Institut für Kernphysik
Technische Universität Darmstadt

Diplomarbeit

Die Reaktion $\pi N \to \rho N$ und der πN - Formfaktor

Thomas Roth

August 1999

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Im Rahmen der Untersuchungen von Schwerionenstößen, die letztlich den Nachweis und die Erforschung des Quark-Gluon-Plasmas zum Ziele haben, sind die Eigenschaften der Vektormesonen von besonderem Interesse. Um die frühen Phasen einer solchen Kollision beobachten zu können, sind vor allem Teilchen geeignet, die nicht stark wechselwirken und daher von der weiteren Entwicklung der Reaktion nicht beeinflußt werden (Shuryak [1]). Deshalb werden insbesondere Dipleptonenpaare untersucht, also $e^- e^+$ - oder $\mu^- \mu^+$ - Paare, die aus einem einzigen Ereignis stammen. Handelt es sich dabei zum Beispiel um die Paarvernichtung eines Meson-Antimeson-Paares, so wird nach dem Vektordominanzmodell [2] zunächst ein Vektormeson entstehen, das sich dann in ein Photon umwandelt. Letzteres zerfällt schließlich in das Dileptonpaar. Wenn nun dieses Meson, z.B. ein ρ, in der umgebenden dichten und heißen Materie seine Eigenschaften, speziell seine Selbstenergie, stark ändert, so wird sich diese Modifikation auch in der gemessenen Dipleptonrate bemerkbar machen. So wurden im CERES- Experiment [3] bei S+Au-Stößen tatsächlich erhöhte Dipleptonraten im Bereich invarianter Massen zwischen 300 und 600 MeV gemessen, die auf eine Verschiebung der Masse und eine Verbreiterung des ρ - Mesons schließen lassen.

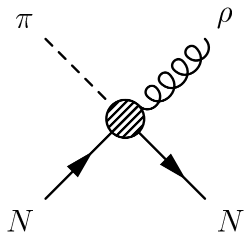
Die Eigenschaften des ρ - Mesons wurden daher in verschiedenen Arbeiten untersucht (Rapp [4], Rapp, Chanfray, Wambach [5], Friman und Pirner [6], Peters et.al.[7], Herrman [8]). Insbesondre wurde von Urban et.al. (Urban [9], Urban, Buballa, Rapp, Wambach [10]) ein Modell für die Impulsabhängigkeit des ρ - Propagators in dichter Kernmaterie entwickelt:
Das ρ - Meson koppelt an zwei Pionen und erhält so seine Vakuumbreite. Da das Pion mit umgebenden Nukleonen stark wechselwirkt, wird die Pionwolke des ρ im Medium verändert, das Pion erhält Selbstenergiebeiträge durch Nukleon-Loch- und Resonanz-Loch-Anregungen. Die Selbstenergie des ρ - Mesons in Kernmaterie, die dann durch die so modifizierten Pionen bestimmt wird, wurde von Urban in einem eichinvariantem Modell berechnet.
Dieses Modell enthält mehrere freie Parameter, wie die $\rho\pi\pi$ - Kopplungskonstante und die nackte ρ - Masse, die durch Anpassung an den elektromagnetischen Pion-Formfaktor bestimmt werden können. Am πNN - Vertex und am $\pi N\Delta$ - Vertex, über die das Pion an die Teilchen-Loch-Paare koppelt, muß ein Formfaktor eingeführt werden. Für diesen wählt man eine Monopolform mit einem Cut-off-Parameter Λ. Durch Berechnung des Wirkungsquerschnitts der Photoabsorption am Nukleon und am Kern konnte in Ref. [9],[10] für diesen Parameter eine obere Grenze von $\Lambda \approx 550$ MeV angegeben werden.

In Ref. [11] wurde von Friman darauf hingewiesen, daß diese Anpassung hadronischer Parameter an Daten der Photoabsorption eine weite Extrapolation der invarianten Masse über einen kinematischen Bereich vom Photopunkt $q^2 = 0$ bis $q^2 = m_\rho^2$ bedeutet. Um für die Modelle der Vektormesonen einen weiteren Referenzpunkt zu haben, hat Friman nun vorgeschlagen, die Parameter durch Vergleich mit Daten im kinematischen Bereich um die freie ρ - Masse einzuschränken. Für die Dileptonraten ist natürlich besonders der Bereich zwischen dem Photopunkt und der freien ρ - Masse interessant.
Es liegen Daten für den Prozeß $\pi N \to \rho N$ vor. Eine Zusammenfassung aller bekannten experimentellen Ergebnisse dieser Reaktionen findet sich in Ref. [12], die Daten für CMS-Energien im Bereich zwischen 1.4 und 3 GeV stammen aus einer Analyse von Brody et.al. [13].
In dieser Arbeit soll der Vorschlag Frimans, mit Hilfe der oben genannten Reaktion die Parameter des Modells, insbesondere den πN - Formfaktor, weiter einzuschränken, aufgegriffen werden. Dazu wird im ersten Kapitel auf der Grundlage des Modells für den ρ - Propagator [9] der Wirkungsquerschnitt mit Hilfe von Feynmandiagrammen berechnet und der Zusammenhang mit der ρ - Selbstenergie diskutiert.
Das Ergebnis der Anpassung des Wirkungsquerschnitts an die Daten - der Parameter Λ muß sehr klein gewählt werden - gibt Anlaß zu verschiedenen Detailanalysen in den darauffolgenden Kapiteln. Zunächst wird die Problematik der nichtrelativistischen Näherungen untersucht, in der die Dynamik der Nukleonen behandelt wird. In den folgenden Kapiteln wird der Frage nachgegangen, wie das bestehende Modell erweitert werden kann. Kapitel 3 befaßt sich mit der Hinzunahme baryonischer Resonanzen, Kapitel 4 versucht den $\rho\pi\pi$ - Vertex zu modifizieren. Der letzte Teil dieser Arbeit dehnt die Untersuchungen auf die πN - Endzustandswechselwirkung aus und erarbeitet die Grundlagen einer Rechnung gekoppelter Kanäle.

Kapitel 1

Der $\pi N \to \rho N$ - Wirkungsquerschnitt

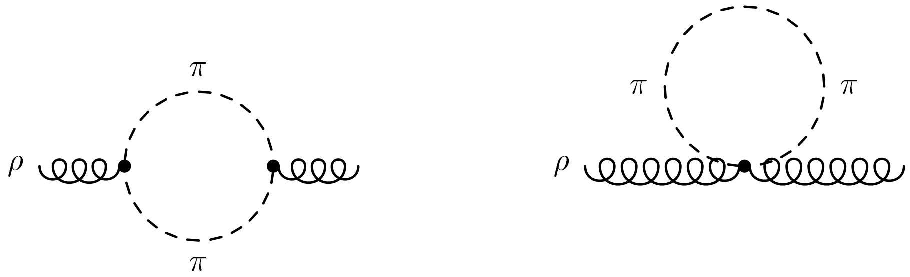
Ziel dieses Kapitels ist die Berechnung des totalen Wirkungsquerschnitts der durch Pionen induzierten ρ - Produktion, $\pi N \to \rho N$:



Im folgenden werden zunächst die dazu benötigten Grundlagen vorgestellt und dann die angestrebte Verknüpfung mit der ρ - Selbstenergie und den in der Einleitung angesprochenen Parametern diskutiert.

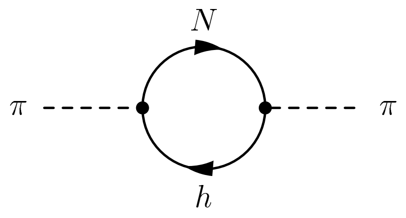
1.1 Das Modell des ρ - Propagators in kalter Kernmaterie

Ausgangspunkt dieser Rechnung ist das Modell zur Propagation des ρ - Mesons in dichter Kernmaterie von Urban et.al. ([9],[10]). Daher sollen zunächst einige Aspekte des Modells skizziert werden, die hier besonders wichtig sind.
Bevor die Änderungen der Eigenschaften des ρ im Medium beschrieben werden können, muß man seine Vakuumeigenschaften kennen. Das ρ - Meson zerfällt im Vakuum in zwei Pionen. In unserem Modell gibt es zwei Beiträge zur ρ - Selbstenergie:



(1.1)

Um die Änderung der ρ - Selbstenergie in dichter Kernmaterie zu untersuchen, werden nun zuerst die Pionen aus den obigen Diagrammen in das Medium gesetzt. Das Pion erhält seine Selbstenergie dort durch Teilchen-Loch- und Δ - Loch-Anregungen:



(1.2)

Um zu berücksichtigen, daß es sich bei Pion, Nukleon und Delta um ausgedehnte Teilchen handelt, die Wechselwirkung bei großen Impulsen also schwächer wird, führt man an den Vertizes einen Formfaktor Γ_π ein. Dieser enthält den freien Parameter Λ, dessen Wert in dieser Arbeit untersucht werden soll.
Nachdem die Pionen wie angedeutet eine Selbstenergie erhalten haben, werden die Diagramme in Gl.(1.1) erneut ausgewertet.

(1.3)

Die $\rho\pi$ - Wechselwirkung wird als Eichtheorie mit den Vektormesonen als Eichbosonen konstruiert [2]. Leitendes Prinzip bei allen weiteren Untersuchungen ihrer Eigenschaften ist daher die Beibehaltung der Eichinvarianz. Diese erfordert eine Verknüpfung von Vertizes und Propagatoren in Form von Ward-Takahashi- Identitäten. Um diese Identitäten zu erfüllen, müssen nach der Modifikation der Pionpropagatoren auch die Vertizes korrigiert werden. Das führt auf ein große Zahl von Korrekturdiagrammen, die nach der Regel gebildet werden, daß das ρ in jeder möglichen Weise an alle Diagramme angekoppelt wird, die den Pionpropagator modifizieren.

Anwendung auf elementare Prozesse

Betrachtet man die verschiedenen oben erzeugten Diagramme im Grenzfall kleiner Materiedichte, so liegt es nahe, das Modell auf elementare Prozesse anzuwenden, um durch Vergleich mit experimentellen Daten die Parameter anzupassen.

Neben den Vakuumdiagrammen Gl.(1.1) tragen folgende Selbstenergiediagramme zur niedrigsten Ordnung in der Dichte bei:

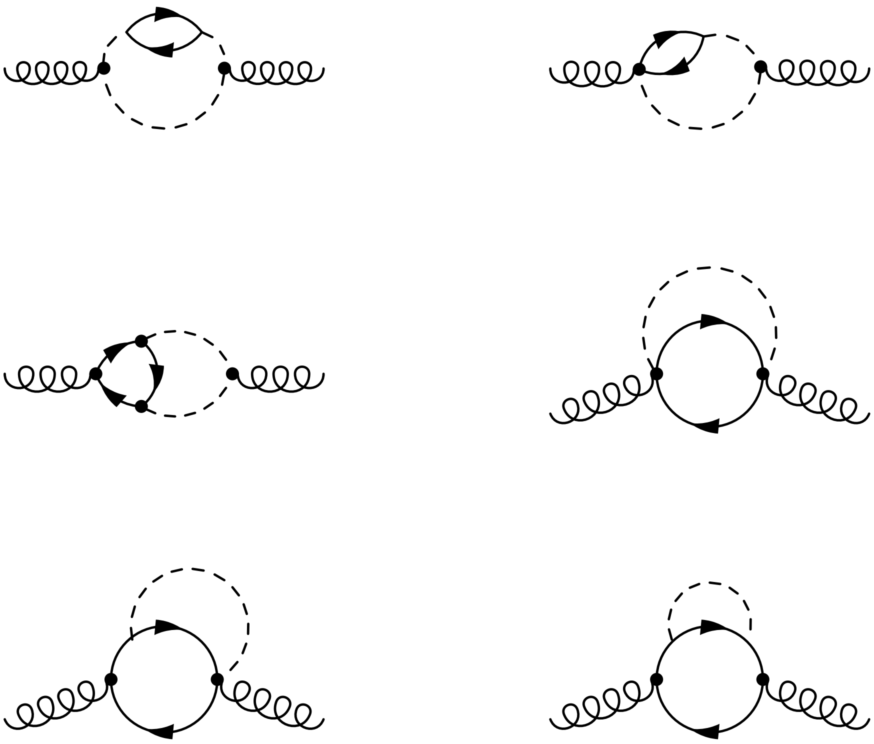
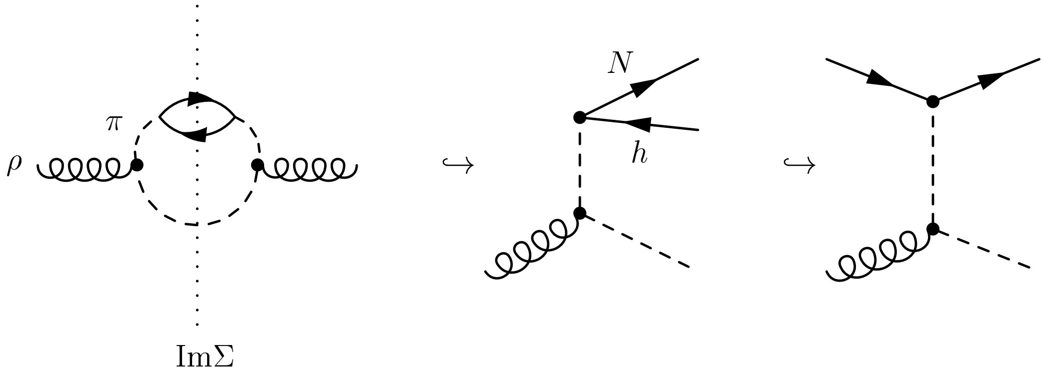


Abb. 1.1: *ρ - Selbstenergiediagramme im Niederdichtelimes*

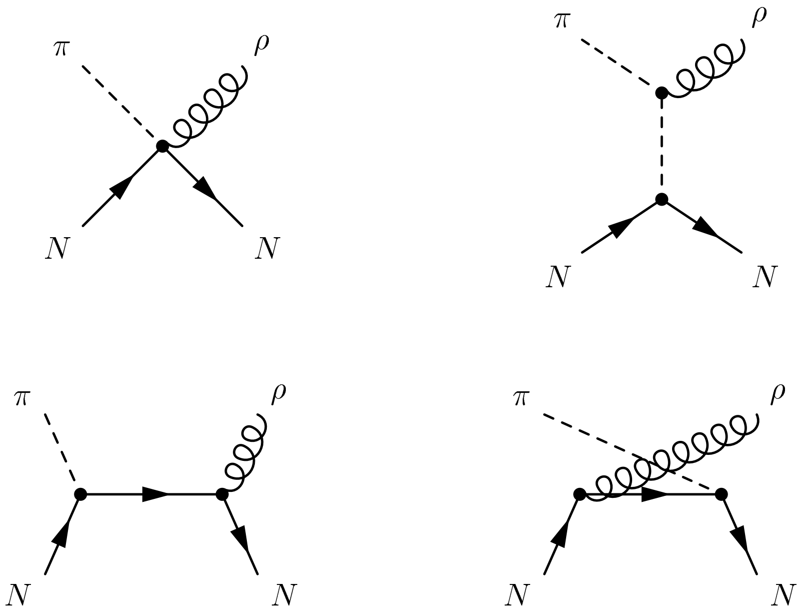
All diese Diagramme kann man so „durchschneiden", daß die beiden dabei entstehenden Teile als graphische Darstellung des Prozesses $\rho N \to \pi N$ verstanden werden können. Diese Schnitte durch einen Graphen entsprechen jeweils einem Beitrag zum Imaginärteil der Selbstenergie.
So kann man z.B. das folgende Diagramm (Gl.(1.4)) längs der gepunkteten Linie aufschneiden. Dann ensteht aus der linken Hälfte das mittlere Diagramm. Der auslaufende Lochzustand entspricht einem einlaufenden Nukleon, so daß man schließlich eines der Diagramme erhält, die zum $\rho N \to \pi N$ - Prozess beitragen.



(1.4)

Die ρ- Produktion, $\pi N \to \rho N$, ergibt sich aus diesem Prozeß durch Zeitumkehr ('Prinzip des detaillierten Gleichgewichts').

Insgesamt erhält man mit dieser „Schneidetechnik“ aus den in Abb. 1.1 gezeigten Diagrammen die folgenden vier Graphen:



(1.5)

Mit Hilfe dieser Diagramme soll der Wirkungsquerschnitt dieses Prozesses im nächsten Abschnitt berechnet werden.

Da im Rahmen des Vektordominanzmodells [2] die Kopplung des Photons an Hadronen stets über ein ρ- Meson vermittelt wird, können diese Diagramme auch als Beitrag zum Untergrund der Photoabsorption am Nukleon interpretiert werden (Kap. 3).

Der genaue Zusammenhang zwischen ρ- Selbstenergie und Streuquerschnitt wird im Abschnitt 1.8 diskutiert.

1.2 Feynmanregeln für ρ- Mesonen, Pionen und Nukleonen

Zuerst soll die zugrundegelegte Wechselwirkung dargestellt werden.
Das ρ- Meson zerfällt im Vakuum in zwei Pionen. Um dies zu beschreiben, benötigt man zunächst eine $\pi\,\rho$- Wechselwirkung. Die freie Lagrangedichte enthält das isovektorielle Pionfeld $\vec{\Phi}$ und das Vektorfeld ρ^μ (wie in Ref. [9] soll nur das neutrale ρ betrachtet werden):

$$\mathcal{L}_\pi + \mathcal{L}_\rho = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\,\vec{\Phi}\,\cdot\,\partial^\mu\,\vec{\Phi} - \frac{1}{2}\,m_\pi^2\,\vec{\Phi}\cdot\vec{\Phi} - \frac{1}{4}\rho_{\mu\nu}\rho^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,(m_\rho^{(0)})^2\,\rho_\mu\rho^\mu, \tag{1.6}$$

mit dem ρ - Feldstärketensor $\quad \rho_{\mu\nu} = \partial_\mu\rho_\nu - \partial_\nu\rho_\mu \quad$ und der nackten ρ - Masse $m_\rho^{(0)}$.

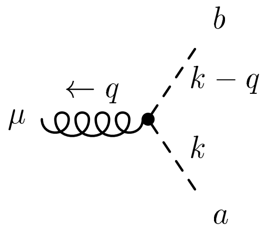
Durch minimale Substitution

$$\partial_\mu\vec{\Phi} \longrightarrow (\partial_\mu + ig\rho_\mu T_3)\vec{\Phi} \tag{1.7}$$

erhält man die Wechselwirkungs-Lagrangedichte

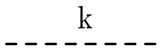
$$\mathcal{L}_{\pi\rho} = \frac{1}{2}\,ig\rho_\mu(T_3\vec{\Phi}\cdot\partial^\mu\vec{\Phi} + \partial^\mu\vec{\Phi}\cdot(T_3\vec{\Phi})) - \frac{1}{2}g^2\rho_\mu\rho^\mu T_3\vec{\Phi}\cdot T_3\vec{\Phi}. \tag{1.8}$$

Für den $\pi N \to \rho^0 N$ - Wirkungsquerschnitt ist der sich daraus ergebende $\rho\pi\pi$ - Vertex wichtig:



$$= -g\varepsilon_{3ba}(2k-q)_\mu \tag{1.9}$$

Der Propagator des Pions ist gegeben durch



$$= i\,G_\pi(k) = \frac{i}{k^2 - m_\pi^2 + i\varepsilon} \tag{1.10}$$

Eine äußere Pionlinie mit dem Isospinindex a und der Ladung Q wird durch den Faktor $e_a(Q)$ gekennzeichnet. Die genaue Form dieses Faktors wird im Abschnitt 1.3.1 angegeben.

Da nur das neutrale ρ- Meson betrachtet wird, erhält eine äußere ρ- Linie keinen Isospinfaktor, sondern lediglich den Vektor $\varepsilon^\mu(\lambda)$ der Polarisation λ.

Die ρN - und die $\rho \pi N$ - Wechselwirkung bekommt man ebenfalls durch minimale Substitution aus der freien Nukleon-Lagrangedichte [14]

$$\mathcal{L}_N = \bar{\Psi}(i\partial\!\!\!/ - m_N)\Psi \tag{1.11}$$

und der Pion-Nukleon-Wechselwirkung [15]

$$\mathcal{L}_{\pi N} = \frac{f_N}{m_\pi}\bar{\Psi}\gamma^5\gamma^\mu\vec{\tau}\Psi \cdot \partial_\mu\vec{\Phi} \tag{1.12}$$

als

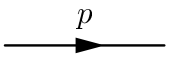
$$\mathcal{L}_{\rho N} = -\frac{g}{2}\bar{\Psi}\rho\!\!\!/\tau_3\Psi, \tag{1.13}$$

$$\mathcal{L}_{\rho\pi N} = ig\frac{f_N}{m_\pi}\bar{\Psi}\gamma^5\rho\!\!\!/\vec{\tau}\Psi \cdot T_3\vec{\Phi}. \tag{1.14}$$

Die Behandlung der Nukleonen geschieht nun in einer nichtrelativistischen Näherung (s. Ref. [9]). Allerdings wird die relativistische Kinematik beibehalten:

$$\omega_N(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m_N^2}. \tag{1.15}$$

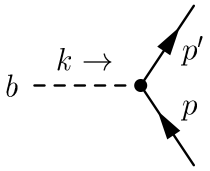
Der nichtrelativistische Nukleonpropagator lautet dann



$$= i\,G_N(p) = \frac{i}{p^0 - \omega_N(\vec{p}) + i\varepsilon}. \tag{1.16}$$

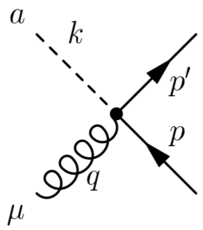
Die folgenden πN und ρN Vertizes gehen durch die nichtrelativistische Reduktion in die jeweils angegebene nichtrelativistische Form über.

Zuerst der πNN - Vertex:



$$= \frac{f_N}{m_\pi}\gamma_5\,k\!\!\!/\,\tau_b \quad \xrightarrow{\text{nicht-rel.}} \quad \frac{f_N}{m_\pi}\vec{\sigma}\cdot\vec{k}\,\tau_b \tag{1.17}$$

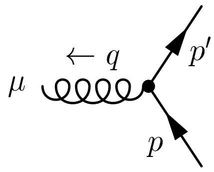
Koppelt man ein ρ dazu, so gilt:



$$= \quad i\,g\frac{f_N}{m_\pi}\varepsilon_{3ba}\gamma_5\gamma^\mu\tau_b \tag{1.18}$$

$$\rightarrow \quad -i\,g\frac{f_N}{m_\pi}\varepsilon_{3ba}\,\tau_b \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \mu = \quad 0 \\ \sigma_j & \text{für} \quad \mu = \quad j = 1,2,3 \end{cases} . \tag{1.19}$$

Am reinen ρNN - Vertex $\Gamma_\mu^{(\rho NN)}(p,q)$ wird eine besonders radikale nichtrelativistische Näherung vorgenommen: Es wird nur die nullte Ordnung in $(\frac{|\vec{p}|}{m_N})$ berücksichtigt. Damit bleibt nur die Kopplung an die Ladung des Nukleons:

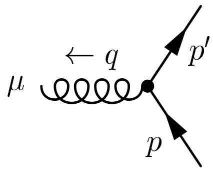


$$= -i\,\frac{g}{2}\,\gamma_\mu\,\tau_3 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -i\,\frac{g}{2}\,\tau_3 & \text{für} \quad \mu = \quad 0 \\ 0 & \text{für} \quad \mu = \quad 1,2,3 \end{cases} \tag{1.20}$$

In der relativistischen Form erfüllt dieser Vertex eine Ward-Takahashi-Identität (mit $p' = p - q$):

$$q^\mu \Gamma_\mu^{(\rho NN)}(p,q) = -i\,\frac{g}{2}\,\tau_3\,(G_N^{-1}(p-q) - G_N^{-1}(p)) \tag{1.21}$$

Mit dem oben eingeführten nichtrelativistischen Vertex, der nur bis zur nullten Ordnung berechnet wurde, und dem Propagator aus Gl.(1.16), der vermöge der beibehaltenen relativistische Kinematik (Gl(.1.15)) alle Ordnungen enthält, funktioniert das nicht. Man kann aber in Ref. [9] nachlesen, wie ein Kunstgriff die Gültigkeit der Ward-Takahashi-Identität wiederherstellt: Dem nichtrelativistischen Vertex wird der fehlende Term der Ordnung $(\frac{|\vec{p}|}{m_N})^1$ einfach hinzugefügt. Das verschlechtert die Genauigkeit nicht, da der Vertex ohnehin nur bis zur Ordnung $(\frac{|\vec{p}|}{m_N})^0$ angegeben wurde. Somit erhält man



$$\approx \begin{cases} \frac{G_N^{-1}(p') - G_N^{-1}(p)}{-q_0} & \text{für} \quad \mu = \quad 0 \\ 0 & \text{für} \quad \mu = \quad 1,2,3 \end{cases} . \tag{1.22}$$

1.2.1 Der πNN - Formfaktor

Der im Abschnitt 1.1 erwähnte Formfaktor am πNN - Vertex, dessen Stärke im Mittelpunkt dieser Arbeit steht, ist hier noch nicht berücksichtigt worden.
Aufgabe des Formfaktors ist es, die Wechselwirkung bei großen Impulsen abzuschwächen, um so die endliche Ausdehnung der beteiligten Teilchen zu berücksichtigen.
Am πNN - Vertex wird dazu ein Monopol- Formfaktor

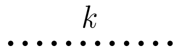
$$\Gamma_\pi(\vec{k}) = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + \vec{k}^2} \tag{1.23}$$

gewählt, der nur vom Dreierimpuls $\vec{k}$ des Pions abhängt. Der Wert des Parameters

$$\Lambda \quad = \quad 550\,\text{MeV}$$

wurde von Urban et.al. ([9],[10],[16]) durch Vergleich mit Daten des Photoabsorptionsquerschnitts nach oben abgeschätzt.

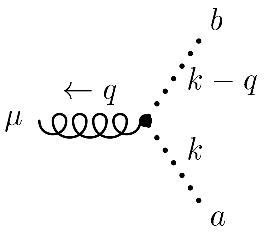
Wenn man nun die oben angegebenen Vertizes mit dem ρ - Meson einfach mit Γ_π mulitipliziert, so findet man (s. Ref. [9]), daß sich die Ward-Takahashi-Identitäten nicht erfüllen lassen. Für dieses Problem gibt es jedoch eine elegante diagrammatische Lösung:
Man führt ein fiktives „schweres“ Pion ein, in das sich das „normale“ Pion vor jeder Kopplung an Nukleon oder Delta umwandelt.
Die Eigenschaften des „schweren Pions“ sind so konstruiert, daß das Produkt aus Propagator und Vertex dieses fiktiven Teilchens gerade den πNN - Formfaktor Γ_π ergibt:



$$= \frac{-i}{\vec{k}^2 + \Lambda^2} \tag{1.24}$$

$$= i\,\Lambda^2 \tag{1.25}$$

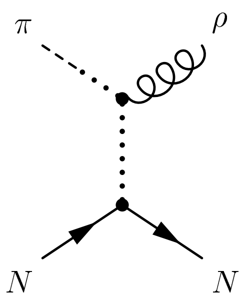
Damit hat man jetzt die Möglichkeit, das ρ - Meson auch noch an das schwere Pion anzukoppeln. Da der „Propagator“ des schweren Pions (Gl.(1.24)) nur den Dreierimpuls enthält, andererseits über Ward- Takahasi-Identitäten mit dem Vertex verknüpft ist, muß hier die Nullkomponente weggelassen werden:



$$= -g\varepsilon_{3ba}(2k-q)_\mu \rightarrow -g\varepsilon_{3ba} \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \mu = 0 \\ (2k-q)_j & \text{für} \quad \mu = j \ = 1,2,3 \end{cases} \tag{1.26}$$

Dadurch ergeben sich im Fall der ρ - Selbstenergie eine Vielzahl zusätzlicher Vertexkorrekturen, die schließlich für die Erfüllung der Ward-Takahashi-Identitäten sorgen.

Im Falle des πN - ρN - Wirkungsquerschnitts hingegen kommt zu den in Abschnitt 1.1 gezeigten Graphen ein fünfter dazu:



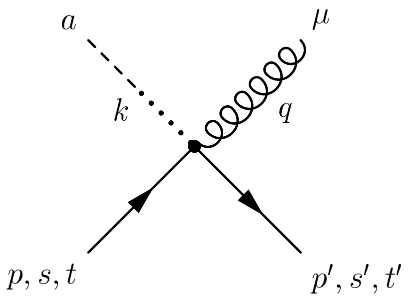
(1.27)

Der πNN - Vertex Gl.(1.17) und der $\rho\pi NN$ - Vertex Gl.(1.19) werden lediglich mit dem Formfaktor multipliziert.

Der Wirkungsquerschnitt soll im Rahmen dieser Wechselwirkungen bzw. Näherungen berechnet werden. Mögliche Auswirkungen einer Hinzunahme weiterer Ordnungen der nichtrelativistischen Näherung können aber bei der Berechnung des gesuchten Wirkungsquerschnitts viel einfacher getestet werden als im Modell des ρ-Propagators. Dieser Aspekt wird in Kap. 2 untersucht.

1.3 Die invariante Amplitude der Reaktion $\pi N \to \rho N$

Nunmehr kann die invariante Amplitude der fünf Diagramme konstruiert werden.
Beginnen wir mit dem Kontaktgraphen:



$$= \quad -iA_a^\mu \, \epsilon_\mu \tag{1.28}$$

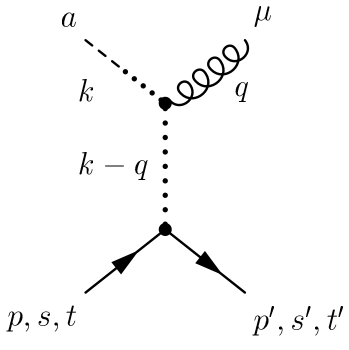
Den Anteil A_a^μ der Amplitude können wir mit den im vorigen Abschnitt angegebenen Feynmanregeln zusammensetzen:

$$A_a^\mu = -i\,\frac{g f_N}{m_\pi}\Gamma_\pi(\vec{k}) e_a(Q)\, \varepsilon_{3ba}\, \chi^\dagger(t')\, \tau_b\, \chi(t)\; \chi^\dagger(s') \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\sigma} \end{pmatrix}^\mu \chi(s).$$

Der hier auftretende Spaltenvektor ist folgendermaßen zu verstehen:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\sigma} \end{pmatrix}^\mu = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \mu = 0 \\ \sigma_j & \text{für} \quad \mu = j = 1,2,3 \end{cases}$$

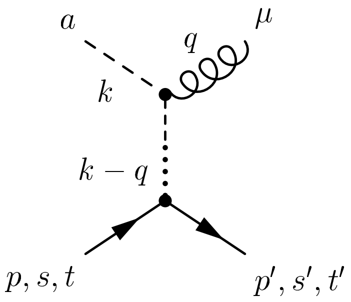
Durch die Möglichkeit, das ρ nicht wie oben direkt am 4-Punkt- Vertex, sondern an das schwere Pion koppeln zu lassen, entsteht das nächste Diagramm:



$$= \quad -iA_b^\mu \, \epsilon_\mu \tag{1.29}$$

$$A_b^\mu = i\,\frac{g f_N}{m_\pi}\,\Gamma_\pi(\vec{k})\;e_a(Q)\,\varepsilon_{3ba}\,\chi^\dagger(t')\,\tau_b\,\chi(t)\;\chi^\dagger(s')\,(\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{\sigma}\,\chi(s)\frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 2\vec{k}-\vec{q} \end{pmatrix}^\mu}{(\vec{k}-\vec{q})^2+\Lambda^2}$$

Eine ähnliche Gestalt hat das folgende Diagramm, bei dem allerdings das ρ an ein „normales“ Pion koppelt:

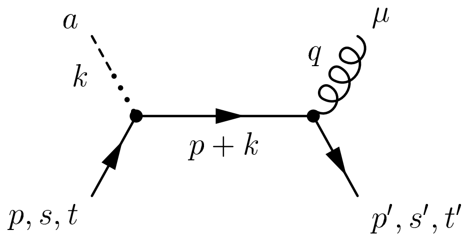


$$= \qquad -iA_c^\mu\,\epsilon_\mu \tag{1.30}$$

Da der hier auftretende $\rho\pi\pi$ - Vertex durch keine nichtrelativistischen Näherungen eingeschränkt ist, besitzt diese Amplitude Komponenten für alle vier Raum-Zeit-Indizes:

$$A_c^\mu = -i\,\frac{g f_N}{m_\pi}\,\Gamma_\pi(\vec{k}-\vec{q})\;e_a(Q)\,\varepsilon_{3ba}\,\chi^\dagger(t')\,\tau_b\,\chi(t)\;\chi^\dagger(s')\,(\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{\sigma}\,\chi(s)\frac{(2k-q)^\mu}{(k-q)^2-m_\pi^2}$$

Schließlich können mit dem ρNN - Vertex aus Gl.(1.22) die letzten beiden Graphen gebildet werden. Zunächst:



$$= \qquad -iA_d^\mu\,\epsilon_\mu$$

$$\begin{aligned} A_d^\mu \;=\; & -\frac{i}{2}\,\frac{g f_N}{m_\pi}\,\Gamma_\pi(\vec{k})\;e_a(Q)\,\chi^\dagger(t')\,\tau_3\,\tau_a\,\chi(t)\;\cdot \\ & \chi^\dagger(s')\,\vec{k}\cdot\vec{\sigma}\,\chi(s)\;iG_N(k+p)\,\begin{pmatrix} \frac{(G_N^{-1}(p')-G_N^{-1}(p+k))}{-q^0} \\ 0 \end{pmatrix}^\mu \end{aligned}$$

Der Einbau der inversen Nukleonpropagatoren in die 0 - Komponente des ρNN - Vertex (Gl.(1.22)) vereinfacht hier die Amplitude enorm:

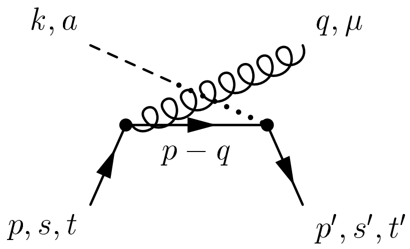
Da die einlaufenden und auslaufenden Nukleonen auf ihrer Massenschale sitzen, gilt

$$G_N^{-1}(p') \;=\; G_N^{-1}(p) \;= 0.$$

Damit folgt für die Amplitude

$$A_d^\mu \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{gf_N}{m_\pi}\,\Gamma_\pi(\vec{k})\;e_a(Q)\,\chi^\dagger(t')\,\tau_3\,\tau_a\,\chi(t)\,\chi^\dagger(s')\,\vec{k}\!\cdot\!\vec{\sigma}\,\chi(s)\,\begin{pmatrix}\frac{1}{q_0}\\ 0\end{pmatrix}^\mu . \tag{1.31}$$

Analog lautet der gekreuzte Graph:



$$= \qquad -iA_e^\mu\,\epsilon_\mu \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned} A_e^\mu \;&=\; -\frac{i}{2}\,\frac{gf_N}{m_\pi}\,\Gamma_\pi(\vec{k})\;e_a(Q)\,\chi^\dagger(t')\,\tau_a\,\tau_3\,\chi(t)\;\cdot \\ &\qquad\qquad \chi^\dagger(s')\,\vec{k}\!\cdot\!\vec{\sigma}\,\chi(s)\;iG_N(p-q)\;\begin{pmatrix}\frac{(G_N^{-1}(p-q)-G_N^{-1}(p))}{-q^0}\\ 0\end{pmatrix}^\mu \\ &=\; -\frac{1}{2}\,\frac{gf_N}{m_\pi}\,\Gamma_\pi(\vec{k})\;e_a(Q)\,\chi^\dagger(t')\,\tau_a\,\tau_3\,\chi(t)\,\chi^\dagger(s')\,\vec{k}\!\cdot\!\vec{\sigma}\,\chi(s)\,\begin{pmatrix}\frac{1}{q_0}\\ 0\end{pmatrix}^\mu \end{aligned}$$

1.3.1 Isospin

Zur Bestimmung der in den Amplituden auftretenden Isospinfaktoren müssen wir uns zunächst darüber klar werden, welche speziellen Prozesse überhaupt betrachtet werden sollen.
Im ersten Abschnitt (1.1) wurde das Modell des ρ- Propagators aus Ref. [9] dieser Rechnung zugrundegelegt. Da dort nur das neutrale ρ - Meson benötigt wird, kommen aufgrund der Ladungserhaltung nur die Prozesse

$$\pi^+ n \to \rho^0 p, \qquad \pi^- p \to \rho^0 n, \qquad \pi^0 n \to \rho^0 n, \quad \text{und} \;\; \pi^0 p \to \rho^0 p$$

in Frage, wenn der Zusammenhang zwischen Selbstenergie und Wirkungsquerschnitt gesucht werden soll.

Berechnen wir nun explizit die Isospinfaktoren mit Hilfe der folgenden Beziehungen:

Die Isopinvektoren des Pions sind die Eigenvektoren des Isospinoperators T_3 ($(T_3)_{ab} = -i\varepsilon_{3ab}$):

$$\vec{e}(+1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}(-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.33}$$

Für ein Proton steht

$$\chi(t = \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

für ein Neutron

$$\chi(t = -\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Wechselwirkung ist invariant unter Isospinrotationen. Deshalb ergeben die beiden erstgenannten Prozesse mit den geladenen Pionen dasselbe Ergebnis, wie man auch direkt sehen kann:
Die Amplituden A_a^μ bis A_c^μ enthalten die folgende Kombination von Isospinfaktoren:

$$e_a(Q)\, \varepsilon_{3ba}\, \chi^\dagger(t')\, \tau_b\, \chi(t)$$

Das ergibt für den Prozeß $\pi^+ n \to \rho^0 p$

$$e_a(1)\, \varepsilon_{3ba}\, \chi^\dagger(\frac{1}{2})\, \tau_b\, \chi(-\frac{1}{2}) = -i\sqrt{2},$$

und für $\pi^- p \to \rho^0 n$

$$e_a(-1)\, \varepsilon_{3ba}\, \chi^\dagger(-\frac{1}{2})\, \tau_b\, \chi(\frac{1}{2}) = -i\sqrt{2}.$$

Amplitude A_d^μ ergibt jeweils

$$e_a(1)\,\chi^\dagger(\frac{1}{2})\,\tau_3\tau_a\,\chi(-\frac{1}{2}) \;=\; e_a(-1)\,\chi^\dagger(-\frac{1}{2})\,\tau_3\tau_a\,\chi(\frac{1}{2}) \;= -\sqrt{2},$$

Amplitude A_e^μ

$$e_a(1)\,\chi^\dagger(\frac{1}{2})\,\tau_a\tau_3\,\chi(-\frac{1}{2}) \;=\; e_a(-1)\,\chi^\dagger(-\frac{1}{2})\,\tau_a\tau_3\,\chi(\frac{1}{2}) = \sqrt{2}.$$

Bei den Reaktionen mit dem neutralen Pion ergeben die Diagramme a, b und c keinen Beitrag, da das Produkt $\varepsilon_{3ba} \cdot e_a(0)$ verschwindet.
Die Diagramme d und e tragen beide den Isospinfaktor $+1$, darüber hinaus unterscheiden sie sich nur in ihren Vorzeichen, d.h. die Summe der beiden Amplituden verschwindet ebenfalls.
Das ist ein Effekt der extremen nichtrelativistische Näherung (Gl.(1.22)), die zum Auftreten der inversen Propagatoren führt. Die Kombinationen

$$\begin{aligned} A_d &\propto G_N(p+q)\left(G_N^{-1}(p') - G_N^{-1}(p+q)\right) = -1 \\ A_e &\propto G_N(k-q)\left(G_N^{-1}(k-p) - G_N^{-1}(p)\right) = +1 \\ \text{mit} &\qquad p^2 = m_N^2, \qquad p'^2 = m_N^2 \end{aligned}$$

lassen als einzigen Effekt des propagierenden Nukleons den Vorzeichenunterschied übrig. In Kap. 2, Abschnitt 2.2 wird geprüft, inwieweit dieses Ergebnis auch noch in der nächsten Ordnung der nichtrelativistischen Entwicklung Bestand hat.

Letztendlich muß also nur die Reaktion $\pi^- p \to \rho^0 n$ berechnet werden, für die auch die experimentellen Daten vorliegen.

Fassen wir die Gleichungen (1.28)-(1.32) mit den angegebenen Isospinfaktoren zusammen, so ergibt sich für die Gesamtamplitude dieses Prozesses:

$$\begin{aligned} A^\mu = \frac{g f_N}{m_\pi}\Gamma_\pi(\vec{k}) \Bigg[&-\sqrt{2}\;\chi^\dagger(s')\begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\sigma}\end{pmatrix}^\mu \chi(s) \\ &+\sqrt{2}\;\chi^\dagger(s')\frac{(\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{\sigma}}{(\vec{k}-\vec{q})^2+\Lambda^2}\chi(s)\begin{pmatrix} 0 \\ 2\vec{k}-\vec{q}\end{pmatrix}^\mu \\ &-\sqrt{2}\;\chi^\dagger(s')\;\vec{k}\cdot\vec{\sigma}\;\chi(s)\;\begin{pmatrix} \frac{1}{q_0} \\ 0\end{pmatrix}^\mu \Bigg] \\ -\frac{g f_N}{m_\pi}\Gamma_\pi(\vec{k}-\vec{q})\,\sqrt{2}\;&\chi^\dagger(s')\,(\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{\sigma}\,\chi(s)\frac{(2k-q)^\mu}{(k-q)^2-m_\pi^2}. \end{aligned} \tag{1.34}$$

1.4 Eichinvarianz der Amplitude

Wichtigster Test der aufgestellten Amplitude ist das Prüfen der Eichinvarianz. Die Amplitude muß vierdimensional transversal sein:

$$A^{\mu} q_{\mu} = 0.$$

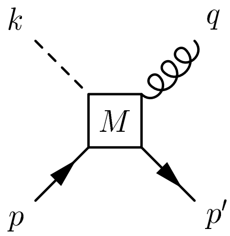
Multipliziert man also A^{μ} (Gl.(1.34)) mit q_{μ} und berücksichtigt bei Graph c, daß das auslaufende Pion 'on-shell' ist, $k^2 = m_{\pi}^2$, so ergibt sich durch Ordnen nach Termen proportional zu $\vec{q}\cdot\vec{\sigma}$ und $\vec{k}\cdot\vec{\sigma}$:

$$\begin{aligned}
A^{\mu} q_{\mu} &= \frac{g f_N}{m_{\pi}} \sqrt{2}\, \chi^{\dagger}(s')\, \vec{q}\cdot\vec{\sigma}\, \chi(s) \cdot \\
&\quad \left[\Gamma_{\pi}(\vec{k}) \left(1 + \frac{2\vec{k}\cdot\vec{q} - \vec{q}^{\,2}}{(\vec{k}-\vec{q})^2 + \Lambda^2} \right) + \Gamma_{\pi}(\vec{k}-\vec{q}) \frac{2k\cdot q - q^2}{q^2 - 2k\cdot q} \right] \\
&\quad + \frac{g f_N}{m_{\pi}} \sqrt{2}\, \chi^{\dagger}(s')\, \vec{k}\cdot\vec{\sigma}\, \chi(s) \cdot \\
&\quad \left[\Gamma_{\pi}(\vec{k}) \left(\frac{-2\vec{k}\cdot\vec{q} + \vec{q}^{\,2}}{(\vec{k}-\vec{q})^2 + \Lambda^2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) - \Gamma_{\pi}(\vec{k}-\vec{q}) \frac{2k\cdot q - q^2}{q^2 - 2k\cdot q} \right] \\
&= \frac{g f_N}{m_{\pi}} \sqrt{2}\, \chi^{\dagger}(s')\, \vec{q}\cdot\vec{\sigma}\, \chi(s)\, \Lambda^2 \cdot \\
&\quad \left[\frac{1}{\vec{k}^2 + \Lambda^2} \left(\frac{\Lambda^2 + \vec{k}^2}{(\vec{k}-\vec{q})^2 + \Lambda^2} \right) - \frac{1}{(\vec{k}-\vec{q})^2 + \Lambda^2} \right] \\
&\quad + \frac{g f_N}{m_{\pi}} \sqrt{2}\, \chi^{\dagger}(s')\, \vec{k}\cdot\vec{\sigma}\, \chi(s)\, \Lambda^2 \cdot \\
&\quad \left[\frac{1}{\vec{k}^2 + \Lambda^2} \left(\frac{-\Lambda^2 - \vec{k}^2}{(\vec{k}-\vec{q})^2 + \Lambda^2} \right) + \frac{1}{(\vec{k}-\vec{q})^2 + \Lambda^2} \right] \\
&= 0\,, \qquad (1.35)
\end{aligned}$$

wie es sein muß.

1.5 Der Wirkungsquerschnitt

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die $\pi^- p \to \rho^0 n$ - Reaktion



lautet [14]:

$$d\sigma = \frac{1}{|\vec{v}_{rel}|} \frac{1}{2k^0} \frac{m_N}{p^0} \frac{1}{2q^0} \frac{m_N}{p'^0} (2\pi)^4 \, \delta^4(k + p - p' - q) \, \overline{|M|^2} \, \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \,. \qquad (1.36)$$

Im Laborsystem, also im Ruhesystem des einlaufenden Nukleons ($p = (m_N, 0)$), ist die Relativgeschwindigkeit gegeben durch $\vec{v}_{rel} = \vec{k}/k^0$.

$\overline{|M|^2}$ ist das Betragsquadrat der über Spin, Isospin und ρ - Polarisationen gemittelten invarianten Amplitude.

Ein Vergleich mit der Berechnung aus der ρ - Selbstenergie zeigt, daß der Normierungsfaktor m_N/p'^0 im Phasenraumintegral weggelassen werden muß, um mit den nichtrelativistischen Feynmanregeln konsistent zu sein.

Integration ergibt dann den totalen Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma \;=\; \frac{k^0}{|\vec{k}|} \frac{1}{2k^0} \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3p' \int \frac{d^3q}{q^0} \, \delta^4(k + p - p' - q) \, \overline{|M|^2}$$

Durch Ausnutzen der δ - Funktion kann die d^3p' - Integration ausgeführt werden. Legt man außerdem den Impuls des einlaufenden Pions in z - Richtung, so ist wegen der Rotationssymmetrie des Prozesses eine Winkelintegration trivial auszuführen.

Dann bleiben die Integrationen über den Impulsbetrag $|\vec{q}|$ und über den Cosinus des Winkels θ zwischen Pion und ρ im Laborsystem, abgekürzt $\cos\theta = x$:

$$\sigma \;=\; \frac{1}{8\pi\, \vec{k}^2} \int_0^\infty d|\vec{q}| \int_{-1}^{1} dx \, \frac{|\vec{q}|\sqrt{\vec{k}^2 + \vec{q}^{\,2} + m_N^2 - 2|\vec{k}||\vec{q}|x}}{q^0} \, \delta(x - x_0) \, \overline{|M|^2} \qquad (1.37)$$

$$\text{mit} \quad x_0 = \frac{\vec{k}^2 + \vec{q}^{\,2} + m_N^2 - (k^0 + m_N - q^0)^2}{2|\vec{k}||\vec{q}|} .$$

Die Integration über die verbleibende δ-Funktion schränkt den Integrationsbereich von $|\vec{q}|$ ein. Nach längerer Rechnung ergeben sich neue Integrationsgrenzen $q^0_\pm$:

$$\begin{aligned} q^0_\pm \;=\; & \frac{1}{4m_N s}\Big[(s+m_N^2-m_\pi^2)(s-m_N^2+m_\rho^2) \\ & \pm\sqrt{[(s-m_N^2-m_\pi^2)^2-4m_\pi^2 m_N^2][(s-m_N^2-m_\rho^2)^2-4m_\rho^2 m_N^2]}\;\Big], \end{aligned}$$

Hier ist s die Mandelstammvariable für die Gesamtenergie des Systems,

$$s \;=\; (k+p)^2 \;=\; (q+p')^2.$$

Somit folgt schließlich

$$\sigma \;=\; \Theta(s-(m_N+m_\rho)^2)\,\frac{1}{8\pi\,\vec{k}^2}\int_{q^0_-}^{q^0_+} dq^0\,(k^0+m_N-q^0)\,\overline{|M|^2}.$$

Der Wirkungsquerschnitt gilt so nur für eine feste Masse des ρ-Mesons. Wegen der Breite des ρ muß er noch mit der ρ- Spektralfunktion $A_\rho(M)$ gefaltet werden:

$$\sigma(s) = \int_{2m_\pi}^{\sqrt{s}-mN} \frac{dM\;M}{\pi}\,A_\rho(M)\,\sigma(s,M)$$

Die Spektralfunktion kann durch den Imaginärteil des ρ-Propagators im Vakuum beschrieben werden:

$$A_\rho(M) = -2\mathrm{Im}G_\rho^{vac}(M)$$

G_ρ^{vac} ist durch den Zerfall des ρ-Mesons in zwei Pionen bestimmt (Gl.(1.1)).

