Diplomarbeit

Neutrino-Transport in Proto-Neutronen-Sternen

Nicole Radde

Juni 2002

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die vorliegende Diplomarbeit befasst sich mit der Wechselwirkung zwischen Neutrinos und Nukleonen bei der Entstehung eines Neutronensternes (NS). Bei diesem Prozess gibt es eine Phase, in der der Stern als Proto-Neutronen-Stern (PNS) bezeichnet wird und die uns in dieser Arbeit interessiert. In diesem PNS sind die Neutrinos für kurze Zeit gefangen und können nicht aus dem Innern entkommen, ohne eine Wechselwirkung mit den Nukleonen einzugehen.
In diesem Kapitel möchte ich einen kurzen Überblick über die Entstehung und Eigenschaften von Neutronensternen geben und erläutern, warum die in ihrem Inneren stattfindende Wechselwirkung mit Neutrinos untersucht wird. In diesem Zusammenhang ist es wichtig zu erwähnen, was man über dieses Gebiet in der Physik schon weiß und was aktuelle Forschungsschwerpunkte sind. Daraus resultierend ergibt sich das Ziel der vorliegenden Arbeit.
Neutronensterne können wir uns als sehr dichte Gebilde mit einer Masse von etwa 1.4 Sonnenmassen[1] bei einem Radius von 10-12 Kilometern vorstellen. Im Zentrum eines solchen Gebildes übersteigt die Dichte sogar diejenige von Kernmaterie[2]. Das Gewicht eines Zuckerwürfels aus Neutronensternmaterie ist bei dieser Dichte vergleichbar mit dem Gewicht der gesamten Menschheit auf der Erde. Die im Innern herrschende Temperatur ist mit einigen MeV im Vergleich zu den chemischen Potenzialen der Nukleonen sehr niedrig[3]. Materie unter solch extremen Bedingungen können wir bislang nicht herstellen und ihr Verhalten ist deshalb nur theoretisch vorhersagbar. Wir können weder durch Laborexperimente belegte Aussagen über die Zusammensetzung der Materie bei solch großen Dichten und gleichzeitig solch tiefen Temperaturen machen noch über die damit eng verbundene Zustandsgleichung, in die auch die Wechselwirkung zwischen den Teilchen eingeht. Die Erforschung von Neutronensternen könnte helfen, die vielen nebeneinander stehenden und zum Teil auch widersprüchlichen Theorien zu testen und neue Phänomene zu entdecken. Es ist allerdings schwierig, sich auf einen Neutronenstern zu setzen

[1] $M_\odot = 2 \cdot 10^{30} kg$
[2] $\rho_0 = 2,8 \cdot 10^{14} g/cm^3$ bzw. $0,16 fm^{-3}$
[3] 1K $\hat{=}$ $8.617 \cdot 10^{-5}$ eV, d.h. Raumtemperatur entspricht einer Energie von etwa 1/40 eV

und in Ruhe alles unter die Lupe zu nehmen. Erstens würde man wegen der starken Gravitationskraft sofort auf wenige Bruchteile eines Millimeters zusammengepresst werden und zweitens findet man einen Neutronenstern in unserer Galaxy relativ selten. Bei etwa 10^{11} Sternen ist nach groben Schätzungen jeder tausendste ein Neutronenstern. Der nächste bekannte ist etwa 40 Lichtjahre von der Erde entfernt, und somit sind wir bei der Erforschung solcher Gebilde auf Signale von ihnen angewiesen, die bei uns auf der Erde ankommen. Dies sind im wesentlichen zwei Quellen:

