ gibt es einen zusätzlichen interessanten Effekt: Es ist möglich, daß der Nenner in Gl. (2.35) etwas oberhalb des Teilchen-Loch-Kontinuums, d. h. oberhalb der Energie $\Omega_{Knick\,2}(\vec{k})$, bei der der Imaginärteil von Π_{Nh} verschwindet, fast null wird. Gäbe es dort nicht den unphysikalischen Imaginärteil von $\Pi_{\Delta h}$, so wäre der Nenner dort sogar wirklich null. Das bedeutet, daß es bei dieser Energie $\Omega_{Sound}(\vec{k})$ eine scharfe Spin-Isospin-Quasiteilchenanregung gibt, die, da ihre Energie etwa proportional zu $|\vec{k}|$ anwächst (siehe Abb. 2.3), als „Spin-Isospin Sound" bezeichnet wird [11]. Mit zunehmendem Impuls nähern sich $\Omega_{Knick\,2}$ und Ω_{Sound}, bis sich beide Kurven schließlich bei $|\vec{k}| \approx 150$ MeV kreuzen (einfache Kernmateriedichte, Parameter siehe Tabelle 2.1). Oberhalb dieses Impulses wird der „Sound Mode" durch den Imaginärteil von Π_{Nh} verbreitert, bis er schließlich nicht mehr zu erkennen ist.

2.4 Der πNN- bzw. $\pi N\Delta$-Formfaktor

Bisher wurden das Pion, das Nukleon und das Delta wie elementare, d. h. punktförmige Teilchen behandelt. Da sie aber eine endliche Ausdehnung besitzen, wird die Wechselwirkung bei großen Impulsen schwächer. Das kann man durch die Einführung eines Formfaktors Γ_π am πNN- und am $\pi N\Delta$-Vertex berücksichtigen. Wie auch Rapp [7] und

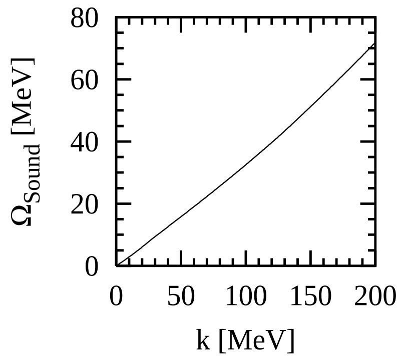


Abbildung 2.3: *Dispersionsrelation des Spin-Isospin-Sound-Modes bei einfacher Kernmateriedichte ($p_F = 268$ MeV); Parameter aus Tabelle 2.1.*

Herrmann [12] wählen wir einen Monopol-Formfaktor

$$\Gamma_\pi(\vec{k}) = \frac{\Lambda^2 - m_\pi^2}{\Lambda^2 + \vec{k}^2}, \tag{2.36}$$

der in unserer nichtrelativistischen Rechnung wie auch der πNN- bzw. $\pi N\Delta$-Vertex nur vom Dreier-Impuls $\vec{k}$ des Pions abhängt. Da wir für den πNN- und den $\pi N\Delta$-Vertex denselben Wert Λ wählen, und da jedes Pion-Selbstenergiediagramm, unabhängig von der Anzahl der g'-Wechselwirkungen, genau zwei solche Vertizes enthält, gilt für die Pion-Selbstenergie

$$\Sigma'_{ab}(k) = \vec{k}^2\delta_{ab}\Pi'(k) = \vec{k}^2\delta_{ab}\Gamma_\pi^2(\vec{k})\Pi(k), \tag{2.37}$$

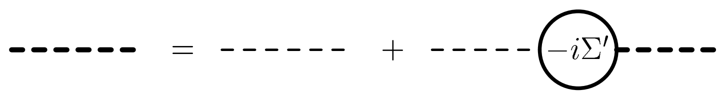
wobei $\Pi(k)$ die in den vorigen Kapiteln berechnete Selbstenergie ohne den Formfaktor ist.

m_π	=	140 MeV	f_N	=	1.01
m_N	=	939 MeV	f_Δ	=	$2f_N = 2.02$
m_Δ	=	1232 MeV	g'_{11}	=	0.8
Γ_Δ	=	120 MeV	g'_{12}	=	0.5
Λ	=	1200 MeV	g'_{22}	=	0.5

Tabelle 2.1: *Vorläufige Parameter für das Pion in Kernmaterie. Die Werte stammen aus Ref. [7]. Um eine bessere Beschreibung experimenteller Daten zu erhalten, werden wir einige dieser Parameter im weiteren Verlauf der Arbeit neu anpassen.*

2.5 Das Drei-Niveau-Modell

Nachdem die Pion-Selbstenergie berechnet wurde, können wir den Pion-Propagator im Medium berechnen, indem wir, wie beim ρ-Meson im vorigen Kapitel, die Dyson-Gleichung lösen. Der durch das Medium modifizierte Propagator G_π soll durch eine dicke gestrichelte Linie gekennzeichnet werden. Die dünne gestrichelte Linie entspricht dem nackten Propagator $G_\pi^{(0)}$ aus Gl. (1.7), der dort noch G_π genannt wurde:



$$iG_\pi \quad = \quad iG_\pi^{(0)} \quad + \quad iG_\pi^{(0)}(-i\Sigma')iG_\pi \tag{2.38}$$

Da alle hier auftretenden Ausdrücke Zahlen sind (genauer: proportional zu 3×3-Isospin-Einheitsmatrizen; das δ_{ab} lassen wir aber der Kürze halber weg), ist die Lösung der Dyson-Gleichung hier einfacher als beim ρ-Meson:

$$G_\pi(k) = \frac{1}{k^2 - m_\pi^2 - \Sigma'(k)} = \frac{1}{k^2 - m_\pi^2 - \vec{k}^2\Pi'(k)} \tag{2.39}$$

Unser Ziel ist, die ρ-Selbstenergie mit G_π anstelle von $G_\pi^{(0)}$ zu berechnen. Da aber bereits die Pion-Selbstenergie $\Pi'(k)$ nur numerisch ausgewertet werden kann, ist das eine sehr aufwendige Aufgabe. Es wird sich zeigen, daß sie numerisch durchaus lösbar ist, jedoch wollen wir zunächst eine Näherung machen, die auch die physikalische Interpretation der Ergebnisse erleichtert.
Wir gehen von den Teilchen-Loch und Delta-Loch-Selbstenergien in der Form (2.8) bzw. (2.21) aus. Nun nehmen wir an, daß der Fermi-Impuls p_F und damit der Loch-Impuls $\vec{p}$ klein gegen den Pion-Impuls $\vec{k}$ ist. Wir vernachlässigen deshalb die $\vec{p}$-Abhängigkeit der Integranden (d. h. wir setzen $\vec{p}=0$) und erhalten aus Gl. (2.8)

$$\Pi_{Nh}(k) = 4(\frac{f_N}{m_\pi})^2 \int_{|\vec{p}|<p_F} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Big(\frac{1}{k_0 - \omega_N(\vec{k}) + m_N + i\varepsilon} - \frac{1}{k_0 + \omega_N(\vec{k}) - m_N - i\varepsilon} \Big) \tag{2.40}$$

und aus Gl. (2.21)

$$\Pi_{\Delta h}(k) = \frac{16}{9}(\frac{f_\Delta}{m_\pi})^2 \int_{|\vec{p}|<p_F} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Big(\frac{1}{k_0 - \omega_\Delta(\vec{k}) + m_N + \frac{i}{2}\Gamma_\Delta} - \frac{1}{k_0 + \omega_\Delta(\vec{k}) - m_N - \frac{i}{2}\Gamma_\Delta} \Big). \tag{2.41}$$

Die Integration über die Fermi-Kugel ist nun trivial, sie liefert einfach einen Faktor $\frac{4}{3}\pi p_F^3$. Die Teilchen-Loch- und die Delta-Loch-Selbstenergie haben jetzt folgende einfache Form

$$\Pi_{Nh}(k) = \frac{\alpha_{Nh}(\vec{k})}{k_0^2 - \Omega_{Nh}^2(\vec{k}) + i\varepsilon}, \quad \Pi_{\Delta h}(k) = \frac{\alpha_{\Delta h}(\vec{k})}{k_0^2 - \Omega_{\Delta h}^2(\vec{k})}, \tag{2.42}$$

mit

$$\begin{aligned} \Omega_{Nh}(\vec{k}) &= \omega_N(\vec{k}) - m_N, & \alpha_{Nh}(\vec{k}) &= 4\frac{p_F^3}{3\pi^2}\Big(\frac{f_N}{m_\pi}\Big)^2 \Omega_{Nh}(\vec{k}), \\ \Omega_{\Delta h}(\vec{k}) &= \omega_\Delta(\vec{k}) - m_N - \frac{i}{2}\Gamma_\Delta, & \alpha_{\Delta h}(\vec{k}) &= \frac{16}{9}\frac{p_F^3}{3\pi^2}\Big(\frac{f_\Delta}{m_\pi}\Big)^2 \Omega_{\Delta h}(\vec{k}). \end{aligned} \tag{2.43}$$

Nun setzen wir diese Ausdrücke in Gl. (2.35) ein, um auch die kurzreichweitigen Korrelationen zu berücksichtigen. Nach einer Partialbruchzerlegung kann $\Pi(k)$ wieder als Summe zweier Terme geschrieben werden, die die gleiche Form haben wie Π_{Nh} bzw. $\Pi_{\Delta h}$ in Gl. (2.42):

$$\Pi(k) = \frac{\alpha_1(\vec{k})}{k_0^2 - \Omega_1^2(\vec{k})} + \frac{\alpha_2(\vec{k})}{k_0^2 - \Omega_2^2(\vec{k})}, \tag{2.44}$$

mit

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\Big(\Omega_{Nh}^2 + \Omega_{\Delta h}^2 + g'_{11}\alpha_{Nh} + g'_{22}\alpha_{\Delta h} \mp \sqrt{(\Omega_{Nh}^2 - \Omega_{\Delta h}^2 + g'_{11}\alpha_{Nh} - g'_{22}\alpha_{\Delta h})^2 + 4g'^2_{12}\alpha_{Nh}\alpha_{\Delta h}}\Big), \tag{2.45}$$

$$\alpha_{1,2} = \pm\frac{(\Omega_{1,2}^2 - \Omega_{\Delta h}^2)\alpha_{Nh} + (\Omega_{1,2}^2 - \Omega_{Nh}^2)\alpha_{\Delta h} - \alpha_{Nh}\alpha_{\Delta h}(g'_{11} - 2g'_{12} + g'_{22})}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}. \tag{2.46}$$

Hier erkennt man qualitativ, welche Wirkung die Migdal-Parameter g' haben: Die Quasiteilchenenergien Ω, bei denen $\mathrm{Im}\,\Pi(k)$ bei festgehaltenem $\vec{k}$ maximal wird, werden durch g'_{11} und g'_{22} nach oben verschoben, während g'_{12} die Abstände zwischen ihnen vergrößert. Die „Stärke" von Π bleibt aber unverändert, da $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_{Nh} + \alpha_{\Delta h}$.
Berücksichtigen wir nun noch den πNN- bzw. $\pi N\Delta$-Formfaktor, so erhalten wir nach Gl. (2.37)

$$\Pi'(k) = \frac{\alpha'_1(\vec{k})}{k_0^2 - \Omega_1^2(\vec{k})} + \frac{\alpha'_2(\vec{k})}{k_0^2 - \Omega_2^2(\vec{k})}, \tag{2.47}$$

mit

$$\alpha'_{1,2}(\vec{k}) = \Gamma_\pi^2(\vec{k})\,\alpha_{1,2}(\vec{k}). \tag{2.48}$$

Diese Näherung für die Selbstenergie wird nun in den Ausdruck (2.39) für den Pion-Propagator eingesetzt. Nach einer erneuten Partialbruchzerlegung erhält der Pion-Propagator dann die einfache Gestalt

$$G_\pi(k) = \frac{S_1(\vec{k})}{k_0^2 - \omega_1^2(\vec{k})} + \frac{S_2(\vec{k})}{k_0^2 - \omega_2^2(\vec{k})} + \frac{S_3(\vec{k})}{k_0^2 - \omega_3^2(\vec{k})}. \tag{2.49}$$

Dabei sind $\omega_{1,2,3}^2$ die Lösungen der kubischen Gleichung

$$(\omega^2)^3 - a(\omega^2)^2 + b\,\omega^2 - c = 0 \tag{2.50}$$

mit

$$\begin{aligned} a &= \omega_\pi^2 + \Omega_1^2 + \Omega_2^2, \\ b &= \omega_\pi^2\Omega_1^2 + \omega_\pi^2\Omega_2^2 + \Omega_1^2\Omega_2^2 - \vec{k}^2\alpha'_1 - \vec{k}^2\alpha'_2, \\ c &= \omega_\pi^2\Omega_1^2\Omega_2^2 - \vec{k}^2\alpha'_1\Omega_2^2 - \vec{k}^2\alpha'_2\Omega_1^2, \end{aligned}$$

worin ω_π die Energie eines freien Pions bezeichnet,

$$\omega_\pi(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + m_\pi^2}. \tag{2.51}$$

Die Stärken $S_{1,2,3}$ erhält man aus

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\omega_1^4 - (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)\omega_1^2 + \Omega_1^2\Omega_2^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_1^2 - \omega_3^2)}, \\ S_2 &= \frac{\omega_2^4 - (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)\omega_2^2 + \Omega_1^2\Omega_2^2}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)(\omega_2^2 - \omega_3^2)}, \\ S_3 &= \frac{\omega_3^4 - (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)\omega_3^2 + \Omega_1^2\Omega_2^2}{(\omega_3^2 - \omega_1^2)(\omega_3^2 - \omega_2^2)}. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Die $S_{1,2,3}$ haben die Eigenschaft $S_1 + S_2 + S_3 = 1$. In unserer Näherung ist das Pion in Kernmaterie also eine Mischung dreier Quasiteilchen mit den Dispersionsrelationen $\omega_{1,2,3}$,

die auch als „Äste" bezeichnet werden, und die Stärken $S_{1,2,3}$ geben das Mischungsverhältnis an.
In Abb. 2.4 sind die drei Dispersionsrelationen $\omega_{1,2,3}$ und zum Vergleich auch noch $\Omega_{1,2}$ und ω_π als Funktion des Pionimpulses $|\vec{k}|$ aufgetragen. Bei der Rechnung wurde einfache Kernmateriedichte angenommen und ein gebräuchlicher Parametersatz [7] verwendet, siehe Tabelle 2.1. Wegen der Übereinstimmung der Energien für $|\vec{k}| = 0$ wird der untere Ast (ω_1) auch Nukleon-Loch-Ast, der mittlere (ω_2) auch Pion-Ast und der obere (ω_3) auch Delta-Loch-Ast genannt. Wie man auf dem Bild aber ebenfalls sieht, ist diese Bezeichnung für hohe Impulse irreführend, da für große $|\vec{k}|$ der obere Ast dem Pion und der mittlere der Delta-Loch-Anregung entspricht; für große $|\vec{k}|$ geht nämlich ω_2 gegen Ω_2 und ω_3 gegen ω_π. Außerdem sind die zu den drei Ästen gehörenden Stärken $S_{1,2,3}$ aufgetragen. Wie man sieht, gehen alle Stärken außer S_3 gegen null. Bei großen Impulsen ist also nur noch der obere Ast wichtig. Man kann also sagen, daß sich die Eigenschaften des Pions in Kernmaterie vor allem bei niedrigen Impulsen ändern.
Es stellt sich nun natürlich die Frage, wie gut die hier vorgenommene Näherung ist. In Abb. 2.5 ist zum Vergleich die Pion-Selbstenergie Π' mit Berücksichtigung der Fermi-Bewegung und in der Näherung (2.47) dargestellt. Wie man sieht, wird der Delta-Loch-Anteil durch die Näherung vernünftig wiedergegeben. Der Teilchen-Loch-Anteil, der im Drei-Niveau-Modell ein sehr scharfes Maximum bei der Energie Ω_1 hat, ist jedoch in Wirklichkeit durch die Fermi-Bewegung stark verbreitert, so daß die Näherung hier ziemlich schlecht ist.
Zum Abschluß sei noch bemerkt, daß man bei Vernachlässigung der Nukleon-Loch-Selbstenergie das sehr weit verbreitete „Zwei-Niveau-Modell" erhält, das z. B. in den Arbei-

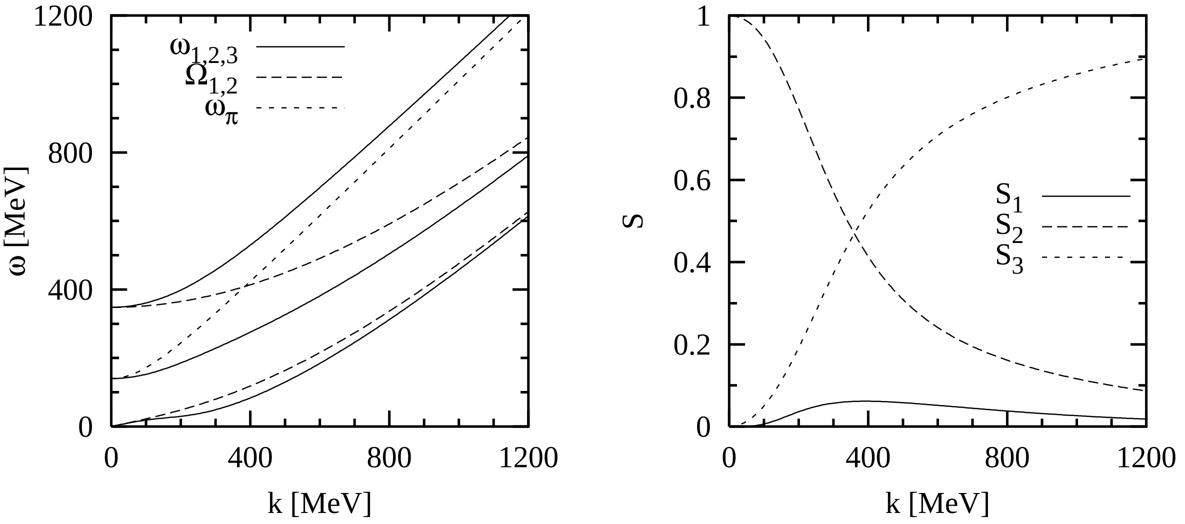


Abbildung 2.4: *Links: Dispersionsrelationen (Realteile) im Drei-Niveau-Modell bei einfacher Kernmateriedichte. Die Numerierung der Äste erfolgt von unten nach oben. Zum Vergleich ist auch die freie Pion-Dispersionsrelation ω_π eingezeichnet. Rechts: Stärken (Realteile) der drei Äste des Pion-Propagators im Drei-Niveau-Modell bei einfacher Kernmateriedichte*

ten [12] und [13] verwendet wurde. Aber auch mit der Nukleon-Loch-Selbstenergie wurden derartige Rechnungen bereits durchgeführt, z. B. in Ref. [29].

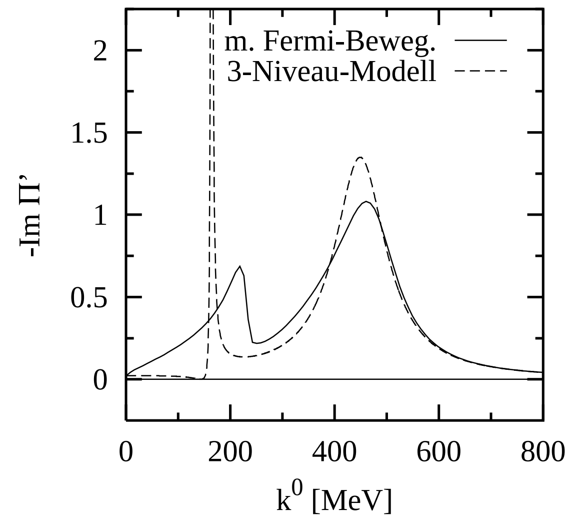


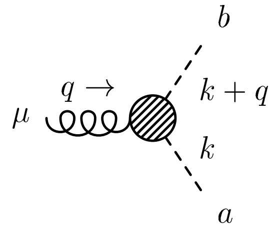
Abbildung 2.5: *Vergleich der Pion-Selbstenergie unter Berücksichtigung der Fermi-Bewegung (durchgezogene Linie) und im Drei-Niveau-Modell (gestrichelte Linie) bei einfacher Kernmateriedichte für* $|\vec{k}| = 500$ MeV

Kapitel 3

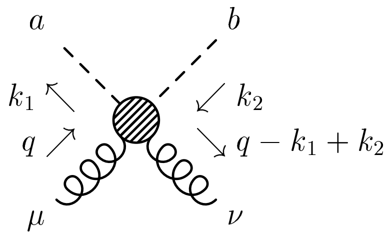
$\rho\pi\pi$- und $\rho\rho\pi\pi$-Vertexkorrekturen

3.1 Ward-Takahashi-Identitäten

Die einfachste Möglichkeit, das ρ-Meson in Kernmaterie zu behandeln, bestünde darin, einfach in den in Kapitel 1 berechneten Selbstenergiediagrammen den freien Pion-Propagator durch den in Kapitel 2 berechneten Propagator zu ersetzen. Dieses Vorgehen verletzt jedoch die Eichinvarianz, da die ρ-Selbstenergie dann nicht mehr vierdimensional transversal ist. Man kann dies noch allgemeiner formulieren [12]: Bei einer korrekten Behandlung des ρ-Mesons erfüllen der $\rho\pi\pi$-Vertex, der $\rho\rho\pi\pi$-Vertex und der Pion-Propagator sogenannte Ward-Takahashi-Identitäten, die sie miteinander in Verbindung setzen. Diese Identitäten werden im allgemeinen verletzt, wenn nur der Propagator geändert wird, aber nicht die Vertizes. Umgekehrt ergibt sich die vierdimensionale Transversalität der Selbstenergie automatisch, wenn die Ward-Takahashi-Identitäten erfüllt sind.
Um die Ward-Takahashi-Identitäten für unseren Fall anzugeben, definieren wir zunächst die Vertexfunktionen



$$= \Gamma^{(3)}_{\mu ab}(k, q), \tag{3.1}$$



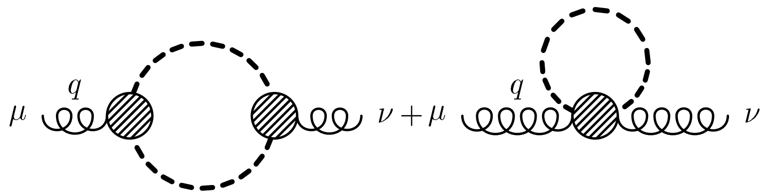
$$= \Gamma^{(4)}_{\mu\nu ab}(k_1, k_2, q). \tag{3.2}$$

Von der $\rho\rho\pi\pi$-Vertexfunktion benötigen wir allerdings nur den Spezialfall $k_1 = k_2$. Die Ward-Takahashi-Identitäten lauten nun (siehe Herrmann [12]; dort fehlen allerdings die Isospin-Operatoren, da mit komplexen Pionfeldern gerechnet wird)

$$
\begin{aligned}
q^\mu \Gamma^{(3)}_{\mu ab}(k,q) &= g\varepsilon_{3ab}\Big(G_\pi^{-1}(k+q) - G_\pi^{-1}(k)\Big), && (3.3)\\
q^\mu \Gamma^{(4)}_{\mu\nu ab}(k,k,q) &= ig\Big(\varepsilon_{3ca}\Gamma^{(3)}_{\nu bc}(k,-q) - \varepsilon_{3bc}\Gamma^{(3)}_{\nu ca}(k+q,-q)\Big). && (3.4)
\end{aligned}
$$

Wie man sofort sieht, sind diese Identitäten im Vakuum mit den in Kapitel 1 angegebenen Feynmanregeln (1.7) bis (1.10) erfüllt; im Vakuum gilt natürlich $G_\pi = G_\pi^{(0)}$ und folglich $G_\pi^{-1}(k) = k^2 - m_\pi^2$.
Man kann nun leicht zeigen, daß die ρ-Selbstenergie automatisch vierdimensional transversal ist, wenn diese Identitäten erfüllt sind. Dazu drücken wir die Selbstenergie mit dem vollen Pionpropagator und den Vertexfunktionen aus:

$-i\Sigma_{\mu\nu}(q) =$



$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iG_\pi(k)\Gamma^{(3)}_{\mu ab}(k,q) iG_\pi(k+q)\Gamma^{(3)}_{\nu ba}(k+q,-q)\\
&\quad + \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iG_\pi(k)\Gamma^{(4)}_{\mu\nu aa}(k,k,q). \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

nach Multiplikation mit q^μ und unter Verwendung der Ward-Takahashi-Identitäten (3.3) und (3.4) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
-iq^\mu\Sigma_{\mu\nu}(q) &= \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iG_\pi(k) g\varepsilon_{3ab}\Big(G_\pi^{-1}(k+q) - G_\pi^{-1}(k)\Big) iG_\pi(k+q)\Gamma^{(3)}_{\nu ba}(k+q,-q)\\
&\quad + \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iG_\pi(k) ig\Big(\varepsilon_{3ca}\Gamma^{(3)}_{\nu ac}(k,-q) - \varepsilon_{3ac}\Gamma^{(3)}_{\nu ca}(k+q,-q)\Big)\\
&= -\frac{g}{2}\varepsilon_{3ab}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Big(G_\pi(k)\Gamma^{(3)}_{\nu ba}(k+q,-q) - G_\pi(k+q)\Gamma^{(3)}_{\nu ba}(k+q,-q)\Big)\\
&\quad -\frac{g}{2}\varepsilon_{3ab}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Big(G_\pi(k)\Gamma^{(3)}_{\nu ba}(k,-q) - G_\pi(k)\Gamma^{(3)}_{\nu ba}(k+q,-q)\Big). \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

Der erste und der vierte Term heben sich gegenseitig weg. Der zweite und der dritte Term tun das dagegen erst nach der Substitution

$$k \longrightarrow k + q \qquad (3.7)$$

im dritten Term. Das ist der Grund, warum beim Abschneiden des Integrals mit einem Formfaktor die Transversalität der Selbstenergie zerstört wird, weil dann die Transformation (3.7) den Wert des Integrals ändert, und sich so der zweite und dritte Term nicht wegheben können. Bei unserer Pauli-Villars-Regularisierung wird dagegen der Wert des Integrals durch die Transformation (3.7) nicht geändert, so daß die Transversalität gewährleistet ist.

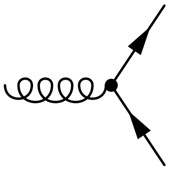
Man muß also im Medium die nackten (Vakuum-) $\rho\pi\pi$- und $\rho\rho\pi\pi$-Vertizes durch Vertexkorrekturen so ändern, daß die Ward-Takahashi-Identitäten (3.3) und (3.4) mit dem in Kapitel 2 berechneten Pion-Propagator erfüllt sind. Die dazu benötigten Vertexkorrektur-Diagramme erhält man aus der einfachen Regel, daß man das ρ-Meson an alle im Pion-Propagator auftretenden Selbstenergie-Diagramme koppeln muß [12]. Diese Vertexkorrekturen werden wir in den folgenden Kapiteln berechnen, wobei wir zur Kontrolle die Ward-Takahashi-Identitäten explizit überprüfen werden.