In Abb. 1.2 sieht man den Wirkungsquerschnitt für zwei Werte des Parameters Λ am πNN-Formfaktor. Wie oben angedeutet, war in Ref. [9] durch Vergleich mit dem Photoabsorptionswirkungsquerschnitt (s. auch [16]) eine obere Grenze von $\Lambda = 550$ MeV gefunden worden. Das bedeutete dort bereits eine große Reduktion gegenüber dem ursprünglich dem Bonn-Potential entnommenen Wert von $\Lambda = 1200$ MeV ([17],[18],[5]).

In der Literatur finden sich aber Beispiele dafür, daß weichere Formfaktoren mit Werten zwischen 500 und 1000 MeV für verschiedenen Anwendungen benötigt werden
(z.B. πN-Streuung im Chew-Low- Modell [19]: $\Lambda_{\pi NN} \approx 520$ MeV, tief inelastische Leptonstreuung [20]: $\Lambda_{\pi NN(\Delta)} < 500$ MeV, Cloudy-Bag- Modell des Nukleons [21]: $\Lambda_{\pi NN(\Delta)} \approx 780$ MeV bei $R = 0.8fm$ ([17]), Gitter-QCD [22]: $\Lambda_{\pi NN} = (750 \pm 140)$ MeV).

In unserem Fall liegt man allerdings mit $\Lambda = 550$ MeV noch weit über den Daten, erst eine drastische Verringerung auf ~ 310 MeV liefert ein besseres Ergebnis.

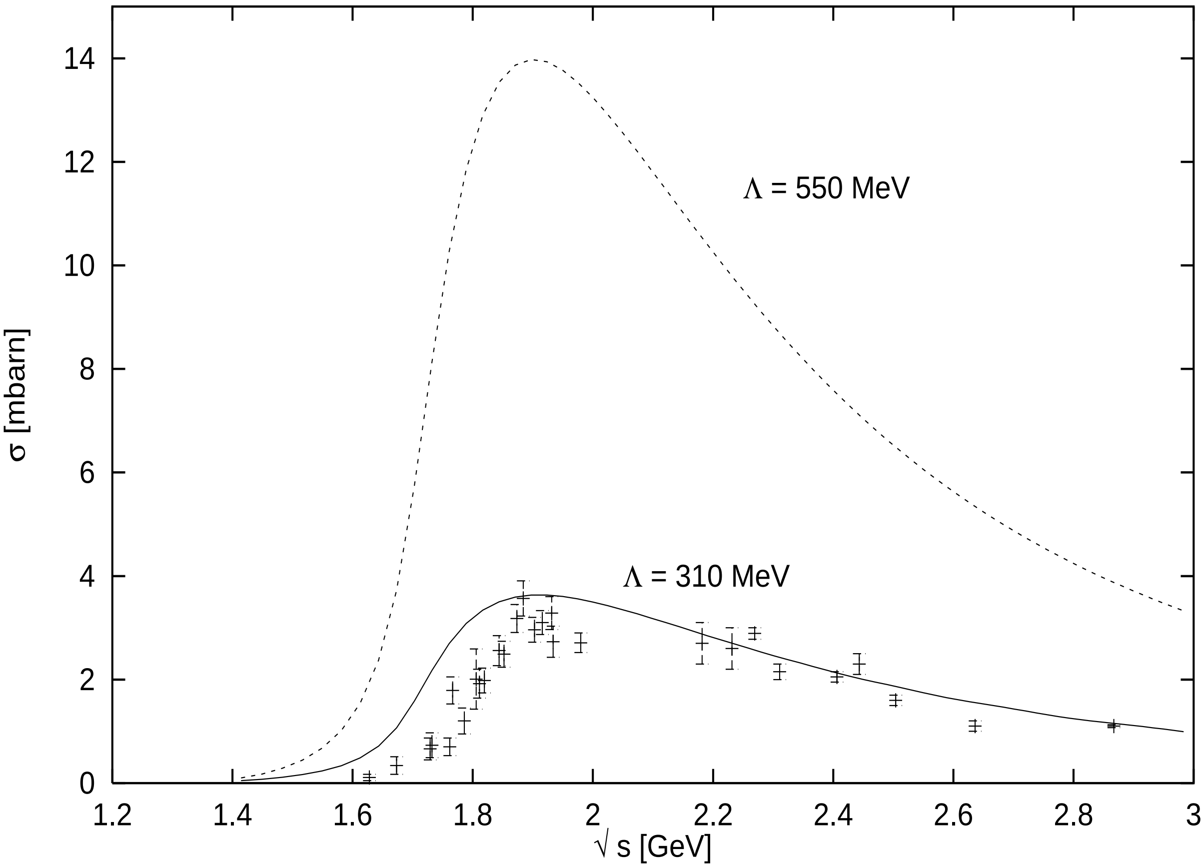


Abb. 1.2: *Totaler Wirkungsquerschnitt* $\sigma_{\pi^- p \to \rho^0 n}$ *mit* Λ*=550 MeV und* Λ*=310 MeV, im Vergleich mit den Daten aus Ref. [13].*

Es gibt auch Literaturbeispiele für kleinere Formfaktoren, so etwa π^0 - Photoproduktion [23]: $\Lambda_{\pi N \Delta} = 300$ MeV.

Trotzdem ist dies natürlich ein unbefriedigender Befund: Der Wirkungsquerschnitt wird weniger von der mikroskopischen Rechnung als vielmehr vom Parameter Λ bestimmt, der Einfluß der Pionen auf diesen und verwandte Prozesse wird immer geringer.
Konsequenz dieses Resultats ist, daß im weiteren die Ursachen für dieses Verhalten untersucht werden müssen: die Qualität der Daten, die Güte der gemachten Näherungen, die Frage nach weiteren eventuell beitragenden Prozessen.

1.6 Untersuchung der experimentellen Daten und ihrer Analyse

Betrachten wir zunächst die Datenlage. Die im relevanten Energiebereich liegenden Ergebnisse stammen aus Experimenten von Brody et.al. ([13]).
Die gemessenen $\pi^- p \to \pi^+\pi^- n$ - Daten wurden in vier mögliche Reaktionskanäle aufgeteilt:

$$\begin{array}{lcll} \pi^- p & \to & \pi^+\Delta^-, & \pi^- p \to \pi^-\Delta^+ \\ \pi^- p & \to & \rho^0 n & \text{nur für Energien oberhalb } 1.6\,\text{GeV} \\ \pi^- p & \to & \pi^+\pi^- n & \text{Phasenraum.} \end{array}$$

Diese Analyse ist offensichtlich sehr schwierig.

Die angenommene untere Grenze für den ρ^0 - Kanal von 1.6 GeV liegt deutlich über der Schwelle von $m_N + 2m_\pi = 1.22$ GeV. Also ist klar, daß die Daten im unteren Energiebereich unter der theoretischen Kurve liegen müssen.

Die Größe des Wirkungsquerschnitts wiederum hängt natürlich davon ab, wie stark die anderen Kanäle vertreten sind. So nimmt der letztgenannte Anteil, der 2-Pionen-Phasenraum, also alle nicht genauer identifizierten Ereignisse, am Maximum des Wirkungsquerschnitts ein gutes Drittel des Gesamtquerschnitts ein.
Allerdings zeigt sich hier auch, daß die Unsicherheit der Datenanalyse nicht allein für die Kleinheit von Λ verantwortlich gemacht werden kann:
Nimmt man probeweise an, das experimentelle Ergebnis sei (etwa am Maximum bei 1.9 GeV) zur Gänze durch den $\rho^0 n$ - Kanal zustande gekommen, so erhielte man gerade 9.15 mbarn, während der Wirkungsquerschnitt der Rechnung mit $\Lambda = 550$ MeV dort einen Wert von 14 mbarn aufweist.

In einer Analyse aller verfügbaren Daten der Reaktion $\pi N \to \pi\pi N$ von Manley et.al. ([24]) liegt die Schwelle für den Prozeß $\pi N \to \rho N$ zwar bei 1.22 GeV, die Stärke des Wirkungsquerschnitts dieser Reaktion wird aber eher geringer angegeben.

Es muß also anderweitig nach Ursachen gesucht werden.

1.7 Analyse einzelner Graphen

So liegt es nahe, die Beiträge der fünf Graphen einzeln zu betrachten. Wenn ein Diagramm besonders ins Gewicht fiele, könnte man eventuell das zugrundeliegende Problem erfassen. Das ist freilich eher eine numerische denn eine physikalische Analyse. Ein einzelner Graph braucht schließlich alleine nicht eichinvariant zu sein. Dennoch kann diese Betrachtung eventuell Aufschlüsse ergeben. Eine daraus sich ergebende Modifikation der bisherigen Rechnung müßte dann natürlich in eichinvarianter Weise erfolgen.

Tatsächlich zeigt sich, daß praktisch der ganze Wirkungsquerschnitt durch das Diagramm c (Gl.(1.30)) und dessen Interferenz mit Diagramm b (Gl.(1.29)) erzeugt wird:

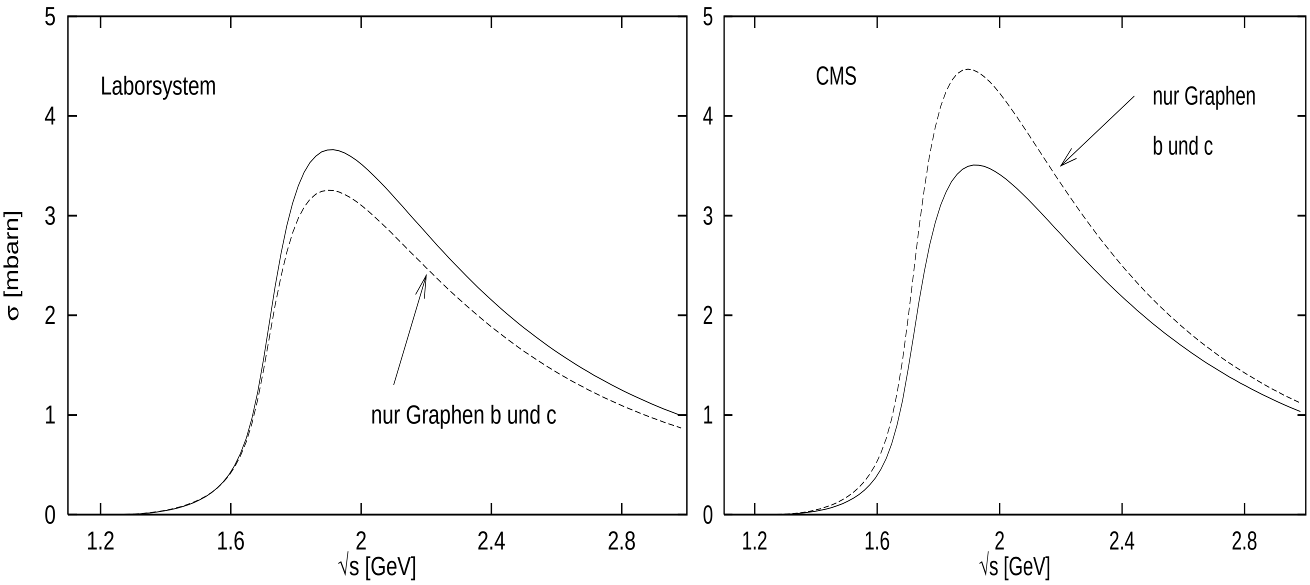


Abb. 1.3: *links: Wirkungsquerschnitt und dominante Beiträge im Laborsystem, rechts: Vergleich im Schwerpunktssystem*

Die anderen Graphen tragen - im Laborsystem - nur wenige μbarn bei. Das lenkt die Aufmerksamkeit auf den Graphen c.

Doch ist bei dieser Folgerung Vorsicht geboten. Durch die nichtrelativistische Näherung in der Behandlung der Nukleonen ist natürlich die Lorentzinvarianz des Wirkungsquerschnitts verlorengegangen. In einem anderen Bezugssystem könnte das Ergebnis also ganz anders aussehen.

Deswegen ist oben in Abb. 1.3 rechts der Vergleich der genannten dominanten Beiträge mit dem gesamten Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktssystem dargestellt.

Die beiden Graphen b und c sind also auch im Schwerpunktssystem etwa von der Stärke des Gesamtquerschnitts, liegen hier aber darüber. Es muß also negative Interferenzbeiträge der anderen Graphen geben, damit das Gesamtergebnis zustande kommen kann. Tatsächlich zeigt ein weiterer Vergleich in Abb. 1.4, daß im CMS offenbar alle Beiträge viel größer sind als im Laborsystem.

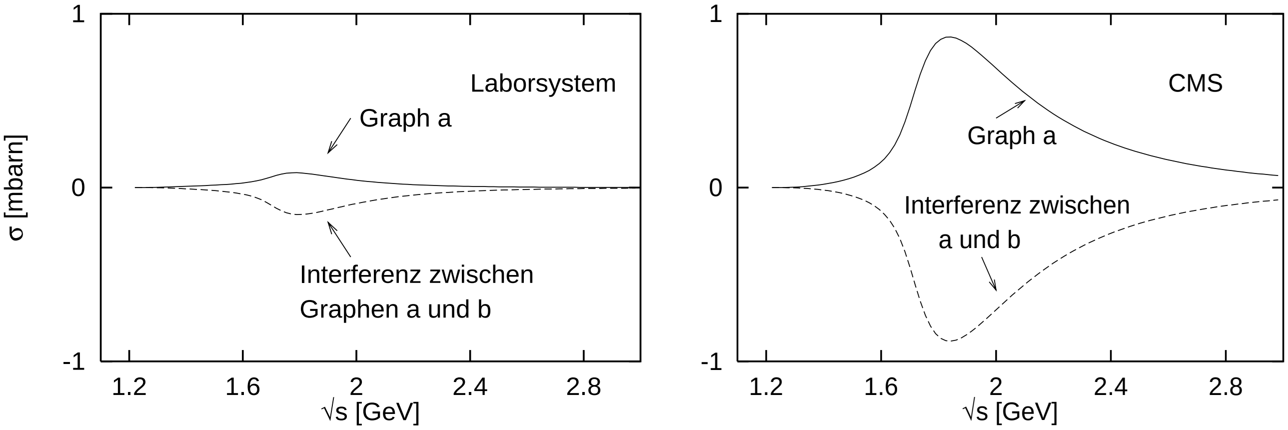


Abb. 1.4: *Beiträge des Graphen a und des Interferenzterms zwischen a und b, links: Laborsystem, rechts: Schwerpunktssystem*

Die Gesamtwirkungsquerschnitte hingegen unterscheiden sich in den beiden Bezugssystemen nur wenig:

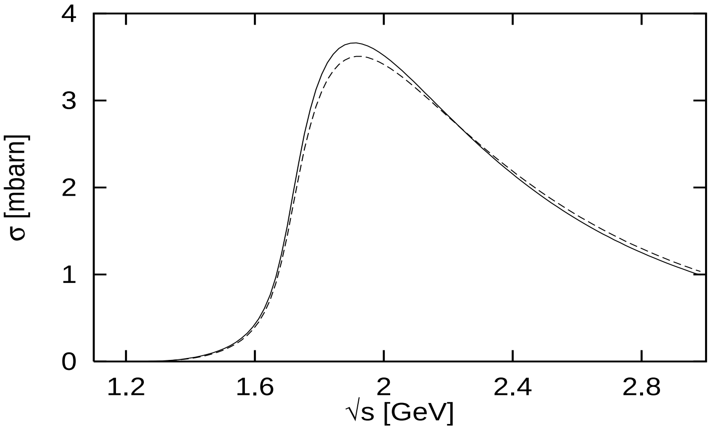


Abb. 1.5: $\pi N \rightarrow \rho N$ - *Wirkungsquerschnitt im Laborsystem (durchgezogene Kurve) und im Schwerpunktssystem (gestrichelte Kurve)*

Diese Beobachtungen erzeugen einiges Unbehagen mit der nichtrelativistischen Näherung: Die eher geringe Verletzung der Lorentzinvarianz in Abb. 1.5 beruht offenbar im wesentlichen darauf, daß sich einige Beiträge gegenseitig wegheben. Bei anderen Rechnungen könnte dies nicht der Fall sein, die Ergebnisse wären mit entsprechend großer Unsicherheit behaftet.
Im nächsten Kapitel wird daher erörtert, ob eine Erweiterung der nichtrelativistischen Näherung für den ρNN - Vertex starken Einfluß auf den Wirkungsquerschnitt hat.

Doch bleiben wir zunächst bei Graph c und versuchen herauszufinden, warum er (im Laborsystem) einen so großen Beitrag liefert.

Der Formfaktor, der hohe Impulse unterdrücken soll, befindet sich am πNN - Vertex. Wenn der dort durchfließende Impuls $|\vec{k}-\vec{q}|$ klein, der Impuls des einlaufenden Pions $|\vec{k}|$ aber schon groß ist, dann bleibt der Formfaktor freilich ineffektiv.
Das Verhältnis der beiden Impulse im Laborsystem ist in Abb. 1.6 rechts angegeben. Hier ist an der Schwelle der Impuls $|\vec{k}-\vec{q}|$ nur halb so groß wie der Impuls $|\vec{k}|$ und kann bei höheren Energien stets auch kleine Werte annehmen, während $|\vec{k}|$ stetig wächst:

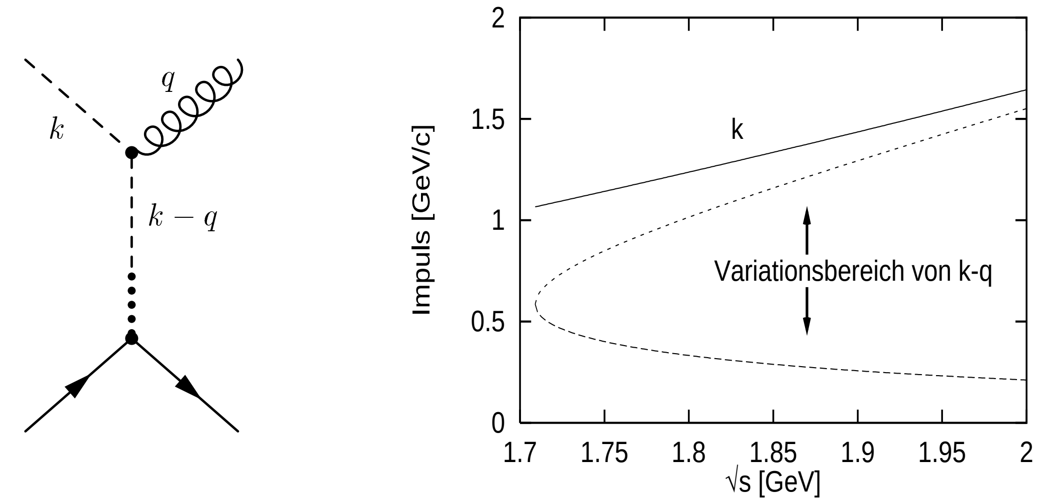


Abb. 1.6: *links: Graph c, rechts: Vergleich der Impulse $|\vec{k}|$ des einlaufenden Pions und $|\vec{k}-\vec{q}|$ des ausgetauschten Pions*

Abb. 1.7 zeigt, daß diese Ineffektivität des Formfaktors auch im Schwerpunktssystem besteht. An der Schwelle ist hier freilich $|\vec{q}| = 0$, also $|\vec{k}| = |\vec{k}-\vec{q}|$, andererseits ist der CMS- Schwellenimpuls $|\vec{k}|$ gerade gleich dem Lab- Schwellenwert von $|\vec{k}-\vec{q}|$, so daß an der Schwelle der Effekt in beiden Systemen gleich ist. Bei höheren Energien wird der im Schwerpunktssystem durch den Formfaktor fließende Impuls immer kleiner, der Formfaktor greift dann kaum noch.

Damit ist klar geworden, daß an dieser Stelle ein Problem besteht. Die daraus folgende Forderung, die Vertizes des Diagramms c entsprechend zu modifizieren, wird in Kap.4 besprochen.

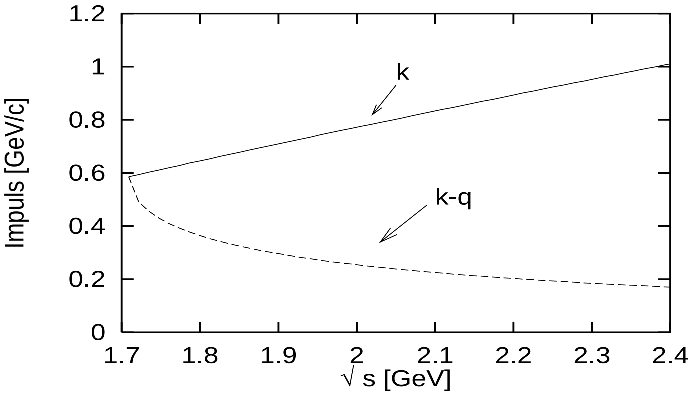


Abb. 1.7: *Vergleich der Impulse $|\vec{k}|$ des einlaufenden Pions und $|\vec{k}-\vec{q}|$ des ausgetauschten Pions im Schwerpunktssystem*

1.8 Zusammenhang zur ρ - Selbstenergie

In Abschnitt 1.1 wurde gezeigt, daß ein qualitativer Zusammenhang zwischen der ρ-Selbstenergie und dem $\pi N \to \rho N$ - Wirkungsquerschnitt besteht. Hier soll nun untersucht werden, ob man diesen Zusammenhang auch quantitativ herstellen kann, so daß sich der Wirkungsquerschnitt auch aus der ρ - Selbstenergie berechnen ließe.

Das Niederdichtetheorem [25] verbindet die ρ - Selbstenergie mit der Amplitude der ρN-Streuung:

$$\Sigma_\rho^{med}(q) = \Sigma_\rho^{vac}(q) - 4\,\pi\,\varrho \overline{f}_{\rho N\to\rho N}(\theta=0) + \ldots, \tag{1.38}$$

wobei ϱ die Dichte der Kernmaterie ist, $\overline{f}_{\rho N\to\rho N}(\theta=0)$ die über Spin und Isospin gemittelte Vorwärtsstreuamplitude.

Diese ist über das optische Theorem mit dem entsprechenden Wirkungsquerschnitt verknüpft:

$$\sigma_{\rho N} \;=\; \frac{4\pi}{|\vec{q}_\rho|_{CM}}\,\mathrm{Im}\overline{f}_{\rho N\to\rho N}(\theta=0) \tag{1.39}$$

Also gilt der Zusammenhang zur Selbstenergie:

$$\sigma_{\rho N\to\rho N} \;=\; -\frac{1}{|\vec{q}_\rho|_{CM}}\,\lim_{\varrho\to 0}\,\frac{\mathrm{Im}\Sigma_\rho^{med}(q)-\mathrm{Im}\Sigma_\rho^{vac}(q)}{\varrho} \tag{1.40}$$

Die Amplitude $\overline{f}_{\rho N\to\rho N}$ schließt nun alle Streuprozesse ein, die in der Selbstenergie Σ_ρ^{med} vorkommen:

$$\rho \;\to\; (\pi\pi,\, \pi\,(Nh),\, \pi\,(\Delta h)) \;\to\; \rho.$$

Für den Vergleich mit den experimentellen Daten, die den Δh-Kanal nicht beinhalten, muß also dieser Anteil von Σ_ρ^{med} wieder abgezogen werden:

$$4\pi\,\varrho\,\overline{f}_{\rho N\to\rho N} \approx \Sigma^{vac} - (\Sigma_{total}^{med} - \Sigma_{\rho\Delta}^{med}),$$

oder die Δ-Kopplung abgeschaltet werden:

$$4\pi\varrho\,\overline{f}_{\rho N\to\rho N} \approx \Sigma^{vac} - \Sigma^{med}_{\rho N}\ .$$

Soll speziell der Prozeß $\pi^- p \to \rho^0 n$ berechnet werden, für den die Daten vorliegen, muß eine Zerlegung nach Isospins gefunden werden, mit der man aus $\Sigma_{\rho^0 N}$ den gesuchten Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\pi^- p\to\rho^0 n}$ extrahieren kann.

$f_{\rho^0 N\to\rho^0 N}$ besteht aus zwei Anteilen:

$$f_{\rho^0 N\to\rho^0 N} \;=\; \langle\rho^0 N|f|\rho^0 N\rangle = \frac{1}{2}\Big(\,\langle\rho^0 p|f|\rho^0 p\rangle \;+\; \langle\rho^0 n|f|\rho^0 n\rangle\,\Big)\,,$$

die sich wie folgt in Amplituden zu festem Gesamtisospin J gliedern lassen:

$$\begin{aligned}
\langle\rho^0 p|f|\rho^0 p\rangle &= \sum_{J=\frac{1}{2},\frac{3}{2}} \langle 1,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}|J,\frac{1}{2}\rangle\,\underbrace{\langle J,\frac{1}{2}|f|J,\frac{1}{2}\rangle}_{=:\,f_{\rho N}}\langle J,\frac{1}{2}|1,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle \\
&= \frac{1}{3}\,f^{\frac{1}{2}}_{\rho N} \;+\; \frac{2}{3}\,f^{\frac{3}{2}}_{\rho N} \\
\langle\rho^0 n|f|\rho^0 n\rangle &= \frac{1}{3}\,f^{\frac{1}{2}}_{\rho N} \;+\; \frac{2}{3}\,f^{\frac{3}{2}}_{\rho N}
\end{aligned}$$

Somit gilt $\qquad f_{\rho^0 p\to\rho^0 p} = f_{\rho^0 n\to\rho^0 n}.$

Wie kommt man nun an einen Teilprozeß aus $f_{\rho^0 n\to\rho^0 n}$, z.B. an $f_{\rho^0 n\to\pi^- p}$ heran?
Aus der Unitarität der S-Matrix folgt:

$$Im f_{i\to f} = \sum_\nu k_\nu \int \frac{d\Omega}{4\pi}|f_{i\to\nu}|^2$$

wobei über alle möglichen Zwischenzustände ν zu summieren ist.
Für $\rho^0 n \to \rho^0 n$ gibt es die folgenden Zwischenzustände:

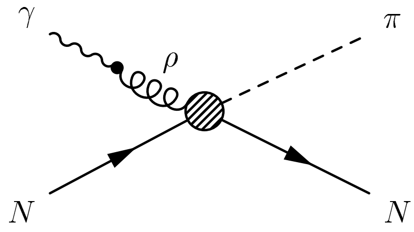
$$\begin{aligned}
Im f_{\rho^0 n\to\rho^0 n} &= \int \frac{d\Omega}{4\pi}|\vec{k}_\pi|\,\Big(|f_{\rho^0 n\to\pi^- p}|^2 \;+\; |f_{\rho^0 n\to\pi^0 n}|^2\Big) \\
&= \frac{|\vec{q}_\rho|_{CM}}{4\pi}\,\left(\sigma_{\rho^0 n\to\pi^- p} \;+\; \sigma_{\rho^0 n\to\pi^0 n}\right)
\end{aligned} \tag{1.41}$$

In Abschnitt 1.1 wurde gezeigt, daß das neutrale Pion in unserer nichtrelativistischen Näherung keinen Beitrag liefert. Also folgt:

$$\sigma_{\rho^0 n\to\pi^- p} = -\frac{1}{|\vec{q}_\rho|_{CM}}\lim_{\varrho\to 0}\frac{\mathrm{Im}\Sigma^{med}_{\rho^0 N}(q) - \mathrm{Im}\Sigma^{vac}_{\rho^0 N}(q)}{\varrho} \tag{1.42}$$

Zunächst soll dieses Vorgehen für den Fall der Photoabsorption am Nukleon getestet werden. Wie am Ende von Abschnitt 1.1 bemerkt, kann die Reaktion $\rho N \to \pi N$ gemäß dem

Vektordominanzmodell durch Ankopplung eines Photons als Teil der Photoabsorption am Nukleon verstanden werden:



Mit dieser Vorgehensweise war in Ref. [9] die erste Einschränkung des πNN - Formfaktors gewonnen worden.

Wir berechnen also den nukleonischen Anteil des Untergrunds der Photoabsorption mit Hilfe der fünf Graphen und finden eine Übereinstimmung mit dem Resultat der Rechnung nach Gl.(1.42):

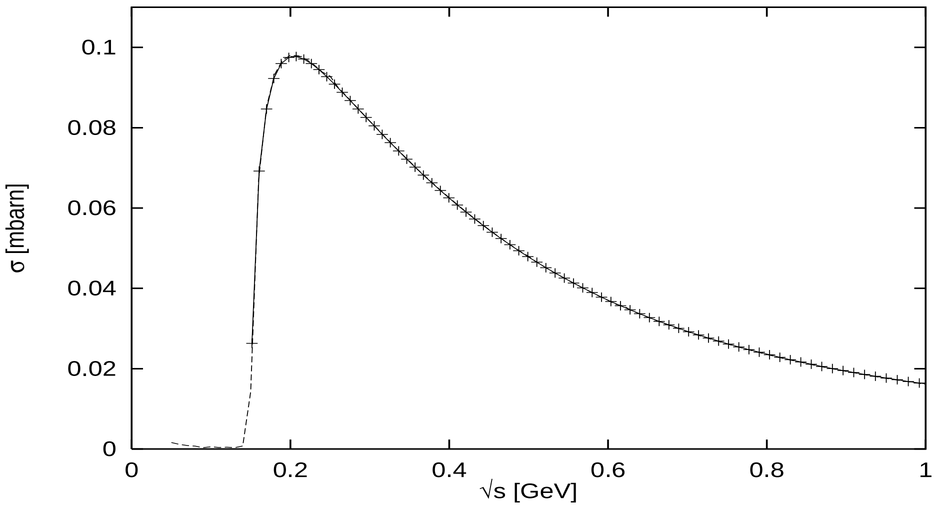


Abb. 1.8: *Photoabsorption am Nukleon, Graphen (⋆)- und Selbstenergiemethode (–)*

Der Anteil des Deltas und das resonante Photoabsorptionsspektrum werden in Kap. 3 behandelt.

Als nächstes berechnen wir auch die $\pi^- p \to \rho^0 n$ - Reaktion mit beiden Methoden.
Um den Wirkungsquerschnitt aus der Selbstenergie auch für diese, umgekehrte Prozeßrichtung zu bestimmen, bedienen wir uns des Prinzips des detaillierten Gleichgewichts [26]:

$$\sigma_{\pi N \to \rho N} = 3 \, \frac{|\vec{q}_\rho|^2_{CM}}{|\vec{k}_\pi|^2_{CM}} \, \sigma_{\rho N \to \pi N}. \qquad (1.43)$$

Das Resultat weist allerdings einen deutlichen Unterschied zwischen den beiden Rechnungen auf:

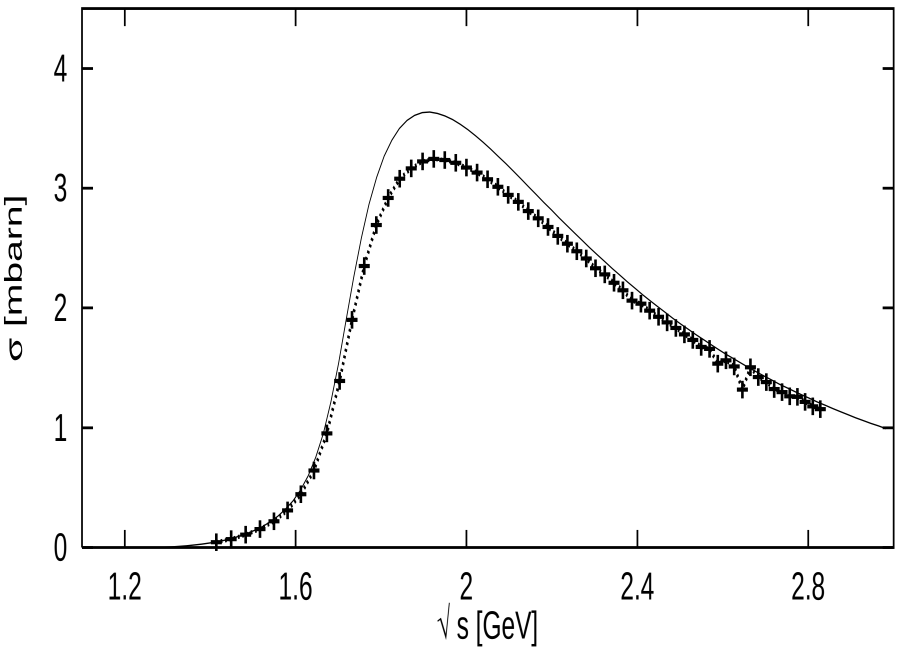


Abb. 1.9: *Totaler Wirkungsquerschnitt* $\sigma_{\pi^- p \to \rho^0 n}$, *berechnet aus* $Im\Sigma_{\rho^0 N}$ *(Punkte (+)) und mit Hilfe der Feynmangraphen (durchgezogene Kurve)*

Woher rührt diese Diskrepanz, wenn doch die Photoabsorption so gute Übereinstimmung der Methoden aufweist?

Ein Schritt der Umrechnung der Selbstenergie zum Wirkungsquerschnitt, der beim Photoabsorptionswirkungsquerschnitt nicht nötig war, ist die Anwendung des Prinzips des detaillierten Gleichgewichts. In Abschnitt 1.7 war zwischen den Resultaten der Berechnung des Wirkungsquerschnitt im Labor- und Schwerpunktssystem ein Unterschied zu Tage getreten, der durch den Bruch der Lorentzinvarianz aufgrund der nichtrelativistischen Näherungen zustande kam. Das läßt vermuten, daß man das Prinzip des detaillierten Gleichgewichts, das auf der Lorentzinvarianz der Übergangsamplitude beruht, nicht anwenden kann, ohne einen Fehler zu machen.

Abb. 1.10 zeigt die Differenz zwischen dem direkt berechneten $\pi^- p \to \rho^0 n$ - Wirkungsquerschnitt und dem aus $\rho^0 n \to \pi^- p$ mit Hilfe des detaillierten Gleichgewichts gewonnenen Querschnitt.

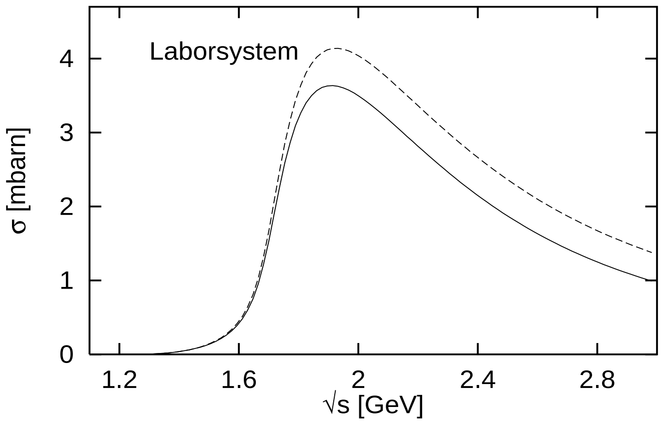


Abb. 1.10: *Test des detaillierten Gleichgewichts bei der Reaktion $\pi^- p \leftrightarrow \rho^0 n$, gestrichelte Kurve mit detailliertem Gleichgewicht, durchgezogene Kurve direkt berechnet*

Nachdem klar geworden ist, daß durch die gebrochene Lorentzinvarianz der Vergleich verschiedener Bezugssysteme (Labor $\leftrightarrow$ Schwerpunkt, ρ- Produktion $\leftrightarrow$ inverser Prozeß) nicht möglich ist, muß natürlich der Wirkungsquerschnitt für den Vergleich mit der Selbstenergierechnung ebenfalls unter Verwendung des detaillierten Gleichgewichts berechnet werden, da man dies bei der Selbstenergie nicht vermeiden kann.

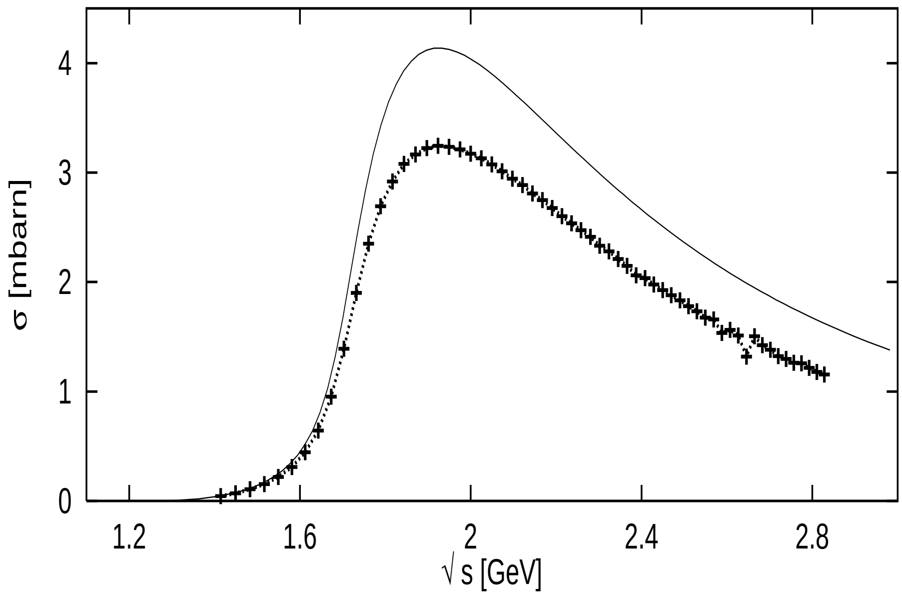
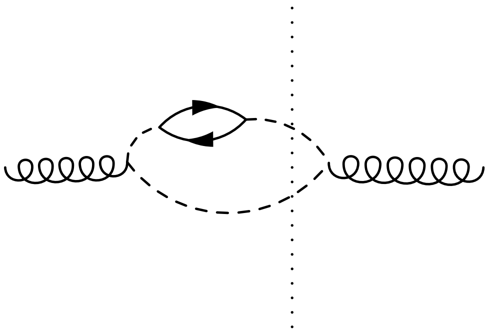


Abb. 1.11: *Totaler Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\pi^- p \to \rho^0 n}$, berechnet mit Selbstenergiemethode (Punkte) und Graphenmethode (durchgezogene Kurve), beide mit detailliertem Gleichgewicht*

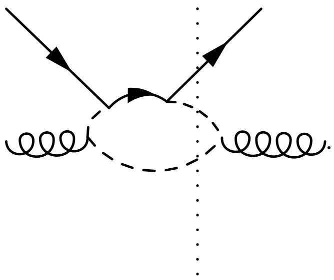
Abb. 1.11 zeigt diesen nun konsistenten Vergleich, aber der Unterschied zwischen beiden Metoden ist noch größer als in Abb. 1.9.

Gehen wir daher noch einmal auf den Ursprung des Vergleichs der Methoden zurück, die Selbstenergiediagramme in Abschnitt 1.1. Dort wurde erläutert , wie durch „Aufschneiden" aus diesen Diagrammen Streugraphen konstruiert werden können. Es fällt auf, daß dazu in den sechs Niederdichte- Diagrammen in Abb. 1.1 stets durch ein Nukleon-Loch-Paar geschnitten werden muß. Daneben gibt es aber noch weitere Schnitte, die i.a. ebenfalls zum Imaginärteil der Selbstenergie beitragen können, z.B.



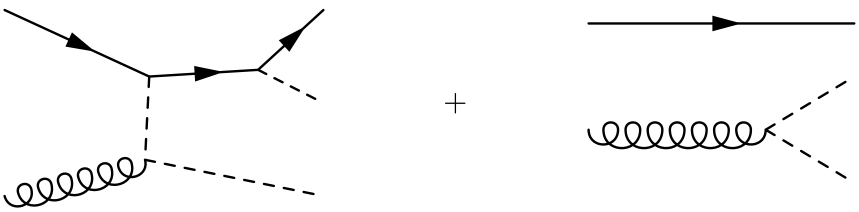
(1.44)

Wollen wir die graphische Analyse weitertreiben, so ist als erstes zu beachten, daß der Lochzustand dieses Diagramms im Sinne einer ρN - Streuung als ein- bzw. auslaufendes Nukleon interpretiert werden muß, also:



(1.45)

Dann ergibt unsere „Schneidetechnik" aber, daß es sich dabei um den Interferenzterm der folgenden beiden Diagramme handelt :



(1.46)

Das sind natürlich keine Graphen des $\pi N \to \rho N$ - Prozesses, obwohl sie durchaus als Teil der ρN - Streuung angesehen werden können, die durch die Streuamplitude $f_{\rho N \to \rho N}$ im Niederdichtetheorem Gl.(1.38) beschrieben wird.

Eine Analyse des Imaginärteils der ρ-Selbstenergie kann diese diagrammatische Argumentation unterstützen. In Anhang A.1.1 wird gezeigt, daß die Selbstenergie tatsächlich mehr Terme umfaßt als die durch die fünf Graphen aus Abschnitt 1.3 beschriebenen.

Die Vermutung ist somit, daß hier bei der Anwendung des Niederdichtetheorems Probleme auftreten, da die Breite des ρ-Mesons zur Existenz solcher unverbundener Vakuum-Diagramme wie des rechten in Gl.(1.46) führt, deren Interferenzen mit anderen Diagrammen beim Abziehen des Vakuumsanteils der Selbstenergie (Gl.(1.40)) nicht verschwinden. Dann ist auch klar, warum der Vergleich der Selbstenergie- und der Graphen- Methode im Falle der Photoabsorption so gut funktioniert: Das Photon kann nicht in 2 Pionen zerfallen, der Imaginärteil eines entsprechenden Diagramms verschwindet.

Welche Schlußfolgerung kann man nun aus den Untersuchungen zur Berechnung des Wirkungsquerschnitts aus der Selbstenergie ziehen? Die Konstruktion der fünf Graphen aus den Niederdichte- Selbstenergiediagrammen zu Beginn der Arbeit war sicherlich korrekt und eindeutig. Mit den gegebenen Feynmanregeln können nur diese Graphen zum gesuchten Wirkungsquerschnitt beitragen. Die ρ-Selbstenergie enthält aufgrund der Breite des ρ-Mesons allerdings auch Beiträge, die nicht in Form von Streugraphen berücksichtigt werden können (Gl.(1.46)). Die Berechnung des Wirkungsquerschnitts mit der Graphenmethode stellt offenbar den sichereren Weg dar.

Kapitel 2

Der ρNN - Vertex in $\mathcal{O}(\frac{1}{m_N})^1$

In der radikalen nichtrelativistischen Näherung Gl.(1.20) für die ρNN - Wechselwirkung bleibt lediglich die Kopplung an die Ladung des Nukleons. Der Vertex besitzt dann nur eine Nullkomponente, die überdies noch so modifiziert werden muß, daß die Ward-Takahashi-Identität erfüllt werden kann. Jetzt soll untersucht werden, ob die Hinzunahme der Ordnung $\mathcal{O}(\frac{1}{m_N})^1$ und damit der Kopplung an das magnetische Moment der Nukleonen starke Auswirkungen auf den Wirkungsquerschnitt hat.

2.1 Nichtrelativistische Entwicklung der ρN - Wechselwirkung

Der Dirac-Spinor eines Nukleons

$$u(p,s) = \sqrt{\frac{p^0 + m_N}{2m_N}} \begin{pmatrix} \chi(s) \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{p^0+m_N}\chi(s) \end{pmatrix}$$

soll nach Potenzen von $\frac{1}{m_N}$ entwickelt werden.
Für die 0-Komponente des Nukleon- Impulses gilt:

$$p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m_N^2} \approx m_N\,(1 + \frac{\vec{p}^2}{2m_N^2}) = m_N\,(1 + \ \mathcal{O}(\frac{1}{m_N^2}))$$

Damit wird der Spinor zu

$$u(p,s) \approx \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{2m_N} \end{pmatrix} \chi(s).$$

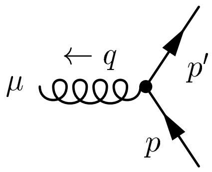
Das kann man in eine vektorielle Wechselwirkung $\bar{u}\,\gamma^\mu\,u$ wie die von ρ und Nukleon einsetzen und erhält für die 0-Komponente:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p',s')\,\gamma^0\,u(p,s) \;&\approx\; \chi^\dagger(s') \left(\mathbb{1}, \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}'}{2m_N}\right) \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{2m_N} \end{pmatrix} \chi(s) \\ &=\; \chi^\dagger(s')\,\chi(s) \;\; + \mathcal{O}(\frac{\vec{p}^2}{m_N^2}), \end{aligned}$$

und für die räumlichen Komponenten

$$
\begin{aligned}
\bar{u}(p',s')\,\gamma^k\,u(p,s) &= \bar{u}(p',s')\begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} u(p,s) \\
&\approx \chi^\dagger(s')\left(\mathbb{1}, -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,'}{2m_N}\right)\begin{pmatrix} \sigma^k\,\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{2m_N} \\ -\sigma^k \end{pmatrix}\chi(s) \\
&= \frac{1}{2m_N}\,\chi^\dagger(s')\,(p^k + p'^k + i(\vec{\sigma}\times(\vec{p}-\vec{p}\,'))^k)\,\chi(s).
\end{aligned}
$$

Damit kann der ρNN - Vertex wie folgt geschrieben werden:



$$
\begin{aligned}
&= -i\,\frac{g}{2}\,\bar{u}(p,s)\,\gamma_\mu\,\tau_3\,u(p,s) \\
&\approx -i\,\frac{g}{2}\,\tau_3\,\chi^\dagger(s')\begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \frac{(\vec{p}+\vec{p}\,')}{2m_N} + i\frac{(\vec{\sigma}\times(\vec{p}-\vec{p}\,'))}{2m_N} \end{pmatrix}^\mu \chi(s),
\end{aligned}
$$

wobei wieder die sich unterscheidenden Anteile der Nullkomponente und der räumlichen Komponenten des erweiterten Vertex den oberen bzw. unteren Eintrag des Spaltenvektors bilden.

Also gilt zunächst einmal für den Vertexfaktor

$$
\Gamma^\mu_{\rho NN}(p,p') = -i\,\frac{g}{2}\,\tau_3\begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \frac{(\vec{p}+\vec{p}\,')}{2m_N} + i\frac{(\vec{\sigma}\times(\vec{p}-\vec{p}\,'))}{2m_N} \end{pmatrix}^\mu . \tag{2.1}
$$

Dieser Vertex muß eine Ward-Takahashi-Identität erfüllen:

$$
q_\mu\Gamma^\mu_{\rho NN}(p,p') \stackrel{!}{=} -i\,\frac{g}{2}\,\tau_3\,(G_N^{-1}(p) - G_N^{-1}(p')) \qquad (q = p - p'). \tag{2.2}
$$

Einsetzen in die linke Seite ergibt

$$
\begin{aligned}
q_\mu\Gamma^\mu_{\rho NN}(p,p') &= -i\,\frac{g}{2}\,\tau_3\,(p^0 - p'^0 - \frac{\vec{p}^{\,2} - \vec{p}\,'^2}{2m_N} - i(\vec{p}-\vec{p}\,')\frac{\vec{\sigma}\times(\vec{p}-\vec{p}\,')}{2m_N}) \\
&= -i\,\frac{g}{2}\,\tau_3\,\left((p^0 - \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m_N}) - (p'^0 - \frac{\vec{p}\,'^2}{2m_N})\right).
\end{aligned}
$$

Die Ward-Identität ist also dann erfüllt, wenn auf der rechten Seite von Gl.(2.2) die Differenz zweier inverser Propagatoren mit nichtrelativistischer Kinematik steht.