Elektromagnetische Strahlung:
Viele Neutronensterne rotieren sehr schnell um ihre eigene Achse (Pulsare). Durch die in seinem starken Magnetfeld befindlichen Elektronen entsteht Röntgenstrahlung. Bei geeignter Orientierung des Sternes überstreicht diese Strahlung die Erde. Durch die Rotation empfangen wir ein periodisches Signal. Frequenz und Intensität des Signals nehmen innerhalb eines sehr langen Zeitraumes ab.
Oft ist ein Neutronenstern auch eingebunden in ein Binärsystem. Seine Gravitationskraft auf seinen Partner ist dann üblicherweise so groß, dass dieser stetig Materie abgibt, die dann auf Spiralbahnen in den Neutronenstern stürzt. Auch dies lässt sich durch elektromagnetische Strahlung beobachten. Für ein solches System ist die Masse des Neutronensternes aus dem Keplerschen Gesetz einfach abzuschätzen. Für isolierte Neutronensterne ist dies wesentlich schwieriger und oft auch gar nicht möglich, deshalb sind auch nur die Massen von sehr wenigen Neutronensternen bekannt.

Neutrinosignale:
Während man bei älteren Neutronensternen Informationen aus den von ihnen emittierten elektromagnetischen Wellen bekommt, spielen die Neutrinos besonders bei dessen Lebensanfang eine dominante Rolle. Sie entstehen in gigantischen Mengen bei Supernovaexplosionen am Lebensende eines massereichen Sternes in dessen Zentrum und sind das einzige direkte Signal, da sie beinahe ungestört bis zu uns auf die Erde gelangen. Das heißt, sie verlieren auf dem Weg weder Energie noch ändern sie ihre Richtung. Man hofft, durch sie Informationen über die Mechanismen einer Supernova und über die Struktur von PNS zu bekommen. Obwohl Neutrinos nur schwach wechselwirken und somit nur äußerst selten mit Atomen oder Nukleonen reagieren, reicht die ungeheure Dichte eines PNS in den ersten 50 Sekunden aus, die Neutrinos nicht gleich aus dem Zentrum entkommen zu lassen. Der Wirkungsquerschnitt für die Wechselwirkung zwischen Neutrinos und Neutronen wird für diese Zeit so groß, dass die daraus resultierende freie Weglänge kleiner als der Sternradius wird ("Neutrino-Trapping"). Die weitere Entwicklung des Sternes hängt sogar in den ersten 10.000 Jahren nach der Explosion wesentlich von den Neutrinos ab, die erhebliche Mengen an Energie mitnehmen, sobald sie an die Oberfläche gelangen und entkommen können ("Neutrino-Cooling"). Da der oben erwähnte Wirkungsquerschnitt von den Eigenschaften der Sternmaterie abhängt, könnte eine Analyse der hier auf der Erde ankommenden Neutrinos Aufschlüsse über den Zustand dieser geben. Obwohl es bis heute für die Neutrinophysiker ein hartes Stück