3.2 Vertexkorrekturen mit Teilchen-Loch-Graphen

Wir betrachten zunächst nur den Teilchen-Loch-Beitrag (2.6) zur Pion-Selbstenergie (ohne πNN-Formfaktor) und berechnen die zugehörigen Vertexkorrekturen. Dazu benötigen wir die ρ-N- und die ρ-π-N-Wechselwirkung, die wir durch eine minimale Substitution wie in Gl. (1.5) aus den Lagrangedichten $\mathcal{L}_N$ (Gl. 2.1) und $\mathcal{L}_{\pi N}$ (Gl. 2.2) erhalten:

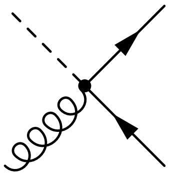
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\rho N} &= -\frac{g}{2}\bar{\psi}\not{\rho}\tau_3\psi, && (3.8)\\ \mathcal{L}_{\rho\pi N} &= ig\frac{f_N}{m_\pi}\bar{\psi}\gamma^5\not{\rho}\vec{\tau}\psi\cdot T_3\vec{\phi}. && (3.9)\end{aligned}$$

In $\mathcal{L}_{\rho N}$ berücksichtigen wir nicht die wegen der anomalen magnetischen Momente der Nukleonen relativ starke ρ-N-Tensorkopplung ($\propto \bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\tau_3\psi\rho^{\mu\nu}$) [25], da diese zur Erhaltung der Eichinvarianz nicht unbedingt benötigt wird. Selbst die Kopplung an das normale magnetische Moment, die in $\mathcal{L}_{\rho N}$ eigentlich enthalten ist, wird im folgenden durch unsere radikale nichtrelativistische Näherung, die nur die nullte Ordnung in $(\frac{|\vec{p}|}{m_N})$ mitnimmt, vernachlässigt werden.
Aus den Wechselwirkungs-Lagrangedichten folgen zunächst die relativistischen Vertizes, die dann durch Reduktion auf die oberen linken 2×2 Komponenten der Dirac-Matrizen in die nichtrelativistischen Vertizes übergehen:

μ 

$$= -i\frac{g}{2}\gamma_\mu\tau_3 \longrightarrow \begin{cases} -i\frac{g}{2}\tau_3 & \text{für} \quad \mu = 0, \\ 0 & \text{für} \quad \mu = 1,2,3, \end{cases} \qquad (3.10)$$

a



μ

$$= ig\frac{f_N}{m_\pi}\varepsilon_{3ba}\gamma^5\gamma_\mu\tau_b \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \mu = 0, \\ ig\frac{f_N}{m_\pi}\varepsilon_{3ba}\sigma_\mu\tau_b & \text{für} \quad \mu = 1,2,3. \end{cases} \qquad (3.11)$$

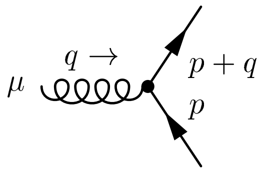
Wie man sieht, hängt der relativistische ρNN-Vertex $\Gamma_\mu^{(\rho NN)}(p,q) = -i\frac{g}{2}\gamma_\mu\tau_3$ mit dem relativistischen Propagator $G_N(p) = \frac{1}{\not{p}-m_N+i\varepsilon}$ über eine Ward-Takahashi-Identität zusammen, nämlich

$$q^\mu\Gamma_\mu^{(\rho NN)}(p,q) = -ig\frac{\tau_3}{2}\not{q} = -ig\frac{\tau_3}{2}\Big(G_N^{-1}(p+q) - G_N^{-1}(p)\Big). \qquad (3.12)$$

Führt man dieselbe Betrachtung dagegen für den nichtrelativistisch genäherten Vertex $\Gamma_\mu^{(\rho NN)}(p,q) = (-i\frac{g}{2}\tau_3, \vec{0})_\mu$ und Propagator $G_N(p) = \frac{1}{p^0 - \omega_N(\vec{p}) + i\varepsilon}$ durch, so sieht man, daß diese Identität nicht erfüllt ist, denn

$$
\begin{aligned}
q^\mu \Gamma_\mu^{(\rho NN)}(p,q) &= -ig\frac{\tau_3}{2}q^0, \\
-ig\frac{\tau_3}{2}\Big(G_N^{-1}(p+q) - G_N^{-1}(p)\Big) &= -ig\frac{\tau_3}{2}\Big(q^0 + \omega_N(p+q) - \omega_N(p)\Big) \\
&= -ig\frac{\tau_3}{2}q^0 + \mathcal{O}\Big(\frac{|\vec{q}|}{m_N}\Big).
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

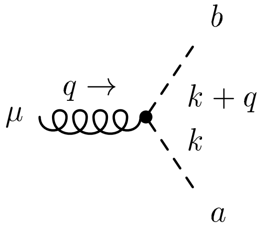
Da unsere nichtrelativistischen Näherungen gewissermaßen eine Entwicklung in $(\frac{|\vec{p}|}{m_N})$ bzw. $(\frac{|\vec{p}+\vec{q}|}{m_N})$ bis zur nullten Ordnung darstellen, ist diese Abweichung erster Ordnung nicht erstaunlich. Andererseits müssen wir aber wegen dieser Abweichung befürchten, daß auch die Vertexkorrekturen zu den $\rho\pi\pi$- und $\rho\rho\pi\pi$-Vertexfunktionen $\Gamma_{\mu ab}^{(3)}$ und $\Gamma_{\mu\nu ab}^{(4)}$ die Ward-Takahashi-Identitäten nur bis zur nullten Ordnung in $(\frac{|\vec{q}|}{m_N})$ erfüllen, wenn wir sie mit dem nichtrelativistischen ρNN-Vertex berechnen. Das können wir durch einen Trick verhindern. Da der nichtrelativistische Vertex sowieso nur bis zur Ordnung $(\frac{|\vec{q}|}{m_N})^0$ berechnet wurde, können wir, ohne die Genauigkeit zu verschlechtern, z. B. den in Gl. (3.13) zur Erfüllung der Ward-Takahashi-Identität fehlenden Term der Ordnung $(\frac{|\vec{q}|}{m_N})^1$ hinzufügen. Wenn wir das tun, erhalten wir anstelle des ρNN-Vertex (3.10)



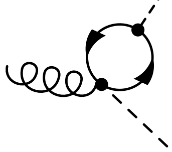
$$
\approx \begin{cases} -i\frac{g}{2}\tau_3 \frac{G_N^{-1}(p+q) - G_N^{-1}(p)}{q^0} & \text{für} \quad \mu = 0, \\ 0 & \text{für} \quad \mu = 1,2,3. \end{cases} \tag{3.14}
$$

Dieser Vertex hat nun den Vorteil, daß er die Ward-Takahashi-Identität exakt erfüllt.
Nun kommen wir zur eigentlichen Aufgabe, die wir uns für diesen Abschnitt gestellt haben, nämlich der Berechnung aller Vertexkorrekturen, die wir erhalten, indem wir das ρ an die Teilchen-Loch-Selbstenergie (2.6) koppeln. Der vollständige $\rho\pi\pi$-Vertex ist dann die Summe folgender Diagramme:

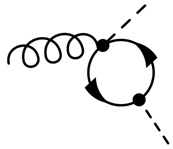
$$\Gamma_{\mu ab}^{(3\,a)}(k,q) \quad = \tag{3.15}$$

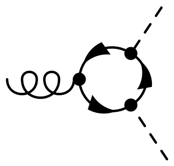
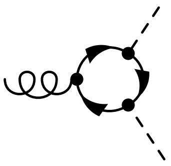


$$\Gamma_{\mu ab}^{(3\,b)}(k,q) \quad =$$



$$\Gamma_{\mu ab}^{(3\,c)}(k,q) \quad = \tag{3.16}$$



$$\Gamma^{(3\,d)}_{\mu ab}(k,q) \quad = $$  $$\Gamma^{(3\,e)}_{\mu ab}(k,q) \quad = $$  $$(3.17)$$

Das Diagramm (3.15) ist der nackte $\rho\pi\pi$-Vertex, für den nach Gl. (1.9) gilt

$$\Gamma^{(3\,a)}_{\mu ab}(k,q) = g\varepsilon_{3ab}(2k+q)_\mu. \tag{3.18}$$

Die Diagramme (3.16) tragen wegen Gl. (3.11) nur zu den Raumkomponenten $\Gamma^{(3)}_{iab}$ bei $(i = 1,2,3)$. Wir berechnen exemplarisch

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(3\,b)}_{iab}(k,q) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(-)\mathrm{Sp}\Big(\Big(\frac{f_N}{m_\pi}(-\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{\sigma}\tau_b\Big)iG_N(p+k+q)\Big(ig\frac{f_N}{m_\pi}\varepsilon_{3ca}\sigma_i\tau_c\Big)iG_N(p)\Big) \\
&= -4ig\Big(\frac{f_N}{m_\pi}\Big)^2\varepsilon_{3ab}(k+q)_i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}G_N(p+k+q)G_N(p) \\
&= g\varepsilon_{3ab}(k+q)_i\Pi_{Nh}(k+q).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Im letzten Schritt wurde die Definition (2.7) verwendet. Bei der Bestimmung des Vorzeichens ist zu beachten, daß z. B. $\vec{k} = (k^1,k^2,k^3)^T = (-k_1,-k_2,-k_3)^T$. Auf die gleiche Weise erhält man

$$\Gamma^{(3\,c)}_{iab}(k,q) = g\varepsilon_{3ab}k_i\Pi_{Nh}(k). \tag{3.20}$$

Die Diagramme (3.17) tragen dagegen nur zur Nullkomponente $\Gamma^{(3)}_{0ab}$ bei. Bei der Berechnung ist der Trick (3.14) sehr hilfreich, wie am Beispiel von $\Gamma^{(3\,d)}_{0ab}$ demonstriert werden soll:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(3\,d)}_{0ab}(k,q) &= \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(-)\mathrm{Sp}\Big(\Big(-i\frac{g}{2}\tau_3\frac{G_N^{-1}(p+q)-G_N^{-1}(p)}{q^0}\Big)iG_N(p)\Big(\frac{f_N}{m_\pi}(-\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{\sigma}\tau_b\Big) \\
&\qquad iG_N(p+k+q)\Big(\frac{f_N}{m_\pi}\vec{k}\cdot\vec{\sigma}\tau_a\Big)iG_N(p+q)\Big) \\
&= 2ig\Big(\frac{f_N}{m_\pi}\Big)^2\varepsilon_{3ab}\frac{\vec{k}\cdot(\vec{k}+\vec{q})}{q^0}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\Big(G_N^{-1}(p+q)-G_N^{-1}(p)\Big) \\
&\qquad G_N(p)G_N(p+k+q)G_N(p+q) \\
&= -\frac{g}{2}\varepsilon_{3ab}\frac{\vec{k}\cdot(\vec{k}+\vec{q})}{q^0}\Big(\Pi_{Nh}(k+q)-\Pi_{Nh}(k)\Big).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Ebenso ergibt sich

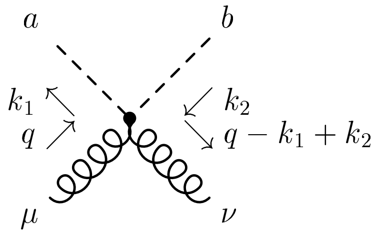
$$\Gamma^{(3\,e)}_{0ab}(k,q) = \frac{g}{2}\varepsilon_{3ab}\frac{\vec{k}\cdot(\vec{k}+\vec{q})}{q^0}\Big(\Pi_{Nh}(k)-\Pi_{Nh}(k+q)\Big) = \Gamma^{(3\,d)}_{0ab}(k,q). \tag{3.22}$$

Für den gesamten $\rho\pi\pi$-Vertex erhalten wir also

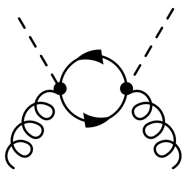
$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(3\,a\ldots e)}_{0ab}(k,q) &= g\varepsilon_{3ab}\Big((2k+q)_0 - \frac{\vec{k}\cdot(\vec{k}+\vec{q})}{q^0}\Big(\Pi_{Nh}(k+q)-\Pi_{Nh}(k)\Big)\Big), \\
\Gamma^{(3\,a\ldots e)}_{iab}(k,q) &= g\varepsilon_{3ab}\Big((k+q)_i\Big(1+\Pi_{Nh}(k+q)\Big)+k_i\Big(1+\Pi_{Nh}(k)\Big)\Big).
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

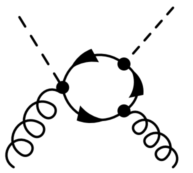
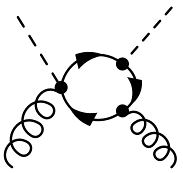
Wie man sieht, läßt sich der Vertex $\Gamma^{(3\,a\ldots e)}_{\mu ab}$ durch die Selbstenergie $\Pi_{Nh}(k)$ ausdrücken. Der Zusammenhang ist derselbe, wie ihn Chanfray und Schuck für die Delta-Loch-Vertexkorrekturen und $\Pi_{\Delta h}(k)$ fanden (Gl. (3.7) in Ref. [13]).
Als nächstes berechnen wir die $\rho\rho\pi\pi$-Vertexfunktion, zu der folgende Diagramme beitragen:

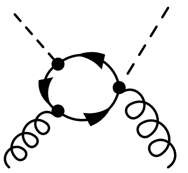
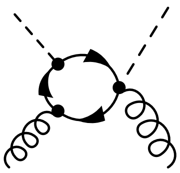
$\Gamma^{(4\,a)}_{\mu\nu ab}(k_1,k_2,q) \quad =$

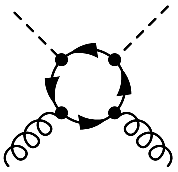
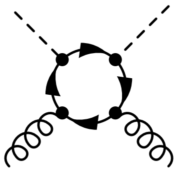
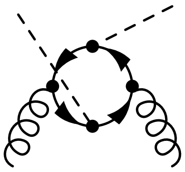


(3.24)

$\Gamma^{(4\,b)}_{\mu\nu ab}(k_1,k_2,q) \quad =$  $+ \quad (a,k_1 \longleftrightarrow b,-k_2)$ (3.25)

$\Gamma^{(4\,c)}_{\mu\nu ab}(k_1,k_2,q) \quad =$  $+$  $+ \quad (a,k_1 \longleftrightarrow b,-k_2)$ (3.26)

$\Gamma^{(4\,d)}_{\mu\nu ab}(k_1,k_2,q) \quad =$  $+$  $+ \quad (a,k_1 \longleftrightarrow b,-k_2)$ (3.27)

$\Gamma^{(4\,e)}_{\mu\nu ab}(k_1,k_2,q) \quad =$  $+$  $+$ 

$+ \quad (a,k_1 \longleftrightarrow b,-k_2)$ (3.28)

Das Diagramm (3.24) ist der nackte $\rho\rho\pi\pi$-Vertex, für den nach Gl. (1.10) gilt

$$
\Gamma^{(4\,a)}_{\mu\nu ab}(k_1,k_2,q) = 2ig^2(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b})g_{\mu\nu}. \tag{3.29}
$$

Das in Gl. (3.25) abgebildete sowie das daraus durch Vertauschung der Pionlinien entstehende Diagramm trägt zu $\Gamma^{(4)}_{ijab}$ $(i,j=1,2,3)$ bei. Das Ergebnis ist

$$
\Gamma^{(4\,b)}_{ijab}(k_1,k_2,q) = -ig^2\delta_{ij}(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b})\Big(\Pi_{Nh}(k_1-q)+\Pi_{Nh}(k_2+q)\Big). \tag{3.30}
$$

Die Diagramme (3.26) tragen nur zu den Komponenten $\Gamma^{(4)}_{i0ab}$ bei. Zu ihrer Berechnung verwenden wir wieder den Trick (3.14) und erhalten

$$\begin{aligned}\Gamma^{(4\,c)}_{i0ab}(k_1,k_2,q) &= -ig^2(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b})\frac{1}{(q-k_1+k_2)^0}\\ &\qquad\Big(k_{2i}\Big(\Pi_{Nh}(k_1-q)-\Pi_{Nh}(k_2)\Big)-k_{1i}\Big(\Pi_{Nh}(k_2+q)-\Pi_{Nh}(k_1)\Big)\Big).\end{aligned}\tag{3.31}$$

Die folgenden Diagramme (3.27) erhält man aus den vorherigen durch die Ersetzung $(\mu, q \leftrightarrow \nu, -q+k_1-k_2)$, d. h.

$$\begin{aligned}\Gamma^{(4\,d)}_{0jab}(k_1,k_2,q) &= \Gamma^{(4\,c)}_{j0ab}(k_1,k_2,-q+k_1-k_2)\\ &= ig^2(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b})\frac{1}{q^0}\\ &\qquad\Big(k_{2j}\Big(\Pi_{Nh}(k_2+q)-\Pi_{Nh}(k_2)\Big)-k_{1j}\Big(\Pi_{Nh}(k_1-q)-\Pi_{Nh}(k_1)\Big)\Big).\end{aligned}\tag{3.32}$$

Zur Komponente $\Gamma^{(4)}_{00ab}(k_1,k_2,q)$ tragen außer dem nackten Vertex nur die Korrekturen (3.28) bei:

$$\begin{aligned}\Gamma^{(4\,e)}_{00ab}(k_1,k_2,q) &= -ig^2(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b})\frac{\vec{k}_1\cdot\vec{k}_2}{q^0(q-k_1+k_2)^0}\\ &\qquad\Big(\Pi_{Nh}(k_2+q)+\Pi_{Nh}(k_1-q)-\Pi_{Nh}(k_1)-\Pi_{Nh}(k_2)\Big).\end{aligned}\tag{3.33}$$

In der ρ-Selbstenergie tritt der $\rho\rho\pi\pi$-Vertex nur im Spezialfall $k_1=k_2=k$ auf. In diesen Fall vereinfacht sich die Vertexfunktion (= Summe all dieser Diagramme) zu

$$\begin{aligned}\Gamma^{(4\,a\ldots e)}_{00ab}(k,k,q) &= -ig^2(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b})\\ &\qquad\Big(-2+\frac{\vec{k}^2}{(q^0)^2}\Big(\Pi_{Nh}(k+q)+\Pi_{Nh}(k-q)-2\Pi_{Nh}(k)\Big)\Big),\\ \Gamma^{(4\,a\ldots e)}_{i0ab}(k,k,q) &= -ig^2(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b})\frac{k_i}{q^0}\Big(\Pi_{Nh}(k-q)-\Pi_{Nh}(k+q)\Big),\\ \Gamma^{(4\,a\ldots e)}_{0jab}(k,k,q) &= -ig^2(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b})\frac{k_j}{q^0}\Big(\Pi_{Nh}(k-q)-\Pi_{Nh}(k+q)\Big),\\ \Gamma^{(4\,a\ldots e)}_{ijab}(k,k,q) &= -ig^2(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b})\delta_{ij}\Big(2+\Pi_{Nh}(k-q)+\Pi_{Nh}(k+q)\Big).\end{aligned}\tag{3.34}$$

Wie die $\rho\pi\pi$-Vertexkorrekturen lassen sich also auch die $\rho\rho\pi\pi$-Vertexkorrekturen mit Hilfe der Selbstenergie $\Pi_{Nh}(k)$ schreiben. Deshalb ist es sehr einfach zu zeigen, daß beide Vertexfunktionen die Ward-Takahashi-Identitäten erfüllen. Wir beginnen mit dem $\rho\pi\pi$-Vertex:

$$
\begin{aligned}
q^\mu \Gamma^{(3\,a\ldots e)}_{\mu ab}(k,q) &= g\varepsilon_{3ab}\Big(q^0(2k+q)^0 - \vec{k}\cdot(\vec{k}+\vec{q})\Big(\Pi_{Nh}(k+q)-\Pi_{Nh}(k)\Big) \\
&\qquad -\vec{q}\cdot(\vec{k}+\vec{q})\Big(1+\Pi_{Nh}(k+q)\Big) - \vec{q}\cdot\vec{k}\Big(1+\Pi_{Nh}(k)\Big)\Big) \\
&= g\varepsilon_{3ab}\Big((k+q)^2 - (\vec{k}+\vec{q})^2\Pi_{Nh}(k+q) - k^2 + \vec{k}^2\Pi_{Nh}(k)\Big) \\
&= g\varepsilon_{3ab}\Big(G_\pi^{-1}(k+q) - G_\pi^{-1}(k)\Big).
\end{aligned} \tag{3.35}
$$

Das entspricht der Ward-Takahashi-Identität (3.3). Die letzte Zeile gilt selbstverständlich nur unter der Voraussetzung, daß im Pionpropagator nur die Teilchen-Loch-Selbstenergie mitgenommen wird. Anderenfalls müßten noch weitere Vertexkorrekturen berechnet werden, um die Ward-Takahashi-Identität zu erfüllen. Dies wird der Inhalt der folgenden Abschnitte sein. Zuvor überprüfen wir noch die Ward-Takahashi-Identität für den $\rho\rho\pi\pi$-Vertex:

$$
\begin{aligned}
q^\mu \Gamma^{(4\,a\ldots e)}_{\mu 0ab}(k,k,q) &= -ig^2(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b})\Big(-2q^0 + \frac{\vec{k}^2}{q^0}\Big(\Pi_{Nh}(k+q)+\Pi_{Nh}(k-q)-2\Pi_{Nh}(k)\Big) \\
&\qquad -\frac{\vec{q}\cdot\vec{k}}{q^0}\Big(\Pi_{Nh}(k-q)-\Pi_{Nh}(k+q)\Big)\Big) \\
&= ig^2\varepsilon_{3ca}\varepsilon_{3bc}\Big((2k-q)^0 - \frac{\vec{k}\cdot(\vec{k}-\vec{q})}{-q^0}\Big(\Pi_{Nh}(k-q)-\Pi_{Nh}(k)\Big) \\
&\qquad -(2k+q)^0 + \frac{\vec{k}\cdot(\vec{k}+\vec{q})}{-q^0}\Big(\Pi_{Nh}(k)-\Pi_{Nh}(k+q)\Big)\Big) \\
&= ig\Big(\varepsilon_{3ca}\Gamma^{(3\,a\ldots e)}_{0bc}(k,-q) - \varepsilon_{3bc}\Gamma^{(3\,a\ldots e)}_{0ca}(k+q,-q)\Big),
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

$$
\begin{aligned}
q^\mu \Gamma^{(4\,a\ldots e)}_{\mu jab}(k,k,q) &= -ig^2(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b})\Big(k_j\Big(\Pi_{Nh}(k-q)-\Pi_{Nh}(k+q)\Big) \\
&\qquad -q_j\Big(2+\Pi_{Nh}(k-q)+\Pi_{Nh}(k+q)\Big)\Big) \\
&= ig^2\varepsilon_{3ca}\varepsilon_{3bc}\Big((k-q)_j\Big(1+\Pi_{Nh}(k-q)\Big) + k_j\Big(1+\Pi_{Nh}(k)\Big) \\
&\qquad -k_j\Big(1+\Pi_{Nh}(k)\Big) - (k+q)_j\Big(1+\Pi_{Nh}(k+q)\Big)\Big) \\
&= ig\Big(\varepsilon_{3ca}\Gamma^{(3\,a\ldots e)}_{jbc}(k,-q) - \varepsilon_{3bc}\Gamma^{(3\,a\ldots e)}_{jca}(k+q,-q)\Big).
\end{aligned} \tag{3.37}
$$

Auch die Ward-Takahashi-Identität (3.4) ist also erfüllt.

3.3 Vertexkorrekturen mit Delta-Loch-Graphen

Um die den Delta-Loch-Graphen (2.19) entsprechenden Vertexkorrekturen zu berechnen, werden wir in diesem Abschnitt im wesentlichen die Schritte des vorigen Abschnitts wiederholen, weshalb wir uns diesmal etwas kürzer fassen können. Die ρ-Δ- bzw. ρ-π-N-Δ-Wechselwirkung erhalten wir durch eine minimale Substitution wie in Gl. (1.5) aus den

Lagrangedichten $\mathcal{L}_\Delta$ (Gl. 2.13) und $\mathcal{L}_{\pi N\Delta}$ (Gl. 2.14):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\rho\Delta} &= g\bar{\psi}_\mu \not{\rho} T_3^{(\frac{3}{2})}\psi^\mu - \frac{g}{3}\bar{\psi}_\mu(\gamma^\mu\rho_\nu + \gamma_\nu\rho^\mu)T_3^{(\frac{3}{2})}\psi^\nu + \frac{g}{3}\bar{\psi}_\mu\gamma^\mu \not{\rho} T_3^{(\frac{3}{2})}\gamma_\nu\psi^\nu, &(3.38)\\ \mathcal{L}_{\rho\pi N\Delta} &= -ig\frac{f_\Delta}{m_\pi}\bar{\psi}\vec{T}^\dagger\psi_\mu\rho^\mu\cdot T_3\vec{\phi} \quad + \quad \text{h. c.} &(3.39)\end{aligned}$$

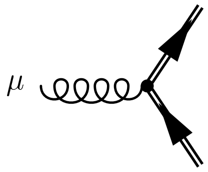
Der sich aus $\mathcal{L}_{\rho\Delta}$ ergebende Vertex besteht wie die Lagrangedichte aus drei Termen. Für freie Deltas gilt aber (siehe Anhang C) $\gamma_\mu\psi^\mu = 0$, so daß die beiden letzten Terme der Lagrangedichte verschwinden. Daß diese Terme in der nichtrelativistischen Näherung ebenfalls bedeutungslos sind, sieht man daran, daß sie im nichtrelativistischen Vertex nach Anhang C Faktoren mit $\vec{S}\cdot\vec{\sigma}$ bzw. $\vec{\sigma}\cdot\vec{S}^\dagger$ ergeben, und durch explizites Ausrechnen erhält man

$$\vec{S}\cdot\vec{\sigma} = 0.$$

Übrig bleibt also nur der erste Term von $\mathcal{L}_{\rho\Delta}$, aus dem sich in nichtrelativistischer Näherung unter Verwendung von

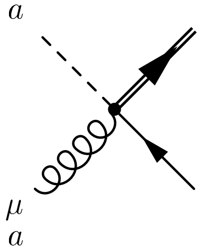
$$\vec{S}\cdot\vec{S}^\dagger = 1$$

folgender Vertex ergibt:

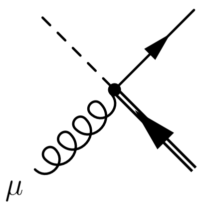


$$= \begin{cases} -igT_3^{(\frac{3}{2})} & \text{für} \quad \mu = 0, \\ 0 & \text{für} \quad \mu = 1,2,3. \end{cases} \qquad (3.40)$$

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß wie im Fall der ρNN-Kopplung der üblicherweise als besonders wichtig angesehene Term, nämlich die Kopplung des ρ-Feldes an das magnetische Moment des Deltas, hier nicht berücksichtigt wird, da nur die Kopplung an die Ladung des Deltas zur Erfüllung der Eichinvarianz unbedingt benötigt wird.
Aus $\mathcal{L}_{\rho\pi N\Delta}$ folgen in nichtrelativistischer Näherung die Vertizes

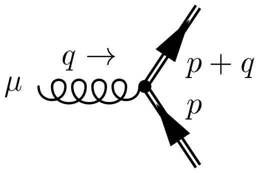


$$= \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \mu = 0, \\ ig\frac{f_\Delta}{m_\pi}\varepsilon_{3ba}S_\mu T_b & \text{für} \quad \mu = 1,2,3, \end{cases} \qquad (3.41)$$



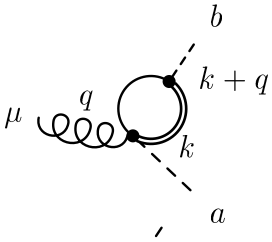
$$= \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \mu = 0, \\ ig\frac{f_\Delta}{m_\pi}\varepsilon_{3ba}S_\mu^\dagger T_b^\dagger & \text{für} \quad \mu = 1,2,3. \end{cases} \qquad (3.42)$$

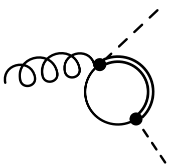
Wie im vorigen Abschnitt der ρNN-Vertex, erfüllt diesmal der $\rho\Delta\Delta$-Vertex die Ward-Takahashi-Identität nicht exakt. Um dem abzuhelfen, verwenden wir denselben Trick wie in Gl. (3.14) und schreiben für den $\rho\Delta\Delta$-Vertex

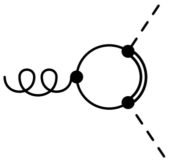


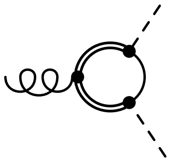
$$\approx \begin{cases} -igT_3^{(\frac{3}{2})} \frac{G_\Delta^{-1}(p+q) - G_\Delta^{-1}(p)}{q^0} & \text{für} \quad \mu = 0, \\ 0 & \text{für} \quad \mu = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{3.43}$$

Hätten wir in Kap. 2 eine vom Delta-Impuls p^2 abhängige Breite im Delta-Propagator eingeführt, z. B. indem wir die Delta-Selbstenergie aus dem Diagramm $\Delta \to \pi N \to \Delta$ berechnet hätten, so müßten wir hier die entsprechende Vertexkorrekturen des $\rho\Delta\Delta$-Vertex berechnen, um die Ward-Takahashi-Identität zu erhalten. Aus diesem Grund beschränken wir uns auf eine konstante Delta-Breite, die sich in der Differenz zweier inverser Delta-Propagatoren einfach weghebt.
Nun zeichnen wir alle Vertexkorrektur-Diagramme zur $\rho\pi\pi$-Vertexfunktion, die entstehen, indem das ρ an die Delta-Loch-Selbstenergie (2.19) gekoppelt wird. Die Diagramme mit Delta- und Nukleon-Linien ohne Pfeile sind im Sinne von Gl. (2.30) zu verstehen, d. h. ein Diagramm ohne Pfeile ist die Summe der beiden Diagramme mit rechts- und linksherum laufenden Linien.