Wir wollen allerdings die relativistische Kinematik im Nukleon-Propagator beibehalten (s. Gl.(1.16)), d.h. in die rechte Seite soll für $G_N(p)$ die folgende Form eingesetzt werden:

$$G_N(p) = \frac{1}{p^0 - \omega_N(\vec{p}) + i\varepsilon} = \frac{1}{p^0 - \sqrt{\vec{p}^2 + m_N^2} + i\varepsilon},$$

so daß auf der rechten Seite von Gl.(2.2) steht:

$$G_N^{-1}(p) - G_N^{-1}(p') \;=\; p^0 - \sqrt{\vec{p}^2 + m_N^2} - p'^0 + \sqrt{\vec{p}'^2 + m_N^2}.$$

Das läßt sich durch die gewünschte Kombination von Termen und eine Korrektur ausdrücken:

$$G_N^{-1}(p) - G_N^{-1}(p') \;=\; p^0 - \frac{\vec{p}^2}{2m_N} - p'^0 + \frac{\vec{p}'^2}{2m_N} + q_\mu \Gamma^\mu_{Korrektur},$$

wobei der Korrekturterm bis zur Ordnung $(\frac{1}{m_N})$ transversal ist:

$$\begin{aligned} q_\mu \Gamma^\mu_{Korrektur} &= \frac{\vec{p}^2}{2m_N} - \sqrt{\vec{p}^2 + m_N^2} - \frac{\vec{p}'^2}{2m_N} + \sqrt{\vec{p}'^2 + m_N^2} \\ &= \frac{\vec{p}^2}{2m_N} - m_N(1 + \frac{\vec{p}^2}{2m_N^2}) - \frac{\vec{p}'^2}{2m_N} + m_N(1 + \frac{\vec{p}'^2}{2m_N^2}) \;+\; \mathcal{O}(\frac{1}{m_N^2}) \\ &= \mathcal{O}(\frac{1}{m_N^2}). \end{aligned}$$

Der erforderliche Korrekturterm $\Gamma^\mu_{Korrektur}$ ist von $\mathcal{O}(\frac{1}{m_N^2})$, kann also wie beim ursprünglichen ρNN - Vertex (Absch. 1.2, Gl.(1.22)) zur 0-Komponente dazuaddiert werden:

$$\tilde{\Gamma}^\mu_{\rho NN}(p,p') = -i\,\frac{g}{2}\,\tau_3 \begin{pmatrix} \mathbb{1} - \frac{1}{q^0}\left[\frac{\vec{p}'^2}{2m_N} - \omega_N(\vec{p}') - \frac{\vec{p}^2}{2m_N} - \omega_N(\vec{p})\right] \\ \frac{(\vec{p}+\vec{p}')}{2m_N} + i\mu_V \frac{(\vec{\sigma}\times(\vec{p}-\vec{p}'))}{2m_N} \end{pmatrix}^\mu \tag{2.3}$$

Da der zweite Summand $\propto \vec{\sigma} \times (\vec{p} - \vec{p}')$ schon für sich genommen transversal ist, kann hier das anomale magnetische (Vektor-) Moment der Nukleonen berücksichtigt werden, indem man diesen Term mit μ_V multipliziert: Das magnetische Moment eines Nukleons setzt sich aus skalarem (μ_S) und vektoriellem (μ_V) Teil zusammen:

$$\mu_N = \frac{1}{2}(\mu_S + \mu_V \tau_3),$$

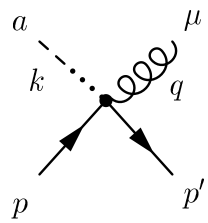
d.h. Proton und Neutron haben die Momente

$$\mu_{Proton} = \frac{1}{2}((\mu_S + \mu_V), \qquad \mu_{Neutron} = \frac{1}{2}((\mu_S - \mu_V).$$

Das ρ koppelt nur an den vektoriellen Teil, also an

$$\mu_V = \mu_{Proton} - \mu_{Neutron} = 2.79 + 1.91 = 4.7.$$

Am $\rho\pi NN$ - Vertex

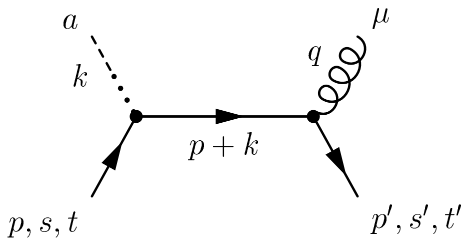


gilt folgende Ward-Identität:

$$q_\mu \Gamma^\mu_{\rho\pi NN} \stackrel{!}{=} i\, g\, \epsilon_{3ba} \left(\Gamma^b_{\pi NN}(k) \;-\; \Gamma^b_{\pi NN}(k-q)\right)$$

Da wir für den πNN - Vertex $\Gamma_{\pi NN}$ aber die gebräuchliche nichtrelativistische Form $\propto \frac{f_N}{m_\pi}\,\vec{k}\cdot\vec{\sigma}$ benutzen wollen, ist diese Bedingung nach wie vor durch den $\rho\pi NN$ - Vertex in der Form aus Gl.(1.19) erfüllt. Der $\rho\pi NN$ - Vertex muß also nicht verändert werden.

Es müssen also nur die Amplituden der Diagramme d und e (s. Gl.(1.31),(1.32)) neu berechnet werden:

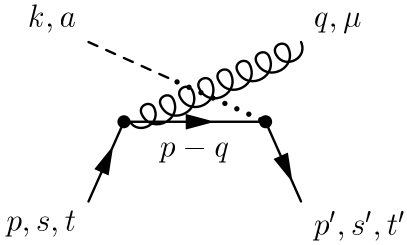


$$= \qquad -iA^\mu_d\, \epsilon_\mu$$

Unter Beachtung der Impulserhaltung ($p' = p + k - q$) lautet A_d

$$\begin{aligned} A^\mu_d \;=\; & \frac{1}{2}\,\frac{g f_N}{m_\pi}\,\Gamma_\pi(\vec{k})\; e_a(Q)\,\chi^\dagger(t')\,\tau_3\,\tau_a\,\chi(t)\;\cdot \\ & \chi^\dagger(s') \begin{pmatrix} \mathbb{1} - \frac{1}{q^0}\left[\frac{\vec{q}^{\,2}-2\vec{k}\cdot\vec{q}}{2m_N} - \omega_N(\vec{p}+\vec{k}-\vec{q}) + \omega_N(\vec{p})\right] \\ \frac{(2\vec{p}+2\vec{k}-\vec{q})}{2m_N} + i\mu_V\,\frac{(\vec{\sigma}\times\vec{q})}{2m_N} \end{pmatrix}^{\mu} \vec{k}\cdot\vec{\sigma}\,\chi(s)\; G_N(k+p), \end{aligned} \tag{2.4}$$

und A_e



$$= \qquad -iA^\mu_e\, \epsilon_\mu\,,$$

$$A_e^\mu = \frac{1}{2}\frac{gf_N}{m_\pi}\,\Gamma_\pi(\vec{k})\;e_a(Q)\,\chi^\dagger(t')\,\tau_a\,\tau_3\,\chi(t)\,\cdot$$
$$\chi^\dagger(s')\,\vec{k}\cdot\vec{\sigma}\left(\begin{matrix}\mathbb{1}-\frac{1}{q^0}\left[\frac{\vec{q}^{\,2}-2\vec{p}\cdot\vec{q}}{2m_N}-\omega_N(\vec{p}-\vec{q})+\omega_N(\vec{p})\right]\\ \frac{(2\vec{p}-\vec{q})}{2m_N}+i\mu_V\frac{(\vec{\sigma}\times\vec{q})}{2m_N}\end{matrix}\right)^\mu\chi(s)\;G_N(p-q). \quad (2.5)$$

Der $\pi^- p \to \rho^0 n$ - Wirkungsquerschnitt, der sich mit dieser erweiterten Amplitude errechnet, ist in Abb. 2.1 für verschiedene Werte des magnetischen Moments dargestellt.
Setzt man $\mu_V = 0$, so daß nur der Konvektionsstrom dazukommt, so erreicht man eine leichte Verringerung des Wirkungsquerschnitts. Mit dem Wert von $\mu_V = 4.7$ liegt das Resultat dagegen über der alten Kurve. Diese Tendenz bestätigt sich durch die Wahl $\mu_V = 7.1$, wie es sich aus dem Verhältnis von Tensor- zu Vektorkopplung im Bonn-Potential [17] ergibt.

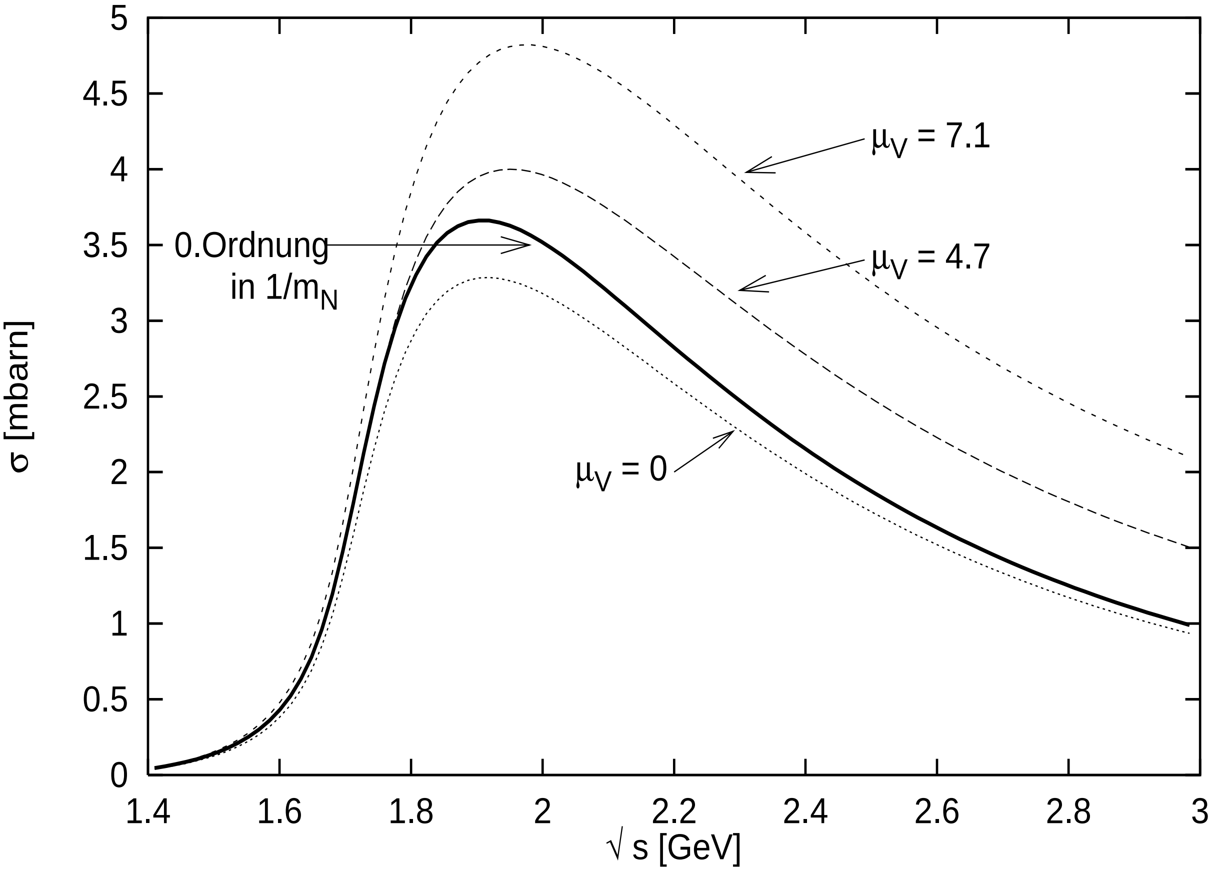


Abb. 2.1: *Vergleich der $\pi^- p \to \rho^0 n$ - Rechnungen in nullter und erster Ordnung der nichtrelativistischen Entwicklung mit verschiedenen Werten von μ_V*

Obwohl die nichtrelativistische Behandlung der ρN - Wechselwirkung an mehreren Stellen fragwürdig erschien, ist sie zumindest bis zur nächsten Ordnung in $\frac{1}{m_N}$ nicht dafür verantwortlich, daß der Wirkungsquerschnitt mit Hilfe des Formfaktors so sehr reduziert werden mußte, um die Daten zu beschreiben.

2.2 Der Prozeß $\pi^0 n \to \rho^0 n$

Im Abschnitt 1.3.1 waren die vier mit Pionen und dem ρ^0 möglichen Prozesse betrachtet worden. $\pi^+ n \to \rho^0 p$ und $\pi^- p \to \rho^0 n$ sind durch eine Isospindrehung verknüpft und ergeben den gleichen Wirkungsquerschnitt. Die Amplituden der Reaktionen mit dem neutralen Pion hingegen verschwinden aufgrund der nichtrelativistischen Näherung in nullter Ordnung in $\frac{1}{m_N}$. Jetzt aber steht der ρNN - Vertex auch in der nächsten Ordnung der Entwicklung zur Verfügung, weswegen nun der Wirkungsquerschnitt für $\pi^0 n \to \rho^0 n$ berechnet werden soll. Wenn die nichtrelativistische Entwicklung sinnvoll ist, sollte das Ergebnis im Vergleich zum bisher berechneten Prozeß mit dem π^- klein sein.

Die Amplituden der Graphen a,b und c (Gl.(1.28),(1.29),(1.30)) tragen weiter nicht bei, (die dort im Isospinfaktor auftretende Kombination $\varepsilon_{3ba} \cdot e_a(Q=0) = 0$ verschwindet stets). Die Amplituden der Graphen d und e sind oben in Gl.(2.4),(2.5) angegeben.

Die Isospinfaktoren ergeben hier mit dem neutralen Pion:

$$e_a(0)\, \chi^\dagger(t')\, \tau_3 \tau_a\, \chi(t) \;=\; 1, \qquad e_a(0)\, \chi^\dagger(t')\, \tau_a \tau_3\, \chi(t) \;=\; 1,$$

so daß die Amplituden lauten

$$A_d^\mu \;=\; \frac{1}{2} \frac{g f_N}{m_\pi}\, \Gamma_\pi(\vec{k})\, \chi^\dagger(s') \begin{pmatrix} \mathbb{1} - \frac{1}{q^0} \left[\frac{\vec{q}^{\,2} - 2\vec{k}\cdot\vec{q}}{2m_N} - \omega_N(\vec{p}+\vec{k}-\vec{q}) + \omega_N(\vec{p}) \right] \\ \frac{(2\vec{p}+2\vec{k}-\vec{q})}{2m_N} + i\mu_V \frac{(\vec{\sigma}\times\vec{q})}{2m_N} \end{pmatrix}^{\mu} \vec{k}\cdot\vec{\sigma}\, \chi(s)\; G_N(k+p),$$

$$A_e^\mu \;=\; \frac{1}{2} \frac{g f_N}{m_\pi}\, \Gamma_\pi(\vec{k})\, \chi^\dagger(s')\, \vec{k}\cdot\vec{\sigma} \begin{pmatrix} \mathbb{1} - \frac{1}{q^0} \left[\frac{\vec{q}^{\,2} - 2\vec{p}\cdot\vec{q}}{2m_N} - \omega_N(\vec{p}-\vec{q}) + \omega_N(\vec{p}) \right] \\ \frac{(2\vec{p}-\vec{q})}{2m_N} + i\mu_V \frac{(\vec{\sigma}\times\vec{q})}{2m_N} \end{pmatrix}^{\mu} \chi(s)\; G_N(p-q).$$

Tatsächlich bleibt der Wirkungsquerschnitt sehr klein. Abb. 2.2 zeigt links mit stark vergrößerter Skala den $\pi^0 n \to \rho^0 n$ - Wirkungsquerschnitt allein, rechts den Vergleich zur Reaktion $\pi^- p \to \rho^0 n$. Die Ankopplung des neutralen Pions ist also nicht nur durch die nichtrelativistischen Feynmanregeln nullter Ordnung in $\frac{1}{m_N}$ unterdrückt, sie spielt auch in der nächsten Ordnung keine Rolle.

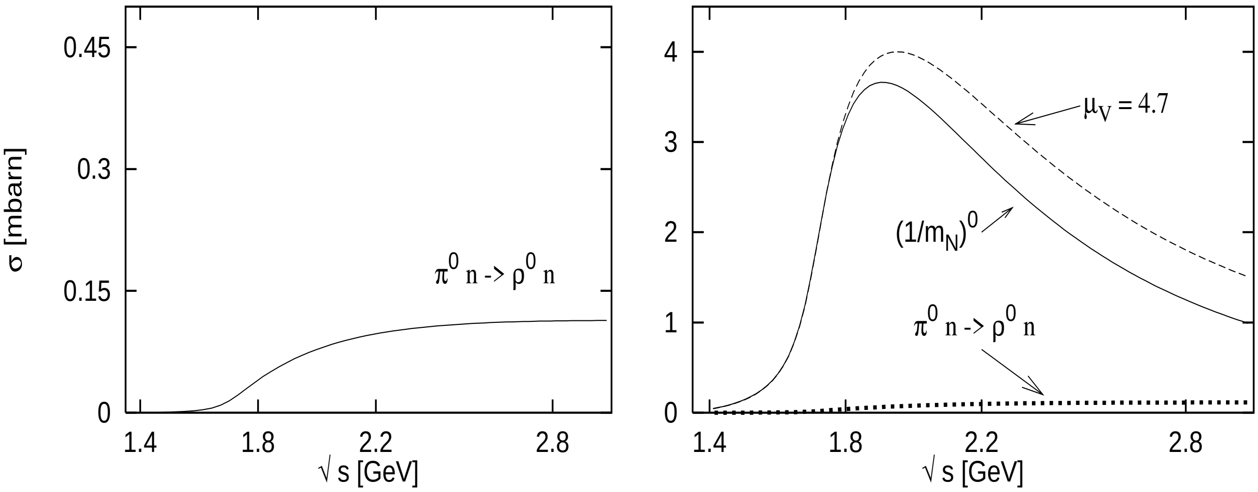


Abb. 2.2: *links: Wirkungsquerschnitt für $\pi^0 n \to \rho^0 n$, rechts Vergleich von $\pi^- p \to \rho^0 n$ und $\pi^0 n \to \rho^0 n$*

Obwohl keine Daten für diesen Prozeß existieren, kann man versuchen, mit Hilfe der in Anhang A.1.1 gefundenen Beziehungen der Prozesse $\sigma_{\rho^+ p \to \pi^+ p}, \sigma_{\rho^- p \to \pi^- p}, \sigma_{\rho^0 n \to \pi^- p}$ und $\sigma_{\rho^0 n \to \pi^0 n}$ untereinander auch aus den Daten die ungefähre Größe dieses Wirkungsquerschnitts $\sigma_{\rho^0 n \to \pi^0 n}$ zu extrahieren.
Die Verbindung stellen die Ausdrücke für $Imf_{\rho^0 N}$ in den Gleichungen (1.41) und (A.3) her. Man kann sie nach $\sigma_{\rho^0 n \to \pi^0 n}$ auflösen und erhält

$$\sigma_{\rho^0 n \to \pi^0 n} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{\rho^+ p \to \pi^+ p} + \sigma_{\rho^- p \to \pi^- p} - \sigma_{\rho^0 n \to \pi^- p}\right).$$

Aufgrund der geringen Qualität der Daten ist das Ergebnis in Abb. 2.3 allerdings nicht sehr aussagekräftig. Es liegt jedenfalls unter den Daten.

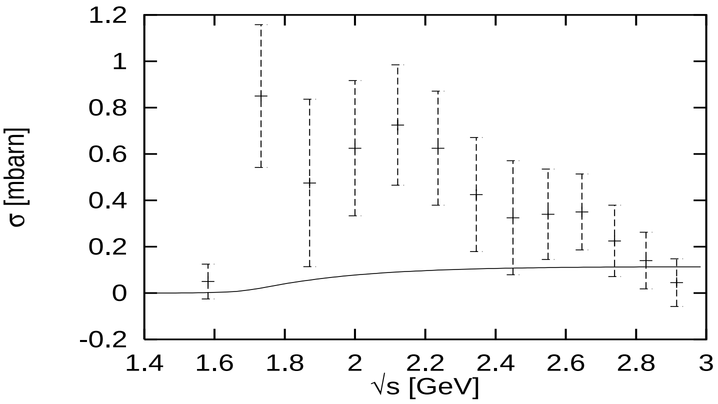


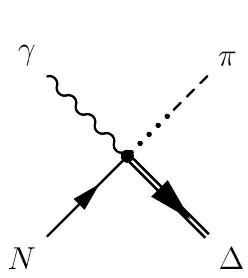
Abb. 2.3: *$\pi^0 n \to \rho^0 n$, mit Graphen berechnet (–) und durch Meßdaten der Prozesse mit geladenen Pionen ausgedrückt*

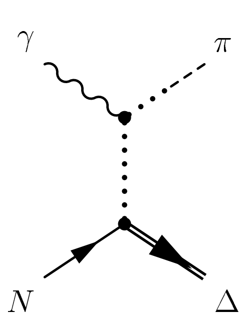
Kapitel 3

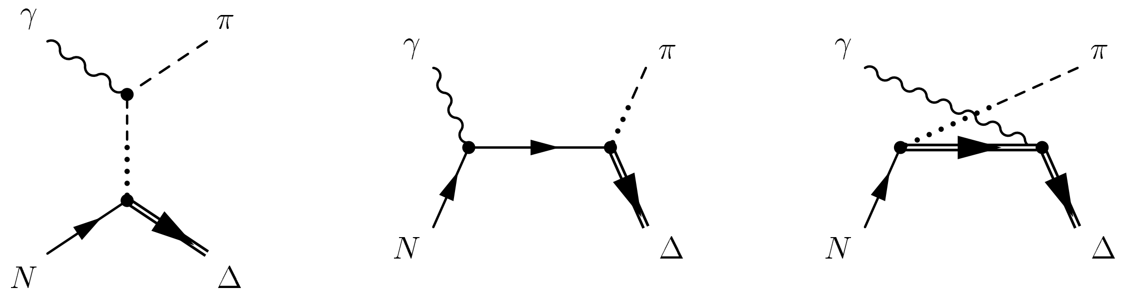
Photoabsorption und Baryonische Resonanzen

3.1 Einbeziehung des $\Delta(1232)$

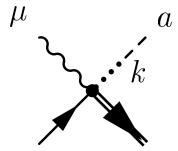
Im Modell des ρ - Propagators [9] spielt die Anregung von Delta-Loch-Paaren in der Selbstenergie der Pionen und damit auch im ρ - Propagator eine große Rolle. Daher sollen auch hier Prozesse untersucht werden, die das Delta mit einbeziehen.
Nun ist die Reaktion $\rho N \to \pi\Delta$ nicht nur numerisch schwierig zu behandeln, da das ausgetauschte Pion im Graphen c auch 'on-shell' sein kann, es existieren zudem keine experimentellen Daten dafür.
Anders bei der Photoabsorption: während die Reaktion $\gamma N \to \pi N$ den 'Ein-Pion'-Untergrund bei kleinen Energien gut beschreibt, macht sich ab $\sim$ 500 MeV Laborimpuls das Delta bemerkbar. Mit Hilfe dieser Reaktion war in Ref. [9] auch die erste Einschränkung des Formfaktors Λ vorgenommen worden. Zum weiteren Vergleich der Rechnungen soll daher auch die Photoabsorption mit einem auslaufenden Delta untersucht werden.
Dabei orientieren sich die Feynmanregeln wieder am Modell des ρ - Propagators [9]. Dort wird eine nichtrelativistische $\pi N\Delta$ - Wechselwirkung eingeführt und dann das ρ - Meson angekoppelt, so daß wir einen $\rho\pi N\Delta$ - Vertex und einen $\rho\Delta\Delta$ - Vertex zur Verfügung haben, aber keinen $\rho N\Delta$ - Vertex. Dem Delta wird eine konstante, nicht energieabhängige Breite gegeben. Durch „Aufschneiden“ der ρ - Selbstenergiediagramme, die einen Delta-Loch-Einschub enthalten, werden die folgenden Diagramme konstruiert:



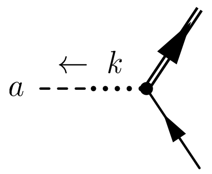




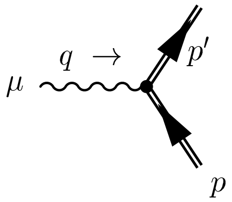
An den Vertizes treten jetzt die in [9] beschriebenen Spin- und Isospin- Übergangsoperatoren S und T auf:



$$= \begin{cases} 0 & \mu = 0 \\ -i\,\frac{g f_\Delta}{m_\pi}\,\Gamma_\pi(\vec{k})\,\varepsilon_{3ba}\,S_j\,T_b & \mu = j = 1,2,3 \end{cases}$$



$$= -\frac{f_\Delta}{m_\pi}\,\Gamma_\pi(\vec{k})\,\vec{k}\cdot\vec{S}\,T_a$$



$$= \begin{cases} -i\,g\,T_3^{(\frac{3}{2})}\,\frac{G_\Delta^{-1}(p') - G_\Delta^{-1}(p-k)}{q^0} & \mu = 0 \\ 0 & \mu = j = 1,2,3 \end{cases} \tag{3.1}$$

mit

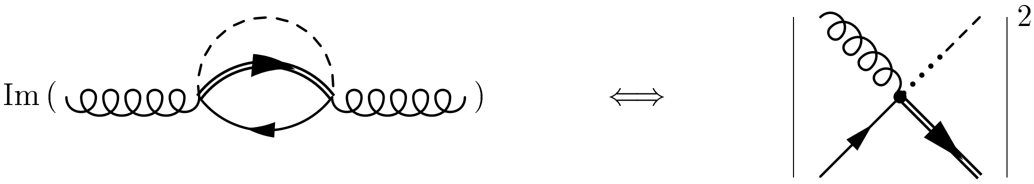
$$S_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{1}{6}} \\ \sqrt{\frac{1}{6}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} i\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & i\sqrt{\frac{1}{6}} \\ i\sqrt{\frac{1}{6}} & 0 \\ 0 & i\sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Die Isospinübergangsoperatoren $T_{1,2,3}$ sehen genauso aus.
Für den $\frac{3}{2}$ - Isospinoperator gilt:

$$T_3^{(\frac{3}{2})} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Mit Hilfe dieser Regeln wird die Amplitude des Prozesses berechnet, quadriert und in den Wirkungsquerschnitt eingesetzt, ganz analog zum Vorgehen in Abschnitt 1.5.

Genauso wie dort das auslaufende ρ ist hier das Δ ein instabiles Teilchen, d.h. es muß noch über seine Spektralfunktion integriert werden. Dazu bedienen wir uns des Vergleichs zur ρ-Selbstenergie aus Ref. [9]: Der Imaginärteil des linken Diagramms sollte gerade dem Betragsquadrat des Streugraphen rechts entsprechen:



(3.4)

$$-i\,\Sigma_{\mu\nu} \;=\; \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, iG_\pi(k)\, \Gamma^{(4f)}_{\mu\nu,aa}(k,k,q) \qquad\qquad \text{nach [9], S.38}$$

mit

$$\Gamma^{(4f)}_{\mu\nu,aa}(k,k,q) \;=\; \begin{cases} 0 & \mu=\nu=0 \\ -i\,g^2\,\delta_{ij}(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b})\,\left(\Pi_{\Delta h}(k-q)+\Pi_{\Delta h}(k+q)\right) & \text{sonst .} \end{cases}$$

Also lauten die räumlichen Komponenten der Selbstenergie

$$-i\,\Sigma_{ij} \;=\; g^2\,\delta_{ij}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, G_\pi(k)\,\left(\Pi_{\Delta h}(k-q)+\Pi_{\Delta h}(k+q)\right).$$

Die Lindhardfunktionen $\Pi_{\Delta h}$ lassen sich in einer geeigneten Näherung (3-Niveau- Modell, Ref. [9] S.23) ausrechnen. Man bekommt schließlich den Ausdruck

$$\Sigma_{ij} \;=\; -\frac{4}{9}\,\varrho\,\delta_{ij}\left(\frac{gf_\Delta}{m_\pi}\right)^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{k^0}\left[\frac{1}{k^0-q^0+\omega_\Delta(\vec{k}-\vec{q})-m_N-\frac{i}{2}\Gamma_\Delta} + \frac{1}{k^0+q^0+\omega_\Delta(\vec{k}-\vec{q})-m_N-\frac{i}{2}\Gamma_\Delta}\right].$$

Γ_Δ ist die (hier konstante) Breite des Deltas von 120 MeV.
Für ein scharfes Delta, d.h. wenn man in Σ_{ij} $\frac{i}{2}\Gamma_\Delta \;\rightarrow\; i\varepsilon$ ersetzt, erhält man (mit $\Sigma = g^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}$)

$$\mathrm{Im}\,\Sigma \;=\; \frac{\varrho}{6\pi^2}\left(\frac{gf_\Delta}{m_\pi}\right)^2 \int d^3k\,\frac{1}{k^0}\,\delta(k^0-q^0+\omega_\Delta(\vec{k}-\vec{q})-m_N).$$

Umgekehrt ergibt das in Gl.(3.4) rechts gezeigte Diagramm

$$\sigma \;=\; \frac{1}{18\pi^2|\vec{q}|}\left(\frac{gf_\Delta}{m_\pi}\right)^2 \int d^3k\,\frac{1}{k^0}\,\Gamma_\pi^2(\vec{k})\,\delta(q^0+m_N-\omega_\Delta(\vec{k}-\vec{q})-k^0).$$

Somit gilt

$$\sigma = \frac{1}{3\varrho|\vec{q}|}\,\Gamma_\pi^2(\vec{k})\;\mathrm{Im}\,\Sigma.$$

Nun verfahren wir mit endlicher Delta-Breite und dem gesamten Amplitudenquadrat genauso und bekommen:

$$\begin{aligned}\sigma \;=\; \frac{1}{16\pi^2|\vec{q}|}\int d|\vec{k}|\,\frac{\vec{k}^2}{k^0}\int_{-1}^{1}dx\,\Bigg[&\frac{\Gamma_\Delta}{(k^0-q^0+\omega_\Delta(\vec{k}-\vec{q})-m_N)^2+\frac{1}{4}\Gamma_\Delta} \\ &+\frac{\Gamma_\Delta}{(k^0+q^0+\omega_\Delta(\vec{k}-\vec{q})-m_N)^2+\frac{1}{4}\Gamma_\Delta}\Bigg]\cdot\overline{|M|^2}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Abb. 3.1 zeigt das Resultat im Vergleich mit dem Δ - Loch-Beitrag zur Photoabsorption aus der ρ - Selbstenergie, aufgetragen über dem Impuls des Photons.

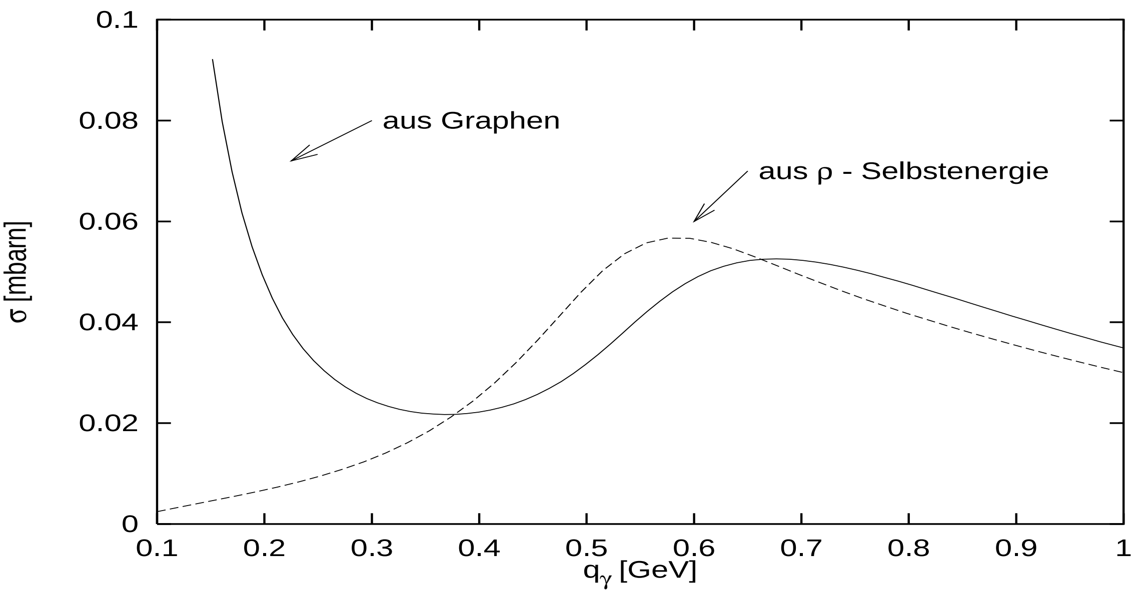
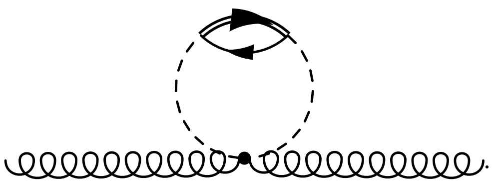


Abb. 3.1: *Photoabsorption: Wirkungsquerschnitt der Reaktion $\gamma N \to \pi\Delta$ im Vergleich zwischen der ρ - Selbstenergie-Rechnung nach [9] und der Graphenmethode*

Wie ist die in Abb. 3.1 deutlich sichtbare Diskrepanz der beiden Methoden zu erklären? Die Unsicherheit bezüglich der Lage des Maximums bei ~ 550 - 600 MeV ist dabei weniger gravierend als der sicherlich unphysikalische Anstieg bei kleinen Photonimpulsen q.
Im übrigen treten bei der Berechnung des Wirkungsquerschnitts mit der ρ - Selbstenergie ähnliche Probleme wie bei der Graphenmethode auf, allerdings erst für noch kleinere Impulse $q < 0.1$ GeV.

Ein kritischer Aspekt der Behandlung des Deltas in Ref. [9] war die verwendete konstante Δ - Breite. Tatsächlich kann man den Anstieg des Wirkungsquerschnitts für $q \to 0$ auch reproduzieren, wenn man einfach ein konstantes Matrixelement ansetzt (dann wird in Gl.(3.5) nur durch den einlaufenden Strom geteilt). Dieser Anstieg verringert sich, wenn man die Δ - Breite kleiner macht, bis schließlich bei $\Gamma_\Delta = 0$ eine scharfe Schwelle entsteht. Wenn aber die fehlende Energieabhängigkeit der Δ - Breite mit dem Problem in Verbindung stehen sollte, warum sieht man den Effekt bei der Selbstenergie-Rechnung nicht ebenso deutlich ?

Eine genaue Analyse jener Methode zeigt schließlich, daß die konstante Breite einigen Diagrammen der ρ - Selbstenergie, die als Vertexkorrekturen des Tadpoles (s. Gl.(1.1)) auftreten, einen Imaginärteil verleiht, z.B. dem folgenden Diagramm:

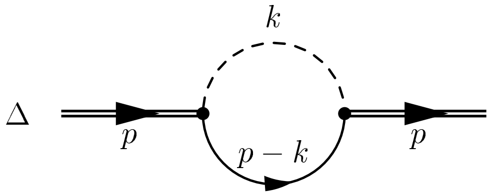


(3.6)

Ein solches Diagramm hat eigentlich keinen Imaginärteil (man kann es gar nicht so aufschneiden, daß ρ, π, N und Δ als äußere Teilchen bleiben). Aber die als konstant angesetzte Breite des Deltas in seinem Δ - Loch-Einschub führt dazu, daß sich doch ein Imaginärteil ergibt. Dieser Imaginärteil ist zwar unphysikalisch, hebt aber bei der Photoabsorption teilweise die Terme weg, die den Anstieg bei $q \to 0$ verursachen. Berechnet man den Wirkungsquerschnitt mit Hilfe der Feynmandiagramme, so gibt es unter diesen keine, die dem oben gezeigten Graphen entsprechen könnten.

Um zu vermeiden, daß der beschriebene Effekt die Ergebnisse für kleine Energien zu sehr verfälscht, ist es notwendig, die Delta-Breite energieabhängig zu machen.
Hier kann wieder eine Verbesserung einer Näherung aus dem Modell des ρ - Propagators in ihrer Auswirkung auf die Wirkungsquerschnitte relativ einfach getestet werden - die Einführung einer nicht-konstanten Δ - Breite in der ρ - Selbstenergie hingegen würde zu erheblichen Schwierigkeiten führen.

Das Delta erhält seine Breite durch Zerfall in Pion und Nukleon, wir betrachten daher folgendes Δ - Selbstenergiediagramm:



(3.7)

Mit unseren Feynmanregeln für das Delta ergibt dieses Diagramm folgenden Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
-i\,\Sigma_\Delta(p) &= -\frac{1}{16}\left(\frac{f_\Delta}{m_\pi}\right)^2 \sum_{s,t}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\Gamma_\pi^2(\vec{k})\,\chi^\dagger_{\frac{3}{2}}(t)\,T_a T_a^\dagger\,\chi(t) \\
&\quad \cdot\chi^\dagger_{\frac{3}{2}}(s)\,(\vec{k}\cdot\vec{S})(\vec{k}\cdot\vec{S}^\dagger)\,\chi(s) iG_N(p-k)\,iG_\pi(k) \\
&= -\frac{1}{3}\left(\frac{f_\Delta}{m_\pi}\right)^2 \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\Gamma_\pi^2(\vec{k})\,\vec{k}^2\,G_N(p-k)\,G_\pi(k)
\end{aligned}
$$

Nach Ausführen der k^0 - Integration bleibt

$$
\Sigma_\Delta(p) = -\frac{1}{3}\left(\frac{f_\Delta}{m_\pi}\right)^2 \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{\Gamma_\pi^2(\vec{k})\,\vec{k}^2}{2\omega_\pi(\vec{k})}\,\frac{1}{p^0-\omega_\pi(\vec{k})-\omega_N(\vec{p}-\vec{k})+i\varepsilon}.
$$

Im Ruhesystem des Deltas ($\vec{p} = 0$) läßt sich dann der Imaginärteil der Selbstenergie vollständig berechnen:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}(\Sigma_\Delta(p)) &= \frac{1}{24\pi}\left(\frac{f_\Delta}{m_\pi}\right)^2 \Gamma_\pi^2(\vec{k})\,\frac{s+m_N^2-m_\pi^2}{s}\;\tilde{k}^3 \\
\text{mit}\qquad \tilde{k}^2 &= \frac{(m_\Delta^2-m_N^2-m_\pi^2)^2-4m_N^2 m_\pi^2}{4m_\Delta^2}.
\end{aligned}
$$

Es ist wohlbekannt, daß der Chew-Low-Wert [27] der $\pi N\Delta$ - Kopplungskonstanten, $f_\Delta = 2\times f_N$, stets eine zu kleine Breite ergibt. Wir orientieren uns daher an Ref. [28] und benutzen die Werte

$$
f_\Delta = 2.85, \qquad \Lambda_\Delta = 423\,\mathrm{MeV},
$$

d.h. also auch einen anderen Formfaktor als am πNN - Vertex. Abb. 3.2 zeigt, daß man damit die richtige Breite von 120 MeV bei $\sqrt{s} = 1.232$ GeV herausbekommt (senkrechte Linie bei 1.232 GeV), während sie mit $f_\Delta = 2.02$ und dem kleineren Formfaktor knapp halb so groß ist.

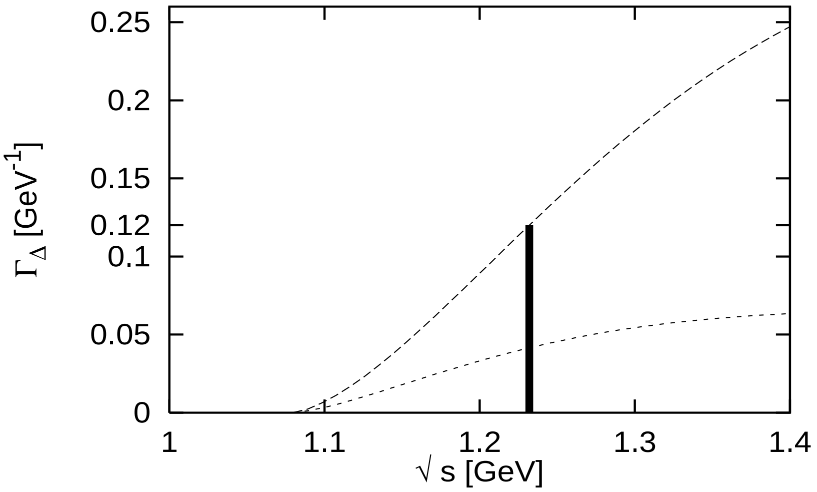


Abb. 3.2: *Energieabhängige Breite des* Δ *mit zwei Parametersätzen: obere Kurve:* $f_{\pi N\Delta} = 2.85$, $\Lambda_\Delta = 434\ MeV$, *untere Kurve:* $f_{\pi N\Delta} = 2.02$, $\Lambda_\Delta = 310\ MeV$.

Abb. 3.3 zeigt den verbesserten $\gamma N \rightarrow \pi\Delta$ - Wirkungsquerschnitt und die Summe der beiden (Nukleon- und Delta-) Anteile, aufgetragen über dem Impuls des Photons. Der Δ - Anteil zeigt jetzt die sanfte Schwelle eines breiten Teilchens und verschwindet für kleine γ - Impulse.

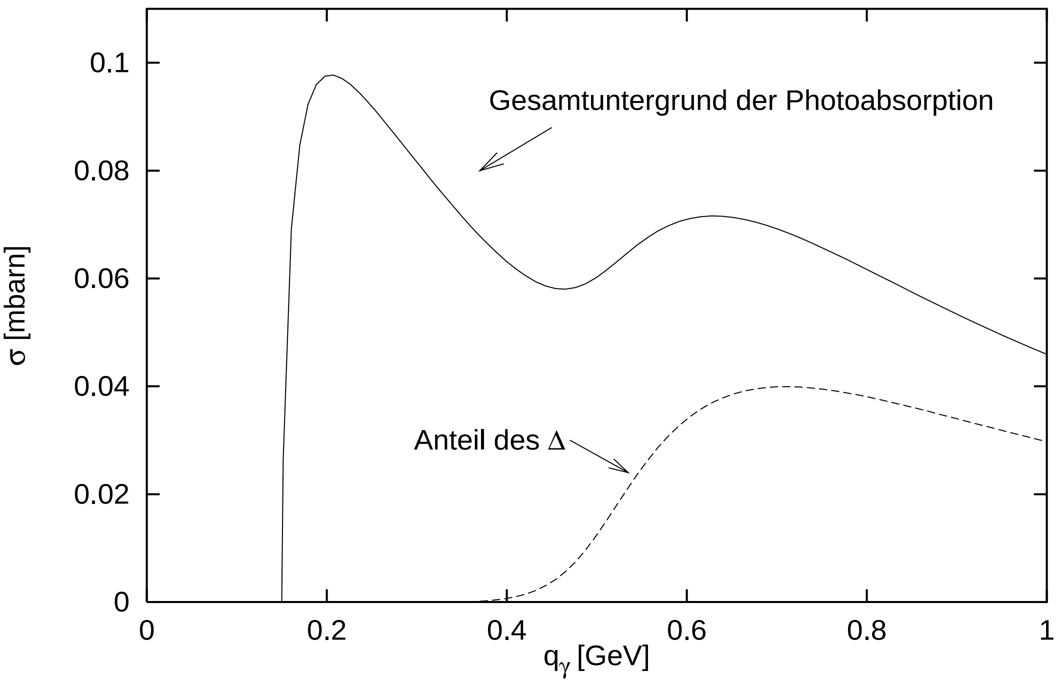
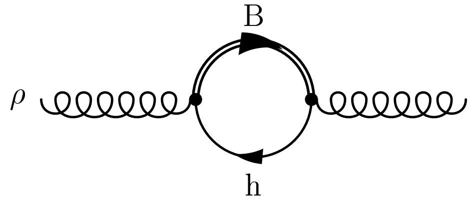


Abb. 3.3: *Wirkungsquerschnitt der Reaktion* $\gamma N \rightarrow \pi N\,/\,\Delta$

3.2 Photoabsorption und ρ- Produktion mit baryonischen Resonanzen

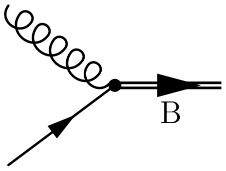
Bei der Beschreibung des ρ- Mesons in Kernmaterie spielt die direkte Kopplung des ρ an die Nukleonen (Baryonen) eine große Rolle. Zu den Modfikationen der Pionenwolke des ρ (Kap. 1) kommen deswegen Resonanz-Loch-Anregungen („Rhosobars") dazu ([6],[5],[7]).



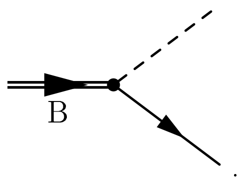
(3.8)

Im Spektrum der Photoabsorption zeigen sich diese Resonanzen ebenfalls in einer Reihe von Peaks, die auf dem oben besprochenen Untergrund sitzen.

Wir wollen die entsprechenden Diagramme zu den bisherigen hinzunehmen, um festzustellen, welche Auswirkungen die Resonanzanregungen auf den $\pi N \to \rho N$ - Prozess haben. Ein Schnitt durch das Diagramm 3.8 ergibt nämlich gerade



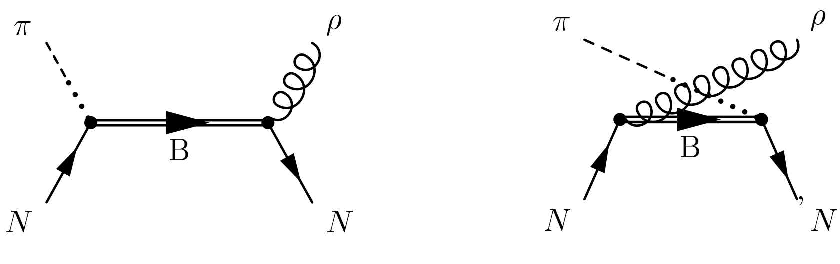
, und die Resonanz kann in πN zerfallen:



.

Nun konnten die $\pi N \to \rho N$ - Daten mit den nichtresonanten Graphen 1.5 aus Kap. 1 nur durch die drastische Reduzierung des Formfaktors beschrieben werden. Ergäben die Resonanzgraphen hier ähnlich große Beiträge wie bei der Photoabsorption, so wäre eine weitere Verringerung des Formfaktors nötig. Andererseits könnte es auch zu destruktiver Interferenz mit den bisherigen Termen kommen, so daß wieder ein größerer Wert für Λ gewählt werden könnte.

Die beiden folgenden Diagramme sind zu berücksichtigen:



(3.9)

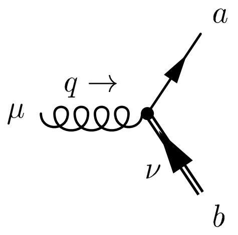
wobei B= Delta, $N^*(1520), N^*(1720)$ ... eine baryonische Resonanz ist.