Arbeit gewesen ist, überhaupt die Existenz von Neutrinos nachweisen zu können, besteht dennoch eine reelle Chance, deren Energie mit einer vernünftigen Statistik nachzuweisen. Während einer Supernova entstehen in nur etwa 10 Sekunden ungefähr 1000 mal mehr Neutrinos als die Sonne in ihrem ganzen 10 Milliarden Jahren langen Leben produziert [4] und man erwartet nach Hochrechnungen im Durchschnitt mindestens alle 50 Jahre eine Supernovaexplosion. Die letzte wurde am 23. Februar 1987 beobachtet. Sie fand in der großen Magellanischen Wolke 168.000 Lichtjahre von uns entfernt statt und trägt den Namen SN1987A. Drei Detektoren lieferten damals insgesamt 25 Neutrinosignale innerhalb von etwa 10 Sekunden: IMB in einer Salzmine in Ohio und Kamiokande II in einer Zinkmine in Japan, mit denen man eigentlich den Protonenzerfall nachweisen wollte, und der Detektor "Baksan" in Russland. Aus den Daten schloss man auf eine mittlere Energie der Elektron-Antineutrinos von 12.5±3 MeV und eine Zahl von $8{\cdot}10^{57}$ insgesamt bei dieser Explosion emittierten Neutrinos. Nach Abschätzungen entstand ein Neutronenstern von 30±20 km Durchmesser. Die Größenordnung der Ergebnisse stimmt mit den Modellen der Theoretiker im Rahmen der Fehlerschranken überein. Das Experiment hat gezeigt, dass es damals schon möglich war, mittlere Energien für die hier auf der Erde ankommenden Neutrinos zu bestimmen, wenn auch mit einer unbefriedigenden Statistik. Diese Tatsache ist auch für die vorliegende Arbeit interessant.
Wie bereits erwähnt, soll die Wechselwirkung von Neutrinos mit extrem dichter Kernmaterie, wie wir sie in Neutronensternen finden, untersucht werden. Dieses Thema ist kein unberührtes Forschungsgebiet mehr. In den letzten Jahren hat die Neutrino-Physik bei Supernova-Explosionen bei vielen Physikern große Aufmerksamkeit auf sich gezogen und es gibt eine bereits einige Arbeiten dazu:
Eine exakte Berechnung des Wirkungsquerschnittes für die Neutrino-Nukleon-Wechselwirkung ohne Wechselwirkung zwischen den Nukleonen findet man beispielsweise bei Schinder [1]. Reddy und Prakash entwickelten einen Formalismus, um Wirkungsquerschnitte für wechselwirkende Nukleonen mit effektiven Massen und Potenzialen zu berechnen [2]. In Übereinstimmung mit Sawyer (Referenzen [3], [4]) kamen sie zu dem Schluss, dass die starke Wechselwirkung großen Einfluss auf den Wirkungsquerschnitt hat [2], [5]. Die Effekte sind jedoch sehr stark abhängig von der Wechselwirkung der Nukleonen. Dies wird besonders in [2] deutlich, wo mehrere Skyrme-Wechselwirkungen für die Rechnungen verwendet wurden. Die resultierenden Wirkungsquerschnitte unterscheiden sich zum Teil erheblich sowohl in der Größenordnung als auch in der Form.
Ziel dieser Arbeit ist es nun, eine Parametrisierung der starken Wechselwirkung zwischen den Nukleonen bei der Berechnung der Wirkungsquerschnitte zu verwenden, die beaknnte Größen von Kernmaterie gut beschreibt. Insbesondere werden wir dabei auch Dichte- und Temperaturabhängigkeiten näher betrachten. Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Nach einem kurzen Überblick über die Abläufe bei einer Supernova und die dabei stattfindenden Reaktionsmechanismen im ersten und zweiten Kapitel rechnen wir den Wirkungsquerschnitt für an einem Nukleonengas streuende Neutrinos bei
T = 0 und endlicher Temperatur. Mit dem Begriff "Nukleonengas" sind hier die beiden

[4] Die Sonne produziert mehr als $2 \cdot 10^{38}$ Neutrinos pro Sekunde

Grenzfälle "Neutronenmaterie" und "symmetrische Kernmaterie", in der Neutronen- und Protonenanteil gleich sind, und Materie im Beta-Gleichgewicht gemeint. Nach einer kurzen Einführung in die Theorie der schwachen Wechselwirkung beginnen wir in Kapitel 3 mit einem einfachen Modell eines freien Gases nicht-wechselwirkender Kernteilchen und bauen dann schrittweise eine Wechselwirkung ein. Dies geschieht anfangs über eine Mean-Field-Näherung in Kapitel 7 und später mit RPA-Rechnungen in Kapitel 8. Die Arbeit endet mit einer Zusammenfassung der Ergebnisse und einem Ausblick.

Kapitel 2

Neutronensterne, Neutrinos und die schwache Wechselwirkung

Dieses Kapitel soll einen Überblick geben über die Vorgänge bei der Entstehung eines Neutronensternes und die Rolle, die die Neutrinos dabei spielen. Da die Neutrinos schwach wechselwirken, werden wir hier auch die für diese Arbeit wichtigen Grundlagen der schwachen Wechselwirkung behandeln.