$\Gamma_{\mu ab}^{(3\,f)}(k,q) \;=$ 

$\Gamma_{\mu ab}^{(3\,g)}(k,q) \;=$  (3.44)

$\Gamma_{\mu ab}^{(3\,h)}(k,q) \;=$ 

$\Gamma_{\mu ab}^{(3\,i)}(k,q) \;=$  (3.45)

Analog zu den Teilchen-Loch-Diagrammen (3.16) tragen die Diagramme (3.44) nur zu den Raumkomponenten der Vertexfunktion bei, das Ergebnis lautet ($i = 1, 2, 3$)

$$\Gamma_{iab}^{(3\,f)}(k,q) = g\varepsilon_{3ab}(k+q)_i \Pi_{\Delta h}(k+q), \tag{3.46}$$
$$\Gamma_{iab}^{(3\,g)}(k,q) = g\varepsilon_{3ab} k_i \Pi_{\Delta h}(k). \tag{3.47}$$

Hierbei wurde die Spurformel

$$\mathrm{Sp}(S_i S_j^\dagger) = \frac{4}{3}\delta_{ij}$$

(und dasselbe mit T statt S) sowie die Definition (2.20) verwendet. Zur Berechnung der Diagramme (3.45) benötigen wir zusätzlich die Tricks (3.14) und (3.43) sowie die Spurformeln

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(\frac{\tau_3}{2} T_a^\dagger T_b) &= -\frac{1}{3} i\varepsilon_{3ab}, \\ \mathrm{Sp}(T_3^{(\frac{3}{2})} T_a T_b^\dagger) &= \frac{5}{3} i\varepsilon_{3ab}. \end{aligned}$$

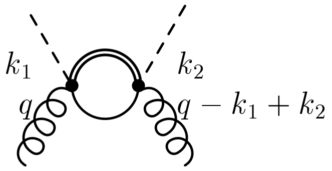
Damit erhalten wir

$$\Gamma^{(3\,h)}_{0ab}(k,q) = \frac{1}{4} g \varepsilon_{3ab} \frac{\vec{k}\cdot(\vec{k}+\vec{q})}{q^0} \Big(\Pi_{\Delta h}(k+q) - \Pi_{\Delta h}(k)\Big) \tag{3.48}$$

$$\Gamma^{(3\,i)}_{0ab}(k,q) = -\frac{5}{4} g \varepsilon_{3ab} \frac{\vec{k}\cdot(\vec{k}+\vec{q})}{q^0} \Big(\Pi_{\Delta h}(k+q) - \Pi_{\Delta h}(k)\Big) \tag{3.49}$$

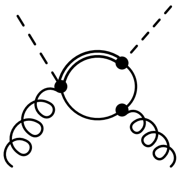
Addiert man alles, so sieht man, daß die Vertexkorrekturen mit Delta-Loch-Graphen durch genau dieselben Formeln (3.23) beschrieben werden wie die mit Teilchen-Loch-Graphen, wenn man überall Π_{Nh} durch $\Pi_{\Delta h}$ ersetzt. Wie bereits im vorigen Abschnitt gesagt wurde, stimmen diese Formeln genau mit den von Chanfray und Schuck [13] gefundenen überein. Als nächstes berechnen wir die Korrekturen zum $\rho\rho\pi\pi$-Vertex:

$$\Gamma^{(4\,f)}_{\mu\nu ab}(k_1,k_2,q) =$$



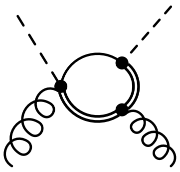
$$+ \quad (a, k_1 \longleftrightarrow b, -k_2) \tag{3.50}$$

$$\Gamma^{(4\,g)}_{\mu\nu ab}(k_1,k_2,q) =$$



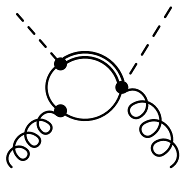
$$+ \quad (a, k_1 \longleftrightarrow b, -k_2) \tag{3.51}$$

$$\Gamma^{(4\,h)}_{\mu\nu ab}(k_1,k_2,q) =$$



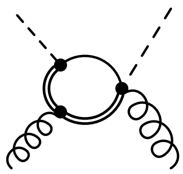
$$+ \quad (a, k_1 \longleftrightarrow b, -k_2) \tag{3.52}$$

$$\Gamma^{(4\,i)}_{\mu\nu ab}(k_1,k_2,q) =$$



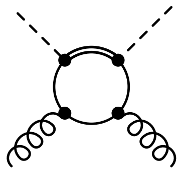
$$+ \quad (a, k_1 \longleftrightarrow b, -k_2) \tag{3.53}$$

$$\Gamma^{(4\,j)}_{\mu\nu ab}(k_1,k_2,q) =$$



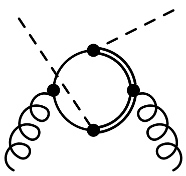
$$+ \quad (a, k_1 \longleftrightarrow b, -k_2) \tag{3.54}$$

$$\Gamma^{(4\,k)}_{\mu\nu ab}(k_1,k_2,q) =$$

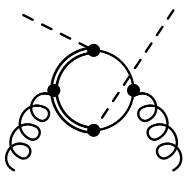


$$+ \quad (a, k_1 \longleftrightarrow b, -k_2) \tag{3.55}$$

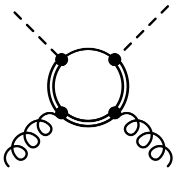
$$\Gamma^{(4\,l)}_{\mu\nu ab}(k_1,k_2,q) =$$



$$+$$



$$\tag{3.56}$$

$$\Gamma^{(4\,m)}_{\mu\nu ab}(k_1,k_2,q) \quad = \quad$$  $$+ \quad (a,k_1 \longleftrightarrow b,-k_2) \qquad (3.57)$$

Wir geben wieder nur die jeweils nichtverschwindenden Komponenten an. Die Diagramme (3.50) bis (3.54) ergeben

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(4\,f)}_{ijab}(k_1,k_2,q) &= -ig^2\delta_{ij}(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b})\Big(\Pi_{\Delta h}(k_1-q)+\Pi_{\Delta h}(k_2+q)\Big), && (3.58)\\
\Gamma^{(4\,g)}_{i0ab}(k_1,k_2,q) &= \frac{1}{4}ig^2(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b})\frac{1}{(q-k_1+k_2)^0}\\
&\quad \Big(k_{2i}\Big(\Pi_{\Delta h}(k_1-q)-\Pi_{\Delta h}(k_2)\Big)-k_{1i}\Big(\Pi_{\Delta h}(k_2+q)-\Pi_{\Delta h}(k_1)\Big)\Big), && (3.59)\\
\Gamma^{(4\,h)}_{i0ab}(k_1,k_2,q) &= -\frac{5}{4}ig^2(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b})\frac{1}{(q-k_1+k_2)^0}\\
&\quad \Big(k_{2i}\Big(\Pi_{\Delta h}(k_1-q)-\Pi_{\Delta h}(k_2)\Big)-k_{1i}\Big(\Pi_{\Delta h}(k_2+q)-\Pi_{\Delta h}(k_1)\Big)\Big), && (3.60)\\
\Gamma^{(4\,i)}_{0jab}(k_1,k_2,q) &= -\frac{1}{4}ig^2(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b})\frac{1}{q^0}\\
&\quad \Big(k_{2j}\Big(\Pi_{\Delta h}(k_2+q)-\Pi_{\Delta h}(k_2)\Big)-k_{1j}\Big(\Pi_{\Delta h}(k_1-q)-\Pi_{\Delta h}(k_1)\Big)\Big), && (3.61)\\
\Gamma^{(4\,j)}_{0jab}(k_1,k_2,q) &= \frac{5}{4}ig^2(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b})\frac{1}{q^0}\\
&\quad \Big(k_{2j}\Big(\Pi_{\Delta h}(k_2+q)-\Pi_{\Delta h}(k_2)\Big)-k_{1j}\Big(\Pi_{\Delta h}(k_1-q)-\Pi_{\Delta h}(k_1)\Big)\Big), && (3.62)\\
\Gamma^{(4\,k)}_{00ab}(k_1,k_2,q) &= -ig^2\frac{1}{4}\delta_{ab}\frac{\vec{k}_1\cdot\vec{k}_2}{q^0(q-k_1+k_2)^0}\\
&\quad \Big(\Pi_{\Delta h}(k_2+q)+\Pi_{\Delta h}(k_1-q)-\Pi_{\Delta h}(k_1)-\Pi_{\Delta h}(k_2)\Big). && (3.63)
\end{aligned}$$

Für die Diagramme (3.56) bis (3.57) benötigen wir weitere Spurformeln mit den Isospin-Übergangsmatrizen, nämlich

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sp}(T_3^{(\frac{3}{2})}T_a\frac{\tau_3}{2}T_b^\dagger) &= \frac{2}{3}\delta_{ab}-\frac{1}{3}\delta_{3a}\delta_{3b},\\
\mathrm{Sp}((T_3^{(\frac{3}{2})})^2T_aT_b^\dagger) &= \frac{7}{3}\delta_{ab}-2\delta_{3a}\delta_{3b}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(4\,l)}_{00ab}(k_1,k_2,q) &= ig^2(\delta_{ab}-\frac{1}{2}\delta_{3a}\delta_{3b})\frac{\vec{k}_1\cdot\vec{k}_2}{q^0(q-k_1+k_2)^0} \\
&\qquad \Big(\Pi_{\Delta h}(k_2+q)+\Pi_{\Delta h}(k_1-q)-\Pi_{\Delta h}(k_1)-\Pi_{\Delta h}(k_2)\Big), \quad (3.64) \\
\Gamma^{(4\,m)}_{00ab}(k_1,k_2,q) &= -ig^2(\frac{7}{4}\delta_{ab}-\frac{3}{2}\delta_{3a}\delta_{3b})\frac{\vec{k}_1\cdot\vec{k}_2}{q^0(q-k_1+k_2)^0} \\
&\qquad \Big(\Pi_{\Delta h}(k_2+q)+\Pi_{\Delta h}(k_1-q)-\Pi_{\Delta h}(k_1)-\Pi_{\Delta h}(k_2)\Big). \quad (3.65)
\end{aligned}
$$

Wie man sieht, hat erst die Summe $\Gamma^{(4\,k)}_{00ab}+\Gamma^{(4\,l)}_{00ab}+\Gamma^{(4\,m)}_{00ab}$ die richtige Isospin-Struktur:

$$
-\frac{1}{4}\delta_{ab}+(\delta_{ab}-\frac{1}{2}\delta_{3a}\delta_{3b})-(\frac{7}{4}\delta_{ab}-\frac{3}{2}\delta_{3a}\delta_{3b})=-(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b})
$$

Insgesamt ergibt sich, daß auch für die Korrekturen der $\rho\rho\pi\pi$-Vertexfunktion die Formeln (3.34) für die Teilchen-Loch-Vertexkorrekturen gültig sind, wenn man überall Π_{Nh} durch $\Pi_{\Delta h}$ ersetzt.

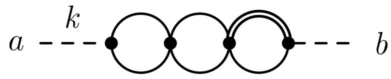
3.4 Kurzreichweitige Korrelationen

In Abschnitt 2.3 hatten wir durch Einführung der Migdal-Parameter in einfacher Weise die kurzreichweitige, repulsive N-N-, N-Δ- und Δ-Δ-Wechselwirkung berücksichtigt. Das Ergebnis war, daß die Teilchen-Loch-Anregungen Π_{Nh} und die Delta-Loch-Anregungen $\Pi_{\Delta h}$ in Mischungen Π_1 und Π_2 beider Anregungsarten übergingen.
In den beiden vorausgegangenen Abschnitten sahen wir, daß sich, wenn man nur den Teilchen-Loch- und den Delta-Loch-Beitrag zur Pion-Selbstenergie ohne kurzreichweitige Korrelationen und ohne den πNN- bzw. $\pi N\Delta$-Formfaktor berücksichtigte, die Ward-Takahashi-Identitäten für den $\rho\pi\pi$- und den $\rho\rho\pi\pi$-Vertex und den Pion-Propagator im Medium exakt erfüllen ließen. Wegen unserer nichtrelativistischen Näherungen war dazu ein Trick nötig, der zwar eine weitere Näherung darstellte, als Nebeneffekt aber dazu führte, daß die $\rho\pi\pi$ und die $\rho\rho\pi\pi$-Vertexfunktionen mit Hilfe der Pion-Selbstenergie geschrieben werden konnten.
Da bei Berücksichtigtigung der kurzreichweitigen Korrelationen die Selbstenergien Π_{Nh} und $\Pi_{\Delta h}$ nur gemischt werden, liegt die Vermutung nahe, daß die Zusammenhänge zwischen den Vertexfunktionen und der Pion-Selbstenergie, die man durch Verallgemeinerung der Gleichungen (3.23) und (3.34) erhält, indem man $\Gamma^{(3\,a\ldots e)}$ durch $\Gamma^{(3)}$, $\Gamma^{(4\,a\ldots e)}$ durch $\Gamma^{(4)}$ und Π_{Nh} durch Π ersetzt, auch mit den kurzreichweitigen Korrelationen noch gelten, d. h.

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(3)}_{0ab}(k,q) &= g\varepsilon_{3ab}\Big((2k+q)_0-\frac{\vec{k}\cdot(\vec{k}+\vec{q})}{q^0}\Big(\Pi(k+q)-\Pi(k)\Big)\Big), \\
\Gamma^{(3)}_{iab}(k,q) &= g\varepsilon_{3ab}\Big((k+q)_i\Big(1+\Pi(k+q)\Big)+k_i\Big(1+\Pi(k)\Big)\Big),
\end{aligned} \tag{3.66}
$$

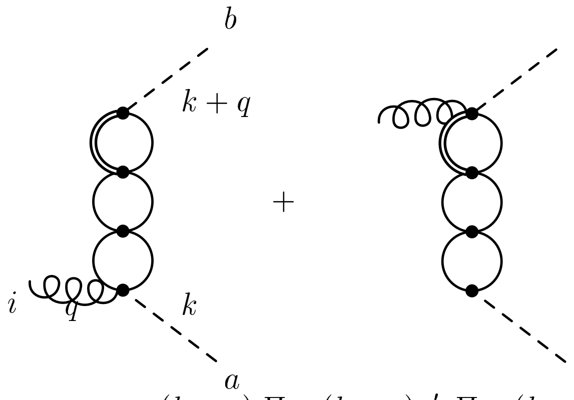
$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(4)}_{00ab}(k,k,q) &= -ig^2(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b}) \\
&\qquad \Big(-2+\frac{\vec{k}^2}{(q^0)^2}\Big(\Pi(k+q)+\Pi(k-q)-2\Pi(k)\Big)\Big), \\
\Gamma^{(4)}_{i0ab}(k,k,q) &= -ig^2(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b})\frac{k_i}{q^0}\Big(\Pi(k-q)-\Pi(k+q)\Big), \\
\Gamma^{(4)}_{0jab}(k,k,q) &= -ig^2(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b})\frac{k_j}{q^0}\Big(\Pi(k-q)-\Pi(k+q)\Big), \\
\Gamma^{(4)}_{ijab}(k,k,q) &= -ig^2(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b})\delta_{ij}\Big(2+\Pi(k-q)+\Pi(k+q)\Big).
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

Daß dies in der Tat so ist, wollen wir hier am Beispiel der $\rho\pi\pi$-Vertexfunktion $\Gamma^{(3)}$ zeigen. Dazu bemerken wir zunächst, daß das ρ-Feld nicht an die die kurzreichweitige Wechselwirkung simulierenden $NNNN$-, $NNN\Delta$-, $NN\Delta N$- und $NN\Delta\Delta$-Vertizes koppelt. Diese Vertizes sind nämlich impulsunabhängig, und eine effektive Lagrangedichte, aus der man diese Vertizes erhalten könnte, enthielte folglich keine Ableitungen, so daß durch die minimale Substitution analog zu Gl. (1.5) keine Wechselwirkung mit dem ρ-Feld entstünde. Betrachten wir nun einen beliebigen Beitrag zur Pion-Selbstenergie, z. B.



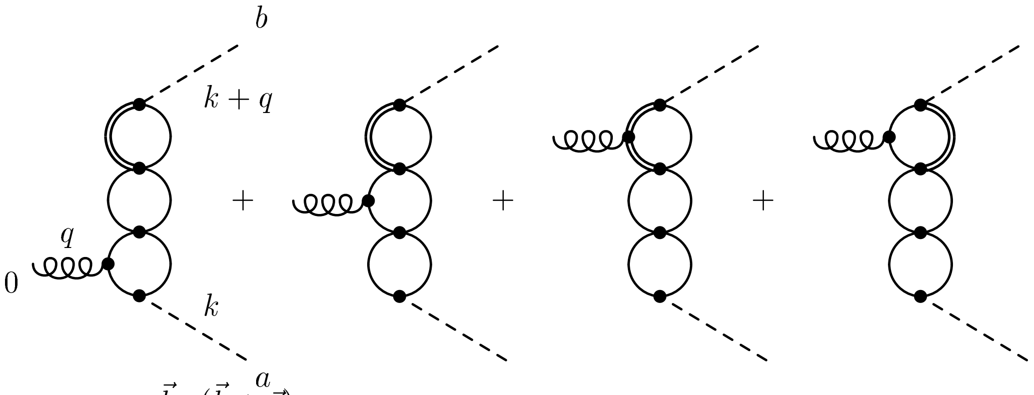
$$= -i\vec{k}^2\delta_{ab}\Pi_{Nh}(k)g'_{11}\Pi_{Nh}(k)g'_{12}\Pi_{\Delta h}(k). \tag{3.68}$$

Es gibt nur zwei diesem Selbstenergiebeitrag entsprechende Vertexkorrekturdiagramme, die zu den Raumkomponenten ($i=1,2,3$) beitragen (daß es sich nur um zwei Diagramme handelt, verdanken wir allerdings nur unserer abgekürzten Notation):



$$
\begin{aligned}
&= g\varepsilon_{3ab}(k+q)_i\Pi_{Nh}(k+q)g'_{11}\Pi_{Nh}(k+q)g'_{12}\Pi_{\Delta h}(k+q) \\
&\quad +g\varepsilon_{3ab}k_i\Pi_{Nh}(k)g'_{11}\Pi_{Nh}(k)g'_{12}\Pi_{\Delta h}(k)
\end{aligned}
\tag{3.69}
$$

Wie man hieran sieht, gilt die Beziehung (3.66) zwischen der Selbstenergie und den Raumkomponenten $\Gamma^{(3)}_{iab}$ der Vertexfunktion für jeden Selbstenergiebeitrag und die zugehörigen Vertexkorrekturen separat. Der Beweis für die Komponenten $\Gamma^{(4)}_{ijab}$ in Gl. (3.67) funktioniert übrigens genauso. Nun betrachten wir die Nullkomponente der zum obigen Selbstenergiebeitrag gehörenden Vertexkorrekturen, zu der folgende Diagramme beitragen:



$$
\begin{aligned}
&= -g\varepsilon_{3ab}\frac{\vec{k}\cdot(\vec{k}+\vec{q})}{q^0}\Big(\Pi_{Nh}(k+q)-\Pi_{Nh}(k)\Big)g'_{11}\Pi_{Nh}(k+q)g'_{12}\Pi_{\Delta h}(k+q)\\
&\quad -g\varepsilon_{3ab}\frac{\vec{k}\cdot(\vec{k}+\vec{q})}{q^0}\Pi_{Nh}(k)g'_{11}\Big(\Pi_{Nh}(k+q)-\Pi_{Nh}(k)\Big)g'_{12}\Pi_{\Delta h}(k+q)\\
&\quad -g\varepsilon_{3ab}\frac{\vec{k}\cdot(\vec{k}+\vec{q})}{q^0}\Pi_{Nh}(k)g'_{11}\Pi_{Nh}(k)g'_{12}\Big(\Pi_{\Delta h}(k+q)-\Pi_{\Delta h}(k)\Big)\\
&= -g\varepsilon_{3ab}\frac{\vec{k}\cdot(\vec{k}+\vec{q})}{q^0}\Big(\Pi_{Nh}(k+q)g'_{11}\Pi_{Nh}(k+q)g'_{12}\Pi_{\Delta h}(k+q)\\
&\qquad\qquad -\Pi_{Nh}(k)g'_{11}\Pi_{Nh}(k)g'_{12}\Pi_{\Delta h}(k)\Big).
\end{aligned}
\tag{3.70}
$$

(Die ersten beiden Zeilen entsprechen den ersten beiden Diagrammen, während die dritte Zeile bereits die Summe des dritten und vierten Diagramms ist, vgl. Abschnitt 3.3.) Auch die Gleichung (3.66) für die Nullkomponente $\Gamma^{(3)}_{0ab}$ gilt also für jeden Selbstenergiebeitrag und die zugehörigen Vertexkorrekturen separat. Der Beweis für die Komponenten $\Gamma^{(4)}_{i0ab}$ und $\Gamma^{(4)}_{0jab}$ in Gl. (3.67) funktioniert genauso, und mit etwas mehr Mühe gelingt auch der Beweis für die Komponente $\Gamma^{(4)}_{00ab}$.

3.5 Der πNN- bzw. $\pi N\Delta$-Formfaktor

Der in Abschnitt 2.4 eingeführte Formfaktor

$$\Gamma_\pi(\vec{k}) = \frac{\Lambda^2 - m_\pi^2}{\Lambda^2 + \vec{k}^2}$$

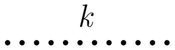
am πNN- bzw. $\pi N\Delta$-Vertex, der die Pion-Selbstenergie

$$\Sigma'(k) = \Gamma_\pi^2(\vec{k})\Sigma(k)$$

bei hohen Impulsen unterdrückt, wurde bei der Berechnung der Vertexkorrekturen bisher außer acht gelassen. Naiv könnte man erwarten, daß man einfach am $\rho\pi NN$- und $\rho\pi N\Delta$-Vertex denselben Formfaktor einführen muß, und folglich alle $\rho\pi\pi$-Vertexkorrekturen einen Faktor $\Gamma_\pi(\vec{k})\Gamma_\pi(\vec{k}+\vec{q})$ und alle $\rho\rho\pi\pi$-Vertexkorrekturen einen Faktor $\Gamma_\pi(\vec{k}_1)\Gamma_\pi(\vec{k}_2)$ erhalten. Dann würde jedoch z. B. für die so erhaltene $\rho\pi\pi$-Vertexfunktion $\Gamma'^{(3)}$ analog zu Gl. (3.35) gelten

$$q^\mu \Gamma'^{(3)}_{\mu ab}(k,q) = g\varepsilon_{3ab}\Big((k+q)^2 - \Gamma_\pi(\vec{k})\Gamma_\pi(\vec{k}+\vec{q})\Sigma(k+q) - k^2 + \Gamma_\pi(\vec{k})\Gamma_\pi(\vec{k}+\vec{q})\Sigma(k)\Big)$$
$$\neq g\varepsilon_{3ab}\Big((k+q)^2 - \Sigma'(k+q) - k^2 + \Sigma'(k)\Big), \qquad (3.71)$$

d. h. die Ward-Takahashi-Identität wäre nicht erfüllt.
Man muß bei der Einführung des Formfaktors den $\rho\pi NN$- und $\rho\pi N\Delta$-Vertex also auf nichttriviale Weise abändern. Eine systematische Methode dazu sieht folgendermaßen aus (siehe Mathiot [30], Herrmann [12]): Man denkt sich den Formfaktor dadurch generiert, daß sich das Pion, bevor es an NN oder $N\Delta$ koppelt, in ein schweres Teilchen mit denselben Quantenzahlen und der Masse Λ (im folgenden „schweres Pion" genannt) umwandelt, ähnlich wie im VDM der elektromagnetische Formfaktor des Pions durch die Umwandlung des Photons in ein neutrales ρ-Meson entsteht. Da unser nichtrelativistischer Formfaktor nur von $\vec{k}^2$ und nicht von k^2 abhängt, lassen wir das k_0^2 im „Propagator" des schweren Pions weg:

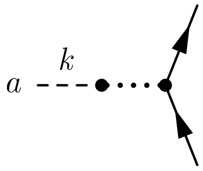


$$= i\frac{1}{-\vec{k}^2 - \Lambda^2}. \qquad (3.72)$$

Damit sich die richtige Normierung des Formfaktors ergibt, wählen wir den Vertex, in dem sich das Pion in das schwere Pion umwandelt, wie folgt:

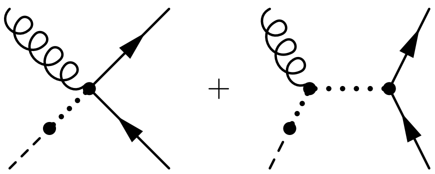
$$= i(\Lambda^2 - m_\pi^2). \qquad (3.73)$$

Wie man sieht, ergibt das Produkt aus dem Propagator (3.72) und dem Vertex (3.73) genau den Formfaktor Γ_π. Die Kopplung des schweren Pions an NN bzw. $N\Delta$ unterscheidet sich nicht von der üblichen πNN- bzw. $\pi N\Delta$-Kopplung, so daß man insgesamt die normalen Vertizes mit einem zusätzlichen Faktor Γ_π erhält, z. B.



$$= \frac{\Lambda^2 - m_\pi^2}{\Lambda^2 + \vec{k}^2}\frac{f_N}{m_\pi}\vec{k}\cdot\vec{\sigma}\tau_a. \qquad (3.74)$$