3.2.1 $\rho N\Delta$ - Wechselwirkung

Die $\pi N\Delta$ - Vertizes waren schon oben angegeben worden. Für die $\rho N\Delta$ - Kopplung gehen wir von folgender Lagrangedichte aus ([5],[7]):

$$\mathcal{L}_{\rho N\Delta} = \frac{f_{\rho N\Delta}}{m_\rho}\,\bar{\psi}\, i\gamma_5\gamma_\mu T_3^\dagger\,\Psi_\nu\,(\partial^\mu\rho^\nu - \partial^\nu\rho^\mu) + \text{h.c.} \tag{3.10}$$

Daraus ergibt sich der Vertexfaktor:



$$= \Gamma_{ab}^{\mu\nu} = i\frac{f_{\rho N\Delta}}{m_\rho}\,(\gamma_5\not{q}g^{\mu\nu} - \gamma_5\gamma^\mu\,q^\nu)\,(T_3^\dagger)_{ab} \tag{3.11}$$

Für die Berechnung im Rahmen der bisherigen Vorgehensweise wird wieder eine nichtrelativistische Näherung für diesen Ausdruck gebraucht.
Dazu multipliziert man $\Gamma_{ab}^{\mu\nu}$ mit einem Diracspinor $u(\vec{p}_2, s_2)$ und einem Rarita-Schwinger-Spinor der Form [9]

$$u_\nu(\vec{p}_1, s_1) = \sum_{m_l, m_s} C(\frac{3}{2}, s|1, m_l; \frac{1}{2}, m_s)\, u(\vec{p}_1, s_1)\, e_\nu(\vec{p}_1, m_l),$$

der aus der Kopplung eines Diracspinors u (Spin $\frac{1}{2}$) und eines Polarisationsvektors e_ν (Spin 1) besteht. $C(\frac{3}{2}, s|1, m_l; \frac{1}{2}, m_s)$ ist der dabei anfallende Clebsch-Gordan- Koeffizient. Man erhält

$$\bar{u}(\vec{p}_2, s_2)\,\Gamma_{ab}^{\mu\nu} \sum_{m_l, m_s} C(\frac{3}{2}, s|1, m_l; \frac{1}{2}, m_s)\, u(\vec{p}_1, s_1)\, e_\nu(\vec{p}_1, m_l). \tag{3.12}$$

Betrachten wir zuerst die Komponente mit $\mu = 0$:

$$\begin{aligned}\bar{u}\,\Gamma^{0\nu}\,u_\nu \;&=\; \bar{u}(\vec{p}_2, s_2)\, i\,\gamma_5\not{q}g^{0\nu} \sum_{m_l, m_s} C(\frac{3}{2}, s|1, m_l; \frac{1}{2}, m_s)\, u(\vec{p}_1, s_1)\, e_\nu(\vec{p}_1, m_l)\\ &\quad -\bar{u}(\vec{p}_2, s_2) \sum_{m_l, m_s} C(\frac{3}{2}, s|1, m_l; \frac{1}{2}, m_s)\; i\,\gamma_5\gamma_0\, q^\nu\, u(\vec{p}_1, s_1)\, e_\nu(\vec{p}_1, m_l)\end{aligned}$$

Die Vektoren $e_\nu(\vec{p}_1, m_l)$ bekommt man durch Boost des Polarisationsvektors $(0, \vec{e}_{m_l})$ aus dem Ruhesystem des Deltas; man kann die als Pion- Isospinvektoren eingeführten Vektoren aus Abschnitt 1.3.1 für die $\vec{e}_{m_l}$ verwenden.

Es gilt allgemein

$$e_0(\vec{p}, m) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{e}_m}{m_\Delta}, \qquad \vec{e}(\vec{p}, m) = \gamma\vec{e}_m.$$

Damit lautet der Ausdruck von oben

$$\begin{aligned}\bar{u}\,\Gamma^{0\nu}\,u_\nu \;&=\; \sum_{m_l, m_s} C(s|m_l; m_s)\,\bar{u}(\vec{p}_2, s_2)\, i\,\gamma_5\not{q}u(\vec{p}_1, s_1)\,\frac{\vec{p}_1\cdot\vec{e}_{m_l}}{m_\Delta}\\ &\quad - \sum_{m_l, m_s} C(s|m_l; m_s)\,\bar{u}(\vec{p}_2, s_2)\, i\,\gamma_5\gamma_0\, u(\vec{p}_1, s_1)\,(q^0\frac{\vec{p}_1\cdot\vec{e}_{m_l}}{m_\Delta} - \vec{q}\cdot\vec{e}_{m_l} + \mathcal{O}(\frac{1}{m_\Delta^2})).\end{aligned}$$

Wie in Kap. 2 wird der Spinor u genähert durch

$$u(\vec{p},s) \approx \begin{pmatrix} \chi(s) \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{2m_N}\,\chi(s) \end{pmatrix}.$$

Damit kann weiter umgeformt werden, bis sich schließlich ergibt

$$\begin{aligned} \bar{u}\,\Gamma^{0\nu}\,u_\nu \approx & \chi^\dagger(s_2)\left(1, -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_2}{2m_N}\right)\begin{pmatrix} i\vec{\sigma}\cdot\vec{q} & iq^0 \\ iq^0 & -i\vec{\sigma}\cdot\vec{q}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}_1}{2m_\Delta}\end{pmatrix}\sum_{m_l,m_s} C(s|m_l;m_s)\chi(m_s)\,\frac{\vec{p}_1\cdot\vec{e}_{m_l}}{m_\Delta} \\ & -\chi^\dagger(s_2)\left(1, -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_2}{2m_N}\right)\begin{pmatrix} -i\frac{\vec{\sigma}\vec{p}_1}{2m_\Delta} \\ i \end{pmatrix}\sum_{m_l,m_s} C(s|m_l;m_s)\,\chi(m_s)\,(q^0\frac{\vec{p}_1\cdot\vec{e}_{m_l}}{m_\Delta} - \vec{q}\cdot\vec{e}_{m_l}). \quad (3.13) \end{aligned}$$

Die Summe kann durch die Spinübergangsoperatoren aus Gl.(3.2) ausgedrückt werden. Nach Ref. [9] gilt

$$\vec{S}^\dagger = \sum_{m_j,m_l,m_s} C(\frac{3}{2},m_j|1,m_l;\frac{1}{2},m_s)\chi(m_s)\chi^{\dagger\,(3/2)}(m_j)\vec{e}^*(m_l).$$

Multiplikation von rechts mit $\chi^{(3/2)}(s_1)$ (Paulispinor für Spin $\frac{3}{2}$) ergibt

$$\vec{S}^\dagger\,\chi^{(3/2)}(s_1) = \sum_{m_l,m_s} C(\frac{3}{2},s|1,m_l;\frac{1}{2},m_s)\,\chi(m_s)\,\frac{\vec{p}_1\cdot\vec{e}_{m_l}}{m_\Delta}.$$

Das wird in Gl.(3.13) eingesetzt. Beim Ausmultiplizieren wird nur der Term niedrigster Ordnung mitgenommen, so daß schließlich verbleibt

$$\bar{u}\,\Gamma^{0\nu}\,u_\nu \approx \chi^\dagger(s_2)\left(i\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{q})(\vec{p}_1\cdot\vec{S}^\dagger)}{m_\Delta} - i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_1}{2m_\Delta} - i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_2}{2m_N}\right)\chi^{(3/2)}(s_1).$$

Um den Vertexfaktor selbst zu erhalten, läßt man die Paulispinoren weg und fügt die bisher weggelassenen Kopplungskonstanten und den Isospinoperator hinzu:

$$\Gamma^{0\nu}_{(n.r.)} = i\frac{f_{\rho N\Delta}}{m_\rho}\left(\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{q})(\vec{p}_1\cdot\vec{S}^\dagger)}{m_\Delta} - \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_1}{2m_\Delta} - \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_2}{2m_N}\right)T_3^\dagger \quad + \mathcal{O}(\frac{1}{m_\Delta^2})$$

Analog ist mit den räumlichen Komponenten $\mu = j = 1,2,3$ vorzugehen. Das Resultat lautet

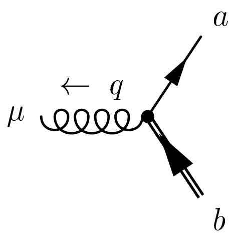
$$\Gamma^{j\nu}_{(n.r.)} = -i\frac{f_{\rho N\Delta}}{m_\rho}\left((\vec{\sigma}\cdot\vec{q})\,S^{\dagger\,j} - \sigma^j\,(\vec{q}\cdot\vec{S}^\dagger)\right)T_3^\dagger \quad + \mathcal{O}(\frac{1}{m_N}).$$

Dieser Anteil ist also von niedrigerer Ordnung als die 0 - Komponente und bleibt daher allein übrig.

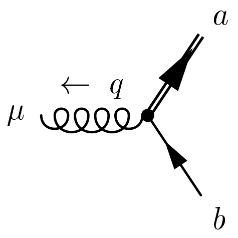
Schließlich kann man noch zusammenfassen

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma}\cdot\vec{q})S^{\dagger\,j} - \sigma^j\,(\vec{q}\cdot\vec{S}^\dagger) &= \vec{q}\times(\vec{S}^\dagger\times\vec{\sigma}), \\ \vec{S}^\dagger\times\vec{\sigma} = -i\vec{S}^\dagger. \end{aligned}$$

Die endgültige Form der nichtrelativistischen Vertizes lautet also:



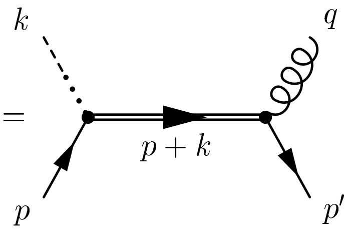
$$= \begin{cases} 0 & \mu = 0 \\ \frac{f_{\rho N\Delta}}{m_\rho} (\vec{S}^\dagger \times \vec{q})_j \, (T_3^\dagger)_{ab} & \mu = j = 1,2,3 \end{cases} \tag{3.14}$$



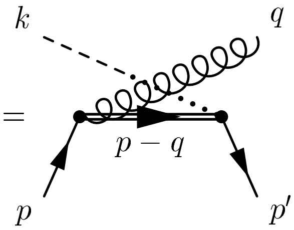
$$= \begin{cases} 0 & \mu = 0 \\ \frac{f_{\rho N\Delta}}{m_\rho} (\vec{S} \times \vec{q})_j \, (T_3)_{ab} & \mu = j = 1,2,3 \end{cases} \tag{3.15}$$

Damit sind die nötigen Feynmanregeln bekannt, um die Diagramme aus Gl.(3.9) mit einem Delta als resonantem Zwischenzustand auszuwerten.

$-i\, A_f^\mu \varepsilon_\mu =$



$-\, i\, A_g^\mu \varepsilon_\mu =$



(3.16)

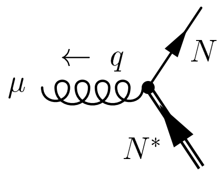
$$A_f^\mu = i\frac{f_\Delta f_{\rho N\Delta}}{m_\pi m_\rho} \Gamma_\pi(\vec{k})\; e_a(Q)\, \chi^\dagger(t')\, T_3^\dagger T_a\, \chi(t)\, \chi^\dagger(s') \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{S}^\dagger \times \vec{q} \end{pmatrix}^\mu \vec{k}\cdot\vec{S}\, \chi(s)\; G_\Delta(p+k)$$

$$A_g^\mu = i\frac{f_\Delta f_{\rho N\Delta}}{m_\pi m_\rho} \Gamma_\pi(\vec{k})\; e_a(Q)\, \chi^\dagger(t')\, T_a^\dagger T_3\, \chi(t)\, \chi^\dagger(s')\, \vec{k}\cdot\vec{S}^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{S} \times \vec{q} \end{pmatrix}^\mu \chi(s)\; G_\Delta(p-q)$$

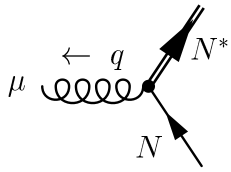
Die neuen Amplituden A_f und A_g werden nun zu den bisherigen A_a bis A_e addiert. Das Betragsquadrat der neuen Gesamtamplitude wird in Gl.(1.37) eingesetzt. Das ergibt dann den $\pi^- p \to \rho^0 n$ - Wirkungsquerschnitt mit der Δ - Resonanz.
Der anderen Prozeßrichtung $\rho N \to \pi N$ wird noch ein Photon vorangesetzt, um die resonante Photoabsorption zu berechnen.

$N^*(1720)$

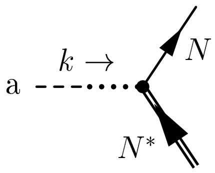
Zunächst soll aber die Liste der Resonanzen erweitert werden. Das $N^*(1720)$ besitzt Spin $\frac{3}{2}$, Parität $+1$ und Isospin $\frac{1}{2}$, hat also bis auf den Isospin dieselben Quantenzahlen wie das Δ. Damit können die benötigten Vertizes sofort aufgeschrieben werden:



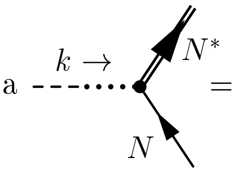
$$= \begin{cases} 0 & \mu = 0 \\ \frac{f_{\rho NN^*}}{m_\rho} (\vec{S}^\dagger \times \vec{q})_j \, \tau_3 & \mu = j = 1,2,3 \end{cases}$$



$$= \begin{cases} 0 & \mu = 0 \\ \frac{f_{\rho NN^*}}{m_\rho} (\vec{S} \times \vec{q})_j \, \tau_3 & \mu = j = 1,2,3 \end{cases}$$



$$= \frac{f_{\pi NN^*}}{m_\pi} \Gamma_\pi(\vec{k})\, \vec{k}\cdot\vec{S}^\dagger \, \tau_a$$



$$= \frac{f_{\pi NN^*}}{m_\pi} \Gamma_\pi(\vec{k})\, \vec{k}\cdot\vec{S} \, \tau_a$$

Analog zu Gl.(3.16) gibt es hier Graphen mit den Amplituden A_h und A_i.

$$A_h^\mu = i\frac{f_{\rho NN^*} f_{\pi NN^*}}{m_\rho m_\pi} \Gamma_\pi(\vec{k}) e_a(Q) \chi^\dagger(t') \tau_3 \tau_a \chi(t) \chi^\dagger(s') \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{S}^\dagger \times \vec{q} \end{pmatrix}^\mu \vec{k}\cdot\vec{S}\chi(s) G_{N^*}(p+k)$$

$$A_i^\mu = i\frac{f_{\rho NN^*} f_{\pi NN^*}}{m_\rho m_\pi} \Gamma_\pi(\vec{k}) e_a(Q) \chi^\dagger(t') \tau_a \tau_3 \chi(t) \chi^\dagger(s') \vec{k}\cdot\vec{S}^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{S} \times \vec{q} \end{pmatrix}^\mu \chi(s) G_{N^*}(p-q)$$

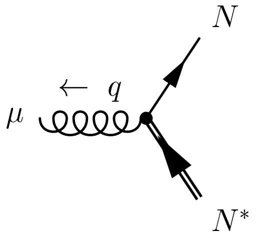
$N^*(1520)$

Von den oben genannten Resonanzen fehlt jetzt noch das $N^*(1520)$. Die Berechnung des entsprechenden Wirkungsquerschnitts bringt ein überraschendes Problem zum Vorschein. Das $N^*(1520)$ besitzt Spin $\frac{3}{2}$, Isospin $\frac{1}{2}$ und negative Parität -1. Daher sieht die ρNN^*-Wechselwirkung, die Ref. [7] entnommen ist, hier etwas anders aus als beim $N^*(1720)$:

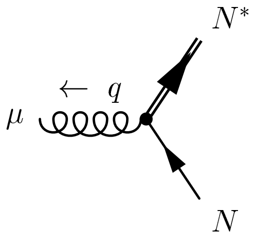
$$\mathcal{L}_{\rho N^*(1520)} = \frac{f_{\rho N N^*_{1520}}}{m_\rho} \chi^\dagger_{N^*}(s') \left(S_k \rho_k q_0 - \rho_0 S_k q_k\right) \chi(s)\; \chi^\dagger(t')\, \tau_3\, \chi(t) \tag{3.17}$$

Dies ist bereits eine nichtrelativistische Form, in der q der Impuls des ρ und ρ_k die k-Komponente ρ-Felds ist.

Betrachtet man den Wechselwirkungsterm ohne die Faktoren der äußeren Linien, so gilt



$$= \quad \Gamma_{\rho NN^*} = \frac{f_{\rho NN^*}}{m_\rho}\, \tau_3 \begin{cases} \vec{S}^\dagger \cdot \vec{q} & \mu = 0 \\ q^0\, S_k & \mu = k = 1,2,3 \end{cases}$$

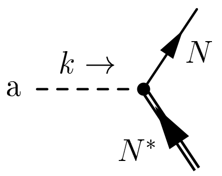


$$= \quad \Gamma_{\rho NN^*} = \frac{f_{\rho NN^*}}{m_\rho}\, \tau_3 \begin{cases} \vec{S} \cdot \vec{q} & \mu = 0 \\ q^0\, S_k & \mu = k = 1,2,3 \end{cases}$$

Für die Wechselwirkung mit dem πN-Sektor greifen wir hingegen auf Ref. [29] zurück, wo die relativistische Lagrangedichte angegeben ist:

$$\mathcal{L}_{\pi NN^*} = \frac{f_{\pi NN^*}}{m\pi}\, \bar{\psi}\gamma_5 \vec{\tau} \psi^{*\,\mu}\, \partial_\mu \vec{\pi} + h.c. \tag{3.18}$$

Der Vertex ist also



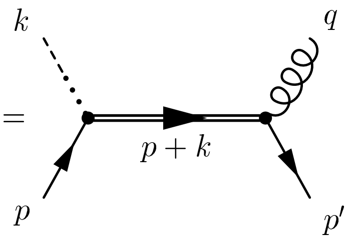
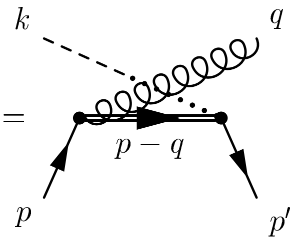
$$= \quad \Gamma^\mu_a = \frac{f_{\pi NN^*}}{m\pi}\, \gamma_5\, k^\mu\, \tau_a\,.$$

Nun gehen wir wie beim Δ vor, um die nichtrelativistische Form des Vertex zu finden und erhalten

$$\Gamma^\mu_{a\,(n.r.)} \quad = \quad \frac{f_{\pi NN^*}}{m\pi}\left(\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_N}{2m_N} - \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_{N^*}}{2m_{N^*}}\right) \vec{k}\cdot\vec{S}^\dagger\, \tau_a\,.$$

Der Vertex mit einem auslaufenden $N^*(1520)$ und einem einlaufenden Nukleon ist der hermitesch konjugierte von $\Gamma^\mu_{a\,(n.r.)}$.
Im Grenzfall identischer Massen $m_N = m_{N^*}$ sind diese Vertizes also proportional zu $\mathcal{O}(\vec{k}^2)$.

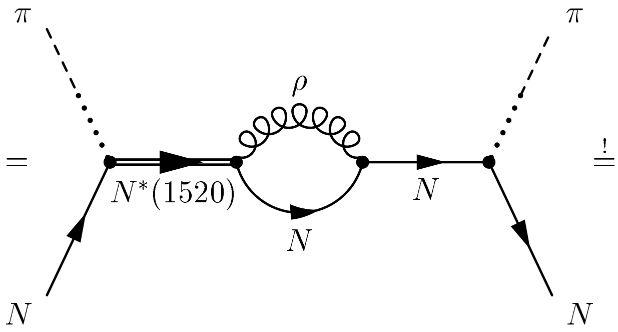
Besonders interessant wird es, wenn man nun die beiden Graphen analog zu Gl.(3.16) bildet und zur Gesamtamplitude hinzufügt.

$-i\,A^\mu_j \varepsilon_\mu \;=$  $\quad -\,i\,A^\mu_k \varepsilon_\mu \;=$  (3.19)

$$
\begin{aligned}
A^\mu_j &= i\frac{f_{\rho NN^*} f_{\pi NN^*}}{m_\rho m_\pi} \Gamma_\pi(\vec{k}) e_a(Q) \chi^\dagger(t') \tau_3 \tau_a \chi(t) \\
&\quad \chi^\dagger(s') \begin{pmatrix} \vec{q}\cdot\vec{S}^\dagger \\ q^0 \vec{S}^\dagger \end{pmatrix}^\mu \vec{k}\cdot\vec{S} \left(\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{2m_N} - \frac{\vec{\sigma}\cdot(\vec{p}+\vec{k})}{2m_{N^*}} \right) \chi(s) G_{N^*}(p+k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A^\mu_k &= i\frac{f_{\rho NN^*} f_{\pi NN^*}}{m_\rho m_\pi} \Gamma_\pi(\vec{k}) e_a(Q) \chi^\dagger(t') \tau_a \tau_3 \chi(t) \\
&\quad \chi^\dagger(s') \left(\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,'}{2m_N} - \frac{\vec{\sigma}\cdot(\vec{p}-\vec{q})}{2m_{N^*}} \right) \vec{k}\cdot\vec{S}^\dagger \begin{pmatrix} \vec{q}\cdot\vec{S} \\ q^0 \vec{S} \end{pmatrix}^\mu \chi(s) G_{N^*}(p-q)
\end{aligned}
$$

Offenbar sollte der Interferenzterm zwischen A^μ_j und A^μ_d aus Abschnitt 1.3, Gl.(1.31) verschwinden:

$A^*_{\mu\,d}\, A^\mu_j \;=$  $\overset{!}{=}\; 0\,,$ (3.20)

da in der linken Hälfte des Diagramms der Gesamtdrehimpuls gleich dem Spin des $N^*(1520)$, also gleich $\frac{3}{2}$ ist, rechts hingegen gleich dem Spin des Nukleons, $\frac{1}{2}$.

Die Amplitude des Nukleon- Pol-Terms war

$$
A^\mu_d \;=\; \frac{1}{2}\frac{g f_N}{m_\pi}\, \Gamma_\pi(\vec{k})\; e_a(Q)\, \chi^\dagger(t')\, \tau_3\, \tau_a\, \chi(t) \;\cdot \chi^\dagger(s')\, \vec{k}\cdot\vec{\sigma}\, \chi(s) \;\begin{pmatrix} \frac{1}{q^0} \\ 0 \end{pmatrix}^\mu .
$$

Im Interferenzterm ist also die folgende Spinsumme zu bilden:

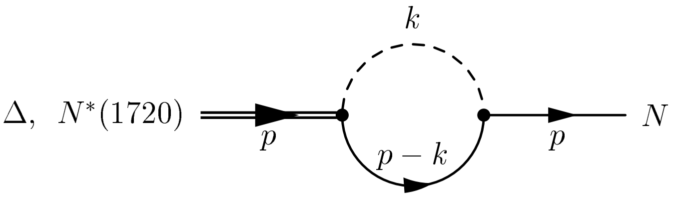
$$\sum_{s',s} \chi^\dagger(s)\, \vec{k}\cdot\vec{\sigma}\, \chi(s') \begin{pmatrix} \frac{1}{q^0} \\ 0 \end{pmatrix}_\mu \begin{pmatrix} \vec{q}\cdot\vec{S}^\dagger \\ q^0 \vec{S}^\dagger \end{pmatrix}^\mu \vec{k}\cdot\vec{S} \left(\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{2m_N} - \frac{\vec{\sigma}\cdot(\vec{p}+\vec{k})}{2m_{N^*}} \right) \chi(s)$$

$$= Sp(\sigma_a\, S_b^\dagger\, S_c\, \sigma_d)\; k_a\, q_b\, k_c \left(\frac{p_d}{2m_N} - \frac{p_d + k_d}{2m_{N^*}} \right) \frac{1}{q^0}$$

$$= \frac{1}{2\,q^0}\, \frac{2}{3} \left[\left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{p}}{m_N} - \frac{\vec{k}\cdot(\vec{p}+\vec{k})}{m_{N^*}} \right) (\vec{k}\cdot\vec{q}) \;+\; \vec{k}^{\,2} \left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{m_N} - \frac{(\vec{p}+\vec{k})\cdot\vec{q}}{m_{N^*}} \right) \right]$$

$$\neq \; 0$$

Dieses verblüffende Resultat ist offenbar eine Folge der nichtrelativistischen Entwicklung der Vertizes. Es bleibt auch erhalten, wenn man die ρNN - Wechselwirkung wie in Kap. 2 in der nächsten Ordnung in $\frac{1}{m_N}$ nimmt.
Es stellt sich die Frage, ob dies eine Eigenschaft des $N^*(1520)$ oder besser der nichtrelativistischen Feynmanregeln ist, die wir der Resonanz gegeben haben, oder ob ähnliches auch mit anderen, „etablierten“ Wechselwirkungen passiert. Tatsächlich besitzt schon die $\pi N\Delta$ - Wechselwirkung diesen Fehler. Da aber wegen der Isospinfaktoren ein solcher Interferenzterm wie in Gl.(3.20) von vornherein Null ergeben würde, stellt sich das Problem - und die Frage - normalerweise nicht. Das $N^*(1720)$ hingegen hat den Isospin des Nukleons, wird aber ansonsten wie das Delta beschrieben. In diesem Falle, also für ein Δ unter Außerachtlassung des Isospins oder für ein $N^*(1720)$ genügt es, folgendes Diagramm zu betrachten:



Die Spur über die hier autretenden Spinfaktoren, $\vec{k}\vec{S}^\dagger$ am linken Vertex, $\vec{k}\vec{\sigma}$ am rechten Vertex, ergibt

$$\frac{(\sqrt{3}-1)\,(k_x + ik_y)\,k_z}{\sqrt{2}},$$

wobei k_x, k_y, k_z die Komponenten des Schleifenimpulses sind. Integriert man nun, so ist im Integral der Nukleonpropagator zu beachten, der hier eine Winkelabhängigkeit besitzt:

$$G_N(p-k) = \frac{1}{(p^0 - k^0) - \sqrt{\vec{p}^2 + \vec{k}^2 - 2\vec{p}\cdot\vec{k} + m_N^2} + i\varepsilon}$$

Das k - Integral über diese beiden Faktoren wird i.a. nicht Null ergeben. Nur wenn die Resonanz in Ruhe ist, verschwindet die Winkelabhängigkeit im Propagator und damit auch das Integral.

Wenn dieser Prozeß im Ruhesystem der Resonanz nicht vorkommt, wohl aber von einem anderen Bezugssystem aus betrachtet möglich erscheint, so ist klar, daß der Fehler in der nichtrelativistischen Entwicklung liegt.

Im folgenden beschränken wir daher die volle Behandlung der Resonanzen auf $\Delta(1232)$ und $N^*(1720)$ und addieren das $N^*(1520)$ am Ende nur inkohärent dazu, nehmen also nur die Graphen j und k ohne Interferenzterme mit.

Es ist noch die Frage nach den Kopplungskonstanten zu klären. Für $f_{\rho N\Delta}$, $f_{\rho NN^*(1720)}$ und $f_{\rho NN^*(1520)}$ findet man Werte in der Literatur:
Ref. [5] gibt den Wert

$$f_{\rho N\Delta} = 15.3$$

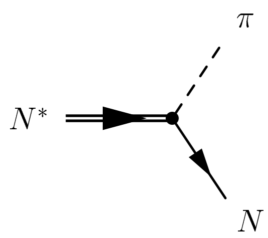
für den $\rho N\Delta$ - Vertex (aus dem Bonn-Potential, $f_{\rho N\Delta} = 2\, f_{\rho NN}$) und für die Kopplung des $N^*(1720)$ an ρN

$$f_{\rho NN^*(1720)} = 9.372$$

an. Dieser Wert wurde durch Anpassung an die partielle Zerfallsbreite des $N^*(1720)$ in ρN bestimmt.
In Ref. [7] ist die Kopplung des $N^*(1520)$ an ρN mit

$$f_{\rho NN^*(1520)} = 7.0$$

angegeben.
Bei den Nukleon- Resonanzen ist außerdem auch die πNN^* - Kopplung zu bestimmen. Dazu kann man die Zerfallsbreite $\Gamma_{N^*\to\pi N}$ berechnen:



$$= -i\,\Gamma_{N^*\to\pi N} \tag{3.21}$$

Das ergibt für das $N^*(1720)$

$$\Gamma_{N^*\to\pi N} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{f_{\pi NN^*}}{m_\pi}\right)^2 \frac{m_N}{m_{N^*}}\left(\frac{(m_{N^*}^2 - m_N^2 + m_\pi^2)^2}{4m_{N^*}^2} - m_\pi^2\right)^{\frac{3}{2}} .$$

Dem Particle Data Book [30] ist zu entnehmen, daß die totale Zerfallsbreite des $N^*(1720)$ $\Gamma_{total} = 150$ MeV beträgt, und daß der πN - Sektor daran einen Anteil von 15 % hat.
Somit ergibt sich die $\pi NN^*(1720)$ - Kopplungskonstante zu

$$f_{\pi NN^*(1720)} = 0.156\,.$$

Beim $N^*(1520)$ erhält man

$$\Gamma_{N^*\to\pi N} = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{f_{\pi NN^*}}{m_\pi}\right)^2 \frac{1}{m_N m_{N^*}} \left(\frac{(m_{N^*}^2 - m_N^2 + m_\pi^2)^2}{4m_{N^*}^2} - m_\pi^2\right)^{\frac{5}{2}},$$

und über den Anteil von πN an der totalen Breite aus Ref. [30] ergibt das die Kopplungskonstante

$$f_{\pi NN^*(1520)} \;=\; 0.154\,.$$

Als Test für die Rechnung kann wieder der Wirkungsquerschnitt der Photoabsorption dienen. Abb. 3.4 zeigt den totalen Photoabsorptionsquerschnitt, aufgetragen über der Energie des Photons, sowie die Bestandteile: den zu Beginn des Kapitels berechneten Untergrund und die Resonanzbeiträge einzeln, im Vergleich mit den Daten aus Ref. [31].

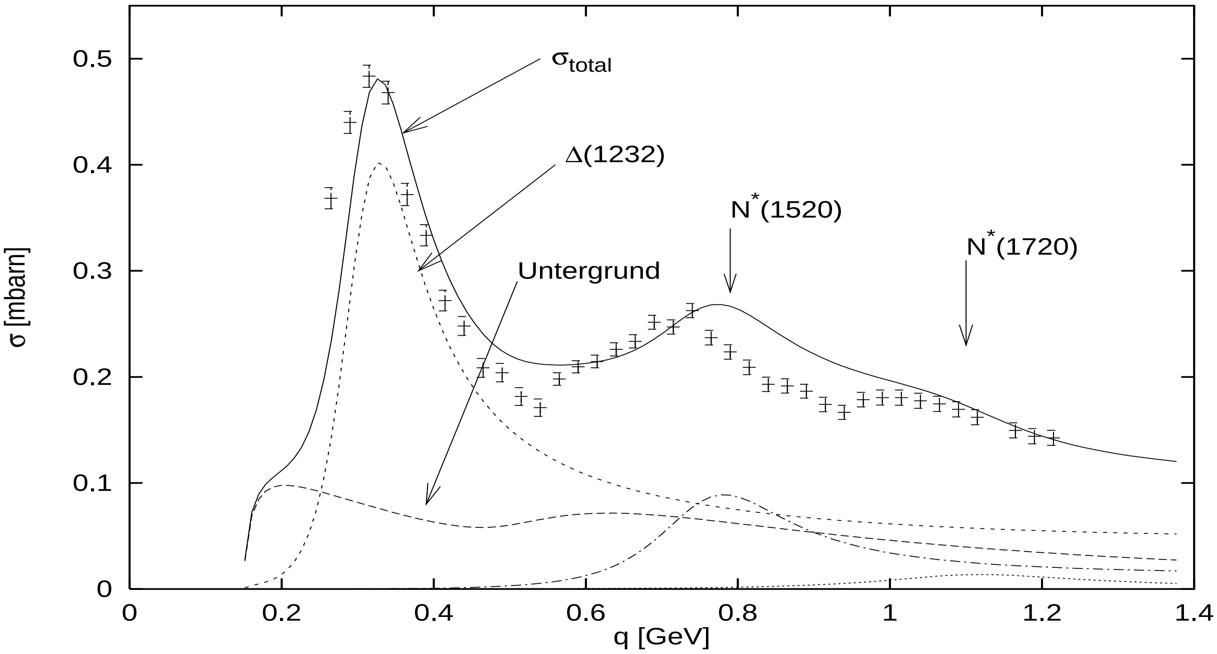


Abb. 3.4: *Totaler Photoabsorptionsquerschnitt mit* $\Delta(1232)$-, $N^*(1720)$- *und* $N^*(1520)$- *Resonanzen, Daten aus Ref. [31]*

Gibt man einer Resonanz nur eine konstante, nicht energieabhängige Breite, so ist (unter anderem) der zugehörige Peak etwas nach oben verschoben: ein typischer Effekt, den man hier am Beispiel des $N^*(1520)$ erkennen kann.

Abb. 3.5 zeigt das Ergebnis für die ρ - Produktion. Die Resonanzen liefern hier also keine großen Beiträge, sie erzeugen allerdings auch keine stark destruktiven Interferenzen, so daß der Wirkungsquerschnitt weiter im wesentlichen durch die Weichheit des Formfaktors bestimmt wird.

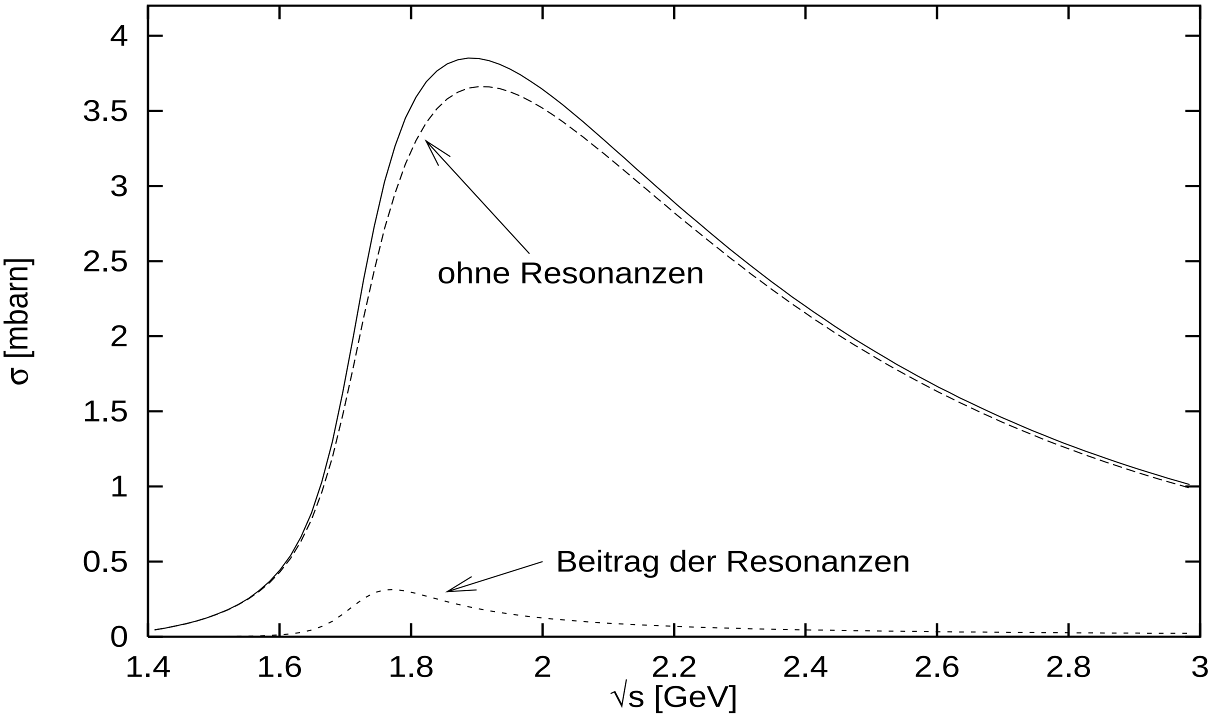


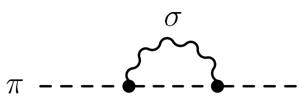
Abb. 3.5: $\pi N \to \rho N$ *mit* $\Delta(1232)$, $N^*(1520)$ *und* $N^*(1720)$

Kapitel 4

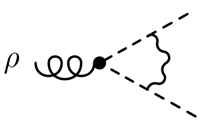
Modifikation des $\rho\pi\pi$ - Vertex

Das Ergebnis des ersten Kapitels, die starke Reduktion des Parameters Λ, macht deutlich, daß unsere Methode zur Berechnung des Wirkungsquerschnitts sehr stark vom πNN - Formfaktor bestimmt wird. Es ist aber klar, daß alle beteiligten Teilchen ausgedehnt sind. Man würde daher an jedem Vertex einen Formfaktor erwarten, der wie beim πNN - Fall diese Ausdehnung berücksichtigt und die Kopplung bei größeren Impulsen absenkt. Da nach Abschnitt 1.7 gerade das Diagramm A_c, Gl.(1.30), wesentlich zum Wirkungsquerschnitt beiträgt, erhebt sich die Frage, ob speziell eine Modifikation des $\rho\pi\pi$ - Vertex nicht den Wirkungsquerschnitt senken könnte, so daß der Formfaktor wieder erhöht werden könnte.
Da das ρ - Meson in das Modell als Eichboson eingeführt wurde, kann man solch eine Modifikation nicht einfach durch Multiplikation mit einem Formfaktor wie am πNN - Vertex durchführen. Für eine daher nötige mikroskopische Beschreibung kommt etwa der Austausch eines ρ - Mesons zwischen den Pionlinien an diesem Vertex in Frage. Um die Eichinvarianz zu erhalten, sind die Ward-Takahashi-Identitäten zu beachten. In Falle des $\rho\pi\pi$ - Vertex bedeutet das auch eine Änderung des Propagators der ankoppelnden Pionen.

Um die dazu nötige Vorgehensweise zu erlernen und die Rechnung möglichst einfach zu halten, soll zunächst das Pion eine Selbstenergie durch eine Schleife mit einem Sigma bekommen:



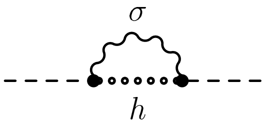
Der neue $\rho\pi\pi$ - Vertex wird so aussehen:



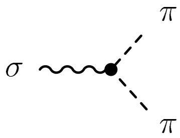
Hier könnte man allerdings einen Schnitt durch die beiden Pion-Propagatoren legen, d.h. es könnten Imaginärteile in der Amplitude auftreten, die nicht zum hier betrachteten

Prozeß gehören würden. Um dieses Problem zu vermeiden, wird das Pion in den Zwischenzuständen durch ein schweres intermediäres Teilchen (h) mit den Quantenzahlen des Pions ersetzt, das dann etwa eine Masse von $m_h \approx 1$ GeV hat.

Für die Selbstenergie des Pions

$-i\,\Sigma(k^2) \;=$ 

braucht man eine skalare, isoskalare Wechselwirkung mit einem $\sigma\pi\pi$ - Vertex



$= \quad i g_\sigma .$

Damit ergibt sich die Pion-Selbstenergie zu

$$
\begin{aligned}
-i\,\Sigma(k^2) &= g_\sigma^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, G_\sigma(p)\, G_h(k-p) \\
&= g_\sigma^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \frac{1}{p^2 - m_\sigma^2 + i\varepsilon}\, \frac{1}{(k-p)^2 - m_h^2 + i\varepsilon} . \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

Die Selbstenergie erscheint im vollen Propagator wie folgt:

$$
G_\pi(k) = \frac{1}{k^2 - (m_\pi^{(0)})^2 - \Sigma(k^2) + i\varepsilon} .
$$

Drückt man die nackte Pionmasse durch die physikalische Masse aus,

$$
(m_\pi^{(0)})^2 = m_\pi^2 \; - \; \Sigma(m_\pi^2),
$$

so steht im Propagator

$$
G_\pi(k) = \frac{1}{k^2 - m_\pi^2 - \; (\Sigma(k^2) - \Sigma(m_\pi^2)) \; + i\varepsilon} ,
$$

was sich etwas einfacher berechnen läßt (s. Gl.(4.2)).

Entwickelt man $\Sigma(k^2)$ um m_π^2, so hat man (mit $\Sigma' = \frac{d\Sigma}{dk^2}$) im Nenner des Propagators

$$
\begin{aligned}
k^2 - (m_\pi^{(0)})^2 - \Sigma(k^2) &= k^2 - (m_\pi^{(0)})^2 - \; \Sigma(m_\pi^2) - \Sigma'(m_\pi^2)(k^2 - m_\pi^2) \; - \; \delta\Sigma(k^2) \\
&= (\, k^2 - m_\pi^2 \,) \; (\, 1 - \Sigma'(m_\pi^2) \,) \; - \; \delta\Sigma(k^2),
\end{aligned}
$$

wobei $\delta\Sigma$ die höheren Terme umfaßt.
Mit den folgenden Abkürzungen

$$
\begin{aligned}
Z^{-1} &= 1 - \Sigma'(m_\pi^2) \\
\tilde{\Sigma}(k^2) &= Z \;\; \delta\Sigma(k^2)
\end{aligned}
$$

läßt sich das schreiben als

$$k^2 - (m_\pi^{(0)})^2 - \Sigma(k^2) = Z^{-1}\,(k^2 - m_\pi^2 - \tilde{\Sigma}(k^2)).$$

Damit läßt sich der Pionpropagator mit der Wellenfunktionsrenormierungskonstanten Z so ausdrücken:

$$G_\pi(k) = \frac{1}{k^2 - m_\pi^2 - \,(\Sigma(k^2) - \Sigma(m_\pi^2))\, + i\varepsilon} = \frac{Z}{k^2 - m_\pi^2 - \tilde{\Sigma}(k^2)\, + i\varepsilon}$$

Die Pion-Selbstenergie kann durch Einführen eines Feynman-Parameterintegrals und anschließende Wickrotation berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\Sigma(k^2) &= ig_\sigma^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m_\sigma^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(k-p)^2 - m_h^2 + i\varepsilon} \\
&= ig_\sigma^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 + k^2x(1-x) - m_h^2x - m_\sigma^2(1-x) + i\varepsilon)^2} \\
&\quad \text{mit } l = p - kx \\
&= -\frac{g_\sigma^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^\infty d\lambda \frac{1}{\lambda - k^2x(1-x) + m_h^2x + m_\sigma^2(1-x) - i\varepsilon}
\end{aligned}$$

Dieses Integral ist logarhitmisch divergent. Die im Propagator auftauchende Differenz ist dagegen konvergent:

$$\begin{aligned}
\Sigma(k^2) - \Sigma(m_\pi^2) &= -\frac{g_\sigma^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^\infty d\lambda \left(\frac{1}{\lambda - k^2x(1-x) + m_h^2x + m_\sigma^2(1-x) - i\varepsilon} \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{\lambda - m_\pi^2x(1-x) + m_h^2x + m_\sigma^2(1-x) - i\varepsilon} \right) \\
&= \frac{g_\sigma^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \ln\left(\frac{k^2x(1-x) - m_h^2x - m_\sigma^2(1-x) + i\varepsilon}{m_\pi^2x(1-x) - m_h^2x - m_\sigma^2(1-x) + i\varepsilon} \right)
\end{aligned}$$

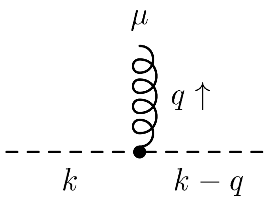
Soll Z berechnet werden, braucht man nur den Term linear in $k^2 - m_\pi^2$:

$$\Sigma(k^2) - \Sigma(m_\pi^2) = \frac{g_\sigma^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{x(1-x)\,(k^2 - m_\pi^2)}{m_\pi^2x(1-x) - m_h^2x - m_\sigma^2(1-x) + i\varepsilon} \quad + \mathcal{O}((k^2 - m_\pi^2)^2) \tag{4.2}$$

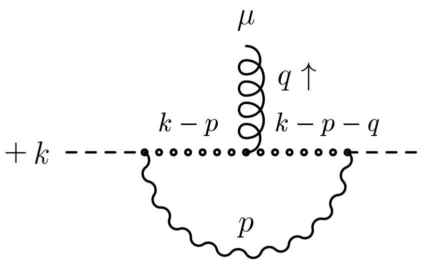
$$\Rightarrow Z^{-1} = 1 - \frac{g_\sigma^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{m_\pi^2x(1-x) - m_h^2x - m_\sigma^2(1-x) + i\varepsilon} \tag{4.3}$$

Am $\rho\pi\pi$ - Vertex ergibt sich folgende Änderung:

$$-i\,\Gamma_\mu(k-q,k) \;=$$



$$+$$



$$(4.4)$$

$$= -i\,(2k-q)_\mu \;+ g_\sigma^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, G_\sigma(p)\, G_h(k-p)\, G_h(k-p-q)\;\left(2(k-p)-q\right)_\mu$$

Nun ist die Ward-Identität zu prüfen (das ρ läuft aus, daher das Minuszeichen links):

$$\begin{aligned}
-q^\mu \Gamma_\mu(k-q,k) \;&=\; 2k\cdot q - q^2 \\
&\quad\; + i\, g_\sigma^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, G_\sigma(p)\, G_h(k-p)\, G_h(k-p-q)\; \Big(2(k-p)\cdot q - q^2\Big) \\
&=\; -[(k-q)^2 - k^2] + i\, g_\sigma^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, G_\sigma(p)\, G_h(k-p)\, G_h(k-p-q) \\
&\qquad\qquad \cdot[-(k-p-q)^2 + (k-p)^2]
\end{aligned}$$

Das ergibt nach einigen Umformungen

$$-q^\mu \Gamma_\mu(k-q,k) \;=\; G_\pi^{-1}(k) \;-\; G_\pi^{-1}(k-q).$$

Die Ward-Identität ist also erfüllt.

Die Renormierungskonstante am Vertex, Z_1, ist so definiert:

$$\Gamma_\mu(k,k)\Big|_{k^2=m_\pi^2} \;=\; Z_1^{-1}\,\cdot\,(2k_\mu)$$

Die Gültigkeit der Ward-Identität bedeutet, daß $Z\,Z_1^{-1} \;=1$.

Die $\rho\pi\pi$ - Kopplungskonstante wird also nicht renormiert: $g = Z\,Z_1^{-1}\, g_0 = g_0$. (4.5)

Die Berechnung der $\rho\pi\pi$ - Vertexfunktion ist etwas länger, läuft aber über Einführung von Parameterintegralen und eine Wickrotation in derselben Weise wie oben. Man erhält schließlich

$$\Gamma_\mu(k-q,k) \;=\; (2k-q)_\mu \;+\; \Lambda_\mu(k-q,k)\;,$$

$$\Lambda_\mu(k-q,k) \;=\; ig_\sigma^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, G_\sigma(p)\, G_h(k-p)\, G_h(k-p-q)\, (2(k-p)-q)\mu$$

$$= \frac{g_\sigma^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_x^1 dz \, \frac{2k_\mu(1-z) \;+\; q_\mu(1-2x)}{-q^2x(1-x) - m_\pi^2 z(1-z) + m_h^2 z + 2k\cdot qx(1-z) + m_\sigma^2(1-z) - i\varepsilon},$$

wobei das einlaufende Pion auf die Massenschale gesetzt wurde: $k^2 = m_\pi^2$.

Da der Propagator des „schweren Pions“ (Gl.(1.24)) nicht geändert werden soll, müssen die Amplituden A_a, A_b, A_d und A_e (s. Kap. 1, Abschnitt 1.3) nur mit $\sqrt{Z}$ multipliziert werden.
Die Amplitude A_c enthält aber den „normalen“ Pionpropagator:

$$A_c^\mu = -\sqrt{2}\sqrt{Z}\,\frac{gf_N}{m_\pi}\,\Gamma_\pi(\vec{k}-\vec{q})\chi^\dagger(s')\,(\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{\sigma}\,\chi(s)G_\pi(k-q)\Gamma^\mu(k-q,k)$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} q_\mu A_c^\mu &= -\sqrt{2}\sqrt{Z}\,\frac{gf_N}{m_\pi}\,\Gamma_\pi(\vec{k}-\vec{q})\chi^\dagger(s')\,(\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{\sigma}\,\chi(s)G_\pi(k-q)q_\mu\Gamma^\mu(k-q,k) \\ &= -\sqrt{2}\sqrt{Z}\,\frac{gf_N}{m_\pi}\,\Gamma_\pi(\vec{k}-\vec{q})\chi^\dagger(s')\,(\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{\sigma}\,\chi(s)G_\pi(k-q)(-G_\pi^{-1}(k-q)+G_\pi^{-1}(k)) \\ &= -\sqrt{2}\sqrt{Z}\,\frac{gf_N}{m_\pi}\,\Gamma_\pi(\vec{k}-\vec{q})\chi^\dagger(s')\,(\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{\sigma}\,\chi(s)\;\frac{-q^2 \;+\; 2k\cdot q}{(k-q)^2 - m_\pi^2 + i\varepsilon} \end{aligned}$$

Folglich ist die mit q_μ kontrahierte Summe aller Amplituden gerade $\sqrt{Z}$ mal das Ergebnis aus Abschnitt 1.3 und damit gleich Null. Die Gesamtamplitude bleibt also eichinvariant.