2.1 Wie entsteht ein Neutronenstern?

Neutronensterne werden als Folge von Typ II Supernovae geboren, die durch den Kollaps des inneren Kerns sehr massereicher Sterne von M $\approx$ 8-25 $M_{\odot}$ ausgelöst werden. Sind die Atome im Kern eines solchen Sternes bis zum Eisen fusioniert, so wird dieser bei der Überschreitung einer kritischen Masse, die von der Konzentration der Elektronen abhängt (Chandrasekhar-Masse), gravitativ instabil. Zu diesem Zeitpunkt hat der Kern einen Durchmesser von etwa 4000 km, während der gesamte Stern einen Durchmesser von $10^7 - 10^9$ Kilometern besitzt. In sehr kurzer Zeit (wenige Millisekunden) kollabiert der Zentralbereich des Sterns. Für den Übergang von der Kontraktion in einen plötzlichen Zusammenbruch sind zwei Faktoren verantwortlich: Im Kern führt die Kontraktion zunächst zu enorm hohen Temperaturen ($5 \cdot 10^8$ K) und die Photonen haben genug Energie, um die Eisenkerne wieder in Heliumkerne zu dissoziieren. Das Ergebnis der Jahrmillionen andauernden vorausgegangenen Fusion wird also in kurzer Zeit wieder rückgängig gemacht. Dazu werden enorme Energiemengen verbraucht und folglich sinkt der thermische Druck. Außerdem wird bei solch hohen Dichten, wie sie bei der Kompression erreicht werden, der Entartungsdruck der Elektronen größer als der thermische Druck, was ebenfalls dazu beiträgt, den Gravitationskollaps zu verlangsamen. Oberhalb einer Dichte von 10^{10} g/cm^3 erreichen die Elektronen aufgrund des Pauliprinzipes eine Energie von 2.25 MeV und es wird energetisch günstiger, diese vom Kern einzufangen. Es werden durch die Reaktion

$$p + e \rightarrow n + \nu_e \qquad \text{Elektroneneinfang} \qquad (2.1)$$

Elektron-Neutrinos gebildet. Die Elektronendichte und damit der Entartungsdruck nehmen ab und das Zentralgebiet verdichtet sich weiter. Auch die Elektronenenergien steigen wieder an und die Wahrscheinlichkeit des Elektroneneinfangs, die proportional zum Quadrat der Elektronen-Energie wächst, erhöht sich rasch. Die Protonen werden immer schneller in Neutronen umgewandelt. Der Gravitationsdruck steigt proportional zu $1/r^2$ und der Kern kollabiert immer schneller. Die dabei entstehenden Neutrinos haben insgesamt eine Energie von $\approx 10^{58}$ MeV und eine mittlere Energie von 10 MeV pro Neutrino. Durch den heftigen Kernkollaps wächst die Dichte kurzzeitig auf doppelte Kernmateriedichte an. Der Entartungsdruck der Neutronen und die bei sehr kurzen Reichweiten repulsiven Kernkräfte lassen die Zustandsgleichung plötzlich steif werden. Der Kollaps stoppt, und die in den Kern einfallende Materie wird als sehr dichte Schockwelle bei einem Radius von ca. 20 km mit einer hohen Geschwindigkeit von ungefähr 10^4 km/s nach außen beschleunigt. Sie prallt mit den nachfolgenden, weniger dichten Sternschichten zusammen, die dabei explosionsartig weggesprengt werden. Die Schockwelle verliert bei diesem Vorgang schnell einen Großteil ihrer Energie und wird langsamer. Bei sehr massereichen Sternen kann die Stoßwelle sogar vorübergehend zum Stillstand kommen, bevor sie die äußeren Sternschichten erreicht. Durch Energie der Neutrinos aus dem heißen Kernbereich kann sie jedoch wieder in Gang gesetzt werden. Die abgesprengte Sternhülle wird schließlich eine sich immer weiter im Raum ausbreitende Gaswolke, die noch mehrere tausend Jahre lang Röntgen- und Radiostrahlung aussendet.
99% der durch den Kollaps freigesetzten Energie wird durch die entstandenen Neutrinos abgeführt. Diese entstehen zum einen aufgrund der bereits oben erwähnten Neutronisation (Reaktion 2.1), was aber nur einen kleinen Bruchteil der Gesamtneutrinozahl ausmacht, und zum anderen werden Neutrinopaare durch die Vernichtung eines Elektron-Positron-Paares thermisch erzeugt:

$$e^+ + e^- \to Z^0 \to \nu_i + \bar{\nu}_i \qquad \text{mit i} = \text{e},\mu,\tau \qquad \text{thermische Erzeugung von Neutrinos} \tag{2.2}$$