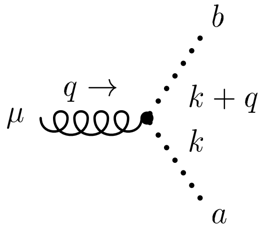
Der modifizierte $\rho\pi NN$-Vertex besteht nun aus zwei Anteilen, von denen nur der erste den naiven Überlegungen am Anfang dieses Abschnitts entspricht:



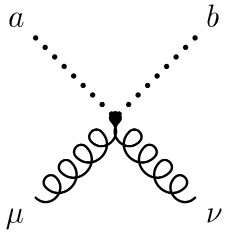
(3.75)

An den Vertex, in dem sich das Pion in das schwere Pion umwandelt, koppelt das ρ-Meson nicht, da dieser Vertex impulsunabhängig ist (vgl. die Argumentation in Abschnitt 3.4). Was hier am Beispiel des πNN-Vertex vorgeführt wurde, gilt natürlich genauso für den $\pi N\Delta$-Vertex.
Bei der Festlegung der Kopplung des ρ-Mesons an das schwere Pion orientieren wir uns an der $\rho\pi\pi$-Kopplung. Für die Korrekturen zu $\Gamma^{(4)}_{\mu\nu ab}$ ist außerdem noch die Kopplung zweier ρ-Linien an das schwere Pion analog zum $\rho\rho\pi\pi$-Vertex wichtig. Da wir jedoch

im Propagator das k_0^2 weggelassen haben, der Propagator aber über Ward-Takahashi-Identitäten mit den Vertizes in Verbindung gesetzt wird, müssen wir in den Vertizes des schweren Pions die nullten Komponenten weglassen:



$$= \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \mu = 0, \\ g\varepsilon_{3ab}(2k+q)_\mu & \text{für} \quad \mu = 1,2,3, \end{cases} \tag{3.76}$$



$$= \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \mu = 0 \quad \text{oder} \quad \nu = 0 \\ -2ig^2(\delta_{ab} - \delta_{3a}\delta_{3b})\delta_{\mu\nu} & \text{für} \quad \mu,\nu = 1,2,3. \end{cases} \tag{3.77}$$

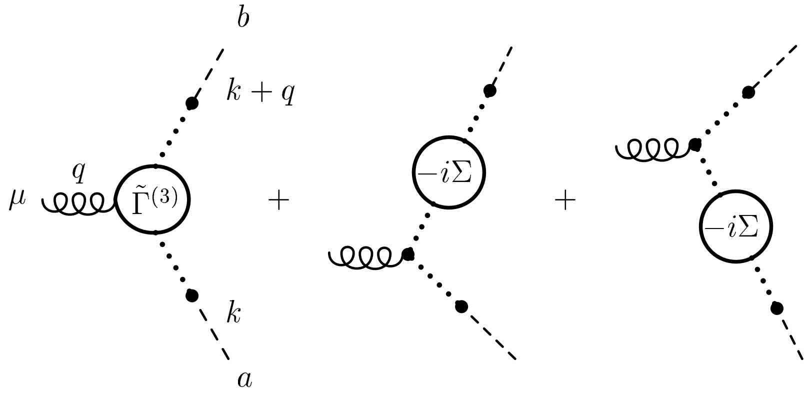
Man kann sich leicht davon überzeugen, daß diese Vertizes mit dem „Propagator" (3.72) die Ward-Takahashi-Identitäten (3.3) und (3.4) erfüllen.
Nun berechnen wir die $\rho\pi\pi$- und $\rho\rho\pi\pi$-Vertexfunktionen unter Berücksichtigung des schweren Pions. Zunächst zerlegen wir die bereits berechneten Vertexfunktionen ohne den Formfaktor in die nackten Vertizes und Vertexkorrekturen $\tilde{\Gamma}$:

$$\Gamma^{(3)}_{\mu ab}(k,q) = g\varepsilon_{3ab}(2k+q)_\mu + \tilde{\Gamma}^{(3)}_{\mu ab}(k,q), \tag{3.78}$$

$$\Gamma^{(4)}_{\mu\nu ab}(k_1,k_2,q) = 2ig^2(\delta_{ab} - \delta_{3a}\delta_{3b})g_{\mu\nu} + \tilde{\Gamma}^{(4)}_{\mu\nu ab}(k_1,k_2,q). \tag{3.79}$$

Führt man nun den πNN- bzw. $\pi N\Delta$-Formfaktor ein, so gibt es wegen der Kopplung des ρ-Mesons an das schwere Pion verschiedene Korrekturen zur $\rho\pi\pi$-Vertexfunktion:

$\tilde{\Gamma}'^{(3)}_{\mu ab}(k,q) \;=$

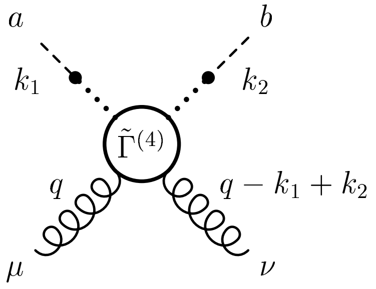


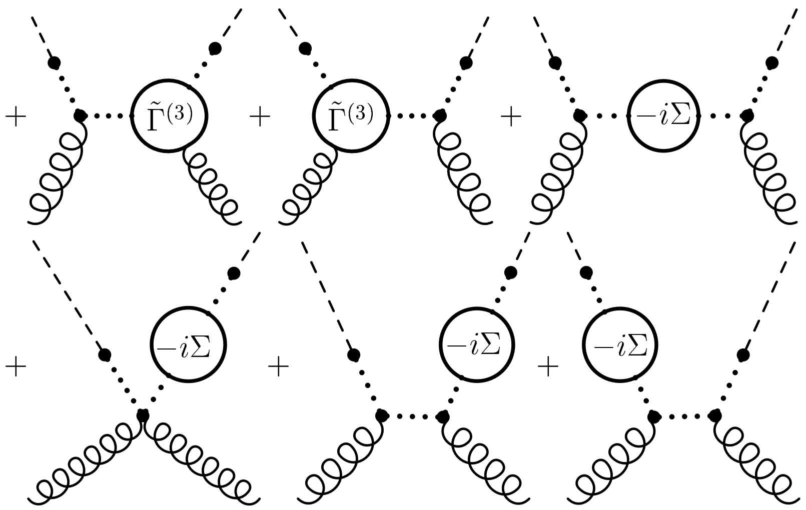
$$\tilde{\Gamma}'^{(3)}_{\mu ab}(k,q) = \Gamma_\pi(\vec{k})\Gamma_\pi(\vec{k}+\vec{q})\Big(\tilde{\Gamma}^{(3)}_{\mu ab}(k,q) - g\varepsilon_{3ab}(2k+q)_i\Big(\frac{\Sigma(k+q)}{\Lambda^2 + (\vec{k}+\vec{q})^2} + \frac{\Sigma(k)}{\Lambda^2+\vec{k}^2}\Big)\Big). \tag{3.80}$$

Hierbei ist der Term mit Index i als Abkürzung folgendermaßen zu verstehen: Für $\mu = 0$ entfällt dieser Term wegen Gl. (3.76), und für $\mu = 1,2,3$ ist in diesem Term $i = \mu$ zu

setzen.
Für den $\rho\rho\pi\pi$-Vertex gibt es durch den Formfaktor sehr viele zusätzliche Diagramme:

$$\tilde{\Gamma}'^{(4)}_{\mu\nu ab}(k_1, k_2, q) \;=$$





\+ die letzten sechs Diagramme mit Vertauschung $(a, k_1 \longleftrightarrow b, -k_2)$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}'^{(4)}_{\mu\nu ab}(k_1, k_2, q) \;=\;& \Gamma_\pi(\vec{k}_1)\Gamma_\pi(\vec{k}_2)\Bigg(\tilde{\Gamma}^{(4)}_{\mu\nu ab}(k_1, k_2, q) \\
& -ig\varepsilon_{3ca}\frac{(2k_1 - q)_i}{\Lambda^2 + (\vec{k}_1 - \vec{q})^2}\tilde{\Gamma}^{(3)}_{\nu bc}(k_2, -q + k_1 - k_2) \\
& +ig\varepsilon_{3cb}\frac{(2k_2 + q)_i}{\Lambda^2 + (\vec{k}_2 + \vec{q})^2}\tilde{\Gamma}^{(3)}_{\nu ac}(-k_1, -q + k_1 - k_2) \\
& -ig\varepsilon_{3bc}\frac{(k_1 + k_2 - q)_j}{\Lambda^2 + (\vec{k}_1 - \vec{q})^2}\tilde{\Gamma}^{(3)}_{\mu ca}(k_1 - q, q) \\
& +ig\varepsilon_{3ac}\frac{(k_1 + k_2 + q)_j}{\Lambda^2 + (\vec{k}_2 + \vec{q})^2}\tilde{\Gamma}^{(3)}_{\mu cb}(-k_2 - q, q) \\
& -ig^2(\delta_{ab} - \delta_{3a}\delta_{3b})\frac{(2k_1 - q)_i(k_1 + k_2 - q)_j}{(\Lambda^2 + (\vec{k}_1 - \vec{q})^2)^2}\Sigma(k_1 - q) \\
& -ig^2(\delta_{ab} - \delta_{3a}\delta_{3b})\frac{(2k_2 + q)_i(k_1 + k_2 + q)_j}{(\Lambda^2 + (\vec{k}_2 + \vec{q})^2)^2}\Sigma(k_2 + q) \\
& +2ig^2\delta_{ij}(\delta_{ab} - \delta_{3a}\delta_{3b})\Big(\frac{\Sigma(k_1)}{\Lambda^2 + \vec{k}_1^2} + \frac{\Sigma(k_2)}{\Lambda^2 + \vec{k}_2^2}\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-ig^2(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b})\frac{(2k_1-q)_i(k_1+k_2-q)_j}{\Lambda^2+(\vec{k}_1-\vec{q})^2}\Big(\frac{\Sigma(k_1)}{\Lambda^2+\vec{k}_1^2}+\frac{\Sigma(k_2)}{\Lambda^2+\vec{k}_2^2}\Big)\\
&-ig^2(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b})\frac{(2k_2+q)_i(k_1+k_2+q)_j}{\Lambda^2+(\vec{k}_2+\vec{q})^2}\Big(\frac{\Sigma(k_1)}{\Lambda^2+\vec{k}_1^2}+\frac{\Sigma(k_2)}{\Lambda^2+\vec{k}_2^2}\Big)\Big).
\end{aligned}
\tag{3.81}
$$

Hier gilt wieder die Abkürzung, daß Terme mit Indizes i bzw. j nur für $\mu \neq 0$ bzw. $\nu \neq 0$ etwas beitragen, und daß in diesem Fall $i = \mu$ und $j = \nu$ zu setzen ist.
Nutzt man aus, daß die Vertexkorrekturen $\tilde{\Gamma}^{(3)}$ und $\tilde{\Gamma}^{(4)}$ die Ward-Takahashi-Identitäten (3.3) und (3.4) ohne die Beiträge der nackten Vertizes und Propagatoren erfüllen, d. h.

$$
\begin{aligned}
q^\mu \tilde{\Gamma}^{(3)}_{\mu ab}(k,q) &= -g\varepsilon_{3ab}\Big(\Sigma(k+q)-\Sigma(k)\Big), && (3.82)\\
q^\mu \tilde{\Gamma}^{(4)}_{\mu\nu ab}(k,k,q) &= ig\Big(\varepsilon_{3ca}\tilde{\Gamma}^{(3)}_{\nu bc}(k,-q)-\varepsilon_{3bc}\tilde{\Gamma}^{(3)}_{\nu ca}(k+q,-q)\Big), && (3.83)
\end{aligned}
$$

so kann man, ohne die konkrete Form von $\tilde{\Gamma}^{(3)}$, $\tilde{\Gamma}^{(4)}$ oder Σ einzusetzen, für die Vertexkorrekturen (3.80) und (3.81) nachrechnen, daß sie die Ward-Takahashi-Identitäten mit der Selbstenergie

$$
\Sigma'(k) = \Gamma_\pi^2(\vec{k})\Sigma(k)
$$

erfüllen:

$$
\begin{aligned}
q^\mu \tilde{\Gamma}'^{(3)}_{\mu ab}(k,q) &= -g\varepsilon_{3ab}\Big(\Gamma_\pi^2(\vec{k}+\vec{q})\Sigma(k+q)-\Gamma_\pi^2(\vec{k})\Sigma(k)\Big), && (3.84)\\
q^\mu \tilde{\Gamma}'^{(4)}_{\mu\nu ab}(k,k,q) &= ig\Big(\varepsilon_{3ca}\tilde{\Gamma}'^{(3)}_{\nu bc}(k,-q)-\varepsilon_{3bc}\tilde{\Gamma}'^{(3)}_{\nu ca}(k+q,-q)\Big). && (3.85)
\end{aligned}
$$

Kapitel 4

Das ρ-Meson in Kernmaterie

4.1 ρ-Selbstenergie und ρ-Propagator in Kernmaterie

Nachdem wir Vertexfunktionen $\Gamma^{(3)}$ und $\Gamma^{(4)}$ bestimmt haben, die mit dem Pionpropagator in Kernmaterie die Ward-Takahashi-Identitäten erfüllen, wollen wir sie nun dazu verwenden, die ρ-Selbstenergie bei endlicher Dichte zu berechnen. Da nun mit dem Ruhesystem der Kernmaterie ein ausgezeichnetes Bezugssystem existiert, hat die Selbstenergie $\Sigma_{\mu\nu}$ nicht mehr die einfache Tensorstruktur wie im Vakuum (Gl. 1.18). Dennoch ist es nicht nötig, alle sechzehn Tensorkomponenten einzeln zu berechnen. Dazu drehen wir das Koordinatensystem so, daß der Dreier-Impuls $\vec{q}$ des ρ-Mesons in positive z-Richtung zeigt, d. h.

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |\vec{q}| \end{pmatrix} .$$

Beachtet man die vierdimensionale Transversalität von $\Sigma_{\mu\nu}$, so ist klar, daß $\Sigma_{\mu\nu}$ die Form

$$\Sigma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{q}^{\,2}}{q_0^2}\Sigma_{33} & 0 & 0 & -\frac{|\vec{q}|}{q_0}\Sigma_{33} \\ 0 & \Sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{11} & 0 \\ -\frac{|\vec{q}|}{q_0}\Sigma_{33} & 0 & 0 & \Sigma_{33} \end{pmatrix}_{\mu\nu} \tag{4.1}$$

haben muß, so daß es genügt, die beiden unabhängigen Tensorkomponenten Σ_{11} und Σ_{33} zu berechnen.

Um den Propagator aus der Dyson-Gleichung (1.16) zu bestimmen, ist es nützlich, die Projektoren P_T und P_L einzuführen [31]. In unserer Basis lauten sie

$$(P_T)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu} , \quad (P_L)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{q}^{\,2}}{q^2} & 0 & 0 & -\frac{q_0|\vec{q}|}{q^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{q_0|\vec{q}|}{q^2} & 0 & 0 & \frac{q_0^2}{q^2} \end{pmatrix}_{\mu\nu} . \tag{4.2}$$

Beide sind vierdimensional transversal, aber dreidimensional ist P_T transversal und P_L longitudinal. Mit diesen Tensoren können wir die Selbstenergie wie folgt zerlegen:

$$\Sigma_{\mu\nu}(q) = \Sigma_T(q)(P_T)_{\mu\nu} + \Sigma_L(q)(P_L)_{\mu\nu}, \tag{4.3}$$

wobei offensichtlich gilt

$$\begin{aligned}\Sigma_T &= \Sigma_{11}, &(4.4)\\ \Sigma_L &= \frac{q^2}{q_0^2}\Sigma_{33}. &(4.5)\end{aligned}$$

Den nackten ρ-Propagator (1.19) können wir wie folgt schreiben:

$$(G_\rho^{(0)})^{\mu\nu} = \frac{P_T^{\mu\nu} + P_L^{\mu\nu}}{q^2 - (m_\rho^{(0)})^2 + i\varepsilon} + \frac{q^\mu q^\nu}{(m_\rho^{(0)})^2 q^2}. \tag{4.6}$$

Damit wird die Lösung der Dyson-Gleichung einfach, das Ergebnis lautet

$$\begin{aligned}G_\rho^{\mu\nu}(q) &= G_{\rho\,T}(q)(P_T)^{\mu\nu} + G_{\rho\,L}(q)(P_L)^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{(m_\rho^{(0)})^2 q^2}\\ &= \frac{P_T^{\mu\nu}}{q^2 - (m_\rho^{(0)})^2 - \Sigma_T(q)} + \frac{P_L^{\mu\nu}}{q^2 - (m_\rho^{(0)})^2 - \Sigma_L(q)} + \frac{q^\mu q^\nu}{(m_\rho^{(0)})^2 q^2}. &(4.7)\end{aligned}$$

Die beiden unabhängigen Komponenten der Selbstenergie, Σ_{11} und Σ_{33}, berechnen wir mit dem in Kapitel 2 berechneten Pion-Propagator und den Vertexfunktionen

$$\begin{aligned}\Gamma'^{(3)}_{iab}(k,q) &= g\varepsilon_{3ab}(2k+q)_i + \tilde{\Gamma}'^{(3)}_{iab}(k,q), &(4.8)\\ \Gamma'^{(4)}_{ijab}(k,k,q) &= -2ig^2(\delta_{ab} - \delta_{3a}\delta_{3b})\delta_{ij} + \tilde{\Gamma}'^{(4)}_{ijab}(k,k,q). &(4.9)\end{aligned}$$

nach den Raumkomponenten der Gleichung (3.5),

$$\Sigma_{ij}(q) = \frac{i}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Big(iG_\pi(k)\Gamma'^{(3)}_{iab}(k,q)iG_\pi(k+q)\Gamma'^{(3)}_{jba}(k+q,-q) + iG_\pi(k)\Gamma'^{(4)}_{ijaa}(k,k,q)\Big), \tag{4.10}$$

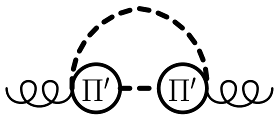
wobei wir wie in Abschnitt 3.1 die Regulatorterme der Übersichtlichkeit halber weggelassen haben. Wegen des πNN- bzw. $\pi N\Delta$-Formfaktors geht die Pion-Selbstenergie für große Pion-Impulse gegen null, so daß für große $|\vec{k}|$ die Vertexkorrekturen verschwinden und der Pion-Propagator G_π gegen den nackten Pion-Propagator $G_\pi^{(0)}$ geht. Folglich ist der Medium-Anteil der Selbstenergie endlich, und es ist ausreichend, dieselben Regulatorterme wie im Vakuum zu addieren, um für die gesamte Selbstenergie ein endliches Ergebnis zu erhalten [12].
Zusammenfassend geben wir noch einmal die benötigten Formeln an: $\tilde{\Gamma}'^{(3)}$ siehe Gl. (3.80), $\tilde{\Gamma}'^{(4)}$ siehe Gl. (3.81). Dort ist mit Σ die Pion-Selbstenergie aus Kap. 2 gemeint, außerdem werden die Vertexkorrekturen $\tilde{\Gamma}^{(3)}$ nach Gl. (3.66) und $\tilde{\Gamma}^{(4)}$ nach Gl. (3.67) benötigt, wobei man in den beiden letztgenannten Gleichungen jeweils noch die nackten Vertizes subtrahiert muß, um die Vertexkorrekturen zu erhalten.
Setzen wir alles ineinander ein und drücken überall die Pion-Selbstenergie Σ und Π durch Π' aus, so erhalten wir schließlich nach einigen Umformungen

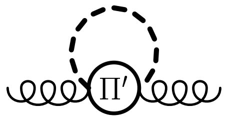
$$
\begin{aligned}
\Sigma_{ij}(q) \;=\; & \frac{g^2}{4}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\Big((2k+q)_i(2k+q)_j\, I_1 \\
& \qquad +4\frac{(k_i(\Lambda^2-\vec{k}^2)-q_i\vec{k}^2)(2k+q)_j}{\Lambda^2+(\vec{k}+\vec{q})^2}\, I_2 \\
& \qquad +2\frac{(k_i(\Lambda^2-\vec{k}^2)-q_i\vec{k}^2)(k_j(\Lambda^2-\vec{k}^2)-q_j\vec{k}^2)}{(\Lambda^2+(\vec{k}+\vec{q})^2)^2}\, \tilde{I}_3 \\
& \qquad +2\frac{(k_i(\Lambda^2-\vec{k}^2)-q_i\vec{k}^2)(k_j(\Lambda^2-(\vec{k}+\vec{q})^2)+q_j\Lambda^2)}{(\Lambda^2+(\vec{k}+\vec{q})^2)(\Lambda^2+\vec{k}^2)}\, I_4 \\
& \qquad +2\delta_{ij}\, I_5 \\
& \qquad +2\frac{(\Lambda^2+\vec{k}^2)^2\delta_{ij}-(2k+q)_i(2k_j\Lambda^2-q_j\vec{k}^2)}{(\Lambda^2+(\vec{k}+\vec{q})^2)^2}\, I_6 \\
& \qquad -4\Big(\frac{\vec{k}^2\delta_{ij}}{\Lambda^2+\vec{k}^2}+\frac{(2k+q)_i(k_j(\Lambda^2-\vec{k}^2)-q_j\vec{k}^2)}{(\Lambda^2+(\vec{k}+\vec{q})^2)(\Lambda^2+\vec{k}^2)}\Big)\, I_7\Big) \\
& +(i\longleftrightarrow j)
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Hierbei wurden für die Integrale über k^0 folgende Abkürzungen eingeführt:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{i}{\pi}\int dk^0\, G_\pi(k)G_\pi(k+q), && (4.12)\\
I_2 &= \frac{i}{\pi}\int dk^0\, \Pi'(k)G_\pi(k)G_\pi(k+q), && (4.13)\\
\tilde{I}_3 &= \frac{i}{\pi}\int dk^0\, \Pi'^{\,2}(k)G_\pi(k)G_\pi(k+q), && (4.14)\\
I_4 &= \frac{i}{\pi}\int dk^0\, \Pi'(k)G_\pi(k)\Pi'(k+q)G_\pi(k+q), && (4.15)\\
I_5 &= \frac{i}{\pi}\int dk^0\, G_\pi(k), && (4.16)\\
I_6 &= \frac{i}{\pi}\int dk^0\, \Pi'(k)G_\pi(k+q), && (4.17)\\
I_7 &= \frac{i}{\pi}\int dk^0\, \Pi'(k)G_\pi(k), && (4.18)
\end{aligned}
$$

Um die Selbstenergie auf diese Form vereinfachen zu können, mußten in verschiedenen Termen Substitutionen $k\to -k-q$, $k\to k+q$ und $k\to -k$ vorgenommen werden. Das ist zulässig, da wir die Integrale nicht abschneiden, sondern mit Pauli-Villars regularisieren. Es ist nun zweckmäßig, die Terme mit den Integralen $\tilde{I}_3$ und I_6 zusammenzufassen. Sie entsprechen nämlich folgenden Typen von Diagrammen:

Terme mit $\tilde{I}_3$: 

Terme mit I_6 : 

Die Teilchen-Loch- bzw. Delta-Loch-Anregungen im oberen Diagramm sind stets longitudinal, d. h. ihr Spin steht parallel zu ihrem Impuls $\vec{k}$, und zwar wegen des πNN- bzw. $\pi N\Delta$-Vertex $\vec{k}\cdot\vec{\sigma}$ bzw. $\vec{k}\cdot\vec{S}$, durch den die beiden Π' an den dazwischen eingeschobenen Pion-Propagator gekoppelt sind. Im unteren Diagramm sind dagegen sowohl transversale als auch longitudinale Teilchen-Loch- bzw. Delta-Loch-Anregungen enthalten, d. h. ihr Spin kann senkrecht oder parallel zu ihrem Impuls stehen. Das liegt daran, daß die im dortigen Π' enthaltenen Teilchen-Loch- bzw. Delta-Loch-Anregungen sowohl am linken als auch am rechten Ende an einen $\rho\pi NN$- bzw. $\rho\pi N\Delta$-Vertex σ_i bzw. S_i koppeln (i ist hier der entsprechende Index der ρ-Selbstenergie). Den Anteil des unteren Diagramms, der longitudinale Teilchen-Loch- bzw. Delta-Loch-Anregungen enthält, können wir aber durch Einführung der „longitudinalen Spin-Isospin-Response-Funktion" Π'_L mit dem oberen Diagramm zusammenfassen (siehe [13]). Π'_L definieren wir folgendermaßen:

$$\Pi'_L(k) = \Pi'(k) + \Pi'(k)\vec{k}^2 G_\pi(k)\Pi'(k) = (k^2 - m_\pi^2)\Pi'(k)G_\pi(k). \tag{4.19}$$

Analog zum Integral I_6 führen wir nun eine neue Abkürzung ein,

$$I_3 = \frac{i}{\pi}\int dk^0\, \Pi'_L(k)G_\pi(k+q) = \vec{k}^2\tilde{I}_3 + I_6, \tag{4.20}$$

und erhalten für die ρ-Selbstenergie

$$\begin{aligned}
\Sigma_{ij}(q) \;=\; \frac{g^2}{4}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\Big(&(2k+q)_i(2k+q)_j\, I_1 \\
&+4\frac{(k_i(\Lambda^2-\vec{k}^2)-q_i\vec{k}^2)(2k+q)_j}{\Lambda^2+(\vec{k}+\vec{q})^2}\, I_2 \\
&+2\frac{(k_i(\Lambda^2-\vec{k}^2)-q_i\vec{k}^2)(k_j(\Lambda^2-\vec{k}^2)-q_j\vec{k}^2)}{\vec{k}^2(\Lambda^2+(\vec{k}+\vec{q})^2)^2}\, I_3 \\
&+2\frac{(k_i(\Lambda^2-\vec{k}^2)-q_i\vec{k}^2)(k_j(\Lambda^2-(\vec{k}+\vec{q})^2)+q_j\Lambda^2)}{(\Lambda^2+(\vec{k}+\vec{q})^2)(\Lambda^2+\vec{k}^2)}\, I_4 \\
&+2\delta_{ij}\, I_5 \\
&+2\frac{(\Lambda^2+\vec{k}^2)^2}{(\Lambda^2+(\vec{k}+\vec{q})^2)^2}\Big(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{\vec{k}^2}\Big)\, I_6 \\
&-4\Big(\frac{\vec{k}^2\delta_{ij}}{\Lambda^2+\vec{k}^2}+\frac{(2k+q)_i(k_j(\Lambda^2-\vec{k}^2)-q_j\vec{k}^2)}{(\Lambda^2+(\vec{k}+\vec{q})^2)(\Lambda^2+\vec{k}^2)}\Big)\, I_7\Big) \\
+(i \longleftrightarrow j)&
\end{aligned} \tag{4.21}$$