Der Wirkungsquerschnitt $\pi^- p \to \rho^0 n$ mit dem neuen Vertex kann nun berechnet werden. Dabei nehmen wir als Masse des Sigma-Mesons $m_\sigma = 550$ MeV an, die Kopplungskonstante betrage $g_\sigma = 6.0$.

Das Ergebnis wird in Abb. 4.1 gezeigt.

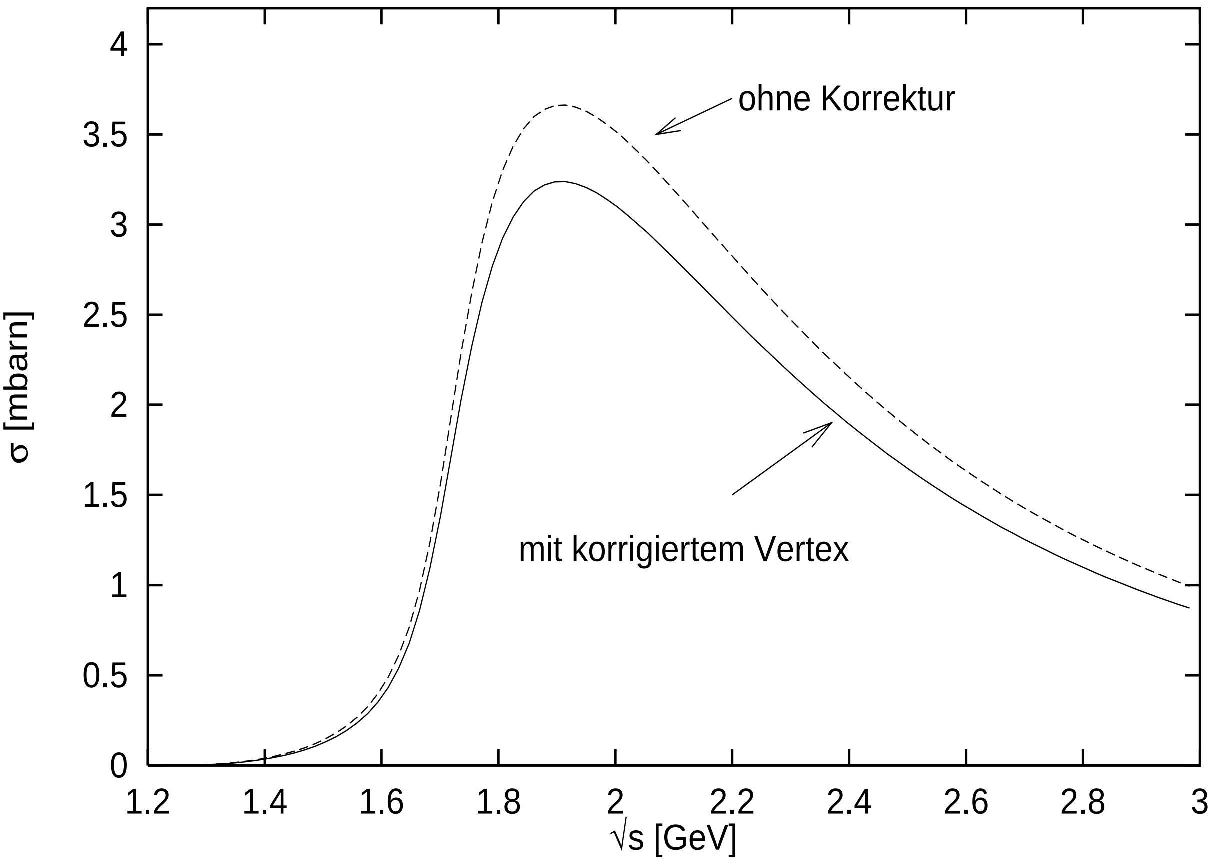
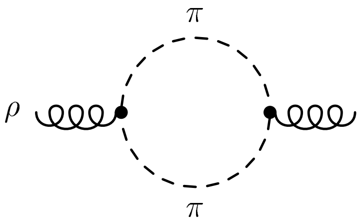


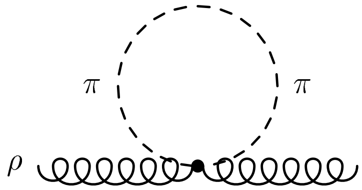
Abb. 4.1: *Totaler Wirkungsquerschnitt* $\sigma_{\pi^- p \to \rho^0 n}$ *mit* $\rho\pi\pi$ *- Vertexkorrektur.*

Eine solche Korrektur des Vertex kann also tatsächlich zu einer gewissen Reduktion führen. Allerdings besteht hier nicht nur die Unsicherheit bezüglich der verwendeten Parameter unserer „Hilfsteilchen“ σ und h.
Die $\rho\pi\pi$ - Kopplungskonstante g selbst hatte ihren Wert gerade durch die Berechnung des elektromagnetischen Pion-Formfaktors $F_\pi(q^2)$ mit dem „nackten“ $\rho\pi\pi$ - Vertex und seiner Anpassung an die Daten erhalten ([9]). Abb. 4.1 sollte man daher eher als Hinweis verstehen, daß eine Modifikation des Vertex prinzipiell auch eine Veränderung des Wirkungsquerschnitts bringen kann. Schlußfolgerungen sind aber erst zu ziehen, wenn der elektromagnetische Pion-Formfaktor mit Hilfe des erweiterten Vertex berechnet und dann die Kopplungskonstante neu bestimmt worden ist.
Dafür müßte man (s. Ref.[9]) gemäß der Beziehung

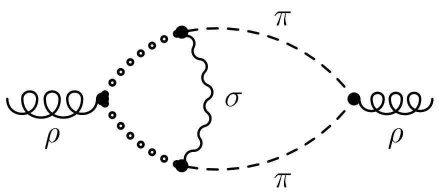
$$|F_\pi(q^2)|^2 = (m_\rho^{(0)})^4 \, |G_\rho(q^2)|^2$$

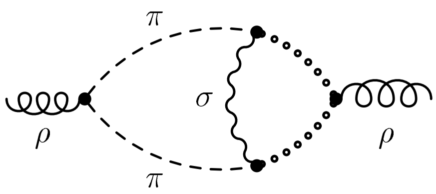
den ρ - Propagator $G_\rho(q^2)$ berechnen. Dieser enthält natürlich beide Vakuum-Selbstenergiebeiträge aus Gl.(1.1):

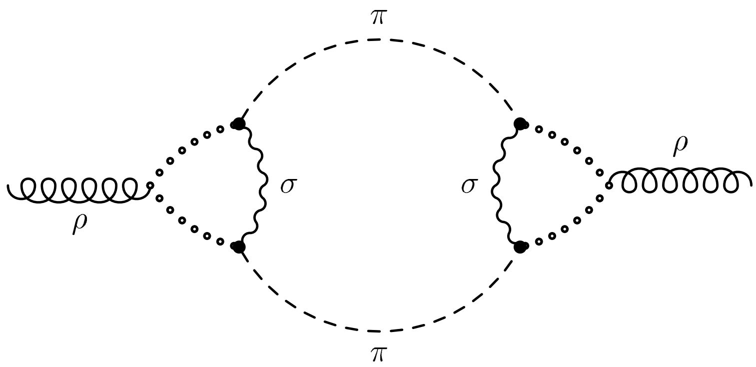




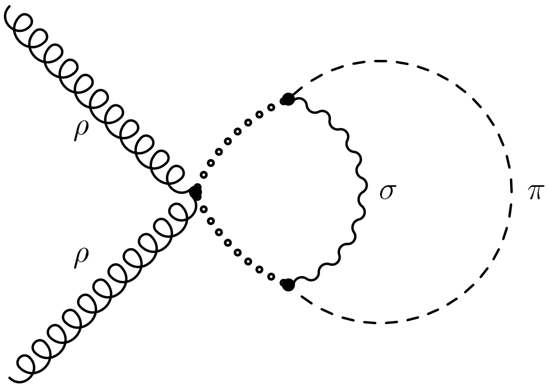
Mit dem erweiterten Vertex müßten nun aber auch solche Diagramme betrachtet werden:

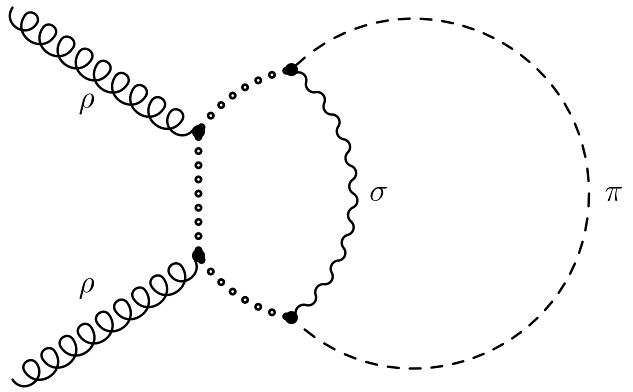






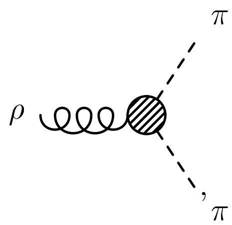
Schließlich gäbe es noch Korrekturen zum Tadpole:





Angesichts der komplizierten Form der Rechnung stellt sich die Frage, was letztlich davon zu erwarten ist.

Der elektromagnetische Pion-Formfaktor wurde in Ref. [9] mit dem nackten Vertex, also ohne all diese Korrekturen, schon sehr gut beschrieben. Es bleibt deswegen nicht viel Spielraum für den Effekt, den der modifizierte Vertex mit einer an dieser Stelle renormierten Kopplungskonstante auf den Wirkungsquerschnitt haben kann. Denn der Unterschied zwischen dem $\rho\pi\pi$ - Vertex

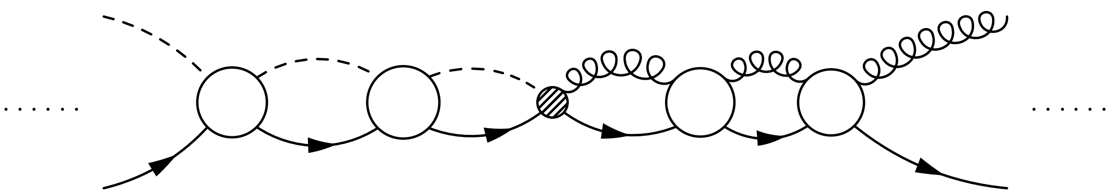


bei der Bestimmung des Pion-Formfaktors und demjenigen im Graphen A_c ist eher gering: In ersterem Falle sitzen die beiden Pionen auf ihrer Massenschale, im zweiten Fall ist ein Pion mit dem Impuls $k - q$ 'off-shell'. Ist die Wirkung der Vertexkorrektur am Punkt des Pion-Formfaktors wieder ausgeglichen worden, so ist es unwahrscheinlich, daß die Impulsabhängigkeit der Vertexfunktion dafür sorgt, daß der Wirkungsquerschnitt mit Vertexkorrektur und renormierter Kopplung sich etwa wie in Abb. 4.1 noch deutlich verändert. Zudem müßten für ein realistisches Modell des Vertex die Vereinfachungen („σ - Meson“ statt ρ - Austausch, „schweres intermediäres Teilchen“) aufgegeben werden. Und letztendlich würden die oben gezeigten erweiterten Vakuum-Selbstenergiediagramme des ρ auch in die Berechnung des ρ - Propagators in Materie eingehen - offenbar ein sehr schwieriges Unterfangen.
Daher wurde diese Rechnung hier nicht weiter verfolgt.

Kapitel 5

Einbeziehung der $\pi - N$ - Endzustandswechselwirkung

Bisher wurden verschiedene Versuche unternommen, das ursprüngliche Modell zu erweitern und so eventuell Einfluß auf den untersuchten Wirkungsquerschnitt zu nehmen. Die Diagramme, die all diesen Überlegungen zugrundelagen, waren stets 'Tree-Level'-Diagramme. Die ein- und auslaufenden Teilchen können jedoch zusätzlich untereinander wechselwirken, man spricht von Anfangs- und Endzustandswechselwirkung:



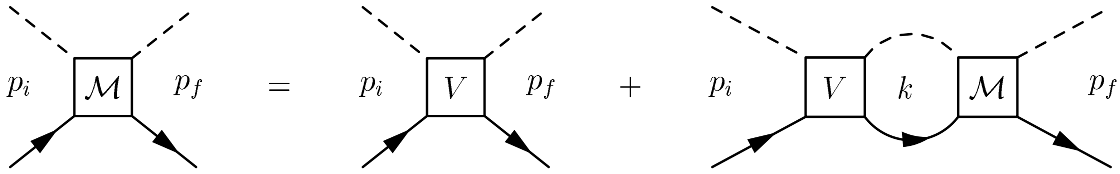
Im letzten Teil dieser Arbeit soll nun diese Aufgabe angegangen werden. Dazu betrachten wir zunächst die Bethe-Salpeter-Gleichung in K-Matrix-Näherung. Mit der dabei gewonnenen Streugleichung wird dann die iterierte πN - Streuung berechnet. Diese wird schließlich der $\pi N \to \rho N$ - Reaktion als Anfangszustandswechselwirkung vorangestellt.
Obwohl auch diese Rechnung, wie wir sehen werden, keine wesentliche Änderung des Wirkungsquerschnitts ergibt, bietet der verwendete Ansatz einige Erweiterungsmöglichkeiten, die letztlich in ein Modell gekoppelter Kanäle münden können.

5.1 K-Matrix-Näherung

Eine exakte Behandlung der Streuung zweier Teilchen in relativistisch kovarianter Weise würde die Lösung der Bethe-Salpeter-Gleichung ([32]) erfordern. Diese lautet im Schwerpunktssystem:

$$\mathcal{M}(p_f, p_i, E) \,=\, V(p_f, p_i, E) \,+\, \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \mathcal{M}(p_f, k, E)\, \mathcal{G}_{BS}(k, E)\, V(k, p_i, E) \qquad (5.1)$$

wobei p_f, p_i und k die Relativimpulse im Anfangs-, End- und Zwischenzustand sind. $\mathcal{M}$ ist das lorentzinvariante Matrixelement, das Potential V die Summe aller zweiteilchenirreduziblen Diagramme und $\mathcal{G}_{BS}$ der relativistische Zweiteilchenpropagator.
Die Bethe-Salpeter-Gleichung für die Streuung zweier Teilchen läßt sich graphisch so darstellen:



Handelt es sich wie hier um die Streuung von Nukleon und Pion, so ist der Propagator $\mathcal{G}_{BS}$ das Produkt aus Nukleon- und Pionpropagator:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{BS}(k,E) &= iS_N(k,E)\,G_\pi(k,E) \\ &= i\,\frac{(-k^0+\frac{E}{2})\gamma_0+\vec{k}\cdot\vec{\gamma}+m_N}{(\frac{E}{2}-k^0)^2-\vec{k}^2-m_N^2+i\varepsilon}\,\frac{1}{(\frac{E}{2}+k^0)^2-\vec{k}^2-m_\pi^2+i\varepsilon} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Um also die gesamte Streuamplitude des Prozesses zu erhalten, muß man alle zweiteilchenirreduziblen Diagramme aufsummieren und diese iterieren.
Das ist freilich unmöglich. Zunächst wird man sich auf einige relevante Diagramme beschränken. Bei der πN - Streuung, die hier als Endzustandswechselwirkung der $\rho N \to \pi N$ - Reaktion berechnet werden soll, besteht unser V aus gerade sechs Diagrammen. Selbst mit diesen ließe sich die Gleichung als vierdimensionale Integralgleichung nur sehr schwer lösen. Es sind weitere Näherungen nötig, die die Dimension der Gleichung reduzieren. Dabei soll aber die Unitarität der S-Matrix, also die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit, beibehalten werden.
Die Unitaritätsrelation für die S-Matrixelemente besagt

$$\sum_n S_{fn} S^*_{in} = \delta_{fi},$$

wobei f, i generisch die Quantenzahlen von Anfangs- und Endzustand bezeichnen und über die Zwischenzustände n zu summieren ist.
Die in der Bethe-Salpeter-Gleichung vorkommende Amplitude $\mathcal{M}(p_f, p_i, E)$ ist mit der S - Matrix in der folgenden Weise verknüpft:

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i\,(2\pi)^4\,\delta^4(P_i - P_f)\left(\prod_j \sqrt{\frac{n_j}{(2\pi)^3}}\right)\mathcal{M}_{fi}, \tag{5.3}$$

dabei steht $n_j = m_j/E_j$ für ein äußeres Fermion j und $1/2E_j$ für ein äußeres Meson j.

Es läßt sich dann die folgende Beziehung für $\mathcal{M}(p_f, p_i, E)$ ableiten:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(p_f,p_i,E) \; - \; \mathcal{M}^*(p_i,p_f,E) \;\; &= \;\; -i(2\pi)^4 \sum_\nu \int d^4k \, \frac{1}{(2\pi)^6} \, \frac{m_N}{2E_N(\vec{k})E_\pi(\vec{k})} \cdot \\ &\qquad \delta(k^0 + \frac{E}{2} - E_\pi(\vec{k})) \;\; \delta(-k^0 + \frac{E}{2} - E_N(\vec{k})) \cdot \\ &\qquad \mathcal{M}(p_f,k,E) \; u(-\vec{k},\nu) \, \bar{u}(-\vec{k},\nu) \; \mathcal{M}^*(p_i,k,E)\end{aligned}$$

Andererseits ergibt sich aus der Bethe-Salpeter-Gleichung für ein hermitesches Potential $V = V^\dagger$:

$$\mathcal{M}(p_f,p_i,E) \; - \; \mathcal{M}^*(p_i,p_f,E) \;\; = \;\; \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \, \mathcal{M}(p_f,k,E) \; 2i \, \mathrm{Im}\mathcal{G}_{BS}(k,E) \, \mathcal{M}^*(p_i,k,E)$$

Offenbar kann die Unitaritätsbedingung stets durch einen Propagator $\mathcal{G}_K$ erfüllt werden, dessen Imaginärteil gegeben ist durch

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\mathcal{G}_K \;\; &= \;\; -\frac{1}{2} \, (2\pi)^8 \sum_\nu u(-\vec{k},\nu) \, \bar{u}(-\vec{k},\nu) \, \frac{1}{(2\pi)^6} \, \frac{m_N}{2E_N(\vec{k})E_\pi(\vec{k})} \\ &\qquad \delta(k^0 + \frac{E}{2} - E_\pi(\vec{k})) \, \delta(-k^0 + \frac{E}{2} - E_N(\vec{k})) \\ &= \;\; -\frac{\pi^2 \, m_N}{E_N(\vec{k})E_\pi(\vec{k})} \sum_\nu u(-\vec{k},\nu) \, \bar{u}(-\vec{k},\nu) \, \delta(k^0 + \frac{E}{2} - E_\pi(\vec{k})) \, \delta(-k^0 + \frac{E}{2} - E_N(\vec{k})) \\ &= \;\; -(2\pi)^2 \, m_N \, \delta(k_N^2 - m_N^2) \, \delta(k_\pi^2 - m_\pi^2) \, \theta(k_N^0) \, \theta(k_\pi^0) \sum_\nu u(-\vec{k},\nu) \, \bar{u}(-\vec{k},\nu). \qquad (5.4)\end{aligned}$$

Die eigentliche K-Matrix-Näherung besteht nun darin, den Bethe-Salpeter-Propagator durch den in Gl.(5.4) gegebenen Imaginärteil zu ersetzen.
Damit wird die Streugleichung (5.1) zu

$$\mathcal{M}(p_f,p_i,E) \; = \; V(p_f,p_i,E) - \frac{im_N|\vec{k}|}{16\pi^2 E} \sum_\nu \int d\Omega_k \, \mathcal{M}(p_f,\vec{k},E) \, u(-\vec{k},\nu) \, \bar{u}(-\vec{k},\nu) V(\vec{k},p_i,E). \qquad (5.5)$$

Der Betrag des Relativimpulses im Zwischenzustand k ist festgelegt durch

$$E = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m_N^2} + \sqrt{|\vec{k}|^2 + m_\pi^2} \; . \qquad (5.6)$$

Die vierdimensionale Integralgleichung (5.1) ist damit auf eine zweidimensionale Gleichung reduziert. Die Form der δ - Funktionen in Gl.(5.4) zeigt, daß dabei die Teilchen in den Zwischenzuständen auf ihre Massenschale gesetzt werden. Das bedeutet, daß in den Zwischenzuständen keine Propagatoren auftreten, Divergenzen beim Berechnen der verbleibenden Winkelintegrationen sind nicht zu befürchten. Freilich geht dabei die Kausalität verloren, was aber für die Streuzustände keine entscheidende Rolle spielt.

Multipliziert man Gl.(5.5) mit den Spinoren der ein- und auslaufenden Nukleonen:

$$\bar{u}(p_f, E, \nu')\, \mathcal{M}(p_f, p_i, E)\, u(p_i, E, \nu) \;=\; \mathcal{M}_{fi}^{\nu'\nu}(p_f, p_i, E),$$

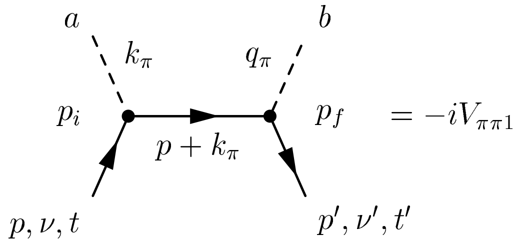
und beachtet, daß i.a. mehrere Zwischenzustände möglich sind, über die dann summiert werden muß, so erhält man die Streugleichung in der Form, wie sie hier genutzt werden soll:

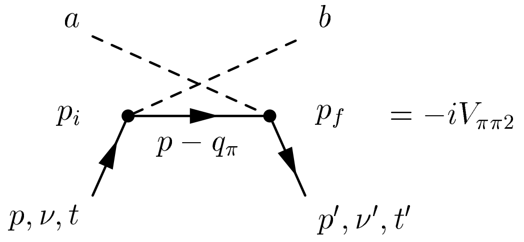
$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi}(p_f, p_i, E) \;&=\; V_{fi}(p_f, p_i, E) \;- \\ &\sum_c \frac{i m_N |\vec{k}_c|}{16\pi^2 E} \sum_\nu \int d\Omega_k\, \mathcal{M}_{fc}(p_f, \vec{k}_c, E)\, u(-\vec{k}_c, \nu)\, \bar{u}(-\vec{k}_c, \nu) V_{ci}(\vec{k}_c, p_i, E) \end{aligned} \tag{5.7}$$

Die Teilchensorte bzw. der Isospin der Mesonen im Anfangs- und Endzustand ist durch die Indizes i und f gekennzeichnet, im Zwischenzustand durch den Index c. Dazu kommt jeweils ein Nukleon.

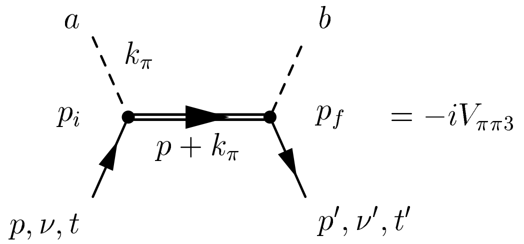
5.2 Iterierte πN - Streuung

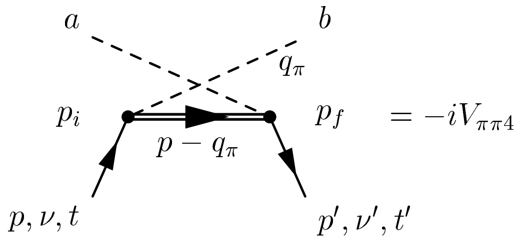
Mit Hilfe der Streugleichung soll nun die πN - Streuung behandelt werden.
Mit den in den Kapiteln 1 und 3 aufgestellten Feynmanregeln für die πNN - und die $\pi N\Delta$ - Wechselwirkung können folgende Diagramme konstruiert werden:





wobei ein Nukleon propagiert,
und





mit einem propagierenden Delta.

Dabei lautet der Zusammenhang zwischen Teilchen- und Relativimpulsen:

$$\vec{p}_i = \frac{1}{2}\,(\vec{k}_\pi - \vec{p}), \qquad \vec{p}_f = \frac{1}{2}\,(\vec{q}_\pi - \vec{p}\,'),$$

und im Schwerpunktssystem gilt:

$$\vec{k}_\pi + \vec{p} = 0, \qquad \vec{q}_\pi + \vec{p}\,' = 0, \qquad \text{also} \quad \vec{p}_i = \vec{k}_\pi, \quad \vec{p}_f = \vec{q}_\pi.$$

Die Amplitude für π N$\rightarrow$ N $\rightarrow \pi$ N lautet:

$$V_{\pi\pi 1}^{\nu\nu'} = \left(\frac{f_N}{m_\pi}\right)^2 \Gamma_\pi^2(\vec{p}_f) e_b^*(Q') e_a(Q) \chi^\dagger(t') \tau_b \tau_a \chi(t) \; \chi^\dagger(\nu')(\vec{p}_f \cdot \vec{\sigma})(\vec{p}_i \cdot \vec{\sigma}) \chi(\nu) \frac{1}{E - m_N + i\varepsilon}.$$

und die des gekreuzten Graphen:

$$V_{\pi\pi 2}^{\nu\nu'} = \left(\frac{f_N}{m_\pi}\right)^2 \Gamma_\pi^2(\vec{p}_f) e_b^*(Q') e_a(Q) \chi^\dagger(t') \tau_a \tau_b \chi(t) \; \frac{\chi^\dagger(\nu')(\vec{p}_i \cdot \vec{\sigma})(\vec{p}_f \cdot \vec{\sigma}) \chi(\nu)}{-p_i^0 - p_f^0 - \sqrt{((\vec{p}_f + \vec{p}_i)^2 - m_N^2)} + i\varepsilon}.$$

Die Graphen mit dem Delta ergeben

$$V_{\pi\pi 3}^{\nu\nu'} = \left(\frac{f_\Delta}{m_\pi}\right)^2 \Gamma_\pi^2(\vec{p}_f) e_b^*(Q') e_a(Q) \chi^\dagger(t') T_b^\dagger T_a \chi(t) \; \chi^\dagger(\nu')(\vec{p}_f \cdot \vec{S}^\dagger)(\vec{p}_i \cdot \vec{S}) \chi(\nu) \frac{1}{E - m_\Delta + i\varepsilon},$$

und beim gekreuzten Graphen:

$$V_{\pi\pi 4}^{\nu\nu'} = \left(\frac{f_\Delta}{m_\pi}\right)^2 \Gamma_\pi^2(\vec{p}_f) e_b^*(Q') e_a(Q) \chi^\dagger(t') T_a^\dagger T_b \chi(t) \; \frac{\chi^\dagger(\nu')(\vec{p}_i \cdot \vec{S}^\dagger)(\vec{p}_f \cdot \vec{S}) \chi(\nu)}{-p_i^0 - p_f^0 - \sqrt{((\vec{p}_f + \vec{p}_i)^2 - m_\Delta^2)} + i\varepsilon}.$$

Da die Roper-Resonanz $N^*(1440)$ die gleichen Quantenzahlen besitzt wie das Nukleon, kann es hier sehr leicht mitgenommen werden. Es sind lediglich die entsprechende Kopplungskonstante $f_{\pi N N^*}$ und die Masse $m_N^* = 1.44$ GeV in die Ausdrücke für $V_{\pi\pi 1}$ und $V_{\pi\pi 2}$ einzusetzen und man erhält die Amplituden $V_{\pi\pi 5}$ und $V_{\pi\pi 6}$ für $\pi N \rightarrow N^*(1440) \rightarrow \pi N$. Die obigen Amplituden enthalten keine vorgegebenen Breiten für Δ und $N^*(1440)$. Diese werden vielmehr durch die Iteration erzeugt.

5.2.1 Partialwellenentwicklung

Die Lösung der Streugleichung (5.7) kann durch die Entwicklung der Amplituden in Partialwellen noch wesentlich vereinfacht werden. Sie wird dabei von einer Integralgleichung in Impulsbasisdarstellung (die Form von Gl.(5.7)) in eine algebraische Gleichung überführt, in der nurmehr über Drehimpulse zu summieren ist.
Dazu betrachten wir zunächst allgemein die Entwicklung des S-Matrixelements zwischen zwei πN-Zuständen. Die Quantenzahlen, etwa im Eingangskanal (Relativimpuls $\vec{p}_i$, Schwerpunktsimpuls $\vec{P}_i$, Nukleonspin $(\frac{1}{2}, \nu)$, Isospin i), notieren wir so:

$$|i\rangle \otimes |\vec{p}_i\rangle \otimes |\vec{P}_i\rangle \otimes |\frac{1}{2}\nu\rangle \tag{5.8}$$

Zuerst entwickelt man in Eigenfunktionen des relativen Bahndrehimpulses

$$|\vec{p}_i\rangle = \int dE \sum_{l,m_l} |l, m_l, E\rangle\langle l, m_l, E|\vec{p}_i\rangle$$

und nutzt die Definition der Kugelflächenfunktionen aus:

$$\langle\vec{p}_i|l, m_l, E\rangle = \frac{\delta(E_i - E)}{\sqrt{\varrho_i(E_i)}} Y_{l,m_l}(\Omega_i) \tag{5.9}$$

$\varrho_i(E_i)$ ist dabei die Dichte der Anfangsenergiezustände:

$$\varrho_i(E_i) = |\vec{p}_i|^2 \frac{d|\vec{p}_i|}{dE_i}$$

Bahndrehimpuls und Spin der Nukleonen werden dann zum Gesamtdrehimpuls gekoppelt:

$$|J, M\,(l, \frac{1}{2})\rangle = \sum_{m_l,\nu} C(J, M|l, m_l; \frac{1}{2}, \nu)\, |l, m_l; \frac{1}{2}, \nu\rangle \tag{5.10}$$

$C(J, M|l, m_l; \frac{1}{2}, \nu)$ ist der Clebsch-Gordan-Koeffizient der Kopplung von l und $\frac{1}{2}$ zu J.

Im Anhang B.1.2 wird die Entwicklung des S - Matrix-Elements und der invarianten Amplitude $\mathcal{M}$ (iteriert) bzw. V (nicht iteriert) durchgeführt. Man erhält dabei folgende Gleichung (B.4):

$$\begin{aligned} V_{fi}^{\nu'\nu}(p_i, p_f, E) &= \sum_{J,l} C(J, \nu|l, \nu-\nu'; \frac{1}{2}, \nu')\, C(J, \nu|l, 0; \frac{1}{2}, \nu) \\ &\quad Y_{l,\nu-\nu'}(\Omega_f) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} V_{fi}^{Jll}(|\vec{p}_i|, |\vec{p}_f|, p_i^0, p_f^0, E) \end{aligned} \tag{5.11}$$

Nach Inversion dieser Gleichung ergibt sich die einzelne Partialwelle zu (Gl.(B.6))

$$V_{fi}^{Jll} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{1}{C(J, \nu|l, 0; \frac{1}{2}, \nu)} \sum_{\nu'} C(J, \nu|l, \nu-\nu'; \frac{1}{2}, \nu') \int d\Omega_f Y_{l,\nu-\nu'}^*(\Omega_f) V_{fi}^{\nu'\nu}. \tag{5.12}$$

Analog zu Gl.(5.10) koppelt man zu festem Isospin T und erhält die Streugleichung (s. auch Gl.(B.8)):

$$\mathcal{M}_{\pi\pi}^{Jll(T)} = V_{\pi\pi}^{Jll(T)} - \frac{im_N|\vec{p}_f|}{16\pi^2 E} \mathcal{M}_{\pi\pi}^{Jll(T)} V_{\pi\pi}^{Jll(T)}.$$

Nach diesem Verfahren müssen die Amplituden $V_{\pi\pi 1}$ bis $V_{\pi\pi 6}$ der oben gezeigten Graphen entwickelt werden (Anhang B.1.2). Dann werden sie in der Streugleichung iteriert und mit der so gewonnenen Amplitude $\mathcal{M}_{\pi\pi}$ wird der Wirkungsquerschnitt berechnet.

Im Schwerpunktssystem ist der differentielle Wirkungsquerschnitt durch die folgende Beziehung gegeben [14]:

$$\frac{d\sigma_{\pi\pi}^{\nu\nu'}}{d\Omega_f} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} \frac{m_N^2}{E^2} \left|\mathcal{M}_{\pi\pi}^{\nu\nu'}\right|^2,$$

der totale Wirkungsquerschnitt durch

$$\sigma_{\pi\pi} \;=\; \frac{1}{2}\int d\Omega_f \sum_{\nu\nu'} \frac{d\sigma_{\pi\pi}^{\nu\nu'}}{d\Omega_f} = \frac{1}{2}\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|}\frac{m_N^2}{E^2}\int d\Omega_f \sum_{\nu\nu'} \left|\mathcal{M}_{\pi\pi}^{\nu\nu'}\right|^2.$$

Anhang B.1.4 zeigt, wie man unter Nutzung der Entwicklung (5.11) den Wirkungsquerschnitt als Summe über die Bahndrehimpulse schreiben kann (s. Gl.(B.9)):

$$\sigma_{\pi\pi} = \frac{1}{(4\pi)^3}\;\frac{m_N^2}{E^2}\;\sum_l \;\left[\;(l+1)\;\overline{|\mathcal{M}_{\pi\pi}^{l+\frac{1}{2}}|}^{\,2} + l\;\overline{|\mathcal{M}_{\pi\pi}^{l-\frac{1}{2}}|}^{\,2}\;\right]. \tag{5.13}$$

Hier ist über den Gesamtisospin gemittelt (Überstrich).

Abb. 5.1 zeigt den totalen Wirkungsquerschnitt der πN - Streuung in Abhängigkeit von der Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$. Man erkennt deutlich die beiden Resonanzen Δ und $N^*(1440)$. Die Wirkung der Iteration zeigt sich darin, daß beide Resonanzen, die oben in den Amplituden $V_{\pi\pi}$ als Teilchen scharfer Masse eingingen, nunmehr eine Breite erhalten haben.

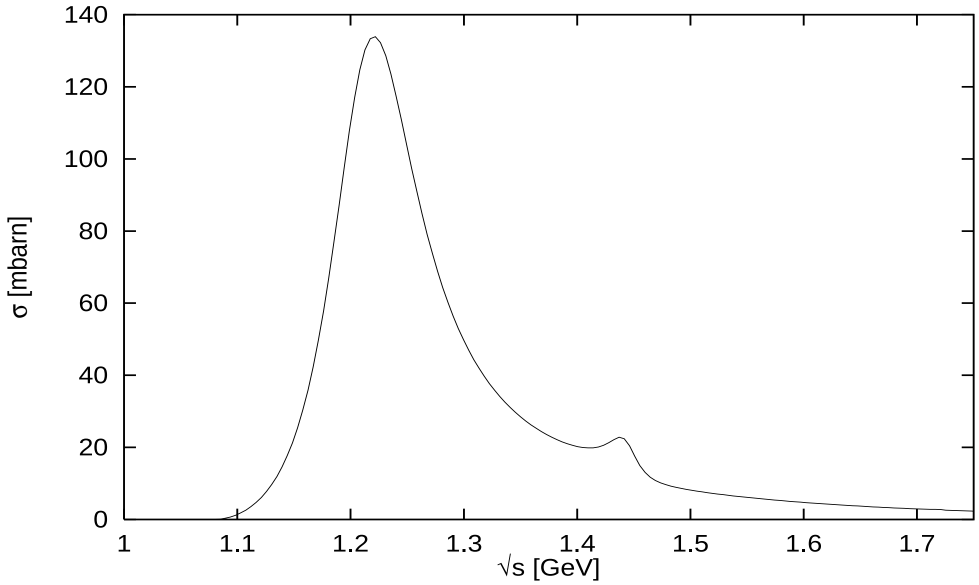


Abb. 5.1: $\pi N \to \pi N$ - *Streuquerschnitt, iteriert*

Ein geeigneter Test für diese Rechnung stellt die Betrachtung einzelner Streuphasen dar. Die Streuphasen δ^{Jll} erhält man aus der Unitaritätsforderung an die S-Matrix:

$$S_{fi}^{Jll} \stackrel{!}{=} e^{2i\delta^{Jll}}$$

Der Zusammenhang zwischen S - Matrix und invarianter Amplitude $\mathcal{M}$ (Gl.(5.3) und die Partialwellenentwicklung (Gl.(5.11)) führen auf

$$S_{fi}^{Jll} = 1 - 2i\,\frac{m_N\sqrt{|\vec{p}_i||\vec{p}_f|}}{16\pi^2 E}\mathcal{M}_{fi}^{Jll}.$$

So kann man δ^{Jll} mit der bekannten Größe $\mathcal{M}$ in Verbindung bringen.

$$\tan 2\delta^{Jll} = \frac{Im(S_{\pi\pi}^{Jll})}{Re(S_{\pi\pi}^{Jll})} = -\frac{2m_N\sqrt{|\vec{p}_i||\vec{p}_f|}\; Re(\mathcal{M}_{\pi\pi}^{Jll})}{16\pi^2 E + 2m_N\sqrt{|\vec{p}_i||\vec{p}_f|}\; Im(\mathcal{M}_{\pi\pi}^{Jll})} \tag{5.14}$$

Gewöhnlich wird zur Kennzeichnung der Streuphasen die Nomenklatur $L_{2T\,2J}$ verwendet, so daß z.B. P_{31} die Streuphase mit relativem Bahndrehimpuls 1 (p-Welle), Gesamtisospin $T = \frac{3}{2}$ und Gesamtdrehimpuls $J = \frac{1}{2}$ beschreibt.
Die hier verwendete πN - Kopplung ist gerade eine p-Wellen-Kopplung. Das sieht man leicht an der Partialwellendarstellung des Nukleon-Pol- Terms $V_{\pi\pi 1}$, in der nur der Term $l = 1$ vorkommt. Da wir auch den gekreuzten Graphen mitgenommen haben, tragen auch andere Partialwellen bei, allerdings sind diese Beiträge sehr klein im Vergleich zur p-Welle. Existiert eine Resonanz mit den Quantenzahlen eines der betrachteten Kanäle, so ist sie mit einzubauen, wenn man mit Streudaten vergleichen will.
Die s-Wellenstreuung wird hier nicht reproduzierbar sein. Der $(T = 3/2,\ J = 3/2)$- und der $(T = 1/2,\ J = 1/2)$- Kanal sollten hingegen gut dargestellt werden, da wir die hier dominierenden Resonanzen Δ und $N^*(1440)$ eingebaut haben.

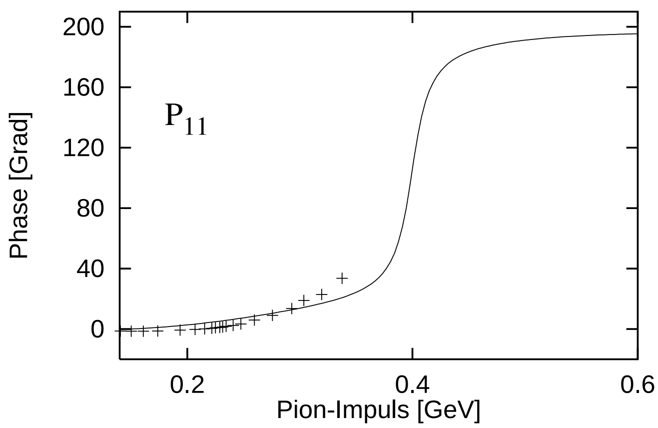


Abb. 5.2: *πN - Streuphase P11, Daten aus Ref. [33]*

Abb. 5.2 zeigt die Streuphasen im ($T = 1/2,\ J = 1/2$)- Kanal in Grad als Funktion des Photonimpulses. Der Durchgang durch 90° markiert die Position der Resonanz.
Die Kopplungskonstante des $N^*(1440)$ wurde aus seiner πN - Zerfallsbreite zu $f_{\pi N N^*(1440)} = 0.479$ bestimmt (analog zum $N^*(1720)$, Kap. 3, Gl.(3.21)).

Die Parameter des Deltas, $f_\Delta = 2.85,\ \Lambda_\Delta = 434$ MeV, wurden aus Kap. 3 übernommen. Die P33-Streuphase ist in Abb. 5.3 im Vergleich mit derjenigen gezeigt, die sich mit den Chew-Low-Parametern für das Delta ergibt. Diese weicht aber deutlich von den Daten ab.

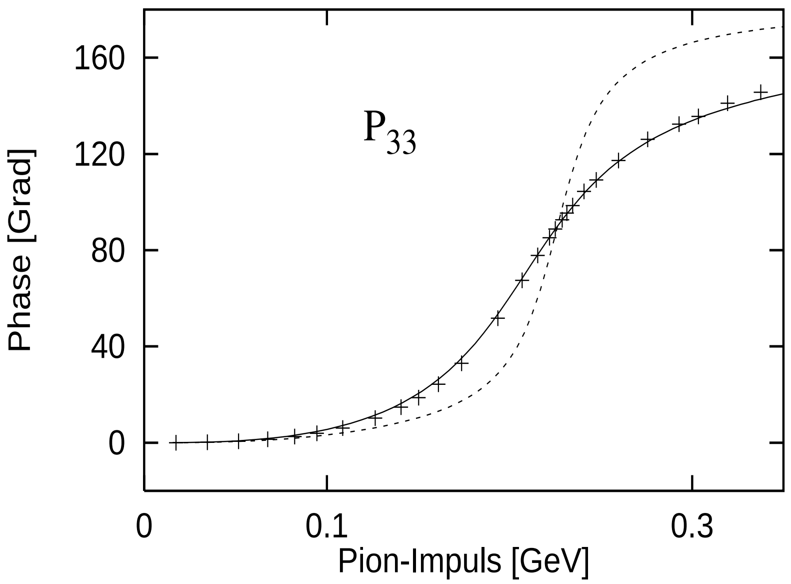
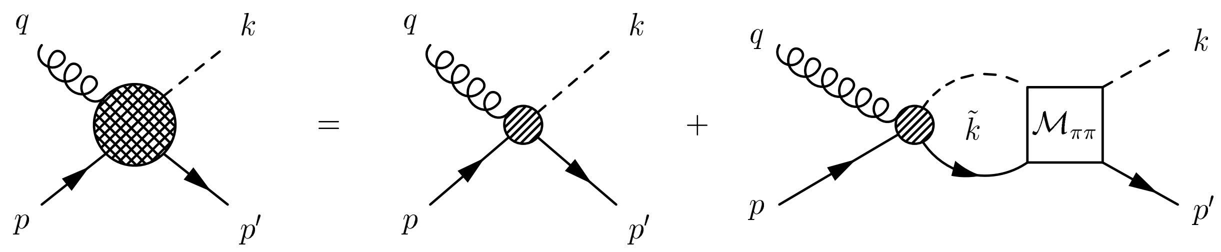


Abb. 5.3: *P33- Streuphase der πN - Streuung mit den Delta-Parametern $f_\Delta = 2.85, \Lambda_\Delta = 434$ MeV (durchgezogenen Kurve) und $f_\Delta = 2.02, \Lambda_\Delta = 310$ MeV (gestrichelte Kurve), Daten aus Ref. [33]*

Diese Beobachtung unterstützt also das Abweichen von den „Standard“-Parametern.

5.3 Photoabsorption mit πN - Endzustandswechselwirkung

Zur Vereinfachung und Kontrolle der Rechnung soll auch hier wie schon in den vorangegangenen Kapiteln zuerst die Photoabsorption behandelt werden. Die im vorigen Abschnitt berechnete πN - Streuung wird dabei dem $\gamma N \to \pi N$ - Prozeß als Endzustandswechselwirkung nachgestellt. Damit tritt das Photon nur im Eingangszustand, nicht aber in den Zwischenzuständen auf, d.h. die Bethe-Salpeter- Gleichung wird nur in der niedrigsten Ordnung in der elektromagnetischen Kopplungskonstanten behandelt. Für den $\gamma N \to \pi N$ - Teil ($V_{\pi\gamma}$) gehen wir also von der Form von Kap. 1 aus und iterieren nicht mehr, sondern hängen nur die $\pi N \to \pi N$ - Amplitude an:



$$\mathcal{M}_{\pi\gamma} \quad = \quad V_{\pi\gamma} \quad + \quad \mathcal{M}_{\pi\pi}\, G\, V_{\pi\gamma}\ ,$$

wobei V also gerade die Amplitude aus Kapitel 1 ist, natürlich in Richtung $\gamma\, N \to \pi N$. G ist analog zum Vorgehen bei der πN - Streuung wieder vom vierdimensionalen Integral zur Summe über Drehimpulse zu vereinfachen. Das Vorgehen orientiert sich weitgehend an den Referenzen [34] und [35].

Zunächst ist zu untersuchen, ob die solcherart erweiterte Amplitude noch eichinvariant ist.
Die Streugleichung in K-Matrix- Näherung (5.7) lautet:

$$\mathcal{M}^{\nu'\nu}_{\pi\gamma}(\vec{k},\vec{q},E) \;=\; V^{\nu'\nu}_{\pi\gamma}(\vec{k},\vec{q},E) \;-\; \frac{i m_N|\tilde{k}|}{16\pi^2 E}\sum_{\tilde{\nu}}\int d\Omega_{\tilde{k}}\, \mathcal{M}^{\nu'\tilde{\nu}}_{\pi\pi}(\vec{k},\tilde{k},E)\, V^{\tilde{\nu}\nu}_{\pi\gamma}(\tilde{k},\vec{q},E), \tag{5.15}$$

wobei $\tilde{k}$ der Impuls des Pions im Zwischenzustand ist.
Schreibt man analog zu Kap. 1

$$V_{\pi\gamma}(\vec{k},\vec{q},E) \;=\; \varepsilon_\mu\, \mathcal{A}^\mu_{\pi\gamma}(\vec{k},\vec{q},E) \quad \text{und} \quad \mathcal{M}_{\pi\gamma}(\vec{k},\vec{q},E) \;=\; \varepsilon_\mu\, \mathcal{M}^\mu_{\pi\gamma}(\vec{k},\vec{q},E),$$

so muß

$$q_\mu\, \mathcal{M}^\mu_{\pi\gamma}(\vec{k},\vec{q},E) \;=\; 0 \tag{5.16}$$

gelten.

Aber wenn man aus Gl.(5.15) ein ε_μ herauszieht:

$$\mathcal{M}^\mu_{\pi\gamma}(\vec{k},\vec{q},E) \;=\; A^\mu_{\pi\gamma}(\vec{k},\vec{q},E) \;-\; \frac{i m_N |\tilde{k}|}{16\pi^2 E} \sum_{\tilde{\nu}} \int d\Omega_{\tilde{k}}\, \mathcal{M}_{\pi\pi}(\vec{k},\tilde{k},E)\, A^\mu_{\pi\gamma}(\tilde{k},\vec{q},E),$$

so ist deutlich, daß Gl.(5.16) erfüllt ist, falls

$$q_\mu\, A^\mu_{\pi\gamma}(\vec{k},\vec{q},E) \;=\; 0 \quad \text{und} \quad q_\mu\, A^\mu_{\pi\gamma}(\tilde{k},\vec{k},E) \;=\; 0\,,$$

d.h. falls nicht nur der erste Term, der Potentialterm, sondern auch die Amplitude des Übergangs in den Zwischenzustand unter dem Integral transversal ist.
Das ist gerade die Forderung nach der Eichinvarianz der Amplitude der fünf Graphen aus Kap. 1, Abschnitt 1.4. Sie ist gewährleistet, wenn die beteiligten Teilchen on-shell sind. Das ist aber bei der K-Matrix-Näherung gerade der Fall. Die K-Matrix-Näherung sorgt also automatisch für die Erhaltung der Eichinvarianz.