Dieser Prozess kühlt den Kern ab ("Kelvin-Helmholtz-Neutrino Kühlung"). Die benötigten Elektronen und Positronen entstehen aus der Paarerzeugung energiereicher Photonen. Die ungeheuren Dichten im Kern verhindern, dass die Neutrinos direkt nach außen gelangen. Die mittlere freie Weglänge ist mit einigen Metern bei Kernmateriedichte kleiner als der Sternradius. Treffen die im Kerninnern durch die Reaktionen 2.1 und 2.2 erzeugten Neutrinos auf die weiter außen liegenden Schichten, können verschiedene Reaktionen stattfinden: Das Neutrino kann an den Kernen oder Elektronen gestreut werden, ein Neutrino kann sich mit einem Antineutrino in ein Elektron-Positron umwandeln oder auch umgekehrt, oder Neutrinos können absorbiert werden beim Austausch eines W-Bosons mit einem Nukleon. Bei dem zuletzt genannten Prozess entstehen Elektronen oder Positronen:

$$\begin{aligned} &\nu_e + n \to p + e^- \text{ Neutrinoabsorption durch Austausch eines W-Bosons} \\ &\bar{\nu}_e + p \to n + e^+ \end{aligned} \tag{2.3}$$

Auf die möglichen Reaktionen werden wir in den nächsten Kapiteln näher eingehen.
Durch Diffusion gelangen die Neutrinos schließlich zu den äußeren Kernschichten und werden emittiert. Der Neutrinoausbruch dauert mehrere Sekunden. Diese Dauer wird von der für den Neutrinotransport benötigten Zeit bestimmt.
Welche Neutrinoluminositäten erwarten wir nun auf der Erde? Zunächst neutronisieren nur die äußeren Schichten des Kernes und man erwartet einen starken Elektron-Neutrino-Puls von wenigen Millisekunden Dauer. Ist die Temperatur hoch genug, so werden auch die anderen Neutrinoarten, Mu- und Tau-Neutrinos, erzeugt. Wegen des Elektronenverlustes durch die Neutronisation ist die Erzeugung von Antielektronneutrinos zunächst unterdrückt. Innerhalb kurzer Zeit aber erhöht sich die Umkehrreaktion 2.3 so weit, dass weitere Neutronisation stattfinden kann. Etwa 100 ms nach Beginn des Kollapses bleibt ein heißer, elektronenreicher Kern zurück, in dem noch ca. 90% der Gesamtenergie steckt. Den Kern bezeichnet man in diesem Zustand als Protoneutronenstern. Dieser schrumpft, neutronisiert dabei weiter und kühlt ab. Nach 20 Sekunden ist ein Neutronenstern entstanden. Weitere Einzelheiten über die Abläufe bei einer Supernova findet man z.B. in [6], [7], [8], [5] und [9].
In dieser Arbeit interessieren wir uns hauptsächlich für den neu entstandenen PNS und seine spätere Kühlung durch Neutrinos. Wir haben also Modellen von Neutronensternen zufolge Dichten im Bereich von 1-3 facher Kernmateriedichte und Temperaturen von einigen 10 MeV [10]. Die Elektron-Neutrinos haben in dieser Phase ein chemisches Potenzial von 250-450 MeV [11].