4.2 Der ρ-Propagator im Drei-Niveau-Modell

In Abschnitt 2.5 führten wir eine als „Drei-Niveau-Modell" bezeichnete Näherung ein, nach der sich der Pion-Propagator als Summe dreier Quasiteilchen-Propagatoren schreiben ließ. Die Näherung bestand in der Vernachlässigung der Fermi-Bewegung der Nukleonen. Setzt man die in Abschnitt 2.5 angegebenen Näherungen für den Pion-Propagator G_π und die Pion-Selbstenergie Π' in die Integrale (4.12) bis (4.18) und (4.20) ein, so kann man die Integration über k^0 analytisch ausführen:

$$I_1 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{S_i(\vec{k})}{\omega_i(\vec{k})}\,\frac{S_j(\vec{k}+\vec{q})}{\omega_j(\vec{k}+\vec{q})}\,\frac{\omega_i(\vec{k})+\omega_j(\vec{k}+\vec{q})}{q_0^2-(\omega_i(\vec{k})+\omega_j(\vec{k}+\vec{q}))^2} \tag{4.22}$$

$$I_2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{C_i(\vec{k})}{\omega_i(\vec{k})}\,\frac{S_j(\vec{k}+\vec{q})}{\omega_j(\vec{k}+\vec{q})}\,\frac{\omega_i(\vec{k})+\omega_j(\vec{k}+\vec{q})}{q_0^2-(\omega_i(\vec{k})+\omega_j(\vec{k}+\vec{q}))^2} \tag{4.23}$$

$$I_3 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{(\omega_i^2(\vec{k})-\omega_\pi^2(\vec{k}))C_i(\vec{k})}{\omega_i(\vec{k})}\,\frac{S_j(\vec{k}+\vec{q})}{\omega_j(\vec{k}+\vec{q})}\,\frac{\omega_i(\vec{k})+\omega_j(\vec{k}+\vec{q})}{q_0^2-(\omega_i(\vec{k})+\omega_j(\vec{k}+\vec{q}))^2} \tag{4.24}$$

$$I_4 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{C_i(\vec{k})}{\omega_i(\vec{k})}\,\frac{C_j(\vec{k}+\vec{q})}{\omega_j(\vec{k}+\vec{q})}\,\frac{\omega_i(\vec{k})+\omega_j(\vec{k}+\vec{q})}{q_0^2-(\omega_i(\vec{k})+\omega_j(\vec{k}+\vec{q}))^2} \tag{4.25}$$

$$I_5 = \sum_{i=1}^{3} \frac{S_i(\vec{k})}{\omega_i(\vec{k})} \tag{4.26}$$

$$I_6 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} \frac{\alpha_i'(\vec{k})}{\Omega_i(\vec{k})}\,\frac{S_j(\vec{k}+\vec{q})}{\omega_j(\vec{k}+\vec{q})}\,\frac{\Omega_i(\vec{k})+\omega_j(\vec{k}+\vec{q})}{q_0^2-(\Omega_i(\vec{k})+\omega_j(\vec{k}+\vec{q}))^2} \tag{4.27}$$

$$I_7 = \sum_{i=1}^{3} \frac{C_i(\vec{k})}{\omega_i(\vec{k})} \tag{4.28}$$

Die hier eingeführten Abkürzungen $C_{1,2,3}$ haben folgende Bedeutung: Das in den Integralen und in der longitudinalen Response-Funktion Π'_L häufig auftretende Produkt $\Pi'(k)G_\pi(k)$, kurz $(\Pi' G_\pi)(k)$, hat nur bei $k^0=\omega_i(\vec{k})$, jedoch nicht bei $k^0=\Omega_i(\vec{k})$ Pole und kann folglich in der Form

$$(\Pi' G_\pi)(k) = \frac{C_1(\vec{k})}{k_0^2-\omega_1^2(\vec{k})} + \frac{C_2(\vec{k})}{k_0^2-\omega_2^2(\vec{k})} + \frac{C_3(\vec{k})}{k_0^2-\omega_3^2(\vec{k})} \tag{4.29}$$

geschrieben werden. Für die $C_i(\vec{k})$ gilt

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{(\alpha_1'+\alpha_2')\omega_1^2-\alpha_1'\Omega_2^2-\alpha_2'\Omega_1^2}{(\omega_1^2-\omega_2^2)(\omega_1^2-\omega_3^2)},\\
C_2 &= \frac{(\alpha_1'+\alpha_2')\omega_2^2-\alpha_1'\Omega_2^2-\alpha_2'\Omega_1^2}{(\omega_2^2-\omega_1^2)(\omega_2^2-\omega_3^2)},\\
C_3 &= \frac{(\alpha_1'+\alpha_2')\omega_3^2-\alpha_1'\Omega_2^2-\alpha_2'\Omega_1^2}{(\omega_3^2-\omega_1^2)(\omega_3^2-\omega_2^2)}.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Die Komponenten Σ_{11} und Σ_{33} von Gl. (4.21) werden numerisch integriert. Die Abbildungen 4.1 und 4.2 zeigen einige Ergebnisse dieser Rechnungen, nämlich die transversalen und longitudinalen Anteile der Selbstenergie, Σ_T und Σ_L, und des Propagators, $G_{\rho T}$ und $G_{\rho L}$ als Funktion der invarianten Masse

$$M = \sqrt{q^2} \tag{4.31}$$

für verschiedene Impulse $|\vec{q}|$ und verschiedene Dichten. Beim Propagator ist allerdings zu beachten, daß verschiedene Selbstenergiebeiträge nicht additiv zu ihm beitragen. Das Ergebnis kann sich also noch sehr verändern, wenn die hier nicht berücksichtigten, aber nach Friman und Pirner [9] bei $\vec{q} \neq 0$ sehr wichtigen Selbstenergiebeiträge $\rho \to \Delta h \to \rho$, $\rho \to N^*(1720)h \to \rho$, $\rho \to \Delta^*(1905)h \to \rho$ usw. hinzugenommen werden. Am Realteil der Selbstenergie fällt auf, daß er bei endlicher Dichte für $M \to 0$ nicht verschwindet, wie bereits von Herrmann [12] bemerkt wurde. Die Forderung (1.25), wonach die Selbstenergie bei $q^2 = 0$ verschwinden muß, braucht im Medium, wo Abschirmeffekte auftreten können, nicht erfüllt zu sein.
Im folgenden wollen wir uns etwas genauer mit dem Imaginärteil der Selbstenergie beschäftigen. Dabei wollen wir zunächst die konstante Delta-Breite außer acht lassen, d. h. die α_i', S_i und C_i seien reell, und die Ω_i und ω_i haben einen infinitesimalen negativen Imaginärteil. Betrachtet man nun die Gleichungen (4.22) bis (4.28), so stellt man fest, daß die Integrale I_5 und I_7 reell sind, die Imaginärteile der restlichen Integrale jedoch δ-Funktionen bei den

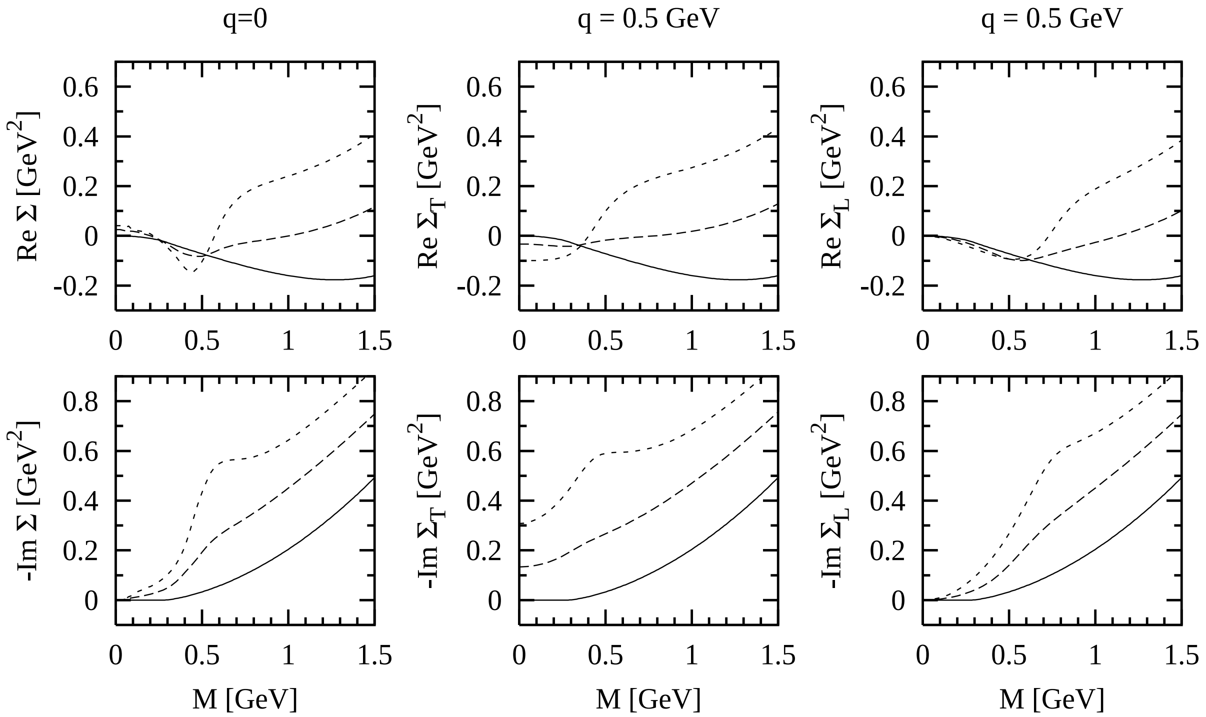


Abbildung 4.1: *Links: Selbstenergie $\Sigma = \Sigma_T = \Sigma_L$ für $|\vec{q}| = 0$, Mitte und rechts: Σ_T bzw. Σ_L für $|\vec{q}| = 0.5$ GeV, als Funktion der invarianten Masse $M = \sqrt{q^2}$ bei Dichten $\varrho = 0$ (durchgezogene Linie), $\varrho = \varrho_0$ (lang gestrichelte Linie) und $\varrho = 2\varrho_0$ (kurz gestrichelte Linie)*

Energien $\omega_i(\vec{k})+\omega_j(\vec{k}+\vec{q})$ (I_1 bis I_4) bzw. $\Omega_i(\vec{k})+\omega_j(\vec{k}+\vec{q})$ (I_6) sind. Die Delta-Breite bewirkt im wesentlichen eine Verbreiterung der δ-Funktionen. Im Drei-Niveau-Modell läßt sich der Imaginärteil der ρ-Selbstenergie also leicht interpretieren: Im Medium zerfällt das ρ-Meson nicht wie im Vakuum in zwei freie Pionen, sondern in zwei Quasiteilchen, wobei zwölf verschiedene Zerfälle möglich sind. Die Terme mit den Integralen I_1 bis I_4 beschreiben Zerfälle in zwei Quasi-Pionen, d. h. longitudinale Teilchen-Loch-Anregungen $(Nh)_L$ mit der Dispersionsrelation ω_1, „Pion"-Quasiteilchen π mit der Dispersionsrelation ω_2 oder longitudinale Delta-Loch-Quasiteilchen $(\Delta h)_L$ mit der Dispersionsrelation ω_3:

$$\begin{array}{lll} \rho \to (Nh)_L(Nh)_L, & \rho \to (Nh)_L\pi, & \rho \to (Nh)_L(\Delta h)_L, \\ \rho \to \pi\pi, & \rho \to \pi(\Delta h)_L, & \rho \to (\Delta h)_L(\Delta h)_L. \end{array}$$

Der Term mit I_6 beschreibt dagegen den Zerfall des ρ-Mesons in eines der oben genannten Quasiteilchen und transversale Teilchen-Loch-Anregungen $(Nh)_T$ mit der Dispersionsrelation Ω_1 oder transversale Delta-Loch-Anregungen $(\Delta h)_T$ mit der Dispersionsrelation Ω_2:

$$\begin{array}{lll} \rho \to (Nh)_T(Nh)_L, & \rho \to (Nh)_T\pi, & \rho \to (Nh)_T(\Delta h)_L, \\ \rho \to (\Delta h)_T(Nh)_L, & \rho \to (\Delta h)_T\pi, & \rho \to (\Delta h)_T(\Delta h)_L, \end{array}$$

Diese Vielzahl von Zerfällen, die mit Ausnahme des Zerfalls $\rho \to (\Delta h)_L(\Delta h)_L$ bereits bei niedrigeren Energien möglich sind als der Zerfall in zwei Pionen im Vakuum, führt insgesamt zu einem Anwachsen des Imaginärteils der ρ-Selbstenergie und dadurch zu einer

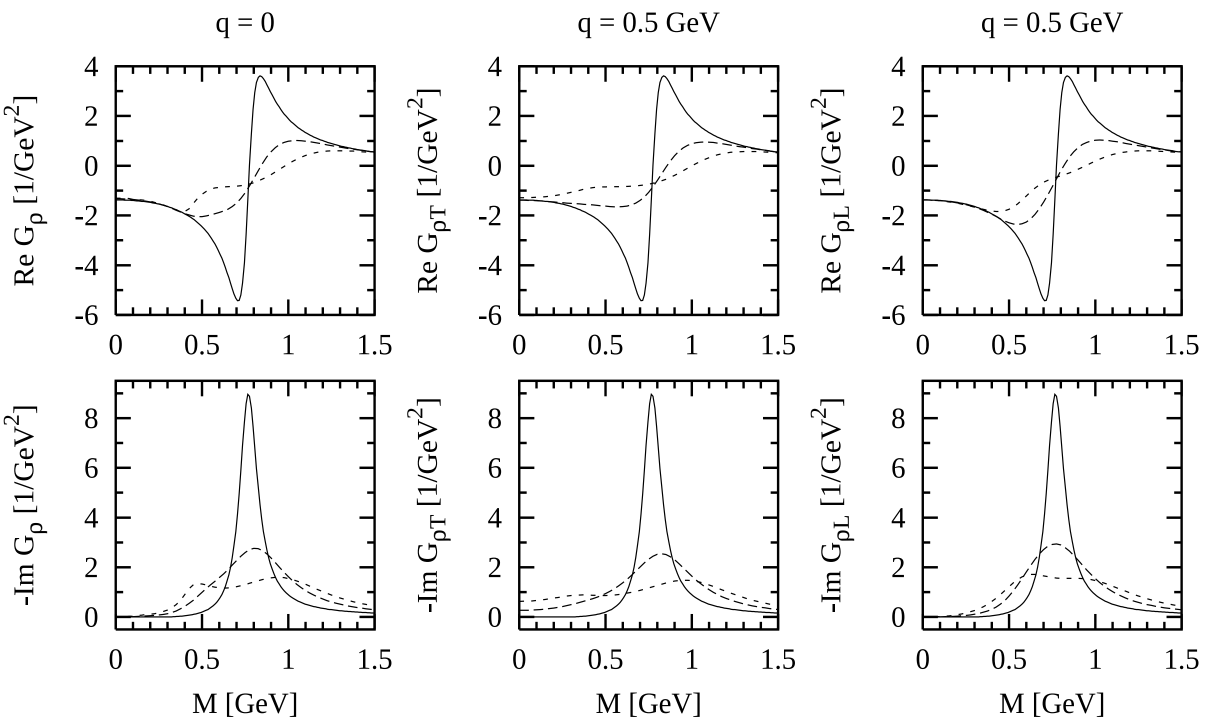


Abbildung 4.2: *Links: ρ-Propagator $G_\rho = G_{\rho T} = G_{\rho L}$ für $|\vec{q}| = 0$, Mitte und rechts: $G_{\rho T}$ bzw. $G_{\rho L}$ für $|\vec{q}| = 0.5$ GeV, als Funktion der invarianten Masse $M = \sqrt{q^2}$ bei Dichten $\varrho = 0$ (durchgezogene Linie), $\varrho = \varrho_0$ (lang gestrichelte Linie) und $\varrho = 2\varrho_0$ (kurz gestrichelte Linie)*

Verbreiterung des ρ-Propagators.
Wegen der geringen Stärke S_1 (siehe Abb. 2.4) liefern Zerfälle in ein $(Nh)_L$- und ein anderes Quasiteilchen nur einen kleinen Beitrag. Der Zerfall $\rho \to (Nh)_L(Nh)_L$ ist aber im Fall $\vec{q} = 0$ schon bei beliebig kleinen Energien q^0 möglich, so daß es in diesem Fall keine Schwelle für den Imaginärteil gibt. Trotzdem müßte auch in diesem Fall der Imaginärteil für $q^0 \to 0$ gegen null gehen (siehe nächster Abschnitt), was in unseren Ergebnissen nur näherungsweise erfüllt ist. Neben numerischen Problemen (die Integration der im Drei-Niveau-Modell sehr scharfen Nh-Maxima erfordert die Einführung eines kleinen Imaginärteils im Argument q^0) ist vor allem die in unserem Modell verwendete (unphysikalische) konstante Delta-Breite für diesen Fehler verantwortlich.
Der Zerfall $\rho \to \pi\pi$ (gemeint sind zwei π-Quasiteilchen, d. h. zwei Teilchen mit Dispersionsrelation ω_2) wird durch die Vertexkorrekturen stark unterdrückt, wie von Chanfray und Schuck gezeigt wurde [13]. Das kann man folgendermaßen sehen: Läßt man den $\pi N\Delta$-Formfaktor außer acht, so ist die $\rho\pi\pi$-Vertexfunktion proportional zu (siehe Gl. 3.66)

$$\Gamma_i^{(3)} \propto k_i(1 + \Pi(k)) + (k+q)_i(1 + \Pi(k+q)). \tag{4.32}$$

Beim Zerfall in zwei π-Quasiteilchen ist aber $k^0 = \omega_2(\vec{k})$ und $k^0 + q^0 = \omega_2(\vec{k} + \vec{q})$. Da der inverse Pion-Propagator nach Definition der ω_i dort eine Nullstelle hat, wird Gl. (4.32) dann zu

$$\Gamma_i^{(3)} \propto k_i \frac{\omega_2^2(\vec{k}) - m_\pi^2}{\vec{k}^2} + (k+q)_i \frac{\omega_2^2(\vec{k}+\vec{q}) - m_\pi^2}{(\vec{k}+\vec{q})^2}. \tag{4.33}$$

Mit der freien Pion-Dispersionsrelation ω_π erhielte man daraus wieder den nackten $\rho\pi\pi$-Vertex, aber die Dispersionsrelation ω_2 verläuft wesentlich flacher, so daß obiger Ausdruck

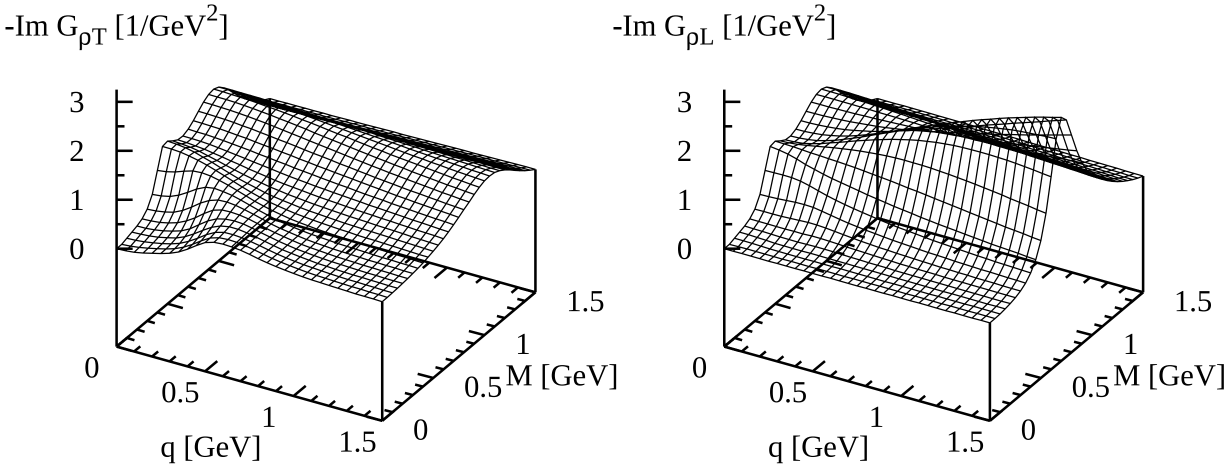
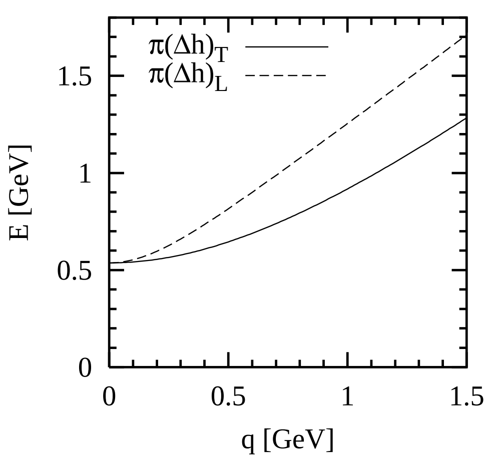


Abbildung 4.3: *Links: transversaler Anteil $G_{\rho T}$, rechts: longitudinaler Anteil $G_{\rho L}$ des ρ-Propagators bei $\varrho = 2\varrho_0$ als Funktion der invarianten Masse M und des Impulses $|\vec{q}|$.*

im Verhältnis sehr klein ist (zur Verdeutlichung verweisen wir auf Abb. 2.4).
Der Zerfall, der vor allem für höhere invariante Massen M dem Vakuumbeitrag am ähnlichsten ist, ist der Zerfall $\rho \to (\Delta h)_L(\Delta h)_L$. Bei hohen Impulsen sind die sogenannten $(\Delta h)_L$-Quasiteilchen nämlich hauptsächlich Pionen, wie man an der Übereinstimmung der Dispersionsrelationen ω_3 und ω_π sehen kann.
Die wichtigsten Beiträge, die die ρ-Selbstenergie im Medium von der im Vakuum unterscheiden, sind die Zerfälle $\rho \to \pi(\Delta h)_L$ und $\rho \to \pi(\Delta h)_T$. Beide sind besonders gut in Abb. 4.3 zu sehen, die den Imaginärteil des ρ-Propagators bei zweifacher Kernmateriedichte ($p_F = 339$ MeV) als Funktion von M und $|\vec{q}|$ zeigt. Sowohl in $\operatorname{Im} G_{\rho T}$ als auch in $\operatorname{Im} G_{\rho L}$ erkennt man deutlich je einen „Ast", der durch einen dieser Zerfälle zustande kommt. Wir wollen diese Strukturen wenigstens qualitativ durch folgendes einfaches Argument erklären: Wie in Abb. 2.4 zu sehen ist, trägt der mittlere Ast des Pion-Propagators vor allem bei niedrigen Impulsen zum Pion-Propagator bei. Beim Zerfall in ein π- und ein anderes Quasiteilchen sind also besonders die Beiträge wichtig, in denen das π einen niedrigen und das andere Teilchen einen hohen Impuls hat; die Summe der beiden Impulse ist durch $\vec{q}$ bestimmt. Wir nehmen also an, das π habe einen sehr kleinen Impuls, und das Δh etwa den Impuls $\vec{q}$. Die Energie für die Zerfälle ist dann

$$E_{\rho\to\pi(\Delta h)_L} \approx \omega_3(\vec{q}) + m_\pi, \quad E_{\rho\to\pi(\Delta h)_T} \approx \Omega_2(\vec{q}) + m_\pi, \tag{4.34}$$

im Fall $\vec{q} = 0$ stimmen diese beiden Energien überein. Berechnet man die zugehörigen invarianten Massen $M = \sqrt{E^2 - \vec{q}^2}$ (siehe Abb. 4.4), so stellt man fest, daß M für den Zerfall $\rho \to \pi(\Delta h)_L$ mit wachsendem $|\vec{q}|$ zunimmt, für den Zerfall $\rho \to \pi(\Delta h)_T$ dagegen abnimmt und bei einem bestimmten $\vec{q}$ sogar den Wert $M = 0$ erreicht. Wie man durch Vergleich von Abb. 4.4 mit Abb. 4.3 sieht, stimmt der Verlauf des „Astes" in $G_{\rho T}$ qualitativ mit dem vorhergesagten $M_{\rho\to\pi(\Delta h)_T}$ überein, und der „Ast" in $G_{\rho L}$ folgt etwa der Kurve $M_{\rho\to\pi(\Delta h)_L}$. Die genauen Werte für die Energien kann man natürlich nicht so



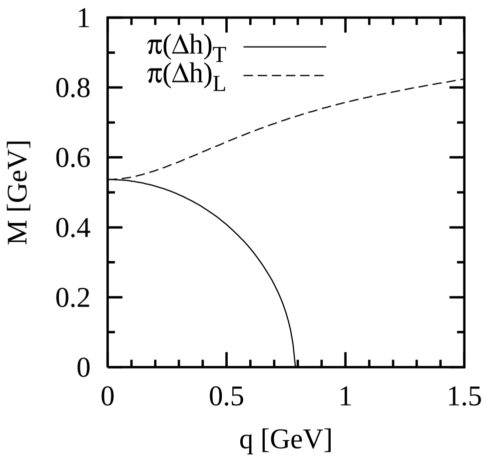


Abbildung 4.4: *Links: $E_{\rho\to\pi(\Delta h)_L}$ und $E_{\rho\to\pi(\Delta h)_L}$ bei $\varrho = 2\varrho_0$ als Funktion des Impulses $|\vec{q}|$ nach Gl. (4.34), rechts: zugehörige invariante Massen $M = \sqrt{E^2 - \vec{q}^2}$*

einfach angeben, da der mittlere π-Impuls nicht vernachlässigt werden kann. Aber auch die Tatsache, daß der Zerfall $\rho \to \pi(\Delta h)_T$ vor allem in $G_{\rho T}$ und der Zerfall $\rho \to \pi(\Delta h)_L$ vor allem in $G_{\rho L}$ auftritt, kann mit der einfachen Annahme, der π-Impuls sei klein, begründet werden. Dann ist nämlich der Impuls des Δh-Quasiteilchens etwa gleich $\vec{q}$. Der Zerfall $\rho \to \pi(\Delta h)_T$ ist nur über den $\rho\pi N\Delta$-Vertex möglich, der proportional zu S_i bzw. $S_i^\dagger$ ist, so daß transversale Δh-Quasiteilchen nur zu den zum Δh-Impuls, also zu $\vec{q}$, transversalen Komponenten der Selbstenergie, also zu Σ_T, beitragen. Aus demselben Grund trägt der Zerfall $\rho \to \pi(\Delta h)_L$ über den $\rho\pi N\Delta$-Vertex nur zu Σ_L bei. Der $\rho\pi\pi$-Vertex und seine Korrekturen sind in diesem Fall proportional zu q_i, so daß der Zerfall $\rho \to \pi(\Delta h)_L$ über diesen Vertex ebenfalls vor allem zu Σ_L beiträgt.