Um die beiden Teile $V_{\pi\gamma}$ und $\mathcal{M}_{\pi\pi}$ miteinander zu verknüpfen, ist es viel einfacher, auch die $\gamma N \to \pi N$ - Amplitude in Partialwellen zu entwickeln und dann mit der $\pi N \to \pi N$ - Amplitude zu multiplizieren, als etwa letztere zunächst wieder in die Impulsbasisdarstellung zu transformieren und dann anzukoppeln.
Der nächste Schritt ist daher die Entwicklung der Amplitude $V_{\pi\gamma}$ bzw. $A^\mu_{\pi\gamma}$ in Drehimpulszustände. Dies ist ein etwas langwieriges Verfahren, das in Anhang B.1.5 im einzelnen erläutert wird.

Der Anfangszustand der Photoabsorption γN ist durch drei Drehimpulse gekennzeichnet: den Spin des Photons, den Spin des Nukleons und den Bahndrehimpuls. Wegen der Transversalität des Strahlungsfeldes besitzt das Photon nur zwei Polarisationen. Es ist gebräuchlich, die möglichen Spinzustände des Photons mit dem relativen Bahndrehimpuls zu zwei Zuständen des Photongesamtdrehimpulses j zu koppeln, die eine bestimmte Parität besitzen und als magnetische Multipole (Parität $-(-1)^j$) und elektrische Multipole (Parität $(-1)^j$) bezeichnet werden. Danach bildet man zusammen mit dem Spin des Nukleons die Gesamtdrehimpulszustände des γN - Zustands. Mit diesen läßt sich die Amplitude in Partialwellen entwickeln (Anh. B.1.5).
Das führt zunächst auf die Beziehung (vergleiche Gl.(B.16))

$$\begin{aligned} V^{\nu'\nu\lambda}_{fi} \;\;=\;\; & \sum_{J,M,l'} \sum_{j,\Phi} \sum_{m,m'_l} Y_{l',m'_l}(\Omega_f)\; C(J,M|l',m'_l;\frac{1}{2},\nu')\; C(J,M|j,m;\frac{1}{2},\nu) \\ & \langle j,m,\Phi|\hat{k}_i;1,\gamma\rangle \;\; V^{Jl'j\Phi}_{fi}, \end{aligned} \tag{5.17}$$

in der der Index Φ zwischen den magnetischen Multipolen (Φ=M) und den elektrischen Multipolen (Φ=E) unterscheidet, die also die Amplitude in einer bestimmten Partialwelle darstellen.

Dieser Ausdruck wird nun weiterverarbeitet, um die Amplitude in Form von CGLN-Amplituden (Ref. [36]) zu erhalten (s. auch Gl.(B.21)).

$$V = i\vec{\sigma}\cdot\vec{\epsilon}\,\mathcal{V}_1 \,+\, \vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f\;\vec{\sigma}\cdot(\hat{k}_i\times\vec{\epsilon}\,)\,\mathcal{V}_2 \,+\, i\vec{\sigma}\cdot\hat{k}_i\;\vec{\epsilon}\cdot\hat{p}_f\,\mathcal{V}_3 \,+\, i\vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f\;\vec{\epsilon}\cdot\hat{p}_f\,\mathcal{V}_4, \tag{5.18}$$

Der Polarisationsverktor $\vec{\varepsilon}$ tritt in Kombination mit allen Vektoren im Skalarprodukt auf, nur nicht mit $\hat{k}_i$: Im Falle eines Photons steht $\vec{\varepsilon}$ immer senkrecht auf dem einlaufenden Impuls $\vec{k}_i$.

Die Partialwellenentwicklung der Amplitude ist in dieser Gleichung also so weit umgeformt, daß sich die Terme der Amplitude, die den Zusammenhang zwischen den drei Vektoren $\vec{k}_i, \vec{p}_f, \vec{\varepsilon}$ und dem Spin beschreiben, herausziehen lassen als Koeffizienten der Teilamplituden $\mathcal{V}_i$. Hinter diesen verbirgt sich jeweils eine Summe über Partialwellen, die hier also Multipole genannt werden (s. Gl.(B.22)).
Das ganze Verfahren hat den Vorteil, daß die einzelnen Multipole $\Phi_{\pi\gamma}$ leicht aus den $\mathcal{V}_i$ herauszuprojizieren sind (s. Gl.(B.27)).

Diese allgemeine Vorschrift der Entwicklung in Multipole (Gl.(B.21),(B.27)) muß auf die Amplitude aus Kap. 1, Abschnitt 1.3, angewendet werden.

Hat man dann die Amplitude in Form einzelner Multipole ($\Phi_{\pi\gamma}$) vorliegen, so wird sie in der Streugleichung

$$\mathcal{M}^{l\pm\Phi}_{\pi\gamma} = \Phi^{l\pm}_{\pi\gamma} - \frac{i m_N\, p_\pi}{16\pi^2 E}\;\sum_{\tilde{l}}\; M^{J\tilde{l}l}_{\pi\pi}\,\Phi^{\tilde{l}\pm}_{\pi\gamma} \tag{5.19}$$

mit der iterierten πN - Streuung ($M^{J\tilde{l}l}_{\pi\pi}$) verknüpft.

Schließlich kann der totale Wirkungsquerschnitt wieder in Form einer Summe über Drehimpulse dargestellt und ausgewertet werden (s. Gl.(B.29)).

In der angedeuteten Weise berechnen wir wieder den Nukleon- oder Ein-Pion-Untergrund der Photoabsorption und vergleichen mit dem Ergebnis aus Abschnitt 1.8.

Abb. 5.4 zeigt den Wirkungsquerschnitt dieser Reaktion mit und ohne Enzustandswechselwirkung. Man sieht keinen Unterschied, die Endzustandswechselwirkung hat offenbar keinen wahrnehmbaren Einfluß auf die Photoabsorption.

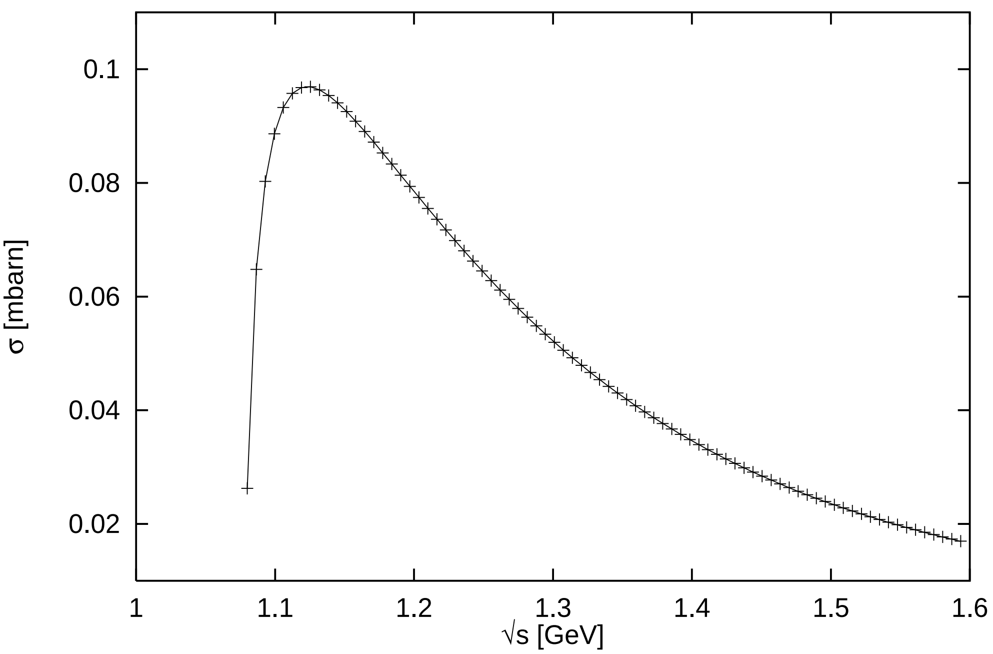


Abb. 5.4: *Ein-Pion-Untergrund der Photoabsorption mit (—) und ohne (+) Endzustandswechselwirkung*

5.4 ρ - Produktion mit πN - Anfangszustandswechselwirkung

Betrachten wir zunächst den Prozeß $\rho N \to \pi N$, an den die πN - Streuung als Endzustandswechselwirkung angehängt werden soll.

Im großen und ganzen verläuft das Verfahren wie im vorhergehenden Abschnitt. Allerdings ist zu beachten, daß das ρ - Meson im Vergleich zum Photon eine zusätzliche, longitudinale Polarisation haben kann. Das scheint zunächst die Rechnung zu vereinfachen, da offensichtlich die Einschränkungen, die zur Bildung der asymptotischen γ - Zustände zwangen (Gleichungen (B.10) und (B.11)) nicht mehr vorliegen. Man kann also eine Partialwellenentwicklung der Streuamplitude wie in Gl.(B.15) vornehmen, indem man erst Spin und Bahndrehimpuls des ρ zum Drehimpuls j, danach diesen mit dem Nukleonspin zum Gesamtdrehimpuls verkoppelt, ohne den Umweg über die Multipole zu nehmen. Das Problem bei dieser Vorgehensweise besteht nun darin, daß die Inversion dieser Entwicklung notwendigerweise die Integration über Ein- und Ausgangs- Raumwinkel enthält, während in den beiden anderen Entwicklungen (πN und γN) stets eine Integration durch Festlegen der Impulsrichtung im Eingangskanal eingespart werden konnte (s. Gl.(B.3)). Die Ursache dieser Schwierigkeit ist der zusätzliche Vektor im Eingangskanal, der Polarisationsvektor. Natürlich tritt ein solcher auch im γN - Zustand auf, trotzdem konnte dieses Problem bei der Photoabsorption vermieden werden. Es ist daher naheliegend, den Formalismus der CGLN- Amplituden auch beim ρ zu verwenden.

Tatsächlich finden sich auch dazu Beispiele in der Literatur ([37] - [41]):
Analog zur oben beschriebenen Photoabsorption bzw. Photoproduktion von Pionen kann man den ganzen Prozeß auch in der Elektroproduktion von Pionen betrachten: $N\,(e, e')\,\pi N$. Das Elektron erzeugt dabei ein Photon, das am Nukleon absorbiert wird. Dieses Photon ist hier aber virtuell und besitzt daher auch eine longitudinale Polarisationsmöglichkeit, gleicht also in fast jeder Hinsicht einem ρ - Meson.

Die Entwicklung der Amplitude läuft demnach genauso wie beim Prozeß $\gamma N \to \pi N$ (s. Anhang B.1.5). Die Amplitude wird in Partialwellen entwickelt und in die CGLN-Form (s. auch Gl.(B.31)) gebracht:

$$\begin{aligned} V &= i\,\vec{\sigma}\cdot\vec{b}\,\mathcal{V}_1 + (\vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f)\,\vec{\sigma}\cdot(\hat{k}_i \times \hat{p}_f)\,\mathcal{V}_2 + i\,(\vec{\sigma}\cdot\hat{k}_i)\,(\vec{b}\cdot\hat{p}_f)\,\mathcal{V}_3 \\ &\quad + i\,(\vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f)\,(\vec{b}\cdot\hat{p}_f)\,\mathcal{V}_4 + i\,(\vec{\sigma}\cdot\hat{k}_i)\,(\vec{a}\cdot\hat{k}_i)\,\mathcal{V}_5 + i\,(\vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f)\,(\vec{a}\cdot\hat{k}_i)\,\mathcal{V}_6. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Im Vergleich zur Photoabsorption erhält man hier also zwei weitere Terme, die proportional sind zum Produkt aus dem Vektor $\vec{a} \propto$ Polarisationsvektor $\vec{\varepsilon}$ des ρ (Gl.(B.30)) und dem einlaufenden Impuls $\hat{k}_i$: Es gilt $\vec{\varepsilon}\cdot\vec{k}_i \neq 0$. Dieses Skalarprodukt verschwindet hier nicht, weil das ρ eben auch die longitudinale Polarisationsmöglichkeit in Richtung $\hat{k}_i$ hat.

In der Streugleichung

$$\mathcal{M}^{l\pm\Phi}_{\pi\gamma} = \Phi^{l\pm}_{\pi\gamma} - \frac{im_N\,p_\pi}{16\pi^2 E} \sum_{\tilde{l}} \mathcal{M}^{J\tilde{l}l}_{\pi\pi}\,\Phi^{\tilde{l}\pm}_{\pi\gamma}, \tag{5.21}$$

sind dementsprechend für Φ neben den elektrischen und magnetischen auch longitudinale Multipole einzusetzen.

Das Ergebnis ist der $\rho N \to \pi N$ - Wirkungsquerschnitt mit πN - Endzustandswechselwirkung. Allerdings ist das eigentliche Ziel natürlich der umgekehrte Prozeß: Auf die ρ - Produktion mit πN - Anfangszustandswechselwirkung schließen wir mit Hilfe des Prinzips des detaillierten Gleichgewichts. Dabei erweist es sich erneut als vorteilhaft, daß die Rechnung nunmehr im Schwerpunktssystem durchgeführt wird:
In Abschnitt 1.5 war bei der Berechnung des Phasenraumintegrals der Normierungsfaktor des auslaufenden Nukleons m_N/E_N weggelassen worden - das bildete sozusagen einen Teil der nichtrelativistischen Feynmanregeln, die sich aus dem Modell des ρ - Propagators nach Ref. [9] ergaben.

Daher ist links in Abb. 5.5 wiedergegeben, welchen Unterschied die Hinzunahme dieses Faktors im Wirkungsquerschnitt macht (im Schwerpunktssystem).
Die rechte Seite von Abb. 5.5 zeigt den Vergleich der direkten Rechnung mit dem Umweg über das detaillierte Gleichgewicht, im CMS und inklusive des Faktors m_N/E_N - die Kurven stimmen nun überein.

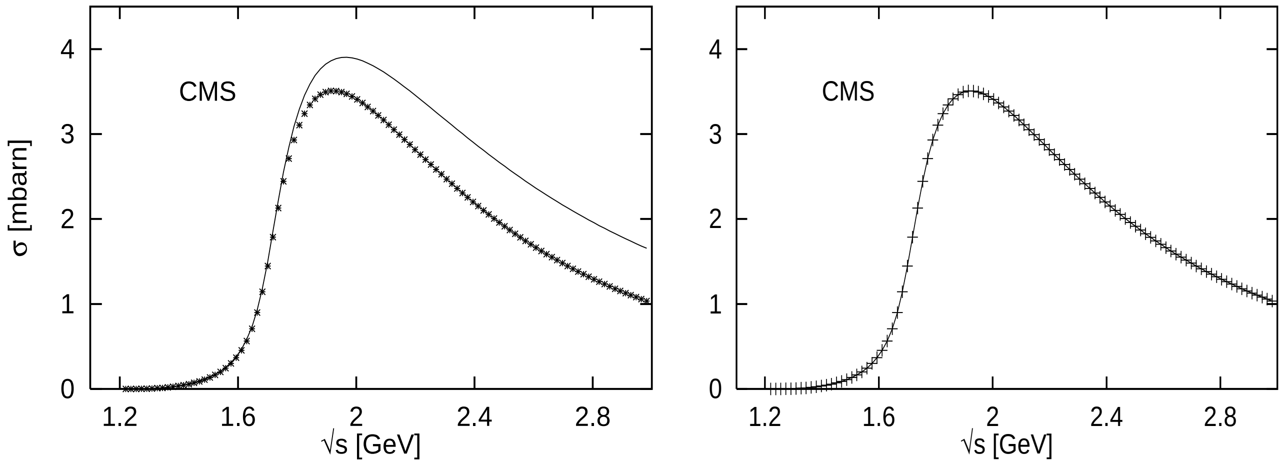


Abb. 5.5: *links: Änderung des Wirkungsquerschnitts durch Hinzunahme des m_N/E_N - Faktors, obere Kurve (–) ohne m_N/E_N, untere Kurve (*) mit m_N/E_N, rechts: Test des detailllierten Gleichgewichts mit m_N/E_N - Faktor, direkte Rechnung (—), mit detaillliertem Gleichgewicht (+)*

Das Endergebnis zeigt Abb. 5.6. Wie schon eingangs dieses Kapitels erwähnt, kann offensichtlich auch die Anfangszustandswechselwirkung hier keine Veränderung des Wirkungsquerschnitts erbringen.

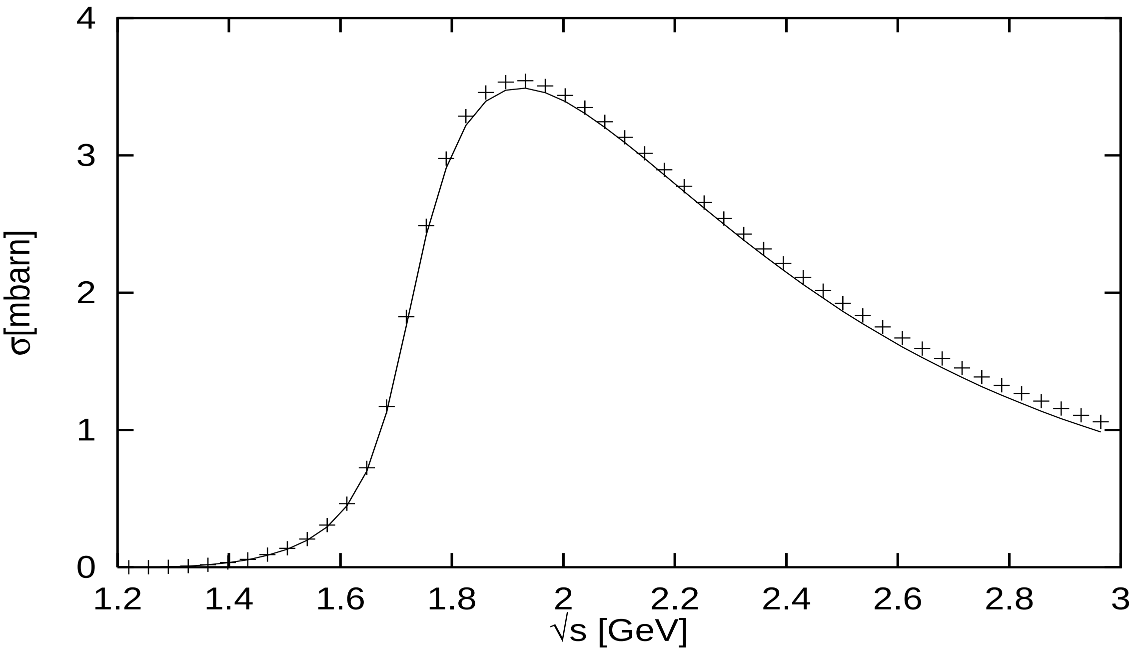


Abb. 5.6: $\pi N \to \rho N$ - *Wirkungsquerschnitt mit (—) und ohne (+) Anfangszustandswechselwirkung*

Die Bemühungen um eine Reduktion des Wirkungsquerschnitts durch Ankopplung der πN - Anfangszustandswechselwirkung haben also noch nicht das gewünschte Resultat gebracht.

Dennoch ist die Aussicht auf Fortschritte mit diesen Methoden der Anfangs- und eventuell auch Endzustandswechselwirkung am größten.
So ist anzunehmen, daß die ρN - Streuung als Enzustandswechselwirkung in iterierter Form auf unseren Prozeß deutliche Auswirkungen hat, insbesondere bei Ankopplung des $N^*(1520)$, das in diesem Kanal eine wichtige Rolle spielt.

Das läßt sich in Abb. 5.7 erkennen. Neben dem totalen Wirkungsquerschnitt sind auch die Beiträge für $l = 1$ und $l = 2$ dargestellt. Die d-Welle ($l = 2$) trägt sogar mehr zum Wirkungsquerschnitt bei als die p-Welle ($l = 1$). Alle anderen Partialquerschnitte bleiben dagegen klein.

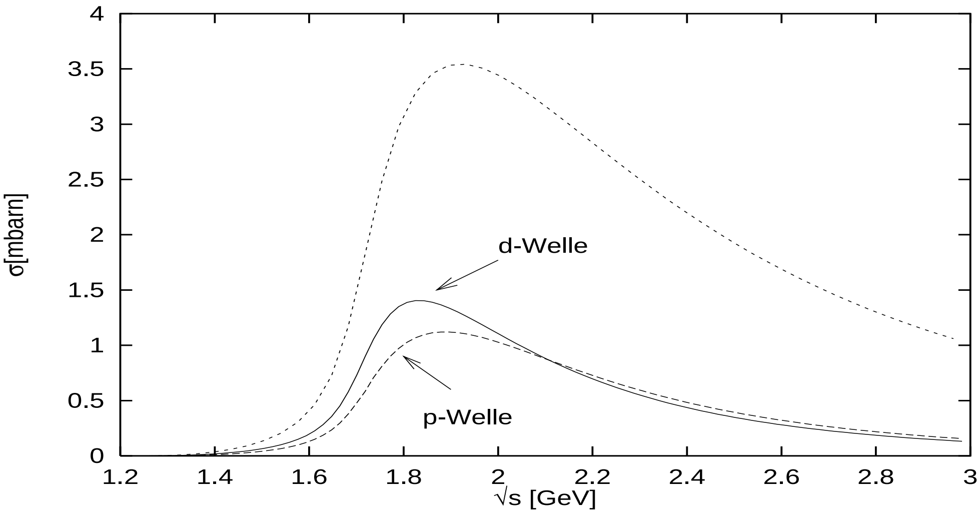


Abb. 5.7: *$\pi N \to \rho N$ - Partialwirkungsquerschnitte zu $l = 1$ (p-Welle) und $l = 2$ (d-Welle) im Vergleich zum totalen Wirkungsquerschnitt*

Dabei ist zu beachten, daß die Bezeichnungsweise immer vom πN - System ausgeht. Eine d-Welle auf dieser Seite kann also an eine s-Welle im ρN - Sektor ankoppeln. In diesem Kanal findet sich aber das $N^*(1520)$. Daß sich diese Resonanz im $\pi N \to \rho N$ - Wirkungsquerschnitt nicht bemerkbar macht (s. Abb. 3.5) liegt im wesentlichen an der geringen Kopplung an den πN - Sektor und am kleinen Phasenraum, der bei $\sqrt{s} = 1.52$ GeV zur Verfügung steht. In der ρN - Endzustandswechselwirkung könnte sie hingegen eine viel größere Wirkung haben. Das sollte bei unseren Wirkungsquerschnitt besonders wichtig sein, da die entsprechende Partialwelle zu $l = 2$ hier offenbar einen bedeutenden Beitrag liefert.

Wenn dann die Teilchen im Anfangs- und Endzustand des $\pi N \to \rho N$ - Prozesses vielfach miteinander wechselwirken, ist es naheliegend, gleich die ganze Reaktion zu iterieren, also auch Anteile wie $\pi N \to \rho N \to \pi N \to \ldots$ einzubeziehen. Das bedeutet also eine Verkopplung der ρN - und πN - Kanäle.
Natürlich kann man hier beliebig erweitern, wenn man zusätzliche Teilchen mitnimmt. Ein wichtiges Beispiel ist das ω - Meson, das in ein Pion und ein ρ zerfallen kann. An jedem $\rho\pi$ - Vertex könnte also auch ein ω ankoppeln. Die Verarbeitung solcher Prozesse in der Streugleichung sorgt für eine „Durchmischung“ aller möglichen Kanäle, die sicherlich eine bessere Beschreibung der untersuchten Reaktionen ermöglichen würde als die Beschränkung auf wenige 'Tree-Level'-Diagramme.

Zusammenfassung und Ausblick

Das erste Ziel dieser Arbeit war es, den Wirkungsquerschnitt der pioninduzierten ρ-Produktion zu berechnen, um durch Anpassung an die experimentellen Daten ([13]) den Parameter Λ am πNN - Formfaktor einzuschränken.

Dabei stellte sich heraus, daß der Wert von Λ auf etwa 310 MeV gesenkt werden mußte, deutlich niedriger als die früher von Urban et al. ([9]) gefundene obere Grenze von 550 MeV. Damit wird das Modell allerdings zum Großteil vom Formfaktor beherrscht (der Wirkungsquerschnitt skaliert ungefähr mit Λ^4), den mikroskopischen Rechnungen kommt eine zu geringe Bedeutung zu. Daher wurde im weiteren Verlauf dieser Arbeit nach den Ursachen dieser Beschränkung und nach möglichen Verbesserungen gesucht.

Zunächst zeigte der Vergleich mit der Berechnung des Wirkungsquerschnitts mit Hilfe der ρ - Selbstenergie, daß die Extrahierung spezieller Prozesse aus der Selbstenergie zwecks Vergleich mit experimentellen Ergebnissen sehr schwierig ist, und zwar nicht aus numerisch-technischen Gründen, sondern weil nicht klar ist, in welcher Weise Konzepte wie das Niederdichtetheorem fehlerfrei auf breite, instabile Teilchen wie das ρ - Meson angewendet werden sollen.

Im folgenden konnten bei der Konstruktion der Wirkungsquerschnitte Erweiterungen und Modifikationen des zugrundeliegenden Modells Ref. [9] getestet werden, die in der Berechnung des vollen ρ - Propagators zu aufwendig gewesen wären. Es wurde gezeigt, daß die nichtrelativistische Behandlung der Baryonen einen kritischen Punkt darstellt. Der Wirkungsquerschnitt ist zwar nicht stark vom Bezugssytem abhängig, das beruht jedoch auf mehr oder minder zufälligem gegenseitigen Wegheben von einzelnen Termen.
Bei der Betrachtung der baryonischen Resonanzen fiel auf, daß die nichtrelativistischen Feynmanregeln für verschiedene Teilchen nicht ohne weiteres zueinander "passen" (Interferenz von Nukleon- und $N^*(1520)$ - Polgraph).
Für die $\Delta(1232)$ - Resonanz, die in Form von Δ - Loch-Anregungen den Hauptbeitrag zur Pion- und damit auch ρ - Selbstenergie in Kernmaterie liefert ([9]), wurde eine energieabhängige Breite eingeführt, um unphysikalische Effekte, insbesondere zu große Beiträge zur Photoabsorption bei sehr kleinen Energien (Abb. 3.1), zu vermeiden.
Die Hinzunahme der Kopplung des ρ an das magnetische Moment, die Hinzunahme baryonischer Resonanzen und die Modifikation des $\rho\pi\pi$ - Vertex konnten jeweils kleine Änderungen des Wirkungsquerschnitts bewirken, ermöglichten jedoch keine Erhöhung des Werts des Formfaktors.

Die im letzten Teil der Arbeit vorgenommene Erweiterung des Prozesses um πN - Endzustands- bzw. Anfangszustandswechselwirkungen stellt einen systematischen Versuch dar, die Problematik in den Griff zu bekommen. Durch die Iteration weniger einfacher Graphen der πN - Streuung konnten die Streuphasen in den betrachteten Kanälen (Δ, $N^*(1440)$) gut wiedergegeben werden. Für die $\pi N \to \rho N$ - Reaktion spielen diese Prozesse offenbar noch keine Rolle.
Aber mit dem hierbei verwendeten Formalismus bieten sich Möglichkeiten an, etwa durch Berechnung der ρN - Endzustandswechselwirkung (Ankopplung des $N^*(1520)$) oder durch die Entwicklung eines Modells gekoppelter Kanäle die mikroskopische Grundlage der Größe des Formfaktors zu verstehen und eventuell wieder einen größeren Wert für den Parameter Λ zu finden.
Schließlich ist anzumerken, daß eine Verbesserung der Qualität und Menge der Daten wünschenswert wäre, da der Abgleich der verschiedensten hadronischen Modelle mit einfachen elementaren Prozessen wie dem hier betrachteten sicherlich eine notwendige Voraussetzung für die Gültigkeit von theoretischen Aussagen ist.

Anhang A

ρN - Streuung und der $\pi^- p \to \rho^0 n$ - Wirkungsquerschnitt

A.1.1 Berechnung des Imaginärteils von Σ_ρ für $\varrho \to 0$

In der folgenden Rechnung wird mehrfach Gebrauch gemacht von Beziehungen aus Ref. [9] bzw. Ref. [10], wo die Herleitung der Ausdrücke für die ρ - Selbstenergie in aller Ausführlichkeit zu finden ist.

So betrachten wir den in Ref. [9] gegebenen Ausdruck für die Raumkomponenten der Selbstenergie (s. auch Ref. [10], Gl.(A.1)-(A.8)). Die Anteile, die von den 0-Komponenten herrühren, können unter Ausnutzung der Eichinvarianz stets durch die Raumkomponenten ausgedrückt werden. In niedrigster Ordnung in der Dichte tragen nur die Integrale I_1, I_2 und I_6 zu Imaginärteil von Σ_{ij} bei.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{i}{\pi}\int dk^0\, G_\pi(k)\, G_\pi(k+q) \\
I_2 &= \frac{i}{\pi}\int dk^0\, \Pi'(k)\, G_\pi(k)\, G_\pi(k+q) \\
I_6 &= \frac{i}{\pi}\int dk^0\, \Pi'(k)\, G_\pi(k+q)
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Die Lindhardfunktion $\Pi'(k)$ ist im 3-Niveau-Modell gegeben durch (Ref. [10], Gl.(3.12)-(3.13))

$$\begin{aligned}
\Pi'(k) &= \Pi'_{Nh}(k) = \Gamma_\pi(\vec{k})\, \frac{\alpha_{Nh}(\vec{k})}{k_0^2 - \Omega_{Nh}^2(\vec{k}) + i\varepsilon}, \\
\alpha_{Nh}(\vec{k}) &= 2\varrho \left(\frac{f_N}{m_\pi}\right)^2 \Omega_{Nh}(\vec{k}) = 2\varrho \left(\frac{f_N}{m_\pi}\right)^2 (\sqrt{\vec{k}^2 + m_N^2} - m_N),
\end{aligned}$$

wobei Beiträge des Deltas und der kurzreichweitigen Nukleon-Nukleon-Abstoßung (Migdal-Parameter) gleich weggelassen wurden.

Der Imaginärteil von I_6 lautet dann (Ref. [10], Gl.(5.17))

$$\mathrm{Im}(I_6) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{q_0} d\omega\, \mathrm{Im}(\Pi'(\omega,\vec{k}))\, \mathrm{Im}(G_\pi(q_0-\omega,\vec{k}+\vec{q}))$$

Da Π' bereits linear in der Dichte ist, braucht der Pionpropagator nur in nullter Ordnung mitgenommen zu werden:

$$\mathrm{Im}(I_6) \approx -\frac{2}{\pi}\int_0^{q_0} d\omega\, \mathrm{Im}(\Pi'(\omega,\vec{k}))\, \mathrm{Im}(G_\pi^{(0)}(q_0-\omega,\vec{k}+\vec{q}))$$

Das Bilden der Imaginärteile liefert jeweils eine δ - Funktion, deren eine zum Ausführen des ω - Integrals genutzt wird:

$$\mathrm{Im}(I_6) = -2\pi\varrho\left(\frac{f_N}{m_\pi}\right)^2 \Gamma_\pi^2(\vec{k})\,\Theta(q_0-\Omega_{Nh}(\vec{k}))\,\frac{1}{2\omega_\pi(\vec{k}+\vec{q})}\,\delta(q_0-\Omega_{Nh}(\vec{k})-\omega_\pi(\vec{k}+\vec{q}))$$

$\mathrm{Im}(I_6)$ ergibt nach Ref.[10], Gl.(A.1), einen Beitrag zur Selbstenergie von

$$g^{ij}\,\mathrm{Im}(\Sigma_{ij}^{(I_6)}) = \frac{g}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,2\frac{3(\Lambda^2+\vec{k}^2)^2-(2\vec{k}-\vec{q})(2\vec{k}\,\Lambda^2-\vec{q}\,\vec{k}^2)}{((\vec{k}+\vec{q})^2+\Lambda^2)^2}\,\mathrm{Im}(I_6)$$

Zur weiteren Vereinfachung soll auch der Formfaktor abgeschaltet werden, d.h. man führt Λ nach ∞:

$$g^{ij}\,\mathrm{Im}(\Sigma_{ij}^{(I_6)}) = \frac{\varrho}{8\pi^2}\left(\frac{gf_N}{m_\pi}\right)^2\int d^3k\frac{\Theta(q_0-\Omega_{Nh}(\vec{k}-\vec{q}))}{2\omega(\vec{k})}\,\delta(q^0-\Omega_{Nh}(\vec{k}-\vec{q})-\omega(\vec{k}))$$

Das Integral I_2 liefert 2 Anteile:

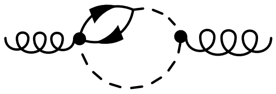
$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(I_2) &\approx -\frac{2}{\pi}\int_0^{q_0} d\omega\,\mathrm{Im}(\Pi(\omega,\vec{k})\,G_\pi^0(\omega,\vec{k}))\,\mathrm{Im}(G_\pi^{(0)}(q_0-\omega,\vec{k}+\vec{q}))\\ &= -2\pi\,\varrho\left(\frac{f_N}{m_\pi}\right)^2\frac{\Omega_{Nh}(\vec{k})}{\omega_\pi(\vec{k})}\,\frac{\Theta(q_0-\Omega_{Nh}(\vec{k}))}{\omega_\pi^2(\vec{k})-\Omega_{Nh}^2(\vec{k})}\,\delta((q_0-\omega_\pi(\vec{k}))^2-\omega_\pi^2(\vec{k}+\vec{q}))\\ &\quad -2\pi\,\varrho\left(\frac{f_N}{m_\pi}\right)^2\frac{\Theta(q_0-\Omega_{Nh}(\vec{k}))}{\Omega_{Nh}^2(\vec{k})-\omega_\pi^2(\vec{k})}\,\delta((q_0-\Omega_{Nh}(\vec{k}))^2-\omega_\pi^2(\vec{k}+\vec{q}))\end{aligned}$$

Der Anteil von I_2 an der Selbstenergie ist (Ref. [10], Gl.(A.1), $\Lambda\to\infty$):

$$\begin{aligned}g^{ij}\,\mathrm{Im}(\Sigma_{ij}^{(I_2)}) &\approx g^2\int d^3k\,\vec{k}\cdot(2\vec{k}+\vec{q})\,\mathrm{Im}(I_2)\\ &\approx \frac{\varrho}{8\pi^2}\left(\frac{gf_N}{m_\pi}\right)^2\int d^3k\,4\,\frac{\vec{k}\cdot(2\vec{k}+\vec{q})}{\Omega_{Nh}^2(\vec{k})-\omega_\pi^2(\vec{k})}\,\frac{\Theta(q_0-\omega_\pi(\vec{k}))}{2\omega(\vec{k}+\vec{q})}\,\delta(q_0-\omega_\pi(\vec{k})-\omega_\pi(\vec{k}+\vec{q}))\\ &\quad +\frac{\varrho}{8\pi^2}\left(\frac{gf_N}{m_\pi}\right)^2\int d^3k\,4\,\frac{(\vec{k}-\vec{q})\cdot(2\vec{k}-\vec{q})}{\Omega_{Nh}^2(\vec{k})-\omega_\pi^2(\vec{k})}\,\frac{\Theta(q_0-\omega_\pi(\vec{k}))}{2\omega(\vec{k})}\,\delta(q_0-\Omega_{Nh}(\vec{k}-\vec{q})-\omega_\pi(\vec{k}))\end{aligned}$$

Im zweiten Summanden wurde dabei $\vec{k}\to\vec{k}-\vec{q}$ substituiert, um das Argument der δ - Funktion in die bekannte Form zu bringen (hier: einlaufendes ρ (Impuls q) + Nukleon (in Ruhe) - auslaufendes Pion (Impuls k) - Nukleon (Impuls $k-q$)).

Die δ - Funktion im ersten Summanden kommt hingegen im $\rho - N \leftrightarrow \pi - N$ - Wirkungsquerschnitt gar nicht vor. Dieser Term beschreibt offenbar einen Schnitt durch die zwei Pionlinien dieses Selbstenergiediagramms:



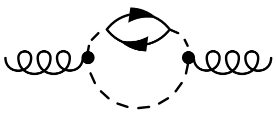
Auch $\mathrm{Im}(I_1)$ beinhaltet mehr als die fragliche Streuamplitude:
Nähert man jeweils den einen der beiden Pionpropagatoren aus $\mathrm{Im}(I_1)$ (Gl.(A.1)) durch $G_\pi^{(0)}$ und den anderen durch die ersten Terme der Dyson-Reihe:

$$G_\pi(k) \approx G_\pi^{(0)}(k) + G_\pi^{(0)}(k)\,(\vec{k}^2\,\Pi(k))\,G_\pi^{(0)}(k),$$

so ergibt sich die Schwierigkeit über den doppelten Propagator integrieren zu müssen. Einfacher ist es, zunächst den Imaginärteil des vollen Propagators aufzuschreiben:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(G_\pi(k)) &= \frac{\vec{k}^2\,\mathrm{Im}(\Pi(k)) - \varepsilon}{(k_0^2 - \omega_\pi^2(\vec{k}) - \vec{k}^2\,\mathrm{Re}(\Pi(k)))^2 - (\vec{k}^2\,\mathrm{Im}(\Pi(k)) - \varepsilon)^2} \\
&\approx \frac{\vec{k}^2\,\mathrm{Im}(\Pi(k))}{(k_0^2 - \omega_\pi^2(\vec{k}))^2} + \varepsilon - \mathrm{Term}
\end{aligned}$$

Führt man zuerst ε gegen Null und betrachtet dann den Fall kleiner Dichte, so bleibt nur der erste Summand übrig. Wenn aber der Betrag des Impulses k gerade in einem Bereich liegt, in dem Π nicht zum Imaginärteil von G_π beiträgt, so wird der „ε - Term" eine Rolle spielen. Da I_1 das in Abschn. 1.1, Gl.(1.4), besprochene Diagramm beschreibt, ist klar, daß dieser Term Schnitte durch die beiden Pionenlinien dieses Diagramms darstellt:



Aus dem ersten Summanden ergibt sich

$$\begin{aligned}
g^{ij}\,\mathrm{Im}(\Sigma_{ij}^{(I_1)}) \approx \frac{\varrho}{8\pi^2}\left(\frac{gf_N}{m_\pi}\right)^2 \int d^3k\; 2\,\frac{(2\vec{k}-\vec{q})^2(\vec{k}-\vec{q})^2}{(q^2 - 2k\cdot q)^2} \\
\frac{\Theta(q_0 - \omega_\pi(\vec{k}))}{2\omega(\vec{k})}\,\delta(q_0 - \Omega_{Nh}(\vec{k}-\vec{q}) - \omega_\pi(\vec{k})).
\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man also

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{|\vec{q}|}\lim_{\varrho\to 0} g^{ij}\,\frac{\mathrm{Im}(\Sigma_{ij}(\varrho)) - \mathrm{Im}(\Sigma_{ij}(0))}{\varrho} \\
= \quad & \frac{\varrho}{8\pi^2}\left(\frac{gf_N}{m_\pi}\right)^2 \int d^3k\, \frac{1}{2\omega(\vec{k})}\,\delta(q_0 - \Omega_{Nh}(\vec{k}-\vec{q}) - \omega_\pi(\vec{k})) \\
& \qquad\qquad \cdot\left[6 \; + 4\,\frac{(\vec{k}-\vec{q})\cdot(2\vec{k}-\vec{q})}{q^2 - 2k\cdot q} \; + \; 2\,\frac{(2\vec{k}-\vec{q})^2(\vec{k}-\vec{q})^2}{(q^2-2k\cdot q)^2}\right] \\
+ \quad & \frac{\varrho}{8\pi^2}\left(\frac{gf_N}{m_\pi}\right)^2 \int d^3k\, 4\,\frac{\vec{k}\cdot(2\vec{k}+\vec{q})}{\Omega^2_{Nh}(\vec{k}) - \omega^2_\pi(\vec{k})}\,\frac{\Theta(q_0 - \omega_\pi(\vec{k}))}{2\omega(\vec{k}+\vec{q})}\,\delta(q_0 - \omega_\pi(\vec{k}) - \omega_\pi(\vec{k}+\vec{q})) \\
+ \quad & \varepsilon - \text{Term aus}\, I_1
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

Gemäß Gl.(1.36) lautet der Wirkungsquerschnitt in Prozeßrichtung $\rho N \to \pi N$ (analog zu Gl.(1.37)):

$$
\sigma \;=\; \frac{1}{8\pi^2|\vec{q}|}\int d^3k\,\frac{1}{2\omega_\pi(\vec{k})}\,\frac{m_N}{\omega_N(\vec{k}-\vec{q})}\,\delta(q^0 + m_N - \omega_N(\vec{k}-\vec{q}) - \omega_\pi(\vec{k}))\;\overline{|M|^2}
$$

Setzen wir nun die Raumkomponenten der quadrierten Amplitude Gl.(1.28)-(1.32) für $|M|^2$ ein, um mit Gl.(A.2) vergleichen zu können, wo ebenfalls nur die Raumkomponenten Σ_{ij} eingehen, und lassen wir den Formfaktor und - Konsequenz der nichtrelativistischen Näherung - den Faktor $\frac{m_N}{\omega_N}$ im Phasenraumintegral weg, so bleibt vom vollen Wirkungsquerschnitt

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{8\pi^2|\vec{q}|}\int d^3k\,\frac{1}{2\omega_\pi(\vec{k})}\,\delta(q^0 + m_N - \omega_N(\vec{k}-\vec{q}) - \omega_\pi(\vec{k})) \\
&\qquad\qquad \left[6 \; + 4\,\frac{(\vec{k}-\vec{q})\cdot(2\vec{k}-\vec{q})}{q^2 - 2k\cdot q} \; + \; 2\,\frac{(2\vec{k}-\vec{q})^2(\vec{k}-\vec{q})^2}{(q^2-2k\cdot q)^2}\right],
\end{aligned}
$$

was genau dem ersten Integral aus Gl.(A.2) entspricht.

Die zusätzlichen Terme in Gl.(A.2) machen sich aber durchaus bemerkbar, wenn man den Prozess nach Gl.(1.42) berechnet (Abb. 1.11, Abschnitt 1.8).

Vergleich mit einem Fit an ρ^+- und ρ^-- Streudaten

Bei der Herleitung des Zusammenhangs zwischen $\sigma_{\rho^0 n\to\pi^- p}$ und der Selbstenergie $\Sigma_{\rho N}$ kam das Verschwinden des Wirkungsquerschnitts $\sigma_{\rho^0 n\to\pi^0 n}$ sehr gelegen (Gl.(1.41)), galt allerdings nur in der niedrigsten nichtrelativistischen Näherung.
Es existieren aber auch noch experimentelle Daten für die Prozesse $\pi^+ p \to \rho^+ p$ und $\pi^- p \to \rho^- p$ [12], so daß es vielleicht möglich ist, das Verschwinden von $\rho^0 n \to \pi^0 n$ nicht in Anspruch nehmen zu müssen.
Betrachten wir also die Nukleon-Streuamplitude $f_{\rho^+ N}$ des positiven ρ- Mesons. Durch eine Isospinzerlegung analog Gl.(1.41) findet man

$$f_{\rho^+ N\to\rho^+ N} = \frac{1}{3}\, f^{1/2}_{\rho N\to\rho N} + \frac{2}{3}\, f^{3/2}_{\rho N\to\rho N} = f_{\rho^0 N\to\rho^0 N}.$$

Diese Beziehung ermöglicht die Verbindung mit der ρ^0 - Selbstenergie.

Die Streuamplitude $f_{\rho^+ N}$ setzt sich aus der Proton- und Neutron-Streuamplitude zusammen:

$$f_{\rho^+ N\to\rho^+ N} = \frac{1}{2}\left(f_{\rho^+ p\to\rho^+ p} + f_{\rho^+ n\to\rho^+ n} \right)$$

Mögliche Zwischenzustände, aus denen sich diese Einzelamplituden zusammensetzen, sind (analog Gl.(1.41))

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im} f_{\rho^+ p\to\rho^+ p} &= \frac{|\vec{q}_\rho|_{CM}}{4\pi}\, \sigma_{\rho^+ p\to\pi^+ p}, \\
\mathrm{Im} f_{\rho^+ n\to\rho^+ n} &= \frac{|\vec{q}_\rho|_{CM}}{4\pi}\, \left(\sigma_{\rho^+ n\to\pi^+ n} + \sigma_{\rho^+ n\to\pi^0 p}\right).
\end{aligned}$$

$\sigma_{\rho^+ p\to\pi^+ p}$ ist gemessen, die anderen Wirkungsquerschnitte können durch Isospindrehungen auf bekannte zurückgeführt werden:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho^+ n\to\pi^+ n} &= \sigma_{\rho^- p\to\pi^- p} \\
\sigma_{\rho^+ n\to\pi^0 p} &= \sigma_{\rho^- p\to\pi^0 n}
\end{aligned}$$

Eine erneute Isospinzerlegung des letztgenannten Wirkungsquerschnitts ergibt:

$$\begin{aligned}
\langle \rho^- p | f | \pi^0 n\rangle &= \sum_{J=\frac{1}{2},\frac{3}{2}} \langle 1,-1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}|J,-\frac{1}{2}\rangle\langle J,-\frac{1}{2}|\, f\, |J,-\frac{1}{2}\rangle\langle J,-\frac{1}{2}|1,0;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{3}\, f^{1/2}_{\rho N\to\pi N} + \frac{\sqrt{2}}{3}\, f^{3/2}_{\rho N\to\pi N}
\end{aligned}$$

Das ist mit der analogen Entwicklung für $\sigma_{\rho^0 n\to\pi^- p}$ zu vergleichen:

$$\langle \rho^0 n | f | \pi^- p\rangle = -\frac{\sqrt{2}}{3}\, f^{1/2}_{\rho N\to\pi N} + \frac{\sqrt{2}}{3}\, f^{3/2}_{\rho N\to\pi N}$$

Also gilt

$$\sigma_{\rho^- p\to\pi^0 n} = \sigma_{\rho^0 n\to\pi^- p}.$$

Zusammengefaßt lautet die Beziehung, die alle drei gemessenen Wirkungsquerschnitte umfaßt:

$$\mathrm{Im} f_{\rho^0 N \to \rho^0 N} = \frac{1}{2} \frac{|\vec{q}|_\rho}{4\pi} \left(\sigma_{\rho^+ p \to \pi^+ p} + \sigma_{\rho^- p \to \pi^- p} + \sigma_{\rho^0 n \to \pi^- p} \right) \tag{A.3}$$

Addiert man die drei Wirkungsquerschnitte (gestrichelte Kurve in Abb. A.1) und vergleicht dann mit den $\pi^- p \to \rho^0 n$ - Daten und der Rechnung (durchgezogene Kurve), so zeigt sich, daß der Effekt des unbekannten Wirkungsquerschnitts mit dem neutralen Pion jedenfalls keine große Rolle spielt.