4.3 Der Einfluß der Fermi-Bewegung

Die im vorigen Abschnitt dargestellten Ergebnisse wurden im Drei-Niveau-Modell, also unter Vernachlässigung der Fermi-Bewegung der Nukleonen erhalten. In Abschnitt 2.5 wurde gezeigt, daß insbesondere das Teilchen-Loch-Kontinuum nur sehr schlecht durch ein Quasiteilchen approximiert werden kann, d. h. daß das Drei-Niveau-Modell keine besonders gute Näherung darstellt. Es stellt sich also die Frage, wie gravierend sich die Vernachlässigung der Fermi-Bewegung auf die ρ-Selbstenergie auswirkt.
Um das zu untersuchen, dürfen wir in den Integralen (4.12) bis (4.20) nicht die Drei-Niveau-Modell-Näherungen für Π' und G_π einsetzen. Das hat aber zur Folge, daß die Integration über k_0 nicht analytisch ausgeführt werden kann. Andererseits ist die Integration entlang der ganzen k_0-Achse auch numerisch nicht mit ausreichender Genauigkeit möglich, so daß man zu einem Trick greifen muß, der bereits in verschiedenen anderen Arbeiten verwendet wurde (z. B. [7, 13]). Dieser Trick ermöglicht allerdings nur die Berechnung des Imaginärteils der ρ-Selbstenergie. Der Realteil kann aber anschließend über ein Dispersionsintegral aus dem Imaginärteil berechnet werden.
Der Ausgangspunkt für diesen Trick ist die Tatsache, daß sowohl der Pion-Propagator als auch die Pion-Selbstenergie Dispersionsrelationen genügen, nämlich

$$G_\pi(k_0,\vec{k}) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega^2 \frac{\operatorname{Im} G_\pi(\omega,\vec{k})}{k_0^2-\omega^2+i\varepsilon}, \tag{4.35}$$

$$\Pi'(k_0,\vec{k}) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega^2 \frac{\operatorname{Im} \Pi'(\omega,\vec{k})}{k_0^2-\omega^2+i\varepsilon}. \tag{4.36}$$

Wir betrachten z. B. das Integral I_1 (Gl. 4.12),

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{i}{\pi}\int dk_0 G_\pi(k_0,\vec{k})G_\pi(k_0+q_0,\vec{k}+\vec{q}) \\ &= \frac{i}{\pi^3}\int_0^\infty d\omega_1^2\int_0^\infty d\omega_2^2 \int dk_0 \frac{\operatorname{Im} G_\pi(\omega_1,\vec{k})}{k_0^2-\omega_1^2+i\varepsilon}\,\frac{\operatorname{Im} G_\pi(\omega_2,\vec{k}+\vec{q})}{(k_0+q_0)^2-\omega_2^2+i\varepsilon}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Führen wir die Integration über k_0 aus und bilden den Imaginärteil, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}\frac{i}{\pi^3}\int dk_0 \frac{1}{k_0^2-\omega_1^2+i\varepsilon}\,\frac{1}{(k_0+q_0)^2-\omega_2^2+i\varepsilon} &= \mathrm{Im}\frac{1}{\pi^2}\frac{(\omega_1+\omega_2)}{\omega_1\omega_2}\,\frac{1}{q_0^2-(\omega_1+\omega_2)^2+i\varepsilon}\\
&= -\frac{1}{\pi}\frac{(\omega_1+\omega_2)}{\omega_1\omega_2}\delta(q_0^2-(\omega_1+\omega_2)^2).
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

Damit ergibt sich für den Imaginärteil von I_1

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}\, I_1 &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega_1^2\int_0^\infty d\omega_2^2\,\mathrm{Im}\, G_\pi(\omega_1,\vec{k})\mathrm{Im}\, G_\pi(\omega_2,\vec{k}+\vec{q})\frac{(\omega_1+\omega_2)}{\omega_1\omega_2}\delta(q_0^2-(\omega_1+\omega_2)^2)\\
&= -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\omega_1\int_0^\infty d\omega_2\,\mathrm{Im}\, G_\pi(\omega_1,\vec{k})\mathrm{Im}\, G_\pi(\omega_2,\vec{k}+\vec{q})\delta(q_0-\omega_1-\omega_2)\\
&= -\frac{2}{\pi}\int_0^{q_0} d\omega_1\,\mathrm{Im}\, G_\pi(\omega_1,\vec{k})\mathrm{Im}\, G_\pi(q_0-\omega_1,\vec{k}+\vec{q}).
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

Der große Vorteil dieser Methode besteht darin, daß anstelle des ursprünglichen Integrals von $-\infty$ bis $+\infty$ nur noch ein Integral von 0 bis q_0 berechnet werden muß. Nach demselben Verfahren erhalten wir für die Imaginärteile der restlichen Integrale I_2 bis I_7 (Gln. 4.13, 4.15 bis 4.18 und 4.20) folgende Ausdrücke:

$$
\mathrm{Im}\, I_2 = -\frac{2}{\pi}\int_0^{q_0} d\omega\,\mathrm{Im}\,(\Pi' G_\pi)(\omega,\vec{k})\mathrm{Im}\, G_\pi(q_0-\omega,\vec{k}+\vec{q}), \tag{4.40}
$$

$$
\tag{4.41}
$$

$$
\mathrm{Im}\, I_3 = -\frac{2}{\pi}\int_0^{q_0} d\omega\,(\omega^2-\omega_\pi^2(\vec{k}))\mathrm{Im}\,(\Pi' G_\pi)(\omega,\vec{k})\mathrm{Im}\, G_\pi(q_0-\omega,\vec{k}+\vec{q}), \tag{4.42}
$$

$$
\mathrm{Im}\, I_4 = -\frac{2}{\pi}\int_0^{q_0} d\omega\,\mathrm{Im}\,(\Pi' G_\pi)(\omega,\vec{k})\mathrm{Im}\,(\Pi' G_\pi)(q_0-\omega,\vec{k}+\vec{q}), \tag{4.43}
$$

$$
\mathrm{Im}\, I_5 = 0, \tag{4.44}
$$

$$
\mathrm{Im}\, I_6 = -\frac{2}{\pi}\int_0^{q_0} d\omega\,\mathrm{Im}\,\Pi'(\omega,\vec{k})\mathrm{Im}\, G_\pi(q_0-\omega,\vec{k}+\vec{q}), \tag{4.45}
$$

$$
\mathrm{Im}\, I_7 = 0. \tag{4.46}
$$

Wie man sieht, gehen alle Imaginärteile, wie es sein muß, für $q_0 \to 0$ gegen null. Im vorigen Abschnitt bemerkten wir jedoch eine, allerdings nur kleine, Abweichung hiervon, und machten die konstante Delta-Breite dafür verantwortlich. Die Verwendung einer konstanten Delta-Breite führt dazu, daß der Delta-Propagator nicht die durch die Lehmann-Darstellung gegebenen Analytizitätseigenschaften hat, welche direkt auf der Definition des Propagators beruhen (siehe [26], S. 72ff). Dieser Fehler pflanzt sich durch die Selbstenergie Π' bis in den Pion-Propagator G_π fort und bewirkt, daß die Dispersionsrelationen (4.35) und (4.36) nicht erfüllt sind. Das kann man sofort daran erkennen, daß die Dispersionsrelationen nur dann gelten können, wenn der Propagator G_π und die Selbstenergie Π' entlang der reellen k_0-Achse Schnitte haben, in der restlichen komplexen Ebene aber analytisch sind. Durch die konstante Delta-Breite entsteht jedoch ein Schnitt in endlicher Entfernung (nämlich $\frac{\Gamma_\Delta}{2}$) von der reellen k_0-Achse. Wenn wir trotzdem die Gleichungen (4.39) bis (4.46) verwenden, so machen wir also eigentlich einen Fehler, da die Voraussetzungen (4.35) und (4.36) gar nicht erfüllt sind. Andererseits scheint aber die Anwendung der Dispersionsrelationen die durch die konstante Delta-Breite verursachten Fehler

zumindest teilweise zu korrigieren, wie z. B. das Verschwinden des Imaginärteils der ρ-Selbstenergie für $q_0 \to 0$ zeigt.
Wir berechnen nun den Imaginärteil der ρ-Selbstenergie, indem wir die Gleichungen (4.39) bis (4.46) mit dem Pion-Propagator G_π und der Selbstenergie Π' ohne Vernachlässigung der Fermi-Bewegung der Nukleonen in die Komponenten Σ_{11} und Σ_{33} der Gleichung (4.21) einsetzen und die Integrale numerisch auswerten. Einige Ergebnisse für die Dichte $\varrho = 2\varrho_0$ sind in Abb. 4.5 zu sehen. Zum Vergleich sind dort auch die Ergebnisse der im Drei-Niveau-Modell durchgeführten Rechnungen eingezeichnet. Da die Vernachlässigung der Fermi-Bewegung eine umso schlechtere Näherung darstellt, je größer die Dichte der Kernmaterie ist, sind die Abweichungen bei kleineren Dichten geringer als in diesen Bildern. Wie man sieht, sind selbst bei $\varrho = 2\varrho_0$ die Abweichungen so klein, daß sich der im Vergleich zu den Drei-Niveau-Modell-Rechnungen sehr große numerische Aufwand nicht lohnt. Vermutlich kommt es wegen der Integrationen in der ρ-Selbstenergie nicht auf die genaue Form des Pion-Propagators, sondern nur auf die grobe Verteilung der Stärke an, so daß das Drei-Niveau-Modell für diesen Zweck ausreichend ist.

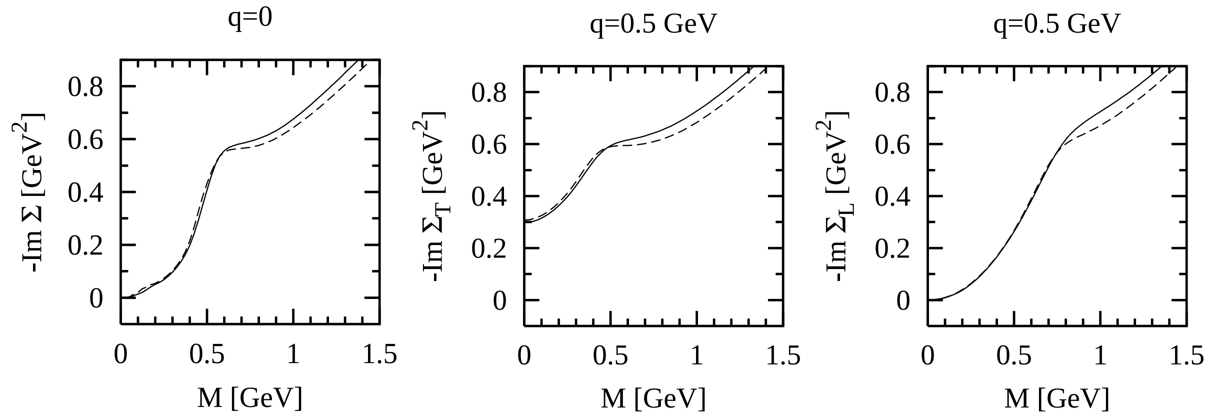


Abbildung 4.5: *Links: Selbstenergie $\Sigma = \Sigma_T = \Sigma_L$ für $|\vec{q}| = 0$, Mitte und rechts: Σ_T und Σ_L für $|\vec{q}| = 0.5$ GeV, bei $\varrho = 2\varrho_0$. Durchgezogene Linie: vollständige Rechnung, gestrichelte Linie: Rechnung im Drei-Niveau-Modell*

Kapitel 5

Anwendungen

In diesem Kapitel wollen wir mit unserem Modell für das ρ-Meson in Kernmaterie verschiedene experimentell meßbare Größen berechnen, nämlich den Photoabsorptions-Wirkungsquerschnitt von Kernen sowie Dileptonenspektren bei Schwerionenreaktionen. Letztere stellten die ursprüngliche Motivation dieser Arbeit dar. Um für den Photoabsorptions-Wirkungsquerschnitt vernünftige Ergebnisse zu erhalten, wird es sich herausstellen, daß einige der Parameterwerte aus Tabelle 2.1 geändert werden müssen, insbesondere der in den πNN- bzw. $\pi N\Delta$-Formfaktor eingehende Parameter Λ.

5.1 Photoabsorptions-Wirkungsquerschnitte

Zunächst wollen wir einen allgemeinen Ausdruck für den Photoabsorptions-Wirkungsquerschnitt pro Nukleon von Kernmaterie herleiten, wobei wir im Prinzip dieselben Schritte vollziehen wie Chanfray und Schuck bei der Herleitung der Dileptonenproduktionsrate (siehe [13], Gln. (2.1) bis (2.10)). Als Anfangszustand $|i\rangle$ betrachten wir eine elektromagnetische Welle mit Impuls $q = (q^0, \vec{q}) = (|\vec{q}|, \vec{q})$ und Polarisation λ in Kernmaterie, die sich im Grundzustand $|\Phi_0\rangle$ befinde:

$$|i\rangle = a^\dagger(\vec{q}, \lambda)|\Phi_0\rangle \tag{5.1}$$

wobei $a^\dagger$ der Erzeugungsoperator eines Photons ist. Das S-Matrixelement für den Übergang in einen hadronischen Endzustand $|f\rangle$ ist in niedrigster Ordnung in der Elementarladung e gleich

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle f|i\int d^4x\, eA_\mu(x)J^\mu(x)a^\dagger(\vec{q}, \lambda)|\Phi_0\rangle \\ &= \frac{ie}{\sqrt{(2\pi)^3 2|\vec{q}|}}\,\epsilon_\mu(\vec{q}, \lambda)\int d^4x\, e^{-iq\cdot x}\langle f|J^\mu(x)|\Phi_0\rangle. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Hierbei ist $\epsilon(\vec{q}, \lambda) = (0, \vec{\epsilon}(\vec{q}, \lambda))$ der Polarisationsvektor des Photons mit den Eigenschaften $|\vec{\epsilon}(\vec{q}, \lambda)| = 1$ und $\vec{q}\cdot\vec{\epsilon}(\vec{q}, \lambda) = 0$. Nutzen wir aus, daß $|f\rangle$ und $|\Phi_0\rangle$ Eigenzustände zum Hamilton- und zum Impulsoperator mit Eigenwerten p_f bzw. 0 sind, so erhalten wir für das S-Matrixelement

$$
\begin{aligned}
S_{fi} &= \frac{ie}{\sqrt{(2\pi)^3 2|\vec{q}|}}\,\epsilon_\mu(\vec{q},\lambda)\int d^4x\, e^{-iq\cdot x}\langle f|e^{ip_f\cdot x}J^\mu(0)|\Phi_0\rangle \\
&= \frac{ie}{\sqrt{(2\pi)^3 2|\vec{q}|}}\,\epsilon_\mu(\vec{q},\lambda)\langle f|J^\mu(0)|\Phi_0\rangle(2\pi)^4\delta(p_f-q). \qquad (5.3)
\end{aligned}
$$

Bei der Berechnung des Wirkungsquerschnitts ist es bequemer, nur ein endliches (großes) Volumen V und eine endliche (lange) Zeit T zu betrachten. Dann muß man die beim Quadrieren von S_{fi} auftretenden Terme folgendermaßen ersetzen [16]:

$$
\frac{1}{(2\pi)^3} \to \frac{1}{V} \quad \text{und} \quad |(2\pi)^4\delta(p_f-q)|^2 \to VT(2\pi)^4\delta(p_f-q).
$$

Den Wirkungsquerschnitt erhält man dann, indem man die Übergangsrate $\frac{|S_{fi}|^2}{T}$ durch die Anzahl der pro Zeit- und Flächeneinheit einfallenden Photonen, die wegen der Normierung der einfallenden Welle gleich $\frac{c}{V}=\frac{1}{V}$ ist, dividiert:

$$
\sigma_{\gamma\to f} = \frac{e^2}{2|\vec{q}|}\Big|\epsilon_\mu(\vec{q},\lambda)\langle f|J^\mu(0)|\Phi_0\rangle\Big|^2 V(2\pi)^4\delta(p_f-q) \qquad (5.4)
$$

Der Endzustand $|f\rangle$ wird nicht beobachtet, so daß wir über f summieren müssen. Anschließend teilen wir das Ergebnis durch die Anzahl der Nukleonen $A=\varrho V$, um den Wirkungsquerschnitt pro Nukleon zu erhalten:

$$
\frac{\sigma}{A} = \frac{1}{\varrho}\frac{e^2}{2|\vec{q}|}\sum_f\Big|\epsilon_\mu(\vec{q},\lambda)\langle f|J^\mu(0)|\Phi_0\rangle\Big|^2(2\pi)^4\delta(p_f-q). \qquad (5.5)
$$

Nun betrachten wir die Strom-Strom-Korrelationsfunktion

$$
J^{\mu\nu}(q) = -i\int d^4x\, e^{iq\cdot x}\langle\Phi_0|T\Big(J^\mu(x)J^\nu(0)\Big)|\Phi_0\rangle. \qquad (5.6)
$$

Durch Einschieben eines vollständigen Satzes von Energie- und Impulseigenzuständen $|f\rangle$ und unter Verwendung von

$$
\Theta(x^0) = i\int\frac{d\omega}{2\pi}\frac{e^{-i\omega x^0}}{\omega+i\varepsilon}
$$

erhalten wir

$$
\begin{aligned}
J^{\mu\nu}(q) &= (2\pi)^3\sum_f\Big(\frac{\langle\Phi_0|J^\mu(0)|f\rangle\langle f|J^\nu(0)|\Phi_0\rangle}{q^0-p_f^0+i\varepsilon}\delta(\vec{q}-\vec{p}_f) \\
&\qquad +\frac{\langle\Phi_0|J^\nu(0)|f\rangle\langle f|J^\mu(0)|\Phi_0\rangle}{-q^0-p_f^0+i\varepsilon}\delta(\vec{q}+\vec{p}_f)\Big). \qquad (5.7)
\end{aligned}
$$

Da $J^{\mu\nu}=J^{\nu\mu}$ ist, kann nur der bzgl. $\mu\leftrightarrow\nu$ symmetrische Realteil der beiden Zähler zum Ergebnis beitragen, nicht jedoch der antisymmetrische Imaginärteil. Folglich ist der Imaginärteil des gesamten Ausdrucks gleich

$$
\mathrm{Im}\, J^{\mu\nu}(q) = -\frac{1}{2}(2\pi)^4\sum_f\langle\Phi_0|J^\mu(0)|f\rangle\langle f|J^\nu(0)|\Phi_0\rangle\Big(\delta(q-p_f)+\delta(q+p_f)\Big). \qquad (5.8)
$$

Da im Fall $q^0 > 0$ nur die erste δ-Funktion beiträgt, können wir damit den Photoabsorptions-Wirkungsquerschnitt folgendermaßen schreiben:

$$\frac{\sigma}{A} = -\frac{1}{\varrho} \frac{e^2}{|\vec{q}|} \epsilon_\mu(\vec{q},\lambda)\epsilon_\nu(\vec{q},\lambda) \, \mathrm{Im}\, J^{\mu\nu}(q). \tag{5.9}$$

Schließlich verwenden wir noch die Current-Field-Identity (1.11)

$$J^\mu_{isovektor} = \frac{(m_\rho^{(0)})^2}{g} \rho^\mu$$

und erhalten bei Vernachlässigung des isoskalaren Anteils des Stroms eine Beziehung zwischen dem Wirkungsquerschnitt und dem ρ-Propagator:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{A} &= -\frac{1}{\varrho} \frac{e^2}{|\vec{q}|} \frac{(m_\rho^{(0)})^4}{g^2} \epsilon_\mu(\vec{q},\lambda)\epsilon_\nu(\vec{q},\lambda) \, \mathrm{Im}\, G_\rho^{\mu\nu}(q) \\ &= -\frac{1}{\varrho} \frac{e^2}{|\vec{q}|} \frac{(m_\rho^{(0)})^4}{g^2} \mathrm{Im}\, G_{\rho\, T}(q) \\ &= -\frac{1}{\varrho} \frac{e^2}{|\vec{q}|} \frac{(m_\rho^{(0)})^4}{g^2} \frac{\mathrm{Im}\, \Sigma_T(q)}{|(m_\rho^{(0)})^2 + \Sigma_T(q)|^2} \end{aligned} \tag{5.10}$$

Die bisherigen Betrachtungen wurden für Kernmaterie durchgeführt. Da im Vakuum jedoch für $q^2 = 0$ die ρ-Selbstenergie verschwindet, kann problemlos der Grenzübergang zu sehr kleinen Dichten durchgeführt werden, in dem sich natürlich der Photoabsorptions-Wirkungsquerschnitt eines freien Nukleons (isospin-gemittelt) ergibt:

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\sigma}{A} = -\frac{e^2}{|\vec{q}|} \frac{1}{g^2} \mathrm{Im} \lim_{\varrho \to 0} \frac{\Sigma_T(q)}{\varrho}. \tag{5.11}$$

In diesem Grenzfall gibt es also keine Interferenz der unterschiedlichen Beiträge zu Σ_T.

Bevor wir den ρ-Propagator unseres Modells hier einsetzen, müssen wir uns zuerst darüber im klaren sein, was wir von unserem Modell überhaupt erwarten können. Aus den gemessenen Photoabsorptions-Wirkungsquerschnitten des Protons und von Kernen ergibt sich, daß man zur realistischen Beschreibung der Energieabhängigkeit zwei verschiedene Anteile benötigt:

1. Anregung von Resonanzen. In Kernmaterie sind das Anregungen wie z. B. $\gamma \to \Delta h$, $\gamma \to N^*(1520)h$ usw. Bei der Absorption am Nukleon würde man diese Reaktionen stattdessen als $\gamma + N \to \Delta$, $\gamma + N \to N^*(1520)$ usw. beschreiben. Im VDM entsprechen diese beiden Sichtweisen den in Abb. 5.1 dargestellten Graphen.

2. Nichtresonanter Untergrund durch die Kopplung des Photons an virtuelle Mesonen. Zwei Beispiele hierfür, die sowohl in Kernmaterie als auch beim freien Nukleon möglich sind, sind wieder in beiden Sichtweisen in Abb. 5.2 dargestellt. Solche Reaktionen sind beim freien Nukleon ab der Schwelle

$$|\vec{q}| \geq m_\pi + \frac{m_\pi^2}{2m_N} \approx 150 \text{ MeV} \tag{5.12}$$

Abbildung 5.1: *Absorption eines Photons durch Bildung einer Nukleon-Resonanz im VDM. Links: Beschreibung in Kernmaterie als Resonanz-Loch-Anregung, rechts: derselbe Prozeß mit einem freien Nukleon*

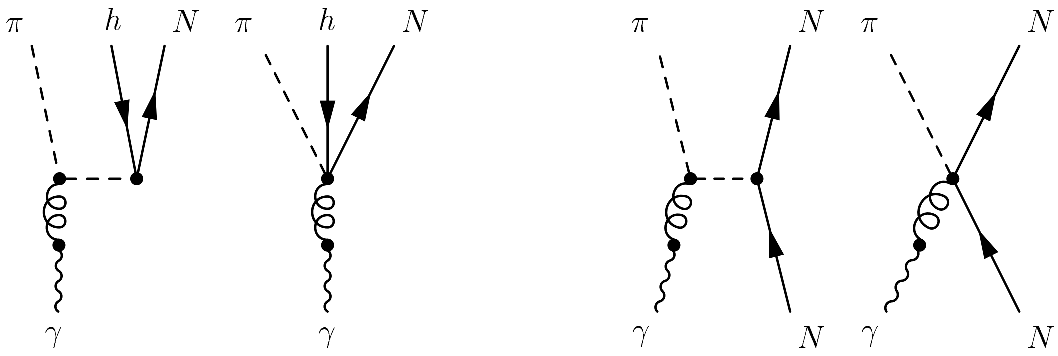


Abbildung 5.2: *Beiträge zum Untergrund des Photoabsorptions-Wirkungsquerschnitts. Links: Beschreibung im Teilchen-Loch-Bild in Kernmaterie, rechts: dieselben Prozesse mit einem freien Nukleon*

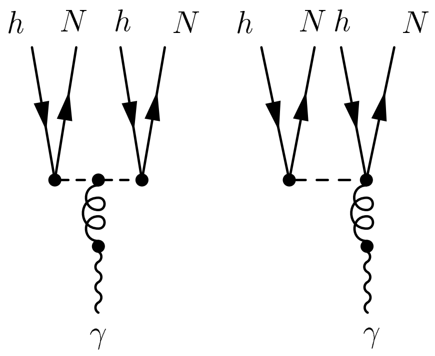


Abbildung 5.3: *Beispiele zur Photoabsorption durch Mesonaustauschströme*

kinematisch möglich. In Kernmaterie, aber nicht beim freien Nukleon, gibt es außerdem die Kopplung des Photons an Mesonen, die zwischen zwei Nukleonen ausgetauscht werden („Mesonaustauschströme"). Beispiele hierfür sind in Abb. 5.3 dargestellt. Solche Beiträge nehmen quadratisch mit der Dichte zu, sie existieren bereits unterhalb der Pionschwelle.

Die nichtresonanten Prozesse, wie sie in den Abbildungen 5.2 und 5.3 dargestellt sind, sind in unserem Modell enthalten. Wenn man die Photon-Linien wegläßt, kann man diese Graphen nämlich als „durchgeschnittene" ρ-Selbstenergiediagramme ansehen. Die resonanten Prozesse wie in Abb. 5.1 sind jedoch nicht enthalten, da wir dazu ρ-Selbstenergiediagramme wie $\rho \to \Delta h \to \rho$ usw. berechnen müßten, wobei die Kopplung an die magnetischen Momente den Hauptbeitrag liefert. Diese wurde bisher vernachlässigt, da in den $\rho\pi\pi$-Vertexkorrekturen nur die Kopplung an die Ladung für die Eichinvarianz unerläßlich war. Zur realistischen Beschreibung dieser Prozesse muß außerdem das Vektordominanzmodell modifiziert werden (siehe Friman und Pirner [9]). Wir beschränken uns deshalb auf unser bisheriges Modell, mit dem wir allerdings nur den nichtresonanten Untergrund des Photoabsorptions-Wirkungsquerschnitts berechnen können.
In Abb. 5.4 sind sowohl die experimentellen Daten für den Wirkungsquerschnitt des Protons und eines Kerns zu sehen als auch der mit unserem Modell berechnete Untergrund. Der Kern-Wirkungsquerschnitt wurde an Uran gemessen, jedoch hängt der Wirkungsquerschnitt pro Nukleon bei diesen Energien fast gar nicht von der Art des Kerns ab, so daß man annehmen kann, daß unendlich ausgedehnte Kernmaterie eine brauchbare Näherung

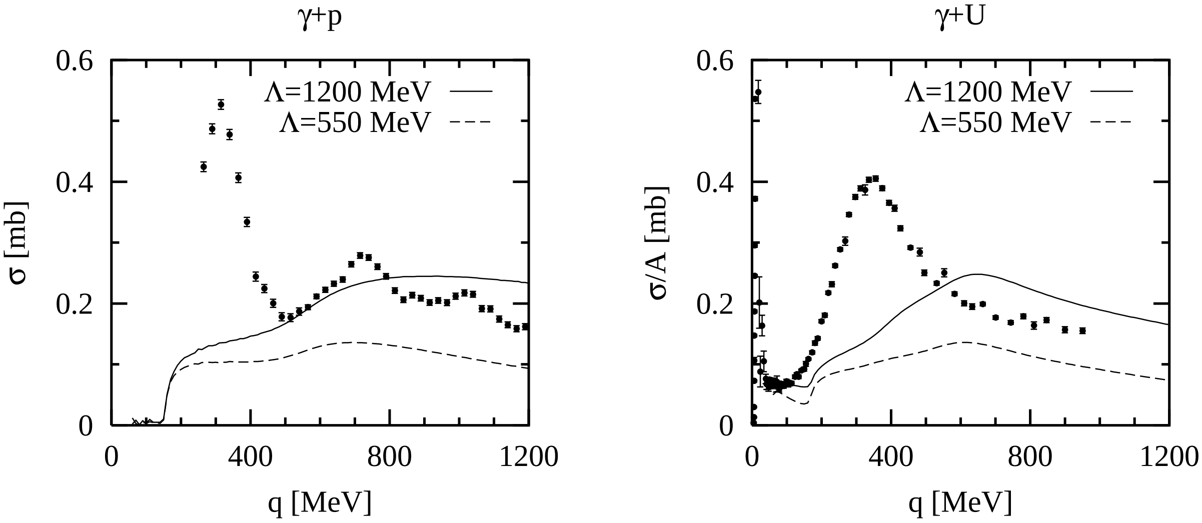


Abbildung 5.4: *Links: Photoabsorptions-Wirkungsquerschnitt des Protons. Die experimentellen Werte stammen aus Ref. [32], die theoretischen Werte wurden nach Gl. (5.10) mit* $\varrho = 0.052\,\varrho_0$ *(*$p_F = 100$ MeV*) berechnet. Rechts: Photoabsorptions-Wirkungsquerschnitt pro Nukleon von Uran. Die experimentellen Werte sind Mittelungen der in Ref. [33, 34, 35] angegebenen Daten, die theoretischen Werte wurden nach Gl. (5.10) mit* $\varrho = 0.8\,\varrho_0$ *(*$p_F = 249$ MeV*) berechnet. In beiden Bildern wurden für die durchgezogene Linie die Parameter aus Tabelle 2.1 verwendet und für die gestrichelte Linie die Parameter aus Tabelle 5.1.*

darstellt. Allerdings verwenden wir in den Rechnungen eine etwas verringerte Dichte von $\varrho = 0.8\varrho_0$ [36].
Üblicherweise (siehe z. B. [32, 37]) benötigt man zur Anpassung der gemessenen Proton- und Kern-Daten in der Nähe der Δ-Resonanz einen fast konstanten Untergrund von etwa 0.1 mb. Verwenden wir die Parameter aus Tabelle 2.1, so erhalten wir jedoch für die Absorption sowohl am Nukleon als auch an Kernmaterie einen viel zu großen Untergrund, der teilweise sogar den totalen Wirkungsquerschnitt übersteigt. Da die πNN- und die $\pi N\Delta$-Kopplungskonstante sehr genau bekannt sind und der Einfluß der Migdal-Parameter bei kleinen Dichten verschwindet, bleibt für die Photoabsorption am Nukleon nur ein freier Parameter, nämlich der πNN- bzw. $\pi N\Delta$-Formfaktor Λ. Es stellt sich heraus, daß er auf einen wesentlich kleineren als den in Tabelle 2.1 angegebenen Wert gesetzt werden muß. Die Tatsache, daß das Maximum der Δ-Resonanz für die Photoabsorption an Kernen kaum gegenüber seiner Position für die Absorption am Proton verschoben ist, spricht dafür, daß auch die Migdal-Parameter kleiner gewählt werden müssen als in Tabelle 2.1. Eine Anpassung der Parameter an den gesamten Photoabsorptions-Wirkungsquerschnitt wurde von Rapp et al. mit einem erweiterten Modell, das auch die resonanten Beiträge beschreibt, durchgeführt [36]. Die so gefundenen Parameterwerte sind in Tabelle 5.1 zusammengestellt.

$m_\pi = 140$ MeV	$f_N = 1.01$
$m_N = 939$ MeV	$f_\Delta = 2f_N = 2.02$
$m_\Delta = 1232$ MeV	$g'_{11} = 0.6$
$\Gamma_\Delta = 120$ MeV	$g'_{12} = 0.25$
$\Lambda = 550$ MeV	$g'_{22} = 0.25$

Tabelle 5.1: *An den totalen Photoabsorptions-Wirkungsquerschnitt angepaßte Parameter für das Pion in Kernmaterie. Die Werte stammen aus Ref. [36].*

5.2 Dileptonenspektren

In diesem Abschnitt geht es um die Berechnung des Spektrums der von heißer Kernmaterie ausgesandten Dileptonenpaare, speziell e^+e^--Paare. Heiße Kernmaterie ist dabei als Näherung für den sogenannten „Feuerball", das heiße Reaktionszentrum nach einem Schwerionenstoß zu verstehen. Es ist jedoch fraglich, ob ein solcher Zustand, der sich möglicherweise noch nicht einmal in einem lokalen thermischen Gleichgewicht befindet, durch unendlich ausgedehnte Kernmaterie mit homogener Dichte und Temperatur vernünftig approximiert werden kann.
Ferner hat unser Modell den Nachteil, daß es über die Annahme des thermischen Gleichgewichts hinaus weitere Näherungen erfordert, da wir alle Rechnungen bisher nur für $T = 0$ durchgeführt haben. Es geht hier also nicht darum, möglichst realistische, direkt mit dem Experiment vergleichbare Dileptonenspektren zu berechnen, sondern vielmehr um eine Abschätzung, wie wichtig die bei den früheren Rechnungen von Rapp et al. [7, 8] vernachlässigte Abhängigkeit der $\rho \to \pi\pi \to \rho$-Selbstenergie vom Dreier-Impuls $\vec{q}$ für das

Dileptonenspektrum ist.
Die Anzahl der von einem Volumen d^3x in der Zeit dx^0 ausgesandten e^+e^--Paare mit einem Gesamtimpuls im Bereich d^4q ist (siehe Chanfray und Schuck [13], Gln. (2.4) und (2.10))

$$\frac{dN_{e^+e^-}}{d^4x d^4q} = \frac{\alpha^2}{3\pi^3 M^2} \frac{1}{e^{\beta q^0} - 1} \frac{(m_\rho^{(0)})^4}{g^2} g_{\mu\nu} \, \mathrm{Im}\, (G_\rho^R)^{\mu\nu}(q;\, T). \tag{5.13}$$

In dieser Gleichung ist $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$ die Feinstrukturkonstante, $M = \sqrt{q^2}$ die invariante Masse des Dileptonenpaares, $\beta = \frac{1}{T}$ die inverse Temperatur der Kernmaterie und $(G_\rho^R)^{\mu\nu}(q;\, T)$ der retardierte ρ-Propagator. Bei der Herleitung dieser Gleichung wurde die Elektronenmasse m_e vernachlässigt; in Wirklichkeit gibt es natürlich eine Schwelle bei $M = 2m_e$.
Da wir nur den ρ-Propagator $G_\rho^{\mu\nu}(q;\, T = 0)$ berechnet haben, machen wir die Näherung

$$\mathrm{Im}\, (G_\rho^R)^{\mu\nu}(q;\, T) \approx \mathrm{Im}\, G_\rho^{\mu\nu}(q;\, T = 0). \tag{5.14}$$

In unserer Rechnung tritt die Temperatur also nur noch im Bosefaktor $\frac{1}{e^{\beta q^0}-1}$ in Gl. (5.13) auf. Um nun ein mit den experimentellen Daten vergleichbares Spektrum zu erhalten, sind folgende Schritte nötig:

1. Man benötigt ein Modell für die Zeitentwicklung des Systems vom Stoß ($t = 0$) bis zum sog. „Freezeout" ($t = t_{fo}$), welches das Volumen, die Dichte und die Temperatur als Funktion der Zeit angibt: $V(t)$, $\varrho(t)$, $T(t)$.

2. Umrechnung auf die gewünschten kinematischen Variablen:

$$d^4q = \frac{M}{q^0} dM d^3q \qquad \text{mit} \qquad q^0 = \sqrt{\vec{q}^2 + M^2}. \tag{5.15}$$

   Während M ein Lorentz-Skalar ist, ist zu beachten, daß der Impuls $\vec{q}$ wie in den vorigen Kapiteln im Ruhesystem der Kernmaterie (des Feuerballs) angegeben wird und nicht im Laborsystem. Wir nehmen an, daß der Feuerball im Schwerpunktsystem der Stoßpartner ruht.

3. Berücksichtigung der Detektor-Akzeptanz. Die Wahrscheinlichkeit $A(M, \vec{q})$, mit der ein Dileptonenpaar registriert wird, kann bei Kenntnis der durch den Versuchsaufbau und die Datenauswertung vorgegebenen Akzeptanzbedingungen mittels einer Monte-Carlo-Simulation bestimmt werden.

Ein mit den experimentellen Daten vergleichbares Dileptonenspektrum erhält man also gemäß

$$\frac{dN^{exp}_{e^+e^-}}{dM} = \int_0^{t_{fo}} dt\, V(t) \int_0^\infty d|\vec{q}|\, 4\pi \vec{q}^2 \frac{M}{q^0} \frac{dN_{e^+e^-}}{d^4x d^4q} A(M, |\vec{q}|), \tag{5.16}$$

wobei $A(M, |\vec{q}|)$ die über alle Richtungen gemittelte Akzeptanzwahrscheinlichkeit ist.
Auf das Modell für die Zeitentwicklung wollen wir hier verzichten und uns mit zwei „Momentaufnahmen" zufrieden geben, d. h. wir berechnen

$$\frac{dN^{exp}_{e^+e^-}}{d^4x dM} = \int_0^\infty d|\vec{q}|\, 4\pi \vec{q}^2 \frac{M}{q^0} \frac{dN_{e^+e^-}}{d^4x d^4q} A(M, |\vec{q}|) \tag{5.17}$$

einmal für die Bedingungen direkt nach dem Stoß, d. h. für einen zentralen Stoß S+Au mit 200 AGeV: $\varrho = 2\varrho_0$, $T = 170$ MeV, und einmal für die Freezeout-Werte $\varrho = 0.5\varrho_0$, $T = 130$ MeV (Werte aus Ref. [7]). Die Akzeptanzwahrscheinlichkeit $A(M, |\vec{q}|)$ bestimmen wir aus den Akzeptanzbedingungen des CERES-Experiments S+Au mit 200 AGeV: Für jedes der beiden Elektronen mußte bei diesem Experiment gelten $2.1 < \eta < 2.65$ und $p_T > 0.2$ GeV, wobei η die Pseudorapidität und p_T der Transversalimpuls ist. Außerdem mußte der Öffnungswinkel zwischen den beiden Elektronen mindestens $\vartheta_{e^+e^-} > 35$ mrad betragen. Die Ergebnisse der Rechnungen sind in Abb. 5.5 zu sehen. Zum Vergleich ist dort außerdem je eine Kurve eingezeichnet, die mit dem Vakuum-ρ-Propagator anstelle des ρ-Propagators in Kernmaterie berechnet wurde, und eine weitere Kurve, bei der wie in früheren Rechnungen die $\vec{q}$-Abhängigkeit des ρ-Propagators vernachlässigt wurde, d. h. in der $G_\rho(q^0, \vec{q})$ durch $G_\rho(M, \vec{q} = 0)$ approximiert wurde. Wie man sieht, gibt es bei Berücksichtigung der $\vec{q}$-Abhängigkeit eine starke Zunahme der Dileptonenrate bei niedrigen invarianten Massen, was vor allem auf die mit wachsendem $\vec{q}$ abnehmende invariante Masse der $\pi(\Delta h)_T$-Moden zurückzuführen ist (siehe Abschnitt 4.2). Der Effekt ist vor allem wegen des in Gl. 5.13 enthaltenen Faktors $\frac{1}{M^2}$ so drastisch, der dafür sorgt, daß bereits ein kleiner nichtverschwindender Imaginärteil des ρ-Propagators bei $M \approx 0$ zu einem starken Anstieg der Dileptonenrate führt. Da das Dileptonenspektrum in Wirklichkeit aber erst bei der Schwelle $2m_e$ beginnt, divergiert es nicht für $M \to 0$. Abgesehen davon begin-

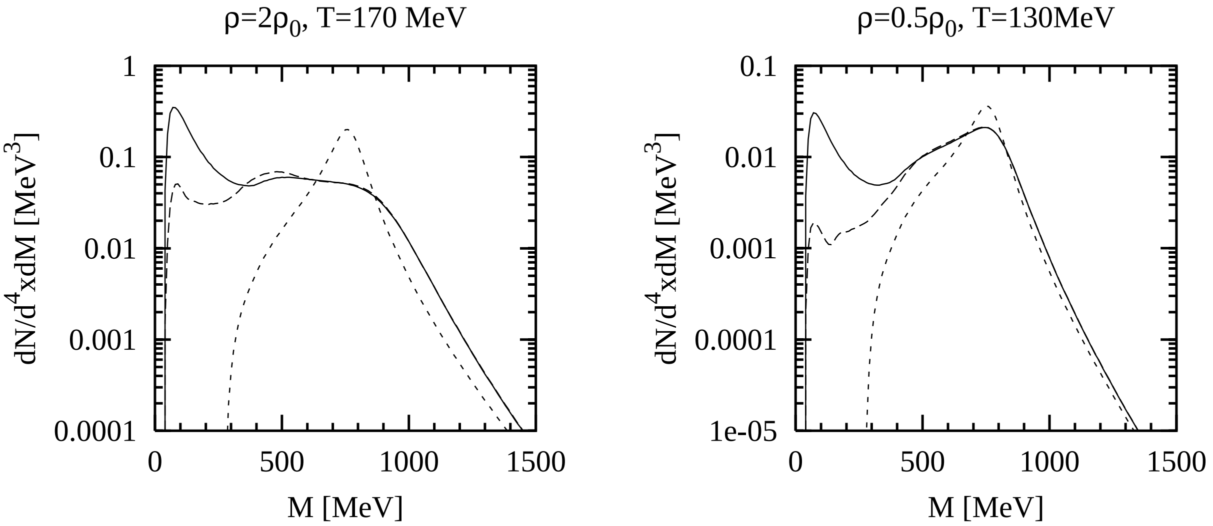
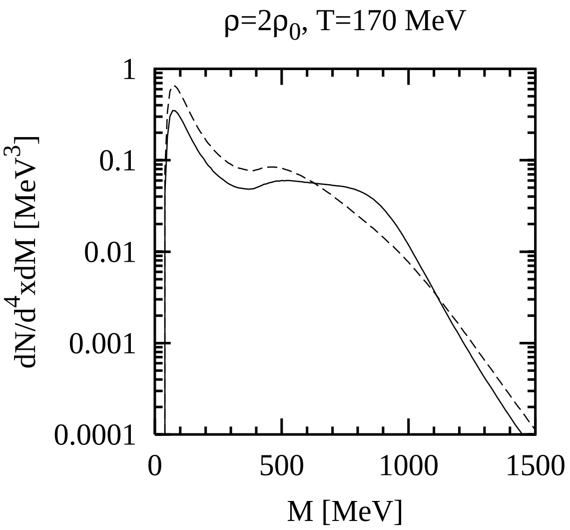


Abbildung 5.5: *Dileptonenrate dividiert durch das Volumen des Feuerballs unter Berücksichtigung der CERES-Detektorakzeptanz für S+Au mit* 200 AGeV*. Links: Bedingungen direkt nach dem Stoß:* $\varrho = 2\varrho_0$, $T = 170$ MeV, *rechts: Freezeout-Bedingungen:* $\varrho = 0.5\varrho_0$, $T = 130$ MeV. *Bei den verschiedenen Kurven wurden unterschiedliche Näherungen für den eigentlich benötigten thermischen Propagator* $G^R_\rho(q^0, \vec{q}; T)$ *vorgenommen. Durchgezogene Linie: Rechnung mit* $G_\rho(q^0, \vec{q}; T = 0)$ *(Gl. 5.14), lang gestrichelte Linie: Rechnung mit* $G_\rho(M, \vec{q} = 0; T = 0)$, *kurz gestrichelte Linie: Rechnung mit* $G^{vak}_\rho(q^0, \vec{q}; T = 0)$. *Als Parameter für das Pion in Kernmaterie wurden die Werte aus Tabelle 5.1 verwendet.*

nen die in Abb. 5.5 gezeigten Dileptonenspektren wegen der CERES-Detektorakzeptanz sogar erst ab ca. 30 MeV.
Im vorigen Abschnitt waren wir gezwungen, einige Parameter für die Pion-Selbstenergie zu ändern, um vernünftige Ergebnisse für den Untergrund des Photoabsorptions-Wirkungsquerschnitts zu erhalten. Es wäre deshalb interessant, zu erfahren, ob auch die Dileptonenspektren so stark von der doch noch recht unsicheren Wahl dieser Parameter abhängen. Aus diesem Grund wiederholen wir die Berechnung der Dileptonenraten mit den alten Parametern aus Tabelle 2.1 und vergleichen sie mit den Spektren, die wir mit den neuen Parametern aus Tabelle 5.1 berechnet haben. Das Ergebnis ist in Abb. 5.6 zu sehen. Wie man sieht, ändern sich die Spektren beträchtlich, wenn man von den alten zu den neuen Parametern übergeht.



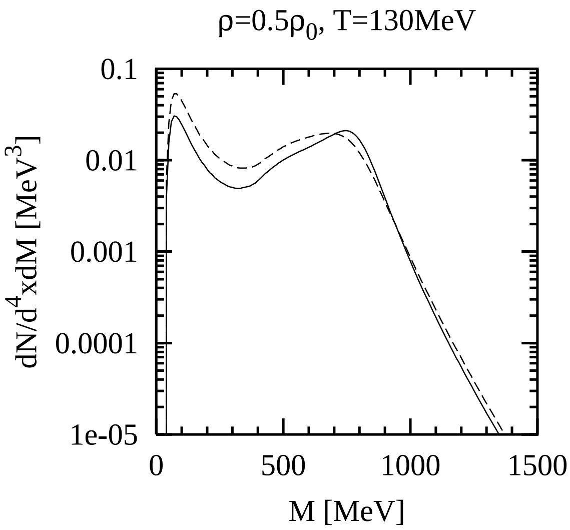


Abbildung 5.6: *Erläuterung wie unter Abb. 5.5, jedoch wurden beide Kurven mit* $G_\rho(q^0, \vec{q}; T = 0)$, *aber unterschiedlichen Parametern gerechnet. Durchgezogene Linie: Parameter aus Tabelle 5.1, gestrichelte Linie: Parameter aus Tabelle 2.1.*

Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit war es, den $\pi\pi$-Beitrag zur ρ-Selbstenergie in Kernmaterie bei endlichem Dreier-Impuls $\vec{q}$ des ρ-Mesons zu berechnen. Dazu sollte im wesentlichen das bestehende Modell von Rapp et al. [7], das für $\vec{q} = 0$ eine eichinvariante Berechnung dieses Beitrags bei endlicher Temperatur erlaubte, auf endlichen Dreier-Impuls erweitert werden. In dieser Arbeit haben wir uns allerdings zunächst auf die Temperatur $T = 0$ beschränkt.
Zunächst erwies es sich als zweckmäßig, wenn nicht gar notwendig (siehe Ende des Abschnitts 3.1), anstelle des von Rapp et al. eingeführten Formfaktors am $\rho\pi\pi$-Vertex das Verfahren von Pauli und Villars zur Regularisierung der divergenten ρ-Selbstenergie zu verwenden. Auf die im Modell von Rapp et al. benötigte Subtraktion bei $q^2 = 0$ konnten wir verzichten, indem wir neben dem $\pi\pi$-Beitrag auch den konstanten „Tadpole"-Graphen mitnahmen. Damit gleicht unser Modell im Vakuum (bis auf die etwas unterschiedliche Regularisierung) dem von Herrmann [12].
Im Medium erfährt der $\pi\pi$-Beitrag erhebliche Änderungen durch die Kopplung der Pionen an Delta-Loch- und Teilchen-Loch-Anregungen. Um die Ward-Takahashi-Identitäten und damit die Eichinvarianz zu gewährleisten, berücksichtigten wir alle den Pion-Selbstenergiebeiträgen entsprechenden $\rho\pi\pi$- und $\rho\rho\pi\pi$-Vertexkorrekturen, insbesondere auch Korrekturen, die wegen des in der Pion-Selbstenergie eingeführten πNN- bzw. $\pi N\Delta$-Formfaktors erforderlich wurden.
Das Ergebnis für die ρ-Selbstenergie zeigte eine charakteristische $\vec{q}$-Abhängigkeit, vor allem durch die Kopplung des ρ-Mesons an $(\Delta h)_T\pi$-Zustände, deren invariante Masse mit zunehmendem Dreier-Impuls $\vec{q}$ abnimmt. Überraschend war die Tatsache, daß die als „Drei-Niveau-Modell" bezeichnete Quasiteilchen-Näherung, die einer Vernachlässigung der Fermi-Bewegung der Nukleonen entspricht, bei der Berechnung der ρ-Selbstenergie mit erheblich verringertem numerischen Aufwand selbst bei zweifacher Kernmateriedichte fast die gleichen Ergebnisse lieferte wie eine vollständige Rechnung, in der die Fermi-Bewegung nicht vernachlässigt wurde.
Um ein vollständiges Modell für das ρ-Meson mit endlichem Dreier-Impuls zu erhalten, müssen jetzt in erster Linie noch die Selbstenergiebeiträge hinzugenommen werden, die durch die direkte Kopplung des ρ-Mesons an Resonanz-Loch-Anregungen, die sogenannten „Rhosobars", entstehen. Die Berechnung dieser Beiträge, ist relativ unkompliziert und wurde bereits in zahlreichen Arbeiten durchgeführt, z. B. [9, 10, 36]. Außerdem sind natürlich noch zahlreiche Verbesserungen des Modells möglich. Vor allem für die Anwendung auf Schwerionenreaktionen müßte es auf endliche Temperatur erweitert werden. Dabei treten u. a. zusätzliche Beiträge zur Pion-Selbstenergie auf, z. B. Nukleon-

Deltaloch- und Delta-Deltaloch-Anregungen [7]. Eine weitere wichtige Verbesserung des Modells bestünde darin, in der Pion-Selbstenergie und in den Vertexkorrekturen die konstante Delta-Breite durch eine realistischere, energie- und impulsabhängige zu ersetzen, wobei es aber nicht ganz einfach ist, die Eichinvarianz zu gewährleisten.

Das gesamte Modell war ursprünglich nur zur Berechnung der Dileptonenspektren von Schwerionenreaktionen vorgesehen, mit der Erweiterung auf endlichen Dreier-Impuls eröffnen sich jedoch weitere Anwendungsmöglichkeiten. Als Beispiel diskutierten wir den Photoabsorptions-Wirkungsquerschnitt von Kernen. Über die Dileptonenspektren kann ohne die „Rhosobars" und ohne die Verallgemeinerung auf endliche Temperatur noch keine endgültige Aussage gemacht werden. Vermutlich wird sich jedoch nichts an der Tatsache ändern, daß unter Berücksichtigung der $\vec{q}$-Abhängigkeit wegen der zu niedrigeren invarianten Massen M wandernden $(\Delta h)_T\pi$-Moden für $M < 500\,\mathrm{MeV}$ mehr Dileptonen vorhergesagt werden als bei Vernachlässigung der $\vec{q}$-Abhängigkeit. Nach der Erweiterung um die „Rhosobar"-Beiträge und auf endliche Temperatur wird es dann auch möglich sein, quantitative Vorhersagen über die Abhängigkeit der Dileptonenrate vom Transversalimpuls q_T des Dileptonenpaares zu machen. Sollte es sich dabei herausstellen, daß diese stark von der trivialen, von Phasenraum und Bosefaktor bestimmten Abhängigkeit abweicht, so böte sich evtl. die Möglichkeit, durch Messung dieser Abhängigkeit in Zukunft experimentell zwischen dem hier zugrunde liegenden „konventionellen" Szenario und dem auf der Annahme der chiralen Restauration beruhenden „Brown-Rho-Scaling" zu unterscheiden.

Anhang A

Nichtrelativistische Feynman-Regeln für die π-N-Wechselwirkung

Da Nukleonen Spin $\frac{1}{2}$ haben, kann man sie in erster Näherung als Dirac-Teilchen behandeln. Die freie Nukleon-Lagrangedichte lautet dann [16]

$$\mathcal{L}_N = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m_N)\psi \tag{A.1}$$

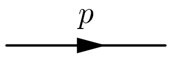
Proton und Neutron haben Isospin $\frac{1}{2}$, d. h. ψ ist das Produkt eines vierkomponentigen Dirac-Spinors und eines zweikomponentigen Pauli-Spinors im Isospinraum, wobei der Zustand $|p\rangle$ (Proton) im Isospinraum durch $\chi(\frac{1}{2})$ und $|n\rangle$ (Neutron) durch $\chi(-\frac{1}{2})$ dargestellt wird:

$$\chi(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi(-\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{A.2}$$

Der Isospinoperator besteht hier aus den üblichen Pauli-Matrizen:

$$\vec{T} = \frac{\vec{\tau}}{2}. \tag{A.3}$$

Der Nukleon-Propagator ist wie üblich

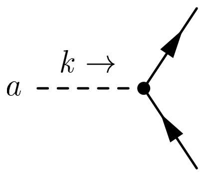


$$= iG_N(p) = i\frac{1}{\not{p} - m_N + i\varepsilon}. \tag{A.4}$$

Die Pion-Nukleon-Wechselwirkung wird bei Verwendung der sog. „Axialvektorkopplung" durch die Wechselwirkungs-Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\pi N} = \frac{f_N}{m_\pi}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\vec{\tau}\psi \cdot \partial_\mu\vec{\phi} \tag{A.5}$$

beschrieben [24]. Daraus folgt für den πNN-Vertex



$$= \frac{f_N}{m_\pi}\gamma^5\not{k}\tau_a. \tag{A.6}$$

Diese relativistischen Feynmanregeln wollen wir nun durch nichtrelativistische Näherungen vereinfachen. Effekte durch virtuelle Antinukleonen und durch die Impulsabhängigkeit der Dirac-Spinoren wollen wir vernachlässigen, die relativistische Kinematik jedoch beibehalten. Vernachlässigung der Antinukleonen heißt, daß wir im Nukleon-Propagator den Pol bei negativer Energie weglassen:

$$\begin{aligned} G_N(p) &= \frac{1}{\not p - m_N + i\varepsilon} = \frac{\not p + m_N}{2\omega_N(\vec{p})}\Big(\frac{1}{p^0 - \omega_N(\vec{p}) + i\varepsilon} - \frac{1}{p^0 + \omega_N(\vec{p}) - i\varepsilon}\Big) \\ &\longrightarrow \frac{\not p + m_N}{2\omega_N(\vec{p})}\,\frac{1}{p^0 - \omega_N(\vec{p}) + i\varepsilon}. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Hierbei ist

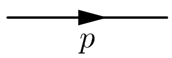
$$\omega_N(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m_N^2}. \tag{A.8}$$

Vernachlässigung der Impulsabhängigkeit der Dirac-Spinoren bedeutet, daß wir die kleinen Komponenten weglassen. Der Fehler ist dabei von der Größenordnung $\mathcal{O}(\frac{|\vec{p}|}{m_N})$:

$$u(\vec{p}, s) = \sqrt{\frac{\omega_N(\vec{p}) + m_N}{2m_N}} \begin{pmatrix} \chi(s) \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\omega_N(\vec{p})+m_N}\chi(s) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \chi(s) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{A.9}$$

$$\frac{\not p + m_N}{2m_N} = \sum_s u(\vec{p}, s)\bar{u}(\vec{p}, s) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{A.10}$$

Zu Summen über Dirac-Indizes, die eigentlich von 1 bis 4 laufen, tragen also nur die ersten beiden Summanden bei. Deshalb genügt es, die Dirac-Indizes nur noch von 1 bis 2 laufen zu lassen, d. h. wir rechnen praktisch nur noch mit Pauli-Spinoren. Von der obigen Matrix bleibt dann nur eine 2×2-Einheitsmatrix übrig, die wir der Übersichtlichkeit halber (wie auch alle Isospin-Einheitsmatrizen) weglassen. Der nichtrelativistische Nukleon-Propagator lautet nun