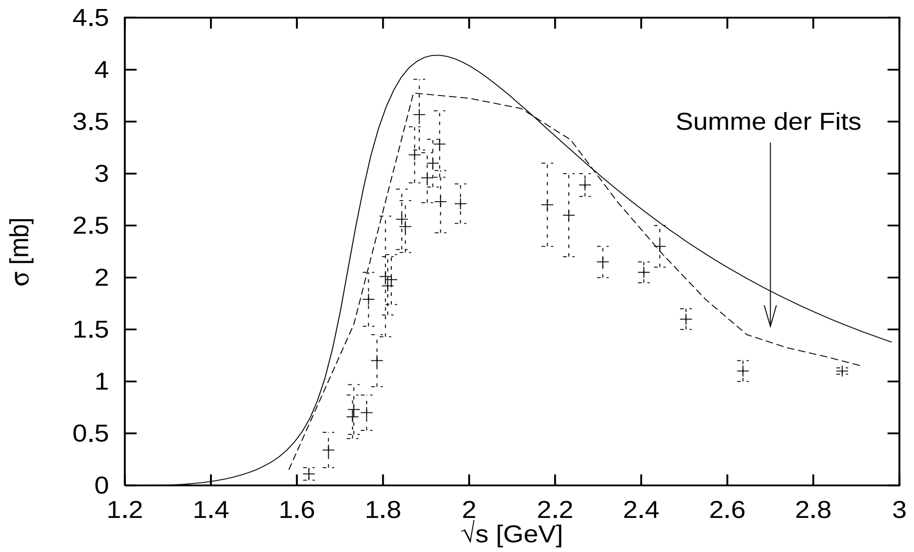


Abb. A.1: *Test der geringen Bedeutung der π^0 - Prozesse: Vergleich des $\pi^- p \to \rho^0 n$ - Wirkungsquerschnitts (Daten und Rechnung (durchgezogene Kurve)) mit der Summe der Fits an die Daten von $\pi^- p \to \rho^- p$, $\pi^+ p \to \rho^+ p$ und $\pi^- p \to \rho^0 n$ nach Gl.(A.3)*

Anhang B

Partialwellenentwicklung und Endzustandswechselwirkung

B.1.2 πN - Partialwellenentwicklung

Die Pion-Nukleon-Zustände zu Gesamtdrehimpuls J und Gesamtenergie E sind gegeben durch

$$|J, M\,(l, \frac{1}{2}), E\rangle = \sum_{m_l,\nu} C(J, M|l, m_l; \frac{1}{2}, \nu)\,|l, m_l; \frac{1}{2}, \nu, E\rangle.$$

Betrachten wir die Entwicklung des S - Matrixelements zwischen zwei πN - Zuständen (Gl.(5.8)), die als Anfangszustand (i) und Enzustand (f) gekennzeichnet sind. Zweimal wird ein vollständiger Satz von πN - Gesamteigenzuständen (J', M', E'), (J, M, E) eingeschoben:

$$\begin{aligned}
&\langle\frac{1}{2}\nu', \vec{p}_f, \vec{P}_f, f\,|\,S\,|i, \vec{P}_i, \vec{p}_i, \frac{1}{2}\nu\rangle = \\
&\quad\int dE' \!\int dE \sum_{J',M',l'} \sum_{J,M,l} \langle\frac{1}{2}\nu', \vec{p}_f, \vec{P}_f, f\,|\,J', M'\,(l', \frac{1}{2}), E'\rangle\,\langle J', M'\,(l', \frac{1}{2}), E'|\;S \\
&\qquad\qquad |J, M\,(l, \frac{1}{2}), E\rangle\,\langle J, M\,(l, \frac{1}{2}), E\,|\,i, \vec{P}_i, \vec{p}_i, \frac{1}{2}\nu\rangle
\end{aligned}$$

Jetzt wird die obige Definition der Gesamtdrehimpulszustände eingesetzt:

$$\begin{aligned}
S_{fi}^{\nu'\nu} \quad &= \int dE' \int dE \sum_{\tilde{\nu}',\tilde{\nu}} \sum_{l',m_l'} \sum_{l,m_l} \sum_{J',M'} \sum_{J,M} \langle\frac{1}{2}\nu'|\frac{1}{2}\tilde{\nu}'\rangle\,\langle\vec{p}_f|E', l', m_l'\rangle \\
&\quad C(J', M'|l', m_l'; \frac{1}{2}, \tilde{\nu}')\,\langle J', M'\,(l', \frac{1}{2}), E', \vec{P}_f, f\,|\,S\,|\,i, \vec{P}_i, E, J, M\,(l, \frac{1}{2})\rangle \\
&\quad C(J, M|l, m_l; \frac{1}{2}, \tilde{\nu})\,\langle l, m_l, E|\vec{p}_i\rangle\,\langle\frac{1}{2}\tilde{\nu}|\frac{1}{2}\nu\rangle
\end{aligned}$$

Dabei wurden die Terme so geordnet, daß nun die Definition der Kugelflächenfunktionen Gl.(5.9) und die Erhaltung von Energie, Schwerpunktsimpuls und Gesamtdrehimpuls ausgenutzt werden können:

$$\langle \vec{p}_i | l, m_l, E\rangle = \frac{\delta E_i - E}{\sqrt{\varrho_i(E_i)}}\, Y_{l,m_l}(\Omega_i)$$

$$\langle J', M', E', \vec{P}_f, f \,|\, S \,|\, i, \vec{P}_i, E, J, M\rangle = \delta(E'-E)\,\delta^3(\vec{P}_f - \vec{P}_i)\,\delta_{J'J}\,\delta_{M'M}\;\; S_{fi}^{Jl'l}(E)$$

Das führt auf

$$\begin{aligned} S_{fi}^{\nu'\nu} = \int dE' \int dE \sum_{l',m_l'} \sum_{l,m_l} \sum_{J',M'} \sum_{J,M} & \frac{\delta(E'-E_f)}{\sqrt{\rho_f(E_f)}} \frac{\delta(E-E_i)}{\sqrt{\rho_i(E_i)}} \\ & Y_{l',m_l'}(\Omega_f)\, Y^*_{l,m_l}(\Omega_i)\, \delta(E'-E)\delta^3(\vec{P}_f - \vec{P}_i) S_{fi}^{Jl'l}(E)\delta_{J'J}\delta_{M'M} \\ & \langle \frac{1}{2}\nu'; l', m_l' | J'M'\rangle \langle J, M | \frac{1}{2}\nu; l, m_l\rangle . \end{aligned}$$

Ausnutzen der δ - Funktionen ergibt:

$$\begin{aligned} = \frac{\delta(E_f - E_i)}{\sqrt{\rho_i(E_i)\rho_f(E_f)}} \sum_{J,M} \sum_{l,m_l} \sum_{l',m_l'} & C(J,M|l',m_l';\frac{1}{2},\nu')\, C(J,M|l,m_l;\frac{1}{2},\nu) \\ & Y_{l',m_l'}(\Omega_f)\, Y^*_{l,m_l}(\Omega_i)\, S_{fi}^{Jl'l}(E)\delta^3(\vec{P}_f - \vec{P}_i), \end{aligned}$$

$$\text{mit}\;\; C(J,M|l,m_l;\frac{1}{2},\nu) = 0 \;\;\text{falls}\;\; m_l \neq M - \nu$$

$$\begin{aligned} = \frac{\delta(E_f - E_i)}{\sqrt{\rho_i(E_i)\rho_f(E_f)}} \sum_{J,M,l',l} & C(J,M|l',M-\nu';\frac{1}{2},\nu')\, C(J,M|l,M-\nu;\frac{1}{2},\nu) \\ & Y_{l',M-\nu'}(\Omega_f)\, Y^*_{l,M-\nu}(\Omega_i)\, S_{fi}^{Jl'l}(E)\delta^3(\vec{P}_f - \vec{P}_i), \end{aligned} \tag{B.1}$$

wobei das S - Matrixelement nach dem Wigner-Eckart-Theorem nicht von der Magnetquantenzahl M abhängt.

Für die invariante Amplitude $\mathcal{M}$ (Gl.(5.3)) lautet die Entwicklung analog

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi}^{\nu'\nu}(p_i, p_f, E) = \sum_{J,M,l',l} & C(J,M|l',M-\nu';\frac{1}{2},\nu')\, C(J,M|l,M-\nu;\frac{1}{2},\nu) \\ & Y_{l',M-\nu'}(\Omega_f) Y^*_{l,M-\nu}(\Omega_i) \mathcal{M}_{fi}^{Jll'}(|\vec{p}_i|, |\vec{p}_f|, p_i^0, p_f^0, E). \end{aligned} \tag{B.2}$$

Die gleiche Entwicklung gilt natürlich auch für $V_{fi}^{\nu'\nu}$.

Da der Gesamtdrehimpuls erhalten ist und nur $J = l \pm \frac{1}{2}$ vorkommt, können sich die Bahndrehimpulse im Anfangs- und Endzustand, l und l', nur um ± 1 unterscheiden. Außerdem ist auch die Parität erhalten:

$(-1)^l \,*\,$ innere Paritäten $\stackrel{!}{=}$ $(-1)^{l'} \,*\,$ innere Paritäten der beteiligten Teilchen.

Also ist für π N $\rightarrow$ π N auch der Bahndrehimpuls erhalten: $l = l'$, so daß gilt

$$\mathcal{M}_{fi}^{Jll'} = \mathcal{M}_{fi}^{Jll} \delta_{ll'}.$$

Man kann dann in Gl.(B.2) $\vec{p_i}$ in z - Richtung legen und

$$Y_{l,M-\nu}^{*}(\Omega_i : \theta_i = 0, \phi_i = 0) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{M\nu} \tag{B.3}$$

einsetzen:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi}^{\nu'\nu}(p_i, p_f, E) \;\; &= \;\; \sum_{J,l} \; C(J,\nu|l,\nu-\nu';\frac{1}{2},\nu')\, C(J,\nu|l,0;\frac{1}{2},\nu) \\ & \qquad Y_{l,\nu-\nu'}(\Omega_f) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \mathcal{M}_{fi}^{Jll}(|\vec{p_i}|,|\vec{p_f}|,p_i^0,p_f^0,E) \end{aligned} \tag{B.4}$$

Diese Gleichung gilt es nun nach $\mathcal{M}_{fi}^{Jll}$ aufzulösen.

Das gelingt mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation der Kugelflächenfunktionen

$$\int d\Omega_f Y_{l',\nu'}^{*}(\Omega_f) Y_{l,\nu}(\Omega_f) = \delta_{l'l}\delta_{\nu'\nu}.$$

Multiplikation der Gleichung (B.4) mit $Y_{\tilde{l},\tilde{M}-\nu'}^{*}(\Omega_f)$ und Integration über Ω_f ergibt:

$$\begin{aligned} & \int d\Omega_f Y_{\tilde{l},\tilde{M}-\nu'}^{*}(\Omega_f) \mathcal{M}_{fi}^{\nu'\nu} \\ &= \sum_{J,l} \; C(J,\nu|l,\nu-\nu';\frac{1}{2},\nu')\, C(J,\nu|l,0;\frac{1}{2},\nu) \; \int d\Omega_f Y_{\tilde{l},\tilde{M}-\nu'}^{*}(\Omega_f) Y_{l,\nu-\nu'}(\Omega_f) \\ & \qquad \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \; \mathcal{M}_{fi}^{Jll}(|\vec{p_i}|,|\vec{p_f}|,p_i^0,p_f^0,E) \\ &= \sum_{J} \; C(J,\nu|\tilde{l},\nu-\nu';\frac{1}{2},\nu')\, C(J,\nu|\tilde{l},0;\frac{1}{2},\nu) \; \sqrt{\frac{2\tilde{l}+1}{4\pi}} \; \mathcal{M}_{fi}^{J\tilde{l}\tilde{l}} \delta_{\tilde{M}\nu} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\sum_{\nu'} C(\tilde{J},\tilde{M}|\tilde{l}',\tilde{M}-\nu';\frac{1}{2},\nu')\, C(J,\tilde{M}|\tilde{l}',\tilde{M}-\nu';\frac{1}{2},\nu') = \delta_{\tilde{J}J}, \tag{B.5}$$

d.h. Multiplikation auf beiden Seiten mit $C(\tilde{J},\nu|\tilde{l},\nu-\nu';\frac{1}{2},\nu')$ und Summation über ν' führt auf:

$$\sum_{\nu'} C(\tilde{J},\nu|\tilde{l},\nu-\nu';\frac{1}{2},\nu') \int d\Omega_f Y^*_{\tilde{l},\tilde{M}-\nu'}(\Omega_f)\mathcal{M}^{\nu'\nu}_{fi} =$$

$$\sum_{J,\nu'} C(\tilde{J},\nu|\tilde{l},\nu-\nu';\frac{1}{2},\nu')C(J,\nu|\tilde{l},\nu-\nu';\frac{1}{2},\nu')\, C(J,\nu|\tilde{l},0;\frac{1}{2},\nu)\, \sqrt{\frac{2\tilde{l}+1}{4\pi}}\, \mathcal{M}^{J\tilde{l}\tilde{l}}_{fi}\delta_{\tilde{M}\nu}$$

$$= C(\tilde{J},\nu|\tilde{l},0;\frac{1}{2},\nu)\sqrt{\frac{2\tilde{l}+1}{4\pi}}\, \mathcal{M}^{\tilde{J}\tilde{l}\tilde{l}}_{fi}\delta_{\tilde{M}\nu}$$

Damit ergibt sich die gewünschte Projektion auf einen Kanal
(nach Umbenennung $\tilde{J},\tilde{l} \to J,l$):

$$\mathcal{M}^{Jll}_{fi} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, \frac{1}{C(J,\nu|l,0;\frac{1}{2},\nu)} \sum_{\nu'} C(J,\nu|l,\nu-\nu';\frac{1}{2},\nu') \int d\Omega_f Y^*_{l,\nu-\nu'}(\Omega_f)\mathcal{M}^{\nu'\nu}_{fi} \tag{B.6}$$

Nach dieser Vorschrift sollen nun die Amplituden $V_{\pi\pi}$ entwickelt werden.

Man wählt also $\vec{p}_i \,||\, z$ - Achse und $\quad \vec{p}_f = |\vec{p}_f| \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$

Dann kann man zunächst die ϕ - Integration von Gl.(B.6) je nach Wert von ν ausführen. Die beiden möglichen Quotienten aus den Clebsch-Gordan-Koeffizienten in Gl.(B.6) sind dann aber von ν unabhängig und es ergibt sich nurmehr für die beiden möglichen Werte von $J = l \pm \frac{1}{2}$:

$$V^{l+\frac{1}{2}}_{\pi\pi 1(5)} = 2\pi|\vec{p}_f||\vec{p}_i| \left(\frac{f_N}{m_\pi}\right)^2 \Gamma^2_\pi(\vec{p}_f)\, \frac{Iso}{E-m_N}\, \frac{2\delta_{l1}}{2l+1}(1-l(1-\delta_{l0})) \quad = 0$$

$$V^{l-\frac{1}{2}}_{\pi\pi 1(5)} = 2\pi|\vec{p}_f||\vec{p}_i| \left(\frac{f_N}{m_\pi}\right)^2 \Gamma^2_\pi(\vec{p}_f)\, \frac{Iso}{E-m_N}\, \frac{2\delta_{l1}}{2l+1}(1+(l+1)(1-\delta_{l0}))$$

$$\Big(Iso = e^*_b(Q')e_a(Q)\chi^\dagger(t')\tau_b\tau_a\chi(t)\Big)$$

Der gekreuzte Graph liefert ($Iso2 = Iso(a \leftrightarrow b)$):

$$V^{l+\frac{1}{2}}_{\pi\pi 2(6)} = 2\pi|\vec{p}_f||\vec{p}_i|\left(\frac{f_N}{m_\pi}\right)^2 \Gamma^2_\pi(\vec{p}_f)\; Iso2 \left[integ(1-\frac{l}{l+1}(1-\delta_{l0})) + integ2\frac{l(1-\delta_{l0})}{l+1}\right],$$

$$V^{l-\frac{1}{2}}_{\pi\pi 2(6)} = 2\pi|\vec{p}_f||\vec{p}_i|\left(\frac{f_N}{m_\pi}\right)^2 \Gamma^2_\pi(\vec{p}_f)\; Iso2 \left[integ(2-\delta_{l0}) - integ2(1-\delta_{l0})\right],$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} integ &= \int_{-1}^{1} dx \frac{xP_l(x)}{-p_i^0 - p_f^0 - \sqrt{((\vec{p}_f+\vec{p}_i)^2 - m_N^2)}}, \\ integ2 &= \int_{-1}^{1} dx \frac{P_{l-1}(x)}{-p_i^0 - p_f^0 - \sqrt{((\vec{p}_f+\vec{p}_i)^2 - m_N^2)}}. \end{aligned}$$

Ähnliche Beziehungen bekommt man für die beiden Δ - Graphen ($Iso_\Delta, Iso2_\Delta$ s.u.):

$$\begin{aligned} V^{l+\frac{1}{2}}_{\pi\pi 3} &= \frac{2}{3}\pi|\vec{p}_f||\vec{p}_i|\left(\frac{f_\Delta}{m_\pi}\right)^2 \Gamma^2_\pi(\vec{p}_f)\; \frac{Iso_\Delta}{E - m_\Delta + \frac{i}{2}\Gamma_\Delta}\; \frac{2(l+2)\delta_{l1}}{2l+1} \\ V^{l-\frac{1}{2}}_{\pi\pi 3} &= \frac{2}{3}\pi|\vec{p}_f||\vec{p}_i|\left(\frac{f_\Delta}{m_\pi}\right)^2 \Gamma^2_\pi(\vec{p}_f)\; \frac{Iso_\Delta}{E - m_\Delta + \frac{i}{2}\Gamma_\Delta}\; \frac{2(1-l)\delta_{l1}}{2l+1} \\ &= 0 \\ V^{l+\frac{1}{2}}_{\pi\pi 4} &= \frac{2}{3}\pi|\vec{p}_f||\vec{p}_i|\left(\frac{f_\Delta}{m_\pi}\right)^2 \Gamma^2_\pi(\vec{p}_f)\; Iso2_\Delta \\ &\quad \left[(2-\frac{l}{l+1}(1-\delta_{l0}))\, integ_\Delta + \frac{l}{l+1}(1-\delta_{l0})\, integ2_\Delta\right] \\ V^{l-\frac{1}{2}}_{\pi\pi 4} &= \frac{2}{3}\pi|\vec{p}_f||\vec{p}_i|\left(\frac{f_\Delta}{m_\pi}\right)^2 \Gamma^2_\pi(\vec{p}_f)\; Iso2_\Delta \\ &\quad \left[(2+\frac{1-\delta_{l0}}{l})\, integ_\Delta - \frac{1-\delta_{l0}}{l}\, integ2_\Delta\right] \end{aligned}$$

B.1.3 Isospinzerlegung

Pion und Nukleon besitzen zusammen den Gesamtisospin 1/2 oder 3/2, wobei

$$P_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}(1-\vec{t}\vec{\tau}) \quad \text{auf } T = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad P_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(2+\vec{t}\vec{\tau}) \quad \text{auf } T = \frac{3}{2}$$

die entsprechenden Projektoren sind.

Die Amplituden können somit zerlegt werden:

$$e_b^*(Q')\chi^\dagger(t')\,V_{\pi\pi}\,e_a(Q)\chi(t) = \chi^\dagger(t')\,\left[\frac{1}{3}\tau_b\tau_a\,V_{\pi\pi}^{(\frac{1}{2})} + \left(\delta_{ba} - \frac{1}{3}\tau_b\tau_a\right)\,V_{\pi\pi}^{(\frac{3}{2})}\right]\,\chi(t)$$

Die in den Amplituden oben benutzen Abkürzungen lauten:

$$\begin{aligned} Iso &= e_b^*(Q')\chi^\dagger(t')\;3\cdot\frac{1}{3}\tau_b\tau_a\;e_a(Q)\chi(t) \\ Iso2 &= e_b^*(Q')\chi^\dagger(t')\;3\cdot\frac{1}{3}\tau_a\tau_b\;e_a(Q)\chi(t) \\ Iso_\Delta &= e_b^*(Q')\chi^\dagger(t')\;T_b^\dagger T_a\;e_a(Q)\chi(t) \\ Iso2_\Delta &= e_b^*(Q')\chi^\dagger(t')\;T_a^\dagger T_b\;e_a(Q)\chi(t) \end{aligned}$$

Die Antikommutatorrelation der Paulimatrizen gestattet es, diese Ausdrücke passend umzuformen:

$$\begin{aligned} \{\tau_a,\tau_b\} &= 2\delta_{ab} \\ \tau_a\tau_b &= 2(\delta_{ab} - \frac{1}{3}\tau_b\tau_a) - \frac{1}{3}\tau_b\tau_a \\ T_b^\dagger T_a &= \frac{2}{3}\delta_{ba} - \frac{i}{3}\,\varepsilon_{bac}\,\tau_c \end{aligned}$$

so daß die Amplituden nach Isospin 1/2 und Isospin 3/2 geordnet werden können:

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_{\pi\pi}^{l\pm\frac{1}{2}(\frac{1}{2})} &= 3V_{\pi\pi 1}^{l\pm\frac{1}{2}} - V_{\pi\pi 2}^{l\pm\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}V_{\pi\pi 4} \\ V_{\pi\pi}^{l\pm\frac{1}{2}(\frac{3}{2})} &= 2V_{\pi\pi 2}^{l\pm\frac{1}{2}} + V_{\pi\pi 3} + \frac{1}{3}V_{\pi\pi 4} \end{aligned}$$

Die so gewonnenen Partialwellenamplituden sind nunmehr in der Streugleichung zu verarbeiten.
Aus Gleichung (5.7) erhält man zunächst allgemein durch Einsetzen der Entwicklung Gl.(B.2) die Form

$$\mathcal{M}_{fi}^{Jl'l}(|\vec{p}_i|,|\vec{p}_f|,E) = V_{fi}^{Jl'l}(|\vec{p}_i|,|\vec{p}_f|,E) - \sum_c \frac{im_N|\vec{k}_c|}{16\pi^2 E}\sum_{\tilde{l}}\mathcal{M}_{fc}^{Jl'\tilde{l}}(|\vec{p}_i|,E)\,V_{ci}^{J\tilde{l}l}(|\vec{p}_f|,E). \tag{B.7}$$

Da als Zwischenzustand hier nur πN vorkommt, d.h. die Summe über c nur den Term $c=\pi$ enthält, $|\vec{k}_c| = |\vec{p}_f|$ gilt und außerdem auch der Bahndrehimpuls erhalten ist, hat man schließlich für jeden Isospingesamtzustand T die einfache Gleichung:

$$M_{\pi\pi}^{Jll(T)} = V_{\pi\pi}^{Jll(T)} - \frac{im_N|\vec{p}_f|}{16\pi^2 E}\,M_{\pi\pi}^{Jll(T)}\,V_{\pi\pi}^{Jll(T)} \tag{B.8}$$

B.1.4 Entwicklung des Wirkungsquerschnitts

Einsetzen der Entwicklung (B.4) in

$$\sigma_{\pi\pi} = \frac{1}{2}\int d\Omega_f \sum_{\nu\nu'} \frac{d\sigma^{\nu\nu'}_{\pi\pi}}{d\Omega_f} = \frac{1}{2}\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|}\frac{m_N^2}{E^2}\int d\Omega_f \sum_{\nu\nu'} \left|\mathcal{M}^{\nu\nu'}_{\pi\pi}\right|^2$$

ergibt

$$\begin{aligned}\int d\Omega_f \sum_{\nu\nu'} \left|\mathcal{M}^{\nu\nu'}_{\pi\pi}\right|^2 = & \int d\Omega_f \sum_{\nu\nu'} \sum_{\tilde{J}\tilde{M}\tilde{l}'\tilde{l}} \sum_{JMl'l} C(\tilde{J},\tilde{M}|\tilde{l}',\tilde{M}-\nu';\frac{1}{2},\nu')\, C(\tilde{J},\tilde{M}|\tilde{l},\tilde{M}-\nu;\frac{1}{2},\nu) \\ & C(J,M|l',M-\nu';\frac{1}{2},\nu')\, C(J,M|l,M-\nu;\frac{1}{2},\nu) \\ & Y^*_{\tilde{l}',\tilde{M}-\nu'}(\Omega_f)\, Y^*_{\tilde{l},\tilde{M}-\nu}(\Omega_i)\, Y^*_{l',M-\nu'}(\Omega_f)\, Y^*_{l,M-\nu}(\Omega_i)\, \mathcal{M}^{\tilde{J}\tilde{l}'\tilde{l}*}_{\pi\pi}\, \mathcal{M}^{Jl'l}_{\pi\pi}.\end{aligned}$$

Nutzt man wieder aus, daß der Bahndrehimpuls erhalten ist, so daß gilt:

$$\mathcal{M}^{Jl'l}_{\pi\pi} = \mathcal{M}^{Jll}_{\pi\pi}\,\delta_{l'l},$$

und legt $\vec{p}_i$ in Richtung der z - Achse:

$$Y^*_{l,M-\nu}(\Omega_i : \theta_i = 0, \phi_i = 0) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{M\nu},$$

so können die Summationen über $\tilde{M}$ und M ausgeführt und dann wieder die Orthogonalitätsrelation der Kugelflächenfunktionen ausgenutzt werden:

$$\begin{aligned}\int d\Omega_f \sum_{\nu\nu'} \left|\mathcal{M}^{\nu\nu'}_{\pi\pi}\right|^2 = & \sum_{\nu\nu'}\sum_{\tilde{J}\tilde{l}}\sum_{Jl} \sqrt{\frac{(2\tilde{l}+1)(2l+1)}{(4\pi)^2}} C(\tilde{J},\nu|\tilde{l},\nu-\nu';\frac{1}{2},\nu')\, C(\tilde{J},\nu|\tilde{l},0;\frac{1}{2},\nu) \\ & C(J,\nu|l,\nu-\nu';\frac{1}{2},\nu')\, C(J,\nu|l,0;\frac{1}{2},\nu) \\ & \underbrace{\int d\Omega_f\, Y^*_{\tilde{l},\nu-\nu'}(\Omega_f)\, Y^*_{l,\nu-\nu'}(\Omega_f)}_{=\delta_{\tilde{l}l}}\, \mathcal{M}^{\tilde{J}\tilde{l}\tilde{l}*}_{\pi\pi}\, \mathcal{M}^{Jll}_{\pi\pi}\end{aligned}$$

Nun benötigt man wieder die Beziehung (B.5), um die ν - Summe über die Clebsch-Gordan-Koeffizienten auszuführen:

$$\begin{aligned}\int d\Omega_f \sum_{\nu\nu'} \left|\mathcal{M}^{\nu\nu'}_{\pi\pi}\right|^2 = & \sum_{\nu\tilde{J}Jl} \frac{2l+1}{4\pi} C(\tilde{J},\nu|l,0;\frac{1}{2},\nu)\, C(J,\nu|l,0;\frac{1}{2},\nu) \mathcal{M}^{\tilde{J}ll*}_{\pi\pi}\, \mathcal{M}^{Jll}_{\pi\pi} \\ & \underbrace{\sum_{\nu'} C(\tilde{J},\nu|l,\nu-\nu';\frac{1}{2},\nu')\, C(J,\nu|l,\nu-\nu';\frac{1}{2},\nu')}_{=\delta_{\tilde{J}J}} \\ = & \sum_{\nu Jl} \frac{2l+1}{4\pi}\, C(J,\nu|l,0;\frac{1}{2},\nu)^2\, |\mathcal{M}^{Jll}_{\pi\pi}|^2\end{aligned}$$

Schreibt man die Summe über J und ν aus, so zeigt sich, was mit dem quadrierten Clebsch-Gordan-Koeffizienten anzufangen ist:

$$\begin{aligned}\int d\Omega_f \sum_{\nu\nu'} \left|\mathcal{M}_{\pi\pi}^{\nu\nu'}\right|^2 &= \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} \Big(|\mathcal{M}_{\pi\pi}^{l+\frac{1}{2}}|^2 \left[C(l+\frac{1}{2},\frac{1}{2}|l,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2})^2 + C(l+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|l,0;\frac{1}{2},-\frac{1}{2})^2 \right] \\ &\qquad + |\mathcal{M}_{\pi\pi}^{l-\frac{1}{2}}|^2 \left[C(l-\frac{1}{2},\frac{1}{2}|l,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2})^2 + C(l-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|l,0;\frac{1}{2},-\frac{1}{2})^2 \right] \Big) \\ &= \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} \left(|\mathcal{M}_{\pi\pi}^{l+\frac{1}{2}}|^2 \frac{2(l+1)}{2l+1} + |\mathcal{M}_{\pi\pi}^{l-\frac{1}{2}}|^2 \frac{2l}{2l+1} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_l \left[(l+1)\, |\mathcal{M}_{\pi\pi}^{l+\frac{1}{2}}|^2 + l\, |\mathcal{M}_{\pi\pi}^{l-\frac{1}{2}}|^2 \right]\end{aligned}$$

Das heißt für den gesamten Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma_{\pi\pi} = \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} \frac{m_N^2}{E^2} \frac{1}{2\pi} \sum_l \left[(l+1)\, |\mathcal{M}_{\pi\pi}^{l+\frac{1}{2}}|^2 + l\, |\mathcal{M}_{\pi\pi}^{l-\frac{1}{2}}|^2 \right]$$

Mit Mittelung über den Isospin

$$\overline{|\mathcal{M}_{\pi\pi}^{l\pm\frac{1}{2}}|}^2 = \frac{1}{6} \sum_T (2T+1)\, |\mathcal{M}_{\pi\pi}^{l\pm\frac{1}{2}(T)}|^2 = \frac{1}{6} \left[2|\mathcal{M}_{\pi\pi}^{l\pm\frac{1}{2}(\frac{1}{2})}|^2 + 4|\mathcal{M}_{\pi\pi}^{l\pm\frac{1}{2}(\frac{3}{2})}|^2 \right],$$

und mit $|\vec{p}_f| = |\vec{p}_i|$ lautet die endgültige Beziehung

$$\sigma_{\pi\pi} = \frac{1}{(4\pi)^3} \frac{m_N^2}{E^2} \sum_l \left[(l+1)\, \overline{|\mathcal{M}_{\pi\pi}^{l+\frac{1}{2}}|}^2 + l\, \overline{|\mathcal{M}_{\pi\pi}^{l-\frac{1}{2}}|}^2 \right]. \tag{B.9}$$

B.1.5 γN - Partialwellenentwicklung

Bei der Photoabsorption besteht der Anfangszustand aus einem Nukleon und einem Photon. Letzteres hat Spin 1, wir müssen also im Vergleich zum πN - Zustand noch einen weiteren Drehimpuls verkoppeln. Spin und Bahndrehimpuls l des Photons ergeben zusammen die Zustände

$$|j, m\,(l,1)\rangle = \sum_{m_l,\lambda} C(j,m|l,m_l;1,\lambda)\, |l,m_l;1,\lambda\rangle.$$

Nun ist das Strahlungsfeld aber transversal, physikalische Zustände $|\Phi\rangle$ müssen die Bedingung $\nabla\vec{A}(\vec{r})\,|\Phi\rangle = 0$ erfüllen, was bei den obigen Zuständen i.a. nicht gilt.
Man kann aber folgende Linearkombinationen bilden:

$$|j,m\rangle = \sum_l \alpha_l\, |j,m\,(l,1)\rangle.$$

Diese werden gewöhnlich nach ihrer Parität geordnet, man spricht von magnetischen Multipolen bei Parität $-(-1)^j$:

$$|j,m;\mathrm{M}\rangle = |j,m\,(l=j,1)\rangle, \tag{B.10}$$

und von elektrischen Multipolen mit Parität $(-1)^j$ bei

$$|j,m;\mathrm{E}\rangle = \sqrt{\frac{j}{2j+1}}\,|j,m\,(l=j+1,1)\rangle \;+\; \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\,|j,m\,(j-1,1)\rangle. \tag{B.11}$$

Diese Zustände, die die Transversalitätsbedingung erfüllen, sind Eigenzustände des Gesamtdrehimpulses des Photons (Ref. [35]).

Wir gehen jetzt wieder zur Notation mit Relativimpulsen über und bezeichnen den Relativimpuls im γN - Anfangszustand mit k_i, den Relativimpuls im πN - Endzustand mit p_f.

Der Zustand eines einlaufenden Photons ist gekennzeichnet durch die Richtung des Impulses $\hat{k}_i$ (Einheitsvektor) und die Spinprojektion λ. Solche Zustände können nun nach den oben konstruierten Drehimpulszuständen entwickelt werden:

$$|\hat{k}_i;1,\lambda\rangle = \sum_{j,m}\Big[|j,m,\mathrm{M}\rangle\langle j,m,\mathrm{M}|\hat{k}_i;1,\lambda\rangle \;+\; |j,m,\mathrm{E}\rangle\langle j,m,\mathrm{E}|\hat{k}_i;1,\lambda\rangle\Big] \tag{B.12}$$

Um die Notation zu verkürzen und Verwechslungen zu vermeiden, schreiben wir generisch $\Phi = $ E,M.
Durch Ankopplung des Nukleonspins werden dann die Gesamtdrehimpulszustände konstruiert:

$$|J,M\,(j\,\frac{1}{2}\,\Phi)\rangle = \sum_{m,\tilde{\nu}} |j,m,\Phi;\frac{1}{2},\tilde{\nu}\rangle\langle j,m,\Phi;\frac{1}{2},\tilde{\nu}|J,M\rangle, \tag{B.13}$$

die den Eingangsraum aufspannen:

$$1 = \int dE \sum_{J,M}\sum_{j,\Phi} |J,M\,(j\,\frac{1}{2}\,\Phi),E\rangle\langle J,M\,(j\,\frac{1}{2}\,\Phi),E|.$$

E ist die Gesamtenergie des Anfangszustands.

Auf der πN - Seite lassen sich die Gesamtzustände wieder durch die Kopplung von relativem Bahndrehimpuls l' und Nukleonspin $\frac{1}{2}$ zum Gesamtdrehimpuls $J'\,(M')$ darstellen:

$$|J',M'\,(l'\,\frac{1}{2})\rangle \;=\; \sum_{m_l',\tilde{\nu}'} |l',m_l';\frac{1}{2},\tilde{\nu}'\rangle\langle l',m_l';\frac{1}{2},\tilde{\nu}'|J',M'\rangle \tag{B.14}$$

$$\Rightarrow\; 1 \;=\; \int dE' \sum_{J',M',l'} |J',M'\,(l'\,\frac{1}{2}),E'\rangle\langle J',M'\,(l'\,\frac{1}{2}),E'|$$

Die so gewonnenen 1-Operatoren kann man in das in der Impulsbasis gegebene S-Matrix-Element einschieben:

$$
\begin{aligned}
S_{fi}^{\nu'\nu\lambda}(k_i,p_f) &= \langle\frac{1}{2},\nu',\vec{p}_f,\vec{p}_f,f|\,S\,|\frac{1}{2},\nu,\vec{k}_i,\vec{P}_i,i,1,\lambda\rangle \\
&= \int dE\int dE' \sum_{J',M',l'}\sum_{J,M}\sum_{j,\Phi}\langle\frac{1}{2},\nu'|\otimes\langle\vec{p}_f|\,|J',M'\,(l'\,\frac{1}{2}),E'\rangle\langle J',M'\,(l'\,\frac{1}{2}),E'|\otimes \\
&\qquad \langle\vec{P}_f,f|\,S\,|i,\vec{P}_i\rangle\otimes|J,M\,(j\,\frac{1}{2}\,\Phi),E\rangle\langle J,M\,(j\,\frac{1}{2},\Phi),E\,||\vec{k}_i\rangle\otimes|1,\lambda\rangle\otimes|\frac{1}{2},\nu\rangle
\end{aligned}
$$

Nun muß man die einzelnen Terme geschickt umordnen. In den vorderen Gesamtdrehimpuls-Ket wird seine Definition Gl.(B.14) eingesetzt und ein 1-Operator der Form $1=\sum_{\tilde{\nu}'}|\frac{1}{2},\tilde{\nu}'\rangle\langle\frac{1}{2},\tilde{\nu}'|$ eingeschoben, um die Skalarprodukte

$$
\langle l',m_l';\frac{1}{2},\tilde{\nu}'|J',M'\rangle = C(J,M|l',m_l';\frac{1}{2},\tilde{\nu}') \quad \text{und} \quad \langle\vec{p}_f|l',m_l',E'\rangle = \frac{\delta(E_f-E')}{\sqrt{\varrho_f(E_f)}}\,Y_{l',m_l'}(\Omega_f)
$$

bilden zu können.
Die S - Matrix selbst kann gut zwischen Zuständen erhaltener Quantenzahlen ausgewertet werden:

$$
\langle J',M'\,(l',\frac{1}{2}),E',\vec{P}_f,f|\,S\,|i,\vec{P}_i,E,J,M\,(j,\frac{1}{2}),\Phi\rangle = \delta_{J'J}\,\delta_{M'M}\,\delta^3(\vec{P}_f-\vec{P}_i)\,\delta(E'-E)\,S_{fi}^{Jl'j\Phi}(E)
$$

Auf der γN - Seite führt das Ausschreiben der Definition Gl.(B.13) und das Einschieben von $1=\sum_{\tilde{\nu}}|\frac{1}{2},\tilde{\nu}\rangle\langle\frac{1}{2},\tilde{\nu}|$ auf das Skalarprodukt

$$
\langle J,M|j,m;\frac{1}{2},\tilde{\nu}\rangle = C(J,M|j,m;\frac{1}{2},\tilde{\nu}),
$$

wobei der Index Φ, der angibt, um welchen Multipol es sich handelt, schon oben in das S - Matrix-Element gezogen wurde.
Für die Entwicklung der Photonzustände Gl.(B.12) war nur der Einheitsvektor $\hat{k}_i$ nötig. Es ist daher geschickt, den Betrag des Impulses $\vec{k}_i$ herauszuziehen, um das Skalarprodukt

$$
\langle E||\vec{k}_i|\rangle = \frac{\delta(E-E_i)}{\sqrt{\varrho_i(E_i)}}
$$

bilden zu können, das natürlich dann hilft, die Energieintegrationen auszuführen.
Diese Schritte sind in den Zeilen des folgenden Gleichung zu sehen:

$$
\begin{aligned}
S_{fi}^{\nu'\nu\lambda}(k_i,p_f) &= \int dE\int dE' \sum_{J',M',l'}\sum_{J,M}\sum_{j,\Phi}\sum_{m,\tilde{\nu}}\sum_{m_l',\tilde{\nu}'}\langle\frac{1}{2},\nu'|\frac{1}{2},\tilde{\nu}'\rangle \\
&\quad \langle\vec{p}_f|l',m_l',E'\rangle \quad \langle l',m_l';\frac{1}{2},\tilde{\nu}'|J',M'\rangle \\
&\quad \Big(\langle J',M'\,(l',\frac{1}{2}),E',\vec{P}_f,f|\,S\,|i,\vec{P}_i,E,J,M\,(j,\frac{1}{2}),\Phi\rangle\Big) \\
&\quad \langle J,M|j,m,\Phi;\frac{1}{2},\tilde{\nu}\rangle\ \langle j,m,\Phi|\hat{k}_i;1,\lambda\rangle\ \langle E||\vec{k}_i|\rangle\ \langle\frac{1}{2},\tilde{\nu}|\frac{1}{2},\nu\rangle
\end{aligned}
$$

Wenn nun die oben angegebenen Beziehungen eingesetzt und die δ - Funktionen bzw. Kronecker-δs zum Ausführen der Integrationen und einiger Summationen ausgenutzt werden, bleibt schließlich

$$
\begin{aligned}
S_{fi}^{\nu'\nu\lambda}(k_i, p_f) \;=\; & \frac{\delta(E_f - E_i)\, \delta^3(\vec{P}_f - \vec{P}_i)}{\sqrt{\rho_i(E_i)\, \rho_f(E_f)}} \sum_{J,M,l'} \sum_{j,\Phi} \sum_{m,\tilde{\nu}} \sum_{m'_l,\tilde{\nu}'} \langle \frac{1}{2}, \nu' | \frac{1}{2}, \tilde{\nu}' \rangle\, Y_{l',m'_l}(\Omega_f) \\
& C(J, M | l', m'_l; \frac{1}{2}, \tilde{\nu}')\; C(J, M | j, m; \frac{1}{2}, \tilde{\nu})\; S_{fi}^{Jl'jl}(E_a) \\
& \langle j, m, \Phi | \hat{k}_i; 1, \rho \rangle . \qquad \text{(B.15)}
\end{aligned}
$$

Die Streuamplitude sieht etwas übersichtlicher aus:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{fi}^{\nu'\nu\rho} \;=\; & \sum_{J,M,l'} \sum_{j,\Phi} \sum_{m,m'_l} Y_{l',m'_l}(\Omega_f)\; C(J, M | l', m'_l; \frac{1}{2}, \nu')\; C(J, M | j, m; \frac{1}{2}, \nu) \\
& \langle j, m, \Phi | \hat{k}_i; 1, \rho \rangle \;\; \mathcal{M}_{fi}^{Jl'j\Phi} \qquad \text{(B.16)}
\end{aligned}
$$

Statt nun die Amplitude durch Integrationen über Kugelflächenfunktionen und Summation über Clebsch-Gordan-Koeffizienten auf einen Kanal zu projizieren, was hier durch den zusätzlichen Vektor der Photon-Polarisation erschwert wird, ist es geschickter, die obige Entwicklung der Amplitude zunächst weiter zu verarbeiten, bis schließlich nurmehr eine Summe über einen Drehimpuls zu invertieren ist. Dann liegt die Amplitude in Form sogenannter CGLN-Amplituden vor ([36]).

Betrachten wir dazu die Gl.(B.16) ohne die äußeren Spinoren, also als Operator im Spinraum der Nukleonen:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{fi} \;=\; & \sum_{J,l'} \sum_{j,\Phi} \sum_{m,m'_l} Y_{l',m'_l}(\Omega_f)\, \langle \frac{1}{2}, \nu'; l', m'_l | \;\; \sum_{M} |J, M\, (l', \frac{1}{2}) \rangle \langle J, M\, (j, \frac{1}{2}) | \\
& | j, m; \frac{1}{2}, \nu \rangle \;\langle j, m\, (\Phi, 1) |\, \hat{k}_i; 1, \rho \rangle \;\; \mathcal{M}_{fi}^{Jl'j\Phi} \qquad \text{(B.17)}
\end{aligned}
$$

Die Erhaltung des Gesamtdrehimpulses bedingt, daß

$$
J \;=\; j \pm \frac{1}{2} \;=\; l' \pm \frac{1}{2}.
$$

Folglich gibt es für l' drei Möglichkeiten:

$$
l' = j - 1, \qquad l' = j + 1, \qquad l' = j
$$

Die Parität auf der πN - Seite ist stets $\mathcal{P} = -(-1)^{l'}$.

Im Falle $l' = j$ handelt es sich also auf der γN - Seite um einen magnetischen Multipol. Dann kann man den Projektionsoperator auf Gesamtdrehimpuls $J = j \pm \frac{1}{2}$ einsetzen:

$$
\sum_{M} | j \pm \frac{1}{2}, M\, (l' = j, \frac{1}{2}) \rangle \langle j \pm \frac{1}{2}, M\, (j, \frac{1}{2}) | \;\; =: \;\; \Lambda_{j\pm} \qquad \text{(B.18)}
$$

Für $\Lambda_{j\pm}$ gibt es folgende Darstellung:

$$\Lambda_{j+} = \frac{j+1+\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_{p_f}}{2j+1}, \qquad \Lambda_{j-} = \frac{j-\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_{p_f}}{2j+1}$$

wobei $\vec{L}_{p_f} = -i\,\hat{p}_f \times \nabla_{\vec{p}_f}$.

Ist hingegen $l' = j \pm 1$ (elektrische Multipole), so tritt in (B.17) folgende Summe auf:

$$\sum_M |j \pm \frac{1}{2}, M\,(j \pm 1, \frac{1}{2})\rangle\ \langle j \pm \frac{1}{2}, M\,(j, \frac{1}{2})|$$

Es gilt aber (s. Ref. [35], S.370):

$$(\vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f)\ |j \pm \frac{1}{2}, M\,(j, \frac{1}{2})\rangle = |j \pm \frac{1}{2}, M\,(j \pm 1, \frac{1}{2})\rangle,$$

d.h. die Summe über M kann durch $(\vec{\sigma}\hat{p}_f)\,\Lambda_{j\pm}$ ersetzt werden.