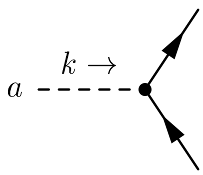


$$= iG_N(p) = i\frac{1}{p^0 - \omega_N(\vec{p}) + i\varepsilon}, \tag{A.11}$$

Dadurch, daß die Dirac-Indizes nur noch von 1 bis 2 laufen, vereinfacht sich natürlich auch der πNN-Vertex. Der nichtrelativistische Vertex ist gleich den oberen linken 2×2 Komponenten von

$$\frac{f_N}{m_\pi}\gamma^5 \not k \tau_a = \frac{f_N}{m_\pi} \begin{pmatrix} \vec{k}\cdot\vec{\sigma} & -k^0 \\ k^0 & -\vec{k}\cdot\vec{\sigma} \end{pmatrix} \tau_a, \tag{A.12}$$

also



$$= \frac{f_N}{m_\pi}\vec{k}\cdot\vec{\sigma}\tau_a. \tag{A.13}$$

Anhang B

Der Teilchen-Loch-Formalismus

Die Methoden der Feldtheorie lassen sich auch bei endlicher Dichte anwenden, wenn man anstelle des Vakuums $|0\rangle$ den Grundzustand $|\Phi_0\rangle$ einsetzt [26].
Läßt man die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung außer acht, so befinden sich die Nukleonen in Zuständen, die durch dieselben ebenen Wellen wie im Vakuum beschrieben werden. Der Grundzustand besteht dann aus einem bis zur Fermienergie aufgefüllten Fermisee, d. h. alle Zustände unterhalb der Fermienergie sind besetzt, die restlichen unbesetzt. Dabei machen wir die vereinfachende Annahme, daß die Protonendichte gleich der Neutronendichte ist. Diesen Grundzustand können wir wie folgt schreiben (s, t = Eigenwerte zu S_3 bzw. T_3, $c^\dagger$ = Erzeugungsoperator für ein Nukleon):

$$|\Phi_0\rangle = \prod_{|\vec{p}|<p_F} \prod_{s,t} c^\dagger(\vec{p}, s, t)|0\rangle. \tag{B.1}$$

Der Fermiimpuls p_F hängt mit der Dichte ϱ zusammen über

$$\varrho = 4\frac{p_F^3}{6\pi^2}, \tag{B.2}$$

der Faktor 4 ist die Anzahl der Teilchen pro Impulszustand (wegen Spin und Isospin). Bei einfacher Kernmateriedichte ϱ_0 ist $p_F = 268$ MeV.
Mit dem Wick-Theorem kann man zeitgeordnete Produkte durch Propagatoren und normalgeordnete Produkte ausdrücken. Die üblichen normalgeordneten Produkte ergeben jedoch nicht null, wenn man sie auf $|\Phi_0\rangle$ anwendet. Deshalb ist es zweckmäßig, die Normalordnung im Medium anders zu definieren als im Vakuum. Dazu schreiben wir

$$c(\vec{p}, s, t) = \begin{cases} a(\vec{p}, s, t) & \text{für} \quad |\vec{p}| > p_F, \\ b^\dagger(-\vec{p}, s, t) & \text{für} \quad |\vec{p}| < p_F. \end{cases} \tag{B.3}$$

a vernichtet ein Nukleon oberhalb der Fermikante, und $b^\dagger$ erzeugt ein „Loch" im Fermisee, indem es ein Nukleon unterhalb der Fermikante vernichtet. Die Operatoren a, $a^\dagger$, b und $b^\dagger$ erfüllen die üblichen Antikommutatorrelationen für Fermion-Operatoren. Außerdem haben sie die Eigenschaft

$$a(\vec{p}, s, t)|\Phi_0\rangle = b(\vec{p}, s, t)|\Phi_0\rangle = 0, \tag{B.4}$$

d. h. wenn man das Normalordnen auf diese Operatoren bezieht, ergeben die normalgeordneten Produkte null, wenn man sie auf $|\Phi_0\rangle$ anwendet. Um das Wick-Theorem anwenden zu können, muß man nun natürlich auch den Propagator neu definieren, und zwar statt durch einen Vakuumerwartungswert durch einen Grundzustandserwartungswert (T = zeitgeordnetes Produkt):

$$iG_N(x_1 - x_2) = \langle\Phi_0|T\Big(\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\Big)|\Phi_0\rangle. \tag{B.5}$$

Nun können wir Feynman-Diagramme bei endlicher Dichte genauso ausrechnen wie im Vakuum, wenn wir nur anstelle des Vakuum-Propagators den durch (B.5) definierten Propagator verwenden. Die Propagatoren der anderen Teilchen ändern sich nicht, da sich in $|\Phi_0\rangle$ nur Nukleonen befinden.
Um den Propagator (B.5) zu berechnen, schreiben wir den den Nukleon-Feldoperator mit den in (B.3) definierten Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $b^\dagger$ und a ($d^\dagger$ = Erzeuger eines Antinukleons):

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_{s,t}\int d^3p\sqrt{\frac{m_N}{(2\pi)^3\omega_N(\vec{p})}}\Big(e^{-i(\omega_N(\vec{p})x^0-\vec{p}\cdot\vec{x})}u(\vec{p},s)\chi(t)c(\vec{p},s,t)\\ &\qquad +e^{-i(-\omega_N(\vec{p})x^0-\vec{p}\cdot\vec{x})}v(-\vec{p},s)\chi(t)d^\dagger(-\vec{p},s,t)\Big)\\ &= \sum_{s,t}\int d^3p\sqrt{\frac{m_N}{(2\pi)^3\omega_N(\vec{p})}}\Big(e^{-i(\omega_N(\vec{p})x^0-\vec{p}\cdot\vec{x})}u(\vec{p},s)\chi(t)\\ &\qquad \Big(a(\vec{p},s,t)\Theta(|\vec{p}|-p_F)+b^\dagger(-\vec{p},s,t)\Theta(p_F-|\vec{p}|)\Big)\\ &\qquad +e^{-i(-\omega_N(\vec{p})x^0-\vec{p}\cdot\vec{x})}v(-\vec{p},s)\chi(t)d^\dagger(-\vec{p},s,t)\Big).\end{aligned} \tag{B.6}$$

Beachtet man, daß die Grundzustandserwartungswerte aller Produkte von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren außer

$$\begin{aligned}\langle\Phi_0|a(\vec{p}_1,s_1,t_1)a^\dagger(\vec{p}_2,s_2,t_2)|\Phi_0\rangle &= \delta_{s_1,s_2}\delta_{t_1,t_2}\delta(\vec{p}_1-\vec{p}_2),\\ \langle\Phi_0|b(\vec{p}_1,s_1,t_1)b^\dagger(\vec{p}_2,s_2,t_2)|\Phi_0\rangle &= \delta_{s_1,s_2}\delta_{t_1,t_2}\delta(\vec{p}_1-\vec{p}_2),\\ \langle\Phi_0|d(\vec{p}_1,s_1,t_1)d^\dagger(\vec{p}_2,s_2,t_2)|\Phi_0\rangle &= \delta_{s_1,s_2}\delta_{t_1,t_2}\delta(\vec{p}_1-\vec{p}_2)\end{aligned}$$

verschwinden, so erhält man aus (B.5)

$$\begin{aligned}iG_N(x_1-x_2) &= \sum_{s,t}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{m_N}{\omega_N(\vec{p})}\Big(e^{-i(\omega_N(\vec{p})(x_1^0-x_2^0)-\vec{p}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2))}u(\vec{p},s)\chi(t)\bar{u}(\vec{p},s)\chi^\dagger(t)\\ &\qquad \Big(\Theta(x_1^0-x_2^0)\Theta(|\vec{p}|-p_F)-\Theta(x_2^0-x_1^0)\Theta(p_F-|\vec{p}|)\Big)\\ &\qquad -e^{-i(-\omega_N(\vec{p})(x_1^0-x_2^0)-\vec{p}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2))}v(-\vec{p},s)\chi(t)\bar{v}(-\vec{p},s)\chi^\dagger(t)\Theta(x_2^0-x_1^0)\Big).\end{aligned} \tag{B.7}$$

Man sieht jetzt, daß das Ergebnis wirklich nur von der Differenz $x = x_1 - x_2$ abhängt. Wir verwenden nun die Projektionsoperatoren

$$
\begin{aligned}
\sum_t \chi(t)\chi^\dagger(t) &= 1 \quad (2\times 2\text{-Einheitsmatrix}),\\
\sum_s u(\vec{p},s)\bar{u}(\vec{p},s) &= \frac{\omega_N(\vec{p})\gamma^0 - \vec{p}\cdot\vec{\gamma} + m_N}{2m_N},\\
-\sum_s v(\vec{p},s)\bar{v}(\vec{p},s) &= \frac{-\omega_N(\vec{p})\gamma^0 + \vec{p}\cdot\vec{\gamma} + m_N}{2m_N}
\end{aligned}
$$

sowie die Beziehung

$$
\Theta(x^0) = i\int \frac{dp^0}{2\pi}\,\frac{e^{-ip^0x^0}}{p^0+i\varepsilon}
$$

und erhalten

$$
\begin{aligned}
G_N(x) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,e^{-ip\cdot x}\,\frac{1}{2\omega_N(\vec{p})}\\
&\qquad \Big((\omega_N(\vec{p})\gamma^0 - \vec{p}\cdot\vec{\gamma} + m_N)\big(\frac{\Theta(|\vec{p}|-p_F)}{p^0-\omega_N(\vec{p})+i\varepsilon} + \frac{\Theta(p_F-|\vec{p}|)}{p^0-\omega_N(\vec{p})-i\varepsilon}\big)\\
&\qquad -(-\omega_N(\vec{p})\gamma^0 - \vec{p}\cdot\vec{\gamma} + m_N)\frac{1}{p^0+\omega_N(\vec{p})-i\varepsilon}\Big).
\end{aligned} \tag{B.8}
$$

Faßt man alle Terme zusammen, so sieht man

$$
\begin{aligned}
G_N(x) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip\cdot x}\frac{\not{p}+m_N}{2\omega_N(\vec{p})}\\
&\qquad \big(\frac{\Theta(|\vec{p}|-p_F)}{p^0-\omega_N(\vec{p})+i\varepsilon} + \frac{\Theta(p_F-|\vec{p}|)}{p^0-\omega_N(\vec{p})-i\varepsilon} - \frac{1}{p^0+\omega_N(\vec{p})-i\varepsilon}\big).
\end{aligned} \tag{B.9}
$$

Daraus kann man sofort die Fouriertransformierte ablesen:

$$
G_N(p) = \frac{\not{p}+m_N}{2\omega_N(\vec{p})}\big(\frac{\Theta(|\vec{p}|-p_F)}{p^0-\omega_N(\vec{p})+i\varepsilon} + \frac{\Theta(p_F-|\vec{p}|)}{p^0-\omega_N(\vec{p})-i\varepsilon} - \frac{1}{p^0+\omega_N(\vec{p})-i\varepsilon}\big). \tag{B.10}
$$

Zu einer anderen gebräuchlichen Schreibweise kommt man durch

$$
\frac{1}{p^0-\omega_N(\vec{p})-i\varepsilon} = \frac{1}{p^0-\omega_N(\vec{p})+i\varepsilon} + 2\pi i\delta(p^0-\omega_N(\vec{p})),
$$

man erhält dann

$$
\begin{aligned}
G_N(p) &= \frac{\not{p}+m_N}{p^2-m_N^2+i\varepsilon} + i\pi\frac{\not{p}+m}{\omega_N(\vec{p})}\Theta(p_F-|\vec{p}|)\delta(p^0-\omega_N(\vec{p}))\\
&= \frac{1}{\not{p}-m_N+i\varepsilon} + i\pi\frac{\not{p}+m}{\omega_N(\vec{p})}\Theta(p_F-|\vec{p}|)\delta(p^0-\omega_N(\vec{p})).
\end{aligned} \tag{B.11}
$$

Führen wir ausgehend von Gl. (B.10) wieder dieselben nichtrelativistischen Näherungen durch wie in Anhang A, so erhalten wir für den nichtrelativistischen Propagator

$$
G_N(p) = \frac{\Theta(|\vec{p}|-p_F)}{p^0-\omega_N(\vec{p})+i\varepsilon} + \frac{\Theta(p_F-|\vec{p}|)}{p^0-\omega_N(\vec{p})-i\varepsilon}. \tag{B.12}
$$

Der erste Term entspricht einem „Teilchen"-, der zweite einem „Loch"-Propagator.

Anhang C

Nichtrelativistische Feynman-Regeln für die π-N-Δ-Wechselwirkung

Zur relativistischen Beschreibung des Deltas ($\Delta(1232)$), eines Teilchens mit Spin und Isospin $\frac{3}{2}$, dient der Formalismus von Rarita und Schwinger [11, 24, 27]. Man konstruiert die Wellenfunktion mit Spin $\frac{3}{2}$, indem man einen Vektor (Spin 1) mit einem Dirac-Spinor (Spin $\frac{1}{2}$) zum Gesamtspin $\frac{3}{2}$ koppelt. Ein Rarita-Schwinger-Spinor hat also einen Vektorindex μ und einen Dirac-Index, den wir aber der Übersichtlichkeit halber wie beim Nukleon weglassen. Außerdem benötigt man für das Delta natürlich noch Isospin-Indizes, die wir ebenfalls nicht aufschreiben. Die freie Lagrangedichte lautet [27]

$$\mathcal{L}_\Delta = -\bar{\psi}_\mu (i\partial\!\!\!/ - m_\Delta)\psi^\mu + \frac{i}{3}\bar{\psi}_\mu(\gamma^\mu\partial_\nu + \gamma_\nu\partial^\mu)\psi^\nu - \frac{1}{3}\bar{\psi}_\mu\gamma^\mu(i\partial\!\!\!/ + m_\Delta)\gamma_\nu\psi^\nu, \tag{C.1}$$

woraus die Bewegungsgleichungen

$$(i\partial\!\!\!/ - m_\Delta)\psi_\mu = 0, \quad \gamma^\mu\psi_\mu = 0, \quad \Rightarrow \partial^\mu\psi_\mu = 0 \tag{C.2}$$

folgen. Jede Vektorkomponente erfüllt also die Dirac-Gleichung, und der Vektor steht vierdimensional senkrecht zum Impuls, wie man durch Transformation der letzten Gleichung in den Impulsraum sehen kann. Die freien Lösungen $u^\mu e^{-ip\cdot x}$ konstruiert man also aus Dirac-Spinoren u (Spin $s = \frac{1}{2}$) und senkrecht zum Vierer-Impuls stehenden Vektoren e^μ (Spin $l = 1$), die man mit Clebsch-Gordan-Koeffizienten zum Gesamtspin $j = \frac{3}{2}$ koppelt (m_s, m_l und m_j sind die zugehörigen z-Komponenten):

$$u^\mu(\vec{p}, m_j) = \sum_{m_l=-1}^{1}\sum_{m_s=-1/2}^{1/2}\Big(1, m_l; \frac{1}{2}, m_s\Big|\frac{3}{2}, m_j\Big)u(\vec{p}, m_s)e^\mu(\vec{p}, m_l). \tag{C.3}$$

Die Vektoren $e^\mu(\vec{p}, m_l)$ erhält man, indem man den Vektor $(0, \vec{e}(m_l))^\mu$ aus dem Ruhesystem des Deltas in das System boostet, in dem das Delta den Impuls $\vec{p}$ hat; $\vec{e}(m_l)$ sind dabei die Vektoren aus Gl. (1.2).
Für den Delta-Propagator benötigt man noch den Projektionsoperator [24]

$$
\begin{aligned}
\sum_{m_j} u^\mu(\vec{p}, m_j)\bar{u}^\nu(\vec{p}, m_j) &= \Lambda^{\mu\nu}(p) \\
&= \frac{\not{p} + m_\Delta}{2m_\Delta}\Big(- g^{\mu\nu} + \frac{2}{3}\,\frac{p^\mu p^\nu}{m_\Delta^2} + \frac{1}{3}\gamma^\mu\gamma^\nu - \frac{1}{3m_\Delta}(p^\mu\gamma^\nu - p^\nu\gamma^\mu)\Big).
\end{aligned}
\tag{C.4}
$$

Das erste Gleichheitszeichen gilt nur für On-Shell-Teilchen, wogegen $\Lambda^{\mu\nu}(p)$ durch das zweite Gleichheitszeichen für beliebige Vierer-Impulse definiert ist. Der Delta-Propagator lautet

$$
\mu \overset{p}{\Longrightarrow} \nu = iG_\Delta^{\mu\nu}(p) = i\frac{2m_\Delta \Lambda^{\mu\nu}(p)}{p^2 - m_\Delta^2 + i\varepsilon}. \tag{C.5}
$$

Nun wollen wir ähnlich wie in Anhang A nichtrelativistische Näherungen machen. Das heißt zunächst, daß wir im Propagator wieder den Antiteilchen-Pol weglassen. Außerdem wollen wir anstelle der impulsabhängigen Rarita-Schwinger-Spinoren $u^\mu(\vec{p}, m_j)$ einfache impulsunabhängige Spinoren $\chi^{(\frac{3}{2})}(m_j)$ verwenden, die analog zu den zweikomponentigen Pauli-Spinoren $\chi(m_s)$ für Spin $\frac{1}{2}$ gebildet werden, d. h. wir wählen als Basis den Raum, in dem die z-Komponente des Spinoperators analog zur Pauli-Matrix σ_3 diagonal ist,

$$
S_3^{(\frac{3}{2})} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}. \tag{C.6}
$$

In dieser Basis sehen die Spinoren folgendermaßen aus:

$$
\chi^{(\frac{3}{2})}(\frac{3}{2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{(\frac{3}{2})}(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{(\frac{3}{2})}(-\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{(\frac{3}{2})}(-\frac{3}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{C.7}
$$

Sehr nützlich ist der sogenannte Spin-Übergangsoperator $\vec{S}$. Mit ihm kann man einen Vektor und einen zweikomponentigen Pauli-Spinor zu einem vierkomponentigen Spinor mit Spin $\frac{3}{2}$ koppeln, d. h. man definiert

$$
\vec{S} = \sum_{m_j, m_l, m_s} \Big(1, m_l; \frac{1}{2}, m_s\Big|\frac{3}{2}, m_j\Big)\chi^{(\frac{3}{2})}(m_j)\chi^\dagger(m_s)\vec{e}^{\,*}(m_l). \tag{C.8}
$$

Durch Einsetzen der Clebsch-Gordan-Koeffizienten, der Spinoren und der Einheitsvektoren aus Gl. (1.2) erhält man die explizite Darstellung

$$
S_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{1}{6}} \\ \sqrt{\frac{1}{6}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} i\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & i\sqrt{\frac{1}{6}} \\ i\sqrt{\frac{1}{6}} & 0 \\ 0 & i\sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{C.9}
$$

(Unser $\vec{S}$ wird in der Literatur häufig auch als $\vec{S}^\dagger$ bezeichnet und umgekehrt.) Diese Matrizen ermöglichen es, im nichtrelativistischen Grenzfall die $u^\mu(\vec{p}, m_j)$ mit den $\chi^{(\frac{3}{2})}(m_j)$ auszudrücken, da

$$e^\mu(\vec{p}, m_l) = (0, \vec{e}(m_l))^\mu + \mathcal{O}(\frac{|\vec{p}|}{m_\Delta}), \tag{C.10}$$

und folglich wegen Gl. (C.3) und (C.8) im nichtrelativistischen Grenzfall für die Rarita-Schwinger-Spinoren $u^\mu(\vec{p}, m_j)$ gilt ($i = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} u^0(\vec{p}, m_j) &\longrightarrow 0, \\ u^i(\vec{p}, m_j) &\longrightarrow \begin{pmatrix} S_i^\dagger \chi^{(\frac{3}{2})}(m_j) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{C.11}$$

Für den Projektionsoperator $\Lambda^{\mu\nu}$ ergibt sich dann ($i, j = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} \Lambda^{00}(p) &\longrightarrow 0, \\ \Lambda^{0i}(p) &\longrightarrow 0, \\ \Lambda^{i0}(p) &\longrightarrow 0, \\ \Lambda^{ij}(p) &\longrightarrow \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$S_i^\dagger S_j$}} & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{C.12}$$

Wenn man nun die Faktoren S_i bzw. $S_i^\dagger$ in geeigneter Weise in die Vertizes hineinzieht, kann man für äußere Delta-Linien die einfachen Spinoren $\chi^{(\frac{3}{2})}$ statt u^μ bzw. $\chi^{(\frac{3}{2})\dagger}$ statt $\bar{u}^\mu$ schreiben, und den komplizierten Projektionsoperator $\Lambda^{\mu\nu}$ durch eine 4×4-Einheitsmatrix ersetzen. Läßt man diese der Kürze halber weg (wie auch die 4×4-Isospin-Einheitsmatrix), und vernachlässigt man den Antiteilchen-Pol, so lautet dann der nichtrelativistische Propagator

$$p \quad = iG_\Delta(p) = i\frac{1}{p^0 - \omega_\Delta(\vec{p}) + i\varepsilon}, \tag{C.13}$$

mit

$$\omega_\Delta(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m_\Delta^2} \tag{C.14}$$

Jetzt muß noch genauer spezifiziert werden, wie die Faktoren S_i bzw. $S_i^\dagger$ in die Vertizes hineingezogen werden können. Dazu betrachten wir z. B. einen Vertex mit einer einlaufenden äußeren Delta-Linie mit Vektorindex μ. Das entspricht einem Faktor

$$\Gamma_\mu u^\mu(p, m_j) \longrightarrow -\vec{\Gamma} \cdot \begin{pmatrix} & \vec{S}^\dagger & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \chi^{(\frac{3}{2})}(m_j). \tag{C.15}$$

Wenn im nichtrelativistischen Formalismus die äußere Linie allein durch $\chi^{(\frac{3}{2})}(m_j)$ repräsentiert werden soll, so muß man also dem Vertex einen Faktor

$$-\vec{\Gamma}\cdot\begin{pmatrix} & \vec{S}^{\dagger} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{C.16}$$

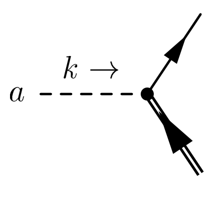
zuordnen. Entsprechend muß man einen relativistischen Vertex Γ_μ mit einer vom Vertex weglaufenden Delta-Linie durch

$$-\begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ \vec{S} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\vec{\Gamma} \tag{C.17}$$

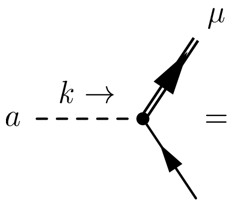
ersetzen.
Diese Überlegungen wenden wir jetzt auf die π-N-Δ-Wechselwirkung an. Die Wechselwirkungs-Lagrangedichte lautet [24]

$$\mathcal{L}_{\pi N\Delta} = -\frac{f_\Delta}{m_\pi}\bar{\psi}\vec{T}^{\dagger}\psi_\mu\cdot\partial^\mu\vec{\phi} \quad + \quad \text{h. c.}, \tag{C.18}$$

wobei die im Isospinraum wirkenden Matrizen $\vec{T}$ den im Spinraum wirkenden Matrizen $\vec{S}$ entsprechen, die in Gl. (C.9) definiert wurden. Aus dieser Lagrangedichte folgen die Vertizes

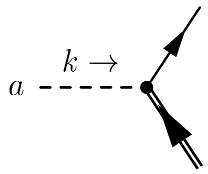


$$= -\frac{f_\Delta}{m_\pi}k_\mu T_a^{\dagger},$$

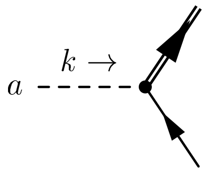


$$= -\frac{f_\Delta}{m_\pi}k_\mu T_a. \tag{C.19}$$

Bezüglich der Delta- und Nukleon-Dirac-Indizes sind beides Einheitsmatrizen. Wendet man auf der Delta-Seite die Regeln (C.16) bzw. (C.17) an und läßt auf der Nukleon-Seite, wie in Anhang A beschrieben, den Dirac-Index nur von 1 bis 2 laufen, so erhält man als nichtrelativistische Vertizes



$$= \frac{f_\Delta}{m_\pi}\vec{k}\cdot\vec{S}^{\dagger}T_a^{\dagger},$$



$$= \frac{f_\Delta}{m_\pi}\vec{k}\cdot\vec{S}T_a. \tag{C.20}$$

Literaturverzeichnis

[1] G. E. Brown und M. Rho, Phys. Rev. Lett. 66 (1991) 2720

[2] E. V. Shuryak, Phys. Lett. B 78 (1978) 150

[3] P. Wurm für die CERES-Kollaboration, Nucl. Phys. A 590 (1995) 103c

[4] N. Masera für die HELIOS-3-Kollaboration, Nucl. Phys. A 590 (1995) 93c

[5] G. Q. Li, C. M. Ko und G. E. Brown, Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 4007; Nucl. Phys. A 606 (1996) 568

[6] W. Cassing, W. Ehehalt und C. M. Ko, Phys. Lett. B 363 (1995) 35

[7] R. Rapp, Doktorarbeit, Berichte des Forschungszentrums Jülich 3195, 1996; G. Chanfray, R. Rapp und J. Wambach, Phys. Rev. Lett. 76 (1996) 368

[8] R. Rapp, G. Chanfray und J. Wambach, Nucl. Phys. A 617 (1997) 472

[9] B. Friman und H. J. Pirner, Nucl. Phys. A 617 (1997) 496

[10] W. Peters et al., Preprint nucl-th/9708004

[11] T. E. O. Ericson und W. Weise, *Pions and Nuclei*, Oxford University Press, 1988

[12] M. Herrmann, Doktorarbeit, GSI-Report 92-10, 1992; M. Herrmann, B. Friman und W. Nörenberg, Nucl. Phys. A 560 (1993) 411

[13] G. Chanfray und P. Schuck, Nucl. Phys. A 555 (1993) 329

[14] C. L. Korpa und S. Pratt, Phys. Rev. Lett. 64 (1990) 1502

[15] C. L. Korpa et al., Phys. Lett. B 246 (1990) 333

[16] J. D. Bjorken und S. D. Drell, *Relativistische Quantenmechanik*, BI-Hochschultaschenbuch Nr. 98, 1966; *Relativistische Quantenfeldtheorie*, BI-Hochschultaschenbuch Nr. 101, 1967

[17] Particle Data Group, Phys. Rev. D 50 (1994) 1173

[18] J. J. Sakurai, Ann. Phys. 11, 1 (1960)

[19] R. K. Bhaduri, *Models of the Nucleon*, Addison-Wesley, 1988

[20] N. M. Kroll, T. D. Lee und B. Zumino, Phys. Rev. 157 (1967) 1376

[21] L. M. Barkov et al., Nucl. Phys. B 256 (1985) 365

[22] S. R. Amendolia et al., Phys. Lett. B 138 (1984) 454; Phys. Lett. B 146 (1984) 116

[23] C. D. Froggatt und J. L. Petersen, Nucl. Phys. B 129 (1977) 89

[24] M. Cubero, Doktorarbeit, GSI-Report 90-17, 1990

[25] C. Mosbacher, Diplomarbeit, Bonn, 1995 (unveröffentlicht)

[26] A. L. Fetter und J. D. Walecka,
Quantum Theory of Many-Particle Systems, McGraw-Hill, 1971

[27] W. Rarita und J. Schwinger, Phys. Rev. 60 (1941) 61

[28] A. B. Migdal, Rev. Mod. Phys. 50 (1978) 107

[29] V. Mull, J. Wambach und J. Speth, Phys. Lett. B 286 (1992) 13

[30] J. F. Mathiot, Nucl. Phys. A 412 (1984) 201

[31] C. Gale und J. I. Kapusta, Nucl. Phys. B 357 (1991) 65

[32] T. A. Armstrong et al., Phys. Rev. D 5 (1972) 1640

[33] J. Ahrens, Nucl. Phys. A 446 (1985) 229c;
J. Ahrens et al., Phys. Lett. B 146 (1984) 303

[34] Th. Frommhold et al., Phys. Lett. B 295 (1992) 28; Zeit. Phys. A 350 (1994) 249

[35] N. Bianchi et al., Phys. Lett. B 299 (1993) 219

[36] R. Rapp et al., Preprint nucl-th/9709008

[37] B. Körfgen, Diplomarbeit, Berichte des Forschungszentrums Jülich 2540, 1991