Die Wellenfunktionen der Multipole lassen sich wie folgt ausdrücken (Ref. [35], S.538):

$$\langle j, m\,\mathrm{M}|\hat{p}_i, \lambda\rangle = i\,\frac{\vec{\varepsilon}(\lambda)\cdot\vec{L}_{p_i}}{\sqrt{j(j+1)}} Y^*_{j,m}(\Omega_i) \tag{B.19}$$

$$\langle j, m, \mathrm{E}|\hat{k}_i; 1, \lambda\rangle = \frac{\vec{\varepsilon}(\lambda)\cdot(\hat{k}_i \times \vec{L}_{k_i})}{\sqrt{j(j+1)}} Y^*_{j,m}(\Omega_i) \tag{B.20}$$

Bleiben wir zunächst bei den magnetischen Multipolen. Um Gl.(B.17) mit den angegebenen Umformungen zu schreiben, schiebt man noch zwei Eins- Operatoren der Form $1 = \int d\Omega_p |\hat{p}\rangle\langle\hat{p}|$ ein:

$$\langle j', m_l'|\ \Lambda_{j+}\ |j, m\rangle = \int d\Omega_{p'} \int d\Omega_p \langle j', m_l'|\hat{p}'\rangle\ \langle\hat{p}'|\Lambda_{j+}|\hat{p}\rangle\ \langle\hat{p}|j, m\rangle$$

Die Form von Λ ist oben angegeben:

$$\begin{aligned}
\langle j', m_l'|\ \Lambda_{j+}\ |j, m\rangle &= \int d\Omega_{p'} \int d\Omega_p\ Y^*_{j',m_l'}(\Omega_p)\ \langle\hat{p}'|\frac{j+1+\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_p}{2j+1}|\hat{p}\rangle\ Y_{j,m}(\Omega_p) \\
&= \int d\Omega_{p'} \int d\Omega_p\ Y^*_{j',m_l'}(\Omega_p)\ \frac{j+1+\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_p}{2j+1}\ \delta(\Omega_{p'} - \Omega_p)\ Y_{j,m}(\Omega_p) \\
&= \int d\Omega_p\ Y^*_{j',m_l'}(\Omega_p)\ \frac{j+1+\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_p}{2j+1}\ Y_{j,m}(\Omega_p)
\end{aligned}$$

$$\langle j', m_l'|\ \Lambda_{j-}\ |j, m\rangle = \int d\Omega_p\ Y^*_{j',m_l'}(\Omega_p)\ \frac{j-\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_p}{2j+1}\ Y_{j,m}(\Omega_p)$$

Nun setzt man alle Teile in Gl.(B.17) mit Φ =M ein und summiert zusätzlich über den Index $l' = j'$, was erlaubt ist, da die Projektionsoperatoren nur Zustände zu gleichem j verbinden.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{fi} &= \sum_{j',m_l} \sum_{j,m} Y_{j',m_l'}(\Omega_f) \int d\Omega_p \left[Y^*_{j',m_l'}(\Omega_p)\, \frac{j+1+\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_p}{2j+1}\, Y_{j,m}(\Omega_p)\, \mathcal{M}_{fi}^{j+\frac{1}{2},j,j,\mathrm{M}} \right. \\
&\quad \left. + Y^*_{j',m_l'}(\Omega_p)\, \frac{j-\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_p}{2j+1}\, Y_{j,m}(\Omega_p)\, \mathcal{M}_{fi}^{j-\frac{1}{2},j,j,\mathrm{M}} \right] \frac{i\vec{e}(\lambda)\cdot\vec{L}_{k_i}}{\sqrt{j(j+1)}} Y^*_{j,m}(\Omega_i)
\end{aligned}$$

Umordnen der Terme zeigt dann, wie man die Kugelflächenfunktionen los wird:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j',m_l} \sum_{j,m} \int d\Omega_p \\
&\quad \left[Y_{j',m_l'}(\Omega_f)\, Y^*_{j',m_l'}(\Omega_p)\, \frac{j+1+\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_p}{2j+1}\, \frac{i\vec{e}(\lambda)\cdot\vec{L}_{k_i}}{\sqrt{j(j+1)}} Y_{j,m}(\Omega_p)\, Y^*_{j,m}(\Omega_i)\, \mathcal{M}_{fi}^{j+\frac{1}{2},j,j,\mathrm{M}} \right. \\
&\quad \left. + Y_{j',m_l'}(\Omega_f)\, Y^*_{j',m_l'}(\Omega_p)\, \frac{j-\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_p}{2j+1}\, \frac{i\vec{e}(\lambda)\cdot\vec{L}_{k_i}}{\sqrt{j(j+1)}}\, Y_{j,m}(\Omega_p)\, Y^*_{j,m}(\Omega_i)\, \mathcal{M}_{fi}^{j-\frac{1}{2},j,j,\mathrm{M}} \right]
\end{aligned}$$

Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned}
\sum_m Y_{j,m}(\Omega_p)\, Y^*_{j,m}(\Omega_i) &= \frac{2j+1}{4\pi}\, P_j(\hat{p}\cdot\hat{p}_i) \\
\sum_{j',m_l'} Y_{j',m_l'}(\Omega_f)\, Y^*_{j',m_l'}(\Omega_p) &= \delta(\Omega_p - \Omega_{p_f})
\end{aligned}$$

Also folgt für unsere magnetische Amplitude:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{fi} &= \sum_j \int d\Omega_p \left[\delta(\Omega_p - \Omega_{p_f})\, \frac{j+1+\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_{p_f}}{2j+1}\, \frac{i\vec{e}(\lambda)\cdot\vec{L}_{p_a}}{\sqrt{j(j+1)}}\, \frac{2j+1}{4\pi}\, P_j(\hat{p}\cdot\hat{k}_i)\, \mathcal{M}_{fi}^{j+\frac{1}{2},j,j,\mathrm{M}} \right. \\
&\quad \left. +\, \delta(\Omega_p - \Omega_{p_f})\, \frac{j-\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_{p_f}}{2j+1}\, \frac{i\vec{e}(\lambda)\cdot\vec{L}_{p_a}}{\sqrt{j(j+1)}}\, \frac{2j+1}{4\pi}\, P_j(\hat{p}\cdot\hat{k}_i) \mathcal{M}_{fi}^{j-\frac{1}{2},j,j,\mathrm{M}} \right] \\
&= \frac{1}{4\pi} \sum_j \left[(j+1+\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_{p_f})\, i\vec{e}(\lambda)\cdot\vec{L}_{k_i}\, \frac{\mathcal{M}_{fi}^{j+\frac{1}{2},j,j,\mathrm{M}}}{\sqrt{j(j+1)}} \right. \\
&\quad \left. + (j-\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_{p_f})\quad i\vec{e}(\lambda)\cdot\vec{L}_{k_i}\, \frac{\mathcal{M}_{fi}^{j-\frac{1}{2},j,j,\mathrm{M}}}{\sqrt{j(j+1)}} \right] P_j(\hat{k}_i\cdot\hat{p}_f)
\end{aligned}$$

Mit den Abkürzugen

$$\frac{\mathcal{M}_{fi}^{j+\frac{1}{2},j,j,\mathrm{M}}}{4\pi\sqrt{j(j+1)}} =: -\mathrm{M}_{j+}, \qquad \frac{\mathcal{M}_{fi}^{j-\frac{1}{2},j,j,\mathrm{M}}}{4\pi\sqrt{j(j+1)}} =: -\mathrm{M}_{j-}, \qquad \vec{e}(\lambda) =: \vec{\epsilon},$$

läßt sich dieser Anteil der Amplitude recht knapp schreiben als

$$\mathcal{M}_{fi} = \sum_j \left[-\mathrm{M}_{j+} \, (j+1+\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_{p_f}) \, i\vec{\epsilon}\cdot\vec{L}_{k_i} - \mathrm{M}_{j-} \, (j-\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_{p_f}) \, i\vec{\epsilon}\cdot\vec{L}_{k_i} \right] \; P_j(\hat{k}_i\cdot\hat{p}_f).$$

Im Falle elektrischer Multipole, $l' = j \pm 1$, ergibt sich für die l' - Summe in Gl.(B.17):

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{fi} \;=\; & \sum_{j,m,m_l'} Y_{j+1,m_l'}(\Omega_f) \; \langle j+1, m_l'| \; (\vec{\sigma}\hat{p}_f)\Lambda_{j+} \; |j,m\rangle \; \mathcal{M}_{fi}^{j+\frac{1}{2},j+1,j,\mathrm{E}} \langle j,m,\mathrm{E}|\hat{k}_i;1,\rho\rangle \\
& + \sum_{j,m,m_l'} Y_{j-1,m_l'}(\Omega_f) \langle j-1, m_l'| \; (\vec{\sigma}\hat{p}_f)\Lambda_{j-} \; |j,m\rangle \; \mathcal{M}_{fi}^{j-\frac{1}{2},j-1,j,\mathrm{E}} \langle j,m,\mathrm{E}|\hat{k}_i;1,\rho\rangle
\end{aligned}$$

Der Operator $(\vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f)\Lambda_{j\pm}$ verbindet nur die Zustände $|j\pm 1, m_l'\rangle$ mit $|j,m\rangle$. Daher kann wieder eine zusätzliche Summe über j' eingeführt werden.
Einschieben zweier Eins-Operatoren $1 = \int d\Omega_p |\hat{p}\rangle\langle\hat{p}|$ ergibt

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{fi} \;=\; & \sum_{j',j,m,m_l'} \int d\Omega_{p'} \int d\Omega_p \, Y_{j',m_l'}(\Omega_f) \; \langle j', m_l'|\hat{p}'\rangle \;\; \langle\hat{p}'| \; (\vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f)\Lambda_{j\pm} \; |\hat{p}\rangle. \;\; \langle\hat{p}|j,m\rangle \\
& \qquad\qquad \mathcal{M}_{fi}^{j\pm\frac{1}{2},j+1,j,\mathrm{E}} \langle j,m,\mathrm{E}|\hat{k}_i;1,\rho\rangle \\
= \; & \sum_{j',j,m,m_l'} \int d\Omega_p Y_{j',m_l'}(\Omega_f) \, Y^*_{j',m_l'}(\Omega_p) \;\; (\vec{\sigma}\cdot\hat{p}) \frac{j+1+\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_p}{2j+1} \;\; Y_{j,m}(\Omega_p) \\
& \qquad\qquad \mathcal{M}_{fi}^{j+\frac{1}{2},j+1,j,\mathrm{E}} \langle j,m,\mathrm{E}|\hat{k}_i;1,\rho\rangle \\
& + \sum_{j',j,m,m_l'} \int d\Omega_p \, Y_{j',m_l'}(\Omega_f) \, Y^*_{j',m_l'}(\Omega_p) \;\; (\vec{\sigma}\cdot\hat{p}) \frac{j-\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_p}{2j+1} \, Y_{j,m}(\Omega_p) \\
& \qquad\qquad \mathcal{M}_{fi}^{j-\frac{1}{2},j-1,j,\mathrm{E}} \langle j,m,\mathrm{E}|\hat{k}_i;1,\rho\rangle.
\end{aligned}$$

Einsetzen von Gl.(B.20) ergibt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{fi} \;=\; & \sum_j \int d\Omega_p \sum_{j',m_l'} Y_{j',m_l'}(\Omega_f) \, Y^*_{j',m_l'}(\Omega_p) \;\; (\vec{\sigma}\cdot\hat{p}) \frac{j+1+\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_p}{2j+1} \;\; \frac{\vec{\varepsilon}\cdot(\hat{k}_i\times\vec{L}_{k_i})}{\sqrt{j(j+1)}} \\
& \qquad\qquad \mathcal{M}_{fi}^{j+\frac{1}{2},j+1,j,\mathrm{E}} \sum_m Y_{j,m}(\Omega_p) \, Y^*_{j,m}(\Omega_i) \\
& + \sum_j \int d\Omega_p \sum_{j',m_l'} Y_{j',m_l'}(\Omega_f) \, Y^*_{j',m_l'}(\Omega_p) \;\; (\vec{\sigma}\cdot\hat{p}) \frac{j-\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_p}{2j+1} \;\; \frac{\vec{\varepsilon}\cdot(\hat{k}_i\times\vec{L}_{k_i})}{\sqrt{j(j+1)}} \\
& \qquad\qquad \mathcal{M}_{fi}^{j-\frac{1}{2},j-1,j,\mathrm{E}} \sum_m Y_{j,m}(\Omega_p) \, Y^*_{j,m}(\Omega_i) \\
= \; & \sum_j \;\; (\vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f) \frac{j+1+\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_{p_f}}{2j+1} \;\; \frac{\vec{\varepsilon}\cdot(\hat{k}_i\times\vec{L}_{k_i})}{\sqrt{j(j+1)}} \; \frac{2j+1}{4\pi} \; \mathcal{M}_{fi}^{j+\frac{1}{2},j+1,j,\mathrm{E}} \, P_j(\hat{k}_i\cdot\hat{p}_f) \\
& + \sum_j \;\; (\vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f) \frac{j-\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_{p_f}}{2j+1} \;\; \frac{\vec{\varepsilon}\cdot(\hat{k}_i\times\vec{L}_{k_i})}{\sqrt{j(j+1)}} \; \frac{2j+1}{4\pi} \; \mathcal{M}_{fi}^{j-\frac{1}{2},j-1,j,\mathrm{E}} \, P_j(\hat{k}_i\cdot\hat{p}_f)
\end{aligned}$$

Wie oben werden Abkürzungen eingeführt:

$$\frac{\mathcal{M}_{fi}^{j+\frac{1}{2},j+1,j,\mathrm{E}}}{4\pi\sqrt{j(j+1)}} =: -\mathrm{E}_{j+}, \qquad \frac{\mathcal{M}_{fi}^{j-\frac{1}{2},j-1,j,\mathrm{E}}}{4\pi\sqrt{j(j+1)}} =: -\mathrm{E}_{j-},$$

so daß der Anteil der elektrischen Multipole an der Amplitude so aussieht:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{fi} &= \sum_j \Big[-\mathrm{E}_{(j+1)-}\ (\vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f)(j+1+\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_{p_f})\ \vec{\varepsilon}\cdot(\hat{k}_i\times\vec{L}_{k_i}) \\ &\qquad +\mathrm{E}_{(j-1)+}\ (\vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f)(j-\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_{p_f})\ \ \vec{\varepsilon}\cdot(\hat{k}_i\times\vec{L}_{k_i})\ \Big]\ P_j(\hat{k}_i\cdot\hat{p}_f).\end{aligned}$$

Man erkennt, daß nurmehr elektrische Multipole mit Index $(j+1)_- = l'$ und $(j-1)_+ = l'$ auftreten. Bei den magnetischen Multipolen tritt ohnehin nur der Fall $j = l'$ auf, so daß die Summationsindizes j und l' gleichbedeutend sind.
Insgesamt erhält man:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{fi} &= \sum_j \Big[-\mathrm{M}_{j+}\ (j+1+\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_{p_f})\ i\vec{\epsilon}\cdot\vec{L}_{k_i} - \mathrm{M}_{j-}\ (j-\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_{p_f})\ i\vec{\epsilon}\cdot\vec{L}_{k_i} \\ &\qquad -\mathrm{E}_{(j+1)-}\ (\vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f)(j+1+\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_{p_f})\ \vec{\varepsilon}\cdot(\hat{k}_i\times\vec{L}_{k_i}) \\ &\qquad +\mathrm{E}_{(j-1)+}\ (\vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f)(j-\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_{p_f})\ \ \vec{\varepsilon}\cdot(\hat{k}_i\times\vec{L}_{k_i})\ \Big]\ P_j(\hat{k}_i\cdot\hat{p}_f).\end{aligned}$$

Für den letzten Schritt der Umformungen braucht man eine Reihe von Beziehungen für die oben auftretenden Kombinationen der Drehimpulsoperatoren, σ - Matrizen und Legendrepolynomen. Dabei wurde von der Transversalität der Photonen Gebrauch gemacht ($\vec{\varepsilon}\cdot\vec{k}_i = 0$). Das Argument der Legendrepolynome ist $x = \cos\theta = \hat{k}_i\cdot\hat{p}_f$, ein $'$ deute die Ableitung nach x an.

$$\begin{aligned}(1-x^2)P_j''(x) &= 2xP_j'(x) - j(j+1)P_j(x) \\ xP_j'(x) &= P_{j+1}'(x) - (j+1)P_j(x) = P_{j-1}'(x) + jP_j(x) \\ \frac{d}{dx}xP_j'(x) &= P_j'(x) + xP_j''(x) = P_{j+1}''(x) - (j+1)P_j'(x) = P_{j-1}''(x) + jP_j'(x) \\ \Rightarrow \quad P_{j+1}''(x) &= (j+2)P_j'(x) + xP_j''(x) \\ \Rightarrow \quad P_{j-1}''(x) &= (1-j)P_j'(x) + xP_j''(x) \\ \vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) &= i(\vec{a}\cdot\vec{b}) - i(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) \\ i\vec{\varepsilon}\cdot\vec{L}_{k_i}\ P_j(\hat{k}_i\cdot\hat{p}_f) &= i\vec{\varepsilon}(-i)\cdot(\hat{k}_i\times\vec{\nabla}_{k_i})\ P_j(\hat{k}_i\cdot\hat{p}_f) \\ &= \vec{\varepsilon}\cdot(\hat{k}_i\times\hat{p}_f)\ P_j'(\hat{k}_i\cdot\hat{p}_f) \\ &= -\hat{p}_f\cdot(\hat{k}_i\times\vec{\varepsilon})\ P_j'(\hat{k}_i\cdot\hat{p}_f) \\ &= i\vec{\sigma}\cdot(\hat{p}_f\times(\hat{k}_i\times\vec{\varepsilon}))\ P_j'(x) - (\vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f)\vec{\sigma}\cdot(\hat{k}_i\times\vec{\varepsilon})\ P_j'(x) \\ &= i(\vec{\sigma}\cdot\hat{k}_i)(\vec{\varepsilon}\cdot\hat{p}_f)\ P_j'(x) - i(\vec{\sigma}\cdot\vec{\varepsilon})(\hat{k}_i\cdot\hat{p}_f)\ P_j'(x) \\ &\quad -(\vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f)\vec{\sigma}\cdot(\hat{k}_i\times\vec{\varepsilon})\ P_j'(x)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{\varepsilon}\cdot(\hat{k}_i \times \hat{p}_f) &= -i\vec{\sigma}\cdot(\vec{\varepsilon}\times(\hat{k}_i \times \hat{p}_f)) + (\vec{\sigma}\cdot\vec{\varepsilon})\vec{\sigma}\cdot(\hat{k}_i \times \hat{p}_f) \\
\vec{\sigma}\cdot\vec{L_{\hat{p}_f}} i\vec{\varepsilon}\cdot\vec{L}_{k_i}\ P_j'(\hat{k}_i\cdot\hat{p}_f) &= -i\vec{\sigma}\cdot(\hat{p}_f \times \vec{\nabla}_{p_f}) i\vec{\varepsilon}\cdot\vec{L}_{k_i}\ P_j(\hat{k}_i\cdot\hat{p}_f) \\
&= -i\vec{\sigma}\cdot(\hat{p}_f \times \vec{\nabla}_{p_f})\vec{\varepsilon}\cdot(\hat{k}_i \times \hat{p}_f)\ P_j'(\hat{k}_i\cdot\hat{p}_f) \\
&= -i\vec{\sigma}\cdot(\hat{p}_f \times \vec{\nabla}_{p_f})(\vec{\varepsilon}\times\hat{k}_i)\cdot\hat{p}_f\ P_j'(\hat{k}_i\cdot\hat{p}_f) \\
&= -i\vec{\sigma}\cdot(\hat{p}_f \times (\vec{\varepsilon}\times\hat{k}_i))\ P_j'(x) + i\vec{\sigma}\cdot(\hat{k}_i \times \hat{p}_f)\vec{\varepsilon}\cdot(\hat{k}_i \times \hat{p}_f)\ P_j''(x) \\
&= -i(\vec{\sigma}\cdot\vec{\varepsilon})(\hat{k}_i\cdot\hat{p}_f)\ P_j'(x) + i(\vec{\sigma}\cdot\hat{k}_i)(\vec{\varepsilon}\cdot\hat{p}_f)\ P_j'(x) \\
&\quad + i(\vec{\sigma}\cdot\vec{\varepsilon})(\vec{\sigma}\cdot(\hat{k}_i \times \hat{p}_f))^2\ P_j''(x) + (\vec{\sigma}\cdot\hat{k}_i)(\vec{\varepsilon}\cdot\hat{p}_f)\vec{\sigma}\cdot(\hat{k}_i \times \hat{p}_f)\ P_j''(x) \\
(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})^2 &= \vec{a}^2 \\
\Rightarrow (\vec{\sigma}\cdot(\hat{k}_i \times \hat{p}_f))^2 &= (\hat{k}_i \times \hat{p}_f)^2 = \sin^2\theta_f = 1 - x^2 \\
(\vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f)\vec{\varepsilon}\cdot(\hat{k}_i \times \vec{L}_{k_i})\ P_j(\hat{k}_i\cdot\hat{p}_f) &= i(\vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f)(\vec{\varepsilon}\cdot\hat{p}_f)\ P_j'(x) \\
(\vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f)(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}_{p_f})\vec{\varepsilon}\cdot(\hat{k}_i \times \vec{L}_{k_i})\ P_j(\hat{k}_i\cdot\hat{p}_f) &= (\vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f)\vec{\sigma}\cdot(\hat{p}_f \times \vec{\varepsilon})\ P_j'(x) + (\vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f)\vec{\sigma}\cdot(\hat{p}_f \times \hat{k}_i)(\vec{\varepsilon}\cdot\hat{p}_f)\ P_j''(x) \\
&= -i(\vec{\sigma}\cdot\vec{\varepsilon})\ P_j'(x)\ - i(\vec{\sigma}\cdot\hat{k}_i)(\vec{\varepsilon}\cdot\hat{p}_f)\ P_j''(x) \\
&\quad + i(\vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f)(\vec{\varepsilon}\cdot\hat{p}_f)\ [P_j'(x) + xP_j''(x)]
\end{aligned}
$$

Und mit all diesen Beziehungen gelangt man schließlich zur gewünschten CGLN-Form der Amplitude:

$$
\mathcal{M} = i\vec{\sigma}\cdot\vec{\epsilon}\mathcal{M}_1 + \vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f\vec{\sigma}\cdot(\hat{k}_i \times \vec{\epsilon})\mathcal{M}_2 + i\vec{\sigma}\cdot\hat{k}_i\vec{\epsilon}\cdot\hat{p}_f\mathcal{M}_3 + i\vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f\vec{\epsilon}\cdot\hat{p}_f\mathcal{M}_4, \tag{B.21}
$$

mit

$$
\begin{pmatrix} \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_3 \\ \mathcal{M}_4 \end{pmatrix} = \sum_j \begin{pmatrix} P_{j+1}'(x) & P_{j-1}'(x) & jP_{j+1}'(x) & (j+1)P_{j-1}'(x) \\ 0 & 0 & (j+1)P_j'(x) & jP_j'(x) \\ P_{j+1}''(x) & -P_{j+1}''(x) & P_{j-1}''(x) & P_{j-1}''(x) \\ -P_j''(x) & P_j''(x) & -P_j''(x) & -P_j''(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{E}_{j+} \\ \mathrm{E}_{j-} \\ \mathrm{M}_{j+} \\ \mathrm{M}_{j-} \end{pmatrix} \tag{B.22}
$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich nun einfacher invertieren.

Man benötigt dazu die folgenden Beziehungen:

$$
P_{2j}'(x) = \sum_{k=1,3,\dots 2j-1} (2k+1)\, P_k(x) \tag{B.23}
$$

$$
P_{2j+1}'(x) = \sum_{k=0,2,\dots 2j} (2k+1)\, P_k(x) \tag{B.24}
$$

Damit kann man das Integral über eine Ableitung eines Legendre-Polynoms berechnen:

$$
\int_{-1}^{1} dx P_m'(x)P_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad m-n-1 \text{ ungerade oder } m \le n \\ 2 & \text{für} \quad m-n-1 \text{ gerade} \end{cases} \tag{B.25}
$$

Von Gl.(B.22) aus gelangt man mit Hilfe von Integralen der Form

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} dx \left[P_l(x)P'_{n-1}(x) - P_{l+1}(x)P'_n(x)\right] &= 0, \\
\int_{-1}^{1} dx \left[P_{l-1}(x)P'_n(x) - P_l(x)P'_{n+1}(x)\right] &= 0, \\
\int_{-1}^{1} dx \left[P_{l-1}(x)P'_n(x) - P_l(x)P'_{n-1}(x)\right] &= 1, \\
\int_{-1}^{1} dx \left[P_l(x)P'_{n+1}(x) - P_{l+1}(x)P'_n(x)\right] &= 1, \\
\int_{-1}^{1} dx \left[\frac{1}{2l+1}(P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x))\ P''_n(x)\right] &= -\int_{-1}^{1} dx P_l(x)P'_n(x) \qquad \text{(B.26)}
\end{aligned}
$$

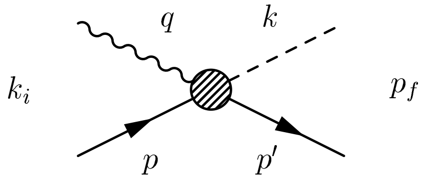
auf das invertierte Gleichungssystem

$$
\begin{pmatrix} 2(j+1)\mathrm{E}_{j+} \\ 2j\mathrm{E}_{j-} \\ 2(j+1)\mathrm{M}_{j+} \\ 2j\mathrm{M}_{j-} \end{pmatrix} = \int_{-1}^{1} dx \qquad \text{(B.27)}
$$

$$
\begin{pmatrix}
P_j(x) & -P_{j+1}(x) & \frac{j}{2j+1}(P_{j-1}(x) - P_{j+1}(x)) & \frac{j+1}{2j+3}(P_j(x) - P_{j+2}(x)) \\
P_j(x) & -P_{j-1}(x) & \frac{j+1}{2j+1}(P_{j+1}(x) - P_{j-1}(x)) & \frac{j}{2j-1}(P_j(x) - P_{j-2}(x)) \\
P_j(x) & -P_{j+1}(x) & \frac{1}{2j+1}(P_{j+1}(x) - P_{j-1}(x)) & 0 \\
-P_j(x) & P_{j-1}(x) & \frac{1}{2j+1}(P_{j-1}(x) - P_{j+1}(x)) & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_3 \\ \mathcal{M}_4 \end{pmatrix}.
$$

Diese allgemeine Entwicklung muß nun in unserem Fall konkret angewendet werden.

Betrachten wir zuerst die Amplitude in Impulsbasis für den Prozeß $\gamma N \to \pi N$.



mit den Relativimpulsen k_i und p_f
und dem Schwerpunktsimpuls $P = p + q = k + p'$

Im Schwerpunktsystem gilt $\vec{P} = 0$. Dann lauten die Relativimpulse

$$
k_i = \frac{1}{2}(q - p), \qquad p_f = \frac{1}{2}(k - p'),
$$

$$
\Rightarrow q^0 = k_i^0 + \frac{1}{2}P^0, \qquad k^0 = p_f^0 + \frac{1}{2}P^0, \qquad \vec{q} = \vec{k}_i, \qquad \vec{k} = \vec{p}_f.
$$

Die Amplitude der fünf Graphen aus Kap. 1, Abschn. 1.3, lautet im Schwerpunktssystem

$$A_a^\mu = -i\frac{gf_N}{m_\pi}\Gamma_\pi(\vec{p_f})e_a^*(Q)\varepsilon_{3ba}\chi^\dagger(t')\tau_b\chi(t)\chi^\dagger(s')\begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\sigma} \end{pmatrix}^\mu \chi(s),$$

$$A_b^\mu = i\frac{gf_N}{m_\pi}\Gamma_\pi(\vec{p_f})e_a^*(Q)\varepsilon_{3ba}\chi^\dagger(t')\tau_b\chi(t)\chi^\dagger(s')(\vec{p_f}-\vec{k}_i)\cdot\vec{\sigma}\chi(s)\frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 2\vec{p}_f - \vec{k}_i \end{pmatrix}^\mu}{(\vec{p_f}-\vec{k}_i)^2+\Lambda^2},$$

$$A_c^\mu = -i\frac{gf_N}{m_\pi}\Gamma_\pi(\vec{p_f}-\vec{k}_i)e_a^*(Q)\varepsilon_{3ba}\chi^\dagger(t')\tau_b\chi(t)\chi^\dagger(s')(\vec{p_f}-\vec{k}_i)\cdot\vec{\sigma}\chi(s)\frac{(2p_f-k_i+\frac{1}{2}P)^\mu}{(p_f-k_i)^2-m_\pi^2},$$

$$A_d^\mu = -\frac{1}{2}\frac{gf_N}{m_\pi}\Gamma_\pi(\vec{p_f})e_a^*(Q)\chi^\dagger(t')\tau_a\tau_3\chi(t)\chi^\dagger(s')\vec{p_f}\cdot\vec{\sigma}\chi(s)\begin{pmatrix} \frac{1}{(k_i^0+\frac{1}{2}E)} \\ 0 \end{pmatrix}^\mu,$$

$$A_e^\mu = \frac{1}{2}\frac{gf_N}{m_\pi}\Gamma_\pi(\vec{p_f})e_a^*(Q)\chi^\dagger(t')\tau_3\tau_a\chi(t)\chi^\dagger(s')\vec{p_f}\cdot\vec{\sigma}\chi(s)\begin{pmatrix} \frac{1}{(k_i^0+\frac{1}{2}E)} \\ 0 \end{pmatrix}^\mu.$$

Vergleich mit der Darstellung als CGLN-Amplituden (Gl.(B.21)) ergibt

$$\begin{aligned}
V_1^{iso} &= \frac{gf_N}{m_\pi}\Gamma_\pi(\vec{p_f})Iso,\\
V_2^{iso} &= 0,\\
V_3^{iso} &= 2\,\frac{gf_N}{m_\pi}Iso|\vec{p_f}||\vec{k}_i|\left[\frac{\Gamma_\pi(\vec{p_f})}{(\vec{p_f}-\vec{k}_i)^2+\Lambda^2}-\frac{\Gamma_\pi(\vec{p_f}-\vec{k}_i)}{(p_f-k_i)^2-m_\pi^2}\right],\\
V_4^{iso} &= -2\,\frac{gf_N}{m_\pi}Iso\,\vec{p}_f^{\,2}\left[\frac{\Gamma_\pi(\vec{p_f})}{(\vec{p_f}-\vec{k}_i)^2+\Lambda^2}-\frac{\Gamma_\pi(\vec{p_f}-\vec{k}_i)}{(p_f-k_i)^2-m_\pi^2}\right].
\end{aligned}$$

Der Faktor Iso lautet

$$Iso = \chi^\dagger(t')e_a^*(Q)\varepsilon_{3ba}\tau_b\chi(t) \;\hat{=}\; \langle\pi_a t'|\,\frac{1}{2i}\,(\tau_a\tau_3-\tau_3\tau_a)\,|t\gamma\rangle.$$

Wieder läßt sich die Amplitude in unabhängige Isospin-Anteile zerlegen:

$$\langle\pi_j|V|\gamma\rangle \stackrel{!}{=} V^+\delta_{3j}+V^-\frac{1}{2}(\tau_j\tau_3-\tau_3\tau_j)+V^0\tau_j$$

Gebräuchlich ist es aber, die folgenden Linearkombinationen zu bilden:

$$V_{\pi\gamma}^{(1/2)} = V_{\pi\gamma}^+ + 2\,V_{\pi\gamma}^- \qquad V_{\pi\gamma}^{(3/2)} = V_{\pi\gamma}^+ - V_{\pi\gamma}^-$$

Die vorliegende Wechselwirkung erzeugt natürlich nur einen isovektoriellen Anteil, außerdem ist offenbar auch $V_{\pi\gamma}^+ = 0$.

Es verbleiben also je drei Teilamplituden:

$$V_1^{(1/2)} = -2i\frac{gf_N}{m_\pi}\Gamma_\pi(\vec{p_f}) \qquad V_1^{(3/2)} = i\frac{gf_N}{m_\pi}\Gamma_\pi(\vec{p_f})$$

$$\begin{aligned}
V_3^{(1/2)} &= -4i\,\frac{gf_N}{m_\pi}|\vec{p}_f||\vec{k}_i|\left[\frac{\Gamma_\pi(\vec{p_f})}{(\vec{p_f}-\vec{k}_i)^2+\Lambda^2} - \frac{\Gamma_\pi(\vec{p_f}-\vec{k}_i)}{(p_f-k_i)^2-m_\pi^2}\right] \\
V_3^{(3/2)} &= 2i\,\frac{gf_N}{m_\pi}|\vec{p}_f||\vec{k}_i|\left[\frac{\Gamma_\pi(\vec{p_f})}{(\vec{p_f}-\vec{k}_i)^2+\Lambda^2} - \frac{\Gamma_\pi(\vec{p_f}-\vec{k}_i)}{(p_f-k_i)^2-m_\pi^2}\right] \\
V_4^{(1/2)} &= 4i\,\frac{gf_N}{m_\pi}\quad\vec{p}_f^{\,2}\quad\left[\frac{\Gamma_\pi(\vec{p_f})}{(\vec{p_f}-\vec{k}_i)^2+\Lambda^2} - \frac{\Gamma_\pi(\vec{p_f}-\vec{k}_i)}{(p_f-k_i)^2-m_\pi^2}\right] \\
V_4^{(3/2)} &= -2i\,\frac{gf_N}{m_\pi}\quad\vec{p}_f^{\,2}\quad\left[\frac{\Gamma_\pi(\vec{p_f})}{(\vec{p_f}-\vec{k}_i)^2+\Lambda^2} - \frac{\Gamma_\pi(\vec{p_f}-\vec{k}_i)}{(p_f-k_i)^2-m_\pi^2}\right]
\end{aligned} \tag{B.28}$$

Das weitere Vorgehen ist klar: Die Amplituden $V_1 \ldots V_4$ werden in Gl.(B.27) eingesetzt, um die Multipole $\Phi_\pm = \mathrm{E}_\pm, \mathrm{M}_\pm$ zu bestimmen. Mit Hilfe der Streugleichung (5.19)

$$\mathcal{M}_{\pi\gamma}^{j\pm\Phi} = \Phi_{\pi\gamma}^{j\pm} - \frac{im_N\,p_\pi}{16\pi^2 E}\sum_{\tilde{j}} M_{\pi\pi}^{J\tilde{j}j}\,\Phi_{\pi\gamma}^{\tilde{j}\pm},$$

wird die $\pi N - \pi N$ - Endzustandswechselwirkung angehängt ($j\pm$ bedeutet Gesamtdrehimpuls $J = j \pm \frac{1}{2}$).

Schließlich ergibt Gl.(B.22) die vier Anteile der erweiterten (iterierten) Amplitude wieder in Impulsbasis. Die gesamte Ampitude gemäß Gl.(B.21) ist dann zu quadrieren, um die Winkelabhängigkeit zu bestimmen. Mit diesem Resultat kann dann der Wirkungsquerschnitt berechnet werden.

Etwas schematisiert lautet der totale Wirkungsquerschnitt somit:

$$\begin{aligned}
\sigma &\propto \sum_{\nu',\nu}\int d\Omega_f\,\frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{k}_i|}\,\left|\chi^\dagger(\nu')\,\mathcal{M}(\Omega_f,E,\vec{\epsilon})\,\chi(\nu)\right|^2 \\
&= \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{k}_i|}\int d\Omega_f\sum_{\nu',\nu}\left|\chi^\dagger(\nu')\sum_{J,M,j,l',\Phi,m,m_l',\tilde{\nu},\tilde{\nu'}}(\ldots)\mathcal{M}^{Jl'j\Phi}(\ldots)\quad\chi(\nu)\right|^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{k}_i|}\int d\Omega_f\sum_{\nu',\nu}\left|\chi^\dagger(\nu')\,\left(i\vec{\sigma}\cdot\vec{\epsilon}\mathcal{M}_1 + +i\vec{\sigma}\cdot\hat{k}_i\vec{\epsilon}\cdot\hat{p}_f\mathcal{M}_3 + i\vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f\vec{\epsilon}\cdot\hat{p}_f\mathcal{M}_4\right)\,\chi(\nu)\right|^2 \\
&= \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{k}_i|}\int d\Omega_f\,\Big\{|\mathcal{M}_1|^2 + \sin{\theta_f}^2\,Re(\mathcal{M}_1^*\mathcal{M}_4) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\sin{\theta_f}^2\left[|\mathcal{M}_3|^2 + |\mathcal{M}_4|^2 + 2\cos\theta_f\,Re(\mathcal{M}_3^*\mathcal{M}_4)\right]\Big\}
\end{aligned}$$

Das Integral $\int\Omega_f \;=\; 2\pi\int dx$ über diese Kombinationen des Winkels θ und der $\mathcal{M}_i$ muß gemäß Gl.(B.22) über die dort angegebenen Elemente der Matrix geführt werden, wobei insgesamt 13 Integrale übrigbleiben.

Betrachten wir z.B. $\sin\theta_f{}^2\mathrm{Re}(\mathcal{M}_1^*\mathcal{M}_4)$:

Gl.(B.22) gibt die zu $\mathcal{M}_1^*\mathcal{M}_4$ gehörigen Kombinationen der Legendrepolynome an: $\mathcal{M}_1^*$ enthält demnach Terme mit $P'_{n+1}(x)$ und $P'_{n-1}(x)$, $\mathcal{M}_4$ nur den Term $P''_l(x)$. Wir schreiben daher $\sin\theta_f{}^2 = 1-x^2$ und definieren die Integrale

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int_{-1}^{1} dx(1-x^2)P'_{n+1}(x)P''_l(x), \\
I_6 &= \int_{-1}^{1} dx(1-x^2)P'_{n-1}(x)P''_l(x).
\end{aligned}$$

Dann gilt also für diesen Term im Wirkungsquerschnitt:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} dx\sin\theta_f{}^2\,\mathrm{Re}(\mathcal{M}_1^*\mathcal{M}_4) \\
=\;& \sum_{n,l}\Big(I_5(\mathrm{E}_{n+}^* + n\mathrm{M}_{n+}^*) + I_6(\mathrm{E}_{n-}^* + (n+1)\mathrm{M}_{n-}^*)\Big)\left(-\mathrm{E}_{l+} - \mathrm{E}_{l-} + \mathrm{M}_{l+} - \mathrm{M}_{l-}\right).
\end{aligned}$$

Der totale Wirkungsquerschnitt ergibt sich dann entsprechend mit allen Summanden und den kinematischen Faktoren zu

$$\sigma_{total} = \frac{1}{32\pi}\;\frac{s+m_N^2-m_\pi^2}{s}\;\frac{m_N}{\sqrt{s}}\;\;4\pi\frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{k}_i|}\sum_{n,l}\Big(I_1\mathrm{E}_{n+}^*\mathrm{E}_{l+}\ldots - I_{13}\mathrm{M}_{n-}^*\mathrm{M}_{l-}\Big)\,, \tag{B.29}$$

wobei für die Impulse gilt:

$$|\vec{k}_i| \;=\; \sqrt{\frac{(s-m_N^2)^2}{4s}}\,, \qquad |\vec{p}_f| = \sqrt{\frac{(s-(m_N+m_\pi)^2)(s-(m_N-m_\pi)^2)}{4s}}.$$

B.1.6 $\pi N \to \rho N$ - Partialwellenentwicklung

Um die gegenüber dem Photon hinzukommende zusätzliche Polarisationsmöglichkeit des ρ zu berücksichtigen, beachten wir die Transversalität der Amplitude A^μ (Ref.[41]):

$$q_\mu A^\mu \;=\; q_0 A^0 - \vec{q}\cdot\vec{A} \;=\; 0 \qquad\qquad \Rightarrow A^0 = \frac{\vec{q}\cdot\vec{A}}{q_0}$$

Bei der Multiplikation mit ε_μ können damit die Nullkomponenten A^0 eliminiert werden:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\mu A^\mu \;&=\; \varepsilon_0 A^0 - \vec{\varepsilon}\cdot\vec{A} = \varepsilon_0\,\frac{\vec{q}}{q_0}\cdot\vec{A} \,-\, \vec{\varepsilon}\cdot\vec{A}\\ &=\; -\,(\,\vec{\varepsilon} - \vec{q}\,\frac{\varepsilon_0}{q_0}\,)\cdot\vec{A} =: -\vec{a}\cdot\vec{A},\end{aligned}$$

wodurch der Hilfsvektor a_μ definiert ist:

$$a_\mu \;=\; (0, \vec{\varepsilon} - \vec{q}\,\frac{\varepsilon_0}{q_0}) = (0, \vec{\varepsilon} - \vec{k}_i\,\frac{\varepsilon_0}{(k_{i0} + \frac{1}{2}E)}). \tag{B.30}$$

Mit Hilfe eines weiteren Vektors $\vec{b}$, der nur transversale Komponenten besitzt, $\vec{b}\cdot\vec{k}_i = 0$, kann die Amplitude schließlich in transversale und longitudinale Komponenten zerlegt werden:

$$\vec{a}\cdot\vec{A} \;=\; \vec{b}\cdot\vec{A} + (\vec{a}\,\hat{k}_i)\cdot\hat{k}_i\cdot\vec{A} \qquad \text{mit} \quad \vec{b} = \vec{\varepsilon} - (\vec{\varepsilon}\cdot\hat{k}_i)\vec{k}_i.$$

Analog zu Gl.(B.21) ist die skalare Amplitude (also $\varepsilon_\mu\,\mathcal{A}^\mu$) als Operator im Spinraum der Nukleonen, d.h. ohne die äußeren Spinoren, dann gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \;&=\; i\,\vec{\sigma}\cdot\vec{b}\,\mathcal{M}_1 \,+\, (\vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f)\,\vec{\sigma}\cdot(\hat{k}_i\times\hat{p}_f)\,\mathcal{M}_2 \,+\, i\,(\vec{\sigma}\cdot\hat{k}_i)\,(\vec{b}\cdot\hat{p}_f)\,\mathcal{M}_3\\ &\quad + i\,(\vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f)\,(\vec{b}\cdot\hat{p}_f)\,\mathcal{M}_4 \,+\, i\,(\vec{\sigma}\cdot\hat{k}_i)\,(\vec{a}\cdot\hat{k}_i)\,\mathcal{M}_5 \,+\, i\,(\vec{\sigma}\cdot\hat{p}_f)\,(\vec{a}\cdot\hat{k}_i)\,\mathcal{M}_6.\end{aligned} \tag{B.31}$$

Die Partialwellenzerlegung der $\mathcal{M}_i$ lautet ganz in Analogie zu Photoabsorption (Ref.[40]):

$$\begin{pmatrix}\mathcal{M}_1\\ \mathcal{M}_2\\ \mathcal{M}_3\\ \mathcal{M}_4\\ \mathcal{M}_5\\ \mathcal{M}_6\end{pmatrix} \;=\; \sum_j \tag{B.32}$$

$$\begin{pmatrix} P'_{j+1}(x) & P'_{j-1}(x) & jP'_{j+1}(x) & (j{+}1)P'_{j-1}(x) & 0 & 0\\ 0 & 0 & (j{+}1)P'_j(x) & jP'_j(x) & 0 & 0\\ P''_{j+1}(x) & -P''_{j+1}(x) & P''_{j-1}(x) & P''_{j-1}(x) & 0 & 0\\ -P''_j(x) & P''_j(x) & -P''_j(x) & -P''_j(x) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & (j{+}1)P'_{j+1}(x) & -jP'_{j-1}(x)\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(j{+}1)P'_j(x) & jP'_j(x)\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{E}_{j+}\\ \mathrm{E}_{j-}\\ \mathrm{M}_{j+}\\ \mathrm{M}_{j-}\\ \mathrm{L}_{j+}\\ \mathrm{L}_{j-}\end{pmatrix}$$

Und die Inversion dieses Gleichungssystems ergibt:

$$\begin{pmatrix} 2(j+1)\mathrm{E}_{j+} \\ 2j\mathrm{E}_{j-} \\ 2(j+1)\mathrm{M}_{j+} \\ 2j\mathrm{M}_{j-} \\ 2(j+1)\mathrm{L}_{j+} \\ 2j\mathrm{L}_{j-} \end{pmatrix} = \int_{-1}^{1} dx \tag{B.33}$$

$$\begin{pmatrix} P_j(x) & -P_{j+1}(x) & \frac{j}{2j+1}(P_{j-1}(x)-P_{j+1}(x)) & \frac{j+1}{2j+3}(P_j(x)-P_{j+2}(x)) & 0 & 0 \\ P_j(x) & -P_{j-1}(x) & \frac{j+1}{2j+1}(P_{j+1}(x)-P_{j-1}(x)) & \frac{j}{2j-1}(P_j(x)-P_{j-2}(x)) & 0 & 0 \\ P_j(x) & -P_{j+1}(x) & \frac{1}{2j+1}(P_{j+1}(x)-P_{j-1}(x)) & 0 & 0 & 0 \\ -P_j(x) & P_{j-1}(x) & \frac{1}{2j+1}(P_{j-1}(x)-P_{j+1}(x)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_j(x) & P_{j+1}(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_j(x) & P_{j-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_3 \\ \mathcal{M}_4 \\ \mathcal{M}_5 \\ \mathcal{M}_6 \end{pmatrix}$$

Der Vergleich von Gl.(B.31) mit der Amplitude der Streugraphen im Schwerpunkssystem aus Gl.(B.28) führt auf die folgenden CGLN- Amplituden

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{gf_N}{m_\pi}\, Iso\, \Gamma_\pi(\vec{p}_f), \\
V_2 &= 0, \\
V_3 &= 2\,\frac{gf_N}{m_\pi}\, Iso\, |\vec{p}_f||\vec{k}_i| \left(\frac{\Gamma_\pi(\vec{p}_f)}{(\vec{p}_f-\vec{k}_i)^2+\Lambda^2} - \frac{\Gamma_\pi(\vec{p}_f-\vec{k}_i)}{(p_f-k_i)^2-m_\pi^2} \right), \\
V_4 &= -2\,\frac{gf_N}{m_\pi}\, Iso\, \vec{p}_f^{\,2} \left(\frac{\Gamma_\pi(\vec{p}_f)}{(\vec{p}_f-\vec{k}_i)^2+\Lambda^2} - \frac{\Gamma_\pi(\vec{p}_f-\vec{k}_i)}{(p_f-k_i)^2-m_\pi^2} \right), \\
V_5 &= \frac{gf_N}{m_\pi}\, Iso \left(\Gamma_\pi(\vec{p}_f)\,(1 + \frac{2\vec{p}_f\cdot\vec{k}_i-\vec{k}_i^2}{(\vec{p}_f-\vec{k}_i)^2+\Lambda^2}) - \Gamma_\pi(\vec{p}_f-\vec{k}_i)\frac{2\vec{p}_f\cdot\vec{k}_i-\vec{k}_i^2}{(p_f-k_i)^2-m_\pi^2} \right), \\
V_6 &= -\frac{gf_N}{m_\pi}\, Iso \left(\Gamma_\pi(\vec{p}_f)\frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{k}_i|}\frac{2\vec{p}_f\cdot\vec{k}_i-\vec{k}_i^2}{(\vec{p}_f-\vec{k}_i)^2+\Lambda^2} - \Gamma_\pi(\vec{p}_f-\vec{k}_i)\frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{k}_i|}\frac{2\vec{p}_f\cdot\vec{k}_i-\vec{k}_i^2}{(p_f-k_i)^2-m_\pi^2} \right).
\end{aligned} \tag{B.34}$$

Damit sind alle Bausteine gegeben und es kann wie im Falle der Photoabsorption weitergerechnet werden.

Literaturverzeichnis

[1] E. V. Shuryak, Phys. Lett. B 78 (1978) 150

[2] J. J. Sakurai, Ann. Phys. 11 (1960) 1

[3] P. Wurm für die CERES- Kollaboration, Nucl. Phys. A 590 (1995) 103c;
G. Agakichiev et. al. , CERES- Kollaboration, Phys. Rev. Lett 75 ((1995) 1272

[4] R. Rapp, Doktorarbeit, Berichte des Forschungszentrums Jülich 3195, 1996;
G. Chanfray, R. Rapp, J. Wambach, Phys. Rev. Lett. 76 (1996) 368

[5] R. Rapp, G. Chanfray, J. Wambach, Nucl. Phys. A 617 (1997) 472

[6] B. Friman, H. J. Pirner, Nucl. Phys. A 617 (1997) 496

[7] W. Peters, M. Post, H. Lenske, S. Leupold, U. Mosel, Nucl. Phys. A 632 (1998) 109

[8] M. Herrmann, Doktorarbeit, GSI- Report 92-10, 1992;
M. Herrmann, B. Friman, W. Nörenberg, Nucl. Phys. A 555 (1993) 411

[9] Michael Urban, Diplomarbeit, Darmstadt 1997,
http://crunch. ikp. physik. tu-darmstadt. de/˜urban/diplom. ps. gz

[10] M. Urban, M. Buballa, R. Rapp, W. Wambach, Nucl. Phys. A 641 (1998) 433

[11] B. Friman, GSI-Report 98-07

[12] Landolt und Börnstein, *Handbook of Physics*, Vol. 1/12a, Springer, Berlin 1987

[13] A. D. Brody et. al., Phys. Rev. D 4 (1971) 2693

[14] J. D. Bjorken und S. D. Drell,
Relativistische Quantenmechanik, BI-Hochschultaschenbuch Nr. 98, 1966
Relativistische Quantenfeldtheorie, BI-Hochschultaschenbuch Nr. 101, 1967

[15] M. Cubero, Doktorarbeit, GSI-Report 90-17, 1990

[16] R. Rapp, M. Urban, M. Buballa, W. Wambach, Phys. Lett. B 417 (1998) 1

[17] R. Machleidt, K. Holinde, Ch. Elster, Phys. Rep. 149 (1987) 1

[18] R. Machleidt, Adv. in Nucl. Phys. 19 (1989) 189

[19] W. M. Layson, Nuovo Cim. 20 (1961) 1207

[20] L. L. Frankfurt, L. Mankiewcz, M. I. Strikmann, Z. Phys. A 334 (1989) 2172

[21] A. W. Thomas, Adv. Nucl. Phys. 13 (1983) 1

[22] K. F. Liu, S. J. Dong, T. Draper, W. Wilcox, Phys. Rev. Lett. 74 (1995) 2172

[23] J. H. Koch, E. J. Moniz, Phys. Rev. C 27 (1982) 751

[24] D. M. Manley, R. A. Arndt, Y. Goradia, Phys. Rev. D 30 (1984) 904

[25] F. Klingl, N. Kaiser, W. Weise, Nucl. Phys. A 624 (1997) 527

[26] L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Quantum Mechanics, Course of Theoretical Physics Vol. 3*, Pergamon Press 1962

[27] G. F. Chew, F. E. Low, Phys. Rev. 101 (1956) 1570

[28] W. Weinhold, Diplomarbeit, Darmstadt 1995

[29] T. Feuster, U. Mosel, Phys. Rev. C 58 (1998) 457

[30] Particle Data Group, Eu. Phys. J. C 3 (1998) 1

[31] T. A. Armstrong et. al., Phys. Rev. D 5 (1972) 1640

[32] H. A. Bethe, E. E. Salpeter, Phys. Rev. 84 (1951) 1232

[33] R. Koch, E. Pietarinen, Nucl. Phys A 336 (1980) 331

[34] Ch. Sauermann, Doktorarbeit, Darmstadt/GSI (1996),
http://www-aix. gsi. de/~sauermann/arbeit. ps. gz,
Ch. Deutsch-Sauermann, B. Friman, W. Noerenberg, Phys. Lett. B 409 (1997) 51

[35] M. Goldberger, K. Watson, *Collision Theory*, Wiley & Sons, 1967

[36] G. F. Chew, M. L. Goldberger, F. E. Low, Y. Nambu, Phys. Rev. 106 (1957) 1345

[37] P. Dennery, Phys. Rev. 124 (1961) 2000

[38] M. Benmerrouche, N. C. Mukhopadhyay, Phys. Rev. D 51 (1995) 3237

[39] N. Zagury, Phys. Rev. 145 (1966) 1112

[40] G. Knöchlein, D. Drechsel, L. Tiator, Z. Phys. A 352 (1995) 327

[41] E. Amaldi, S. Fubini, G. Furlan, *Pion-Electroproduction*, Springer, 1979

Danksagung

Herrn Prof. J. Wambach danke ich für die Gelegenheit zur Anfertigung dieser Arbeit sowie für viele Anregungen und hilfreiche Gespräche.

Besonderen Dank schulde ich meinem Betreuer Dr. M. Buballa, der mir mit unendlicher Geduld und Hilfsbereitschaft zur Seite gestanden ist und diese Arbeit damit ermöglicht hat.

Bei Herrn Dr. R. Rapp bedanke ich mich für etliche Anregungen und Erläuterungen zu Beginn dieser Arbeit.

Allen Mitarbeitern der NHC- Gruppe danke ich für ihre stete Hilfsbereitschaft.
Die angenehme Arbeitsatmosphäre in der NHC- Gruppe hat dazu geführt, daß diese Arbeit auch mit viel Spaß verbunden war.

Bei meiner Schwester Stephanie bedanke ich mich für das Korrekturlesen dieser Arbeit.

Schließlich gilt mein Dank meinen Eltern für ihre Unterstützung, ihre Geduld und ihr Verständnis, die mir mein Studium ermöglicht haben.