2.2 Die schwache Wechselwirkung

In diesem Abschnitt möchte ich auf einige Grundlagen zur Theorie der schwachen Wechselwirkung eingehen und ihre Bedeutung in der Astrophysik, besonders bei der Entstehung von Neutronensternen, erläutern. Literatur zu diesem Thema findet man z.B. in [6], [12] oder [13].
Grundsätzlich nehmen alle Fermionen an der schwachen Wechselwirkung teil. Trotzdem wurde sie als letzte der vier fundamentalen Wechselwirkungen erst im letzten Jahrhundert mit der Beobachtung des Beta-Zerfalls von Neutronen in Kernen entdeckt und näher untersucht. Der Grund dafür ist, dass sie mit einer Reichweite von nur etwa 10^{-3} fm und einer Kopplungskonstanten von der Größenordnung $1/\mathrm{m}_W^2$ mit $\mathrm{m}_W \approx 80$ GeV sehr schwach im Vergleich zur starken und elektromagnetischen Wechselwirkung ist und oft von diesen überdeckt wird. Sie wird erst wichtig, wenn kein anderer Prozess möglich ist. Dies ist beispielsweise beim Neutrinotransport in Supernova-Explosionen der Fall oder bei Fusionsprozessen in der Sonne, ohne die auf der Erde kein Leben möglich wäre.
Die klassische Theorie der schwachen Wechselwirkung, die bis in die 70er Jahre auch universell zur Beschreibung von allen schwachen Prozessen verwendet wurde, hat Enrico Fermi aufgestellt. In ihr wird die Wechselwirkung als punktförmige Wechselwirkung von zwei Strömen beschrieben. Punktförmig deshalb, weil in der Lagrangedichte keine

Propagatorterme auftreten, die den Austausch von Bosonen repräsentieren. Die moderne Feldtheorie jedoch verlangt Eichquanten als Austauschteilchen und damit auch Propagatorterme. Eine Theorie, die dieser Forderung nachkommt, wurde in den 60er Jahren von Glashow, Weinberg und Salam aufgestellt und ist heute als moderne Theorie der schwachen Wechselwirkung allgemein anerkannt ("Glashow-Weinberg-Salam-Theorie"). Anstelle der punktförmigen Wechselwirkung tritt hier der Austausch von geladenen $W^{\pm}$- und neutralen Z^0-Bosonen. Die W-Bosonen transportieren elektrische Ladung. Daher werden die zugehörigen Prozesse auch als geladene Ströme (engl.'charged current') bezeichnet. Sie können, genau wie die Gluonen, die Austauschteilchen der starken Wechselwirkung, auch selbst miteinander wechselwirken, was bei einer genauen Beschreibung der Vorgänge manchmal Schwierigkeiten bereitet, jedoch meistens vernachlässigt werden kann. Da die $W^{\pm}$-Bosonen an die Differenz von Vektor- und Axialvektorstrom koppeln, spricht man auch von der *V-A*-Theorie der schwachen Wechselwirkung. Für dieses Verhalten gibt es bislang keine wirklich tiefgehende Begründung, es steht nur im Einklang mit experimentellen Ergebnissen. Die *V-A*-Struktur impliziert eine pseudoskalare Hamiltonfunktion, was gleichzeitig eine Verletzung der Parität P bedeutet:

$$[P, H] \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{P nicht erhalten} \tag{2.4}$$

Das Z^0-Boson trägt keine Ladung und die mit dessen Austausch verbundenen Prozesse tauchen in der Literatur auch unter dem Namen "Neutraler Strom" oder "neutral current" auf. Im niederenergetischen Grenzfall, in dem der Impulsübertrag q klein gegen die Massen der Austauschbosonen ist, kann die Wechselwirkung weiterhin mit Fermis Theorie beschreiben werden, da der Propagatorterm näherungsweise konstant ist:

$$G(q) = \frac{g^2}{|q^2| + M_W^2} \approx \frac{g^2}{M_W^2} \qquad \text{für } \mathrm{M}_W \ll |q^2| \tag{2.5}$$

Auch in dieser Arbeit werden wir diese Näherung machen.
Im Verlaufe der Entwicklung eines Sternes hat die schwache Wechselwirkung mehrfach entscheidenden Einfluss. Beispielsweise initiiert sie den Gravitationskollaps des Zentrums eines massereichen Sternes, sorgt für die Neutronisierung der Materie im Kern und lässt Elemente mit Massen oberhalb von Eisen entstehen. Die schwache Wechselwirkung bestimmt auch wesentlich die Masse des Eisenkerns des Sternes und damit die Stärke und Evolution der bei einer Supernova-Explosion sich ausbreitenden Schockwelle. Die Bildung von Neutronensternen ist einer der wenigen Fälle, in denen die schwache Wechselwirkung ein makroskopisches Naturereignis entscheidend mitbestimmt. Für Neutronensternmaterie aus Neutronen, Protonen und Elektronen, wie wir sie in dieser Arbeit annehmen, sind prinzipiell folgend aufgeführte schwache Prozesse möglich:

1. e + p $\rightleftharpoons$ ν_e + n über geladene Ströme

2. e + ν $\rightarrow$ e + ν über geladene und neutrale Ströme

3. n + n $\rightarrow$ n + n + ν + $\bar{\nu}$ über neutrale Ströme

4. ν + p $\rightarrow$ ν + p

5. ν + n $\rightarrow$ ν + n

Die Elektroneneinfangrate (1) bestimmt maßgeblich die Dynamik des Kollapses und ist Hauptquelle der Neutrino-Produktion zu Beginn des Kollapses, wie bereits bei der Beschreibung einer Supernova-Explosion im vorigen Kapitel erläutert wurde.
Durch Wechselwirkung der Neutronen untereinander können auch Neutrino-Antineutrino-Paare erzeugt werden (3). Dieser Prozess ist zusammen mit der Streuung von Neutrinos an Elektronen (2) hauptsächlich verantwortlich für die Thermalisierung der Neutrinos. Die Neutrinos können hierbei nämlich im Vergleich zur Streuung an Nukleonen relativ viel Energie abgeben und auch aufnehmen [14].
Die Streuung von Neutrinos an Neutronen oder Protonen (4 und 5) trägt dagegen wesentlich zur Opazität für die Neutrinos bei. Für kleine Neutrinoenergien im Bereich von einigen MeV ist der differenzielle Wirkungsquerschnitt nach Fermis Theorie proportional zum Quadrat der Neutrinoenergie. Durch eine grobe Abschätzung ergibt sich daraus bei einer Dichte von $\rho_B = 10^{13} g/cm^3$ eine mittlere freie Weglänge von 100 m, was drei Größenordnungen kleiner als der Radius eines PNS ist.
In dieser Diplomarbeit interessieren uns die Vorgänge in der Entwicklungsphase eines PNS, während der die Neutrinos gefangen sind. Diese können an den Nukleonen streuen (4 und 5), wobei ein neutrales Z-Boson ausgetauscht wird. Ladung und Natur der beteiligten Teilchen werden dabei nicht geändert. Elektron-Neutrinos können aber mit Neutronen auch ein geladenes W-Boson austauschen und dabei absorbiert werden (1).
Der zugehörige Feynman-Graph ist in Abbildung 2.1 dargestellt. $\psi_l(k_i, s_i)$ und $\bar{\psi}_l^{'}(k_f, s_f)$ bezeichnen die Wellenfunktionen des ein- und auslaufenden Leptons mit Viererimpulsen k_i bzw. k_f und Spins s_i und s_f. Entsprechendes gilt für die Wellenfunktionen $\psi_k(p_i, S_i)$ und $\bar{\psi}_k^{'}(p_f, S_f)$ der ein- und auslaufenden Nukleonen. Beim geladenen Strom ist $\bar{\psi}_l^{'}(k_f, s_f)$ die Wellenfunktion des auslaufenden Elektrons und $\bar{\psi}_k^{'}(p_f, S_f)$ die des Protons. Hier steht q = (q_0,$\vec{q}$) für den ausgetauschten Viererimpuls. U_i bezeichnen die Potenzialterme der Nukleonen, die bei einem wechselwirkenden Nukleonengas auftauchen.
Da beide Prozesse mit einen einzigen Feynmangraphen dargestellt werden können, erhalten wir auch für beide denselben allgemeinen Ausdruck. Unterschiede machen sich nur in den Wellenfunktionen und damit in den Summen über die Spins und in den Kopplungskonstanten der Vertizes bemerkbar. In den folgenden Kapiteln werden wir die Wirkungsquerschnitte für die Streuung eines Neutrinos an einem Nukleonengas berechnen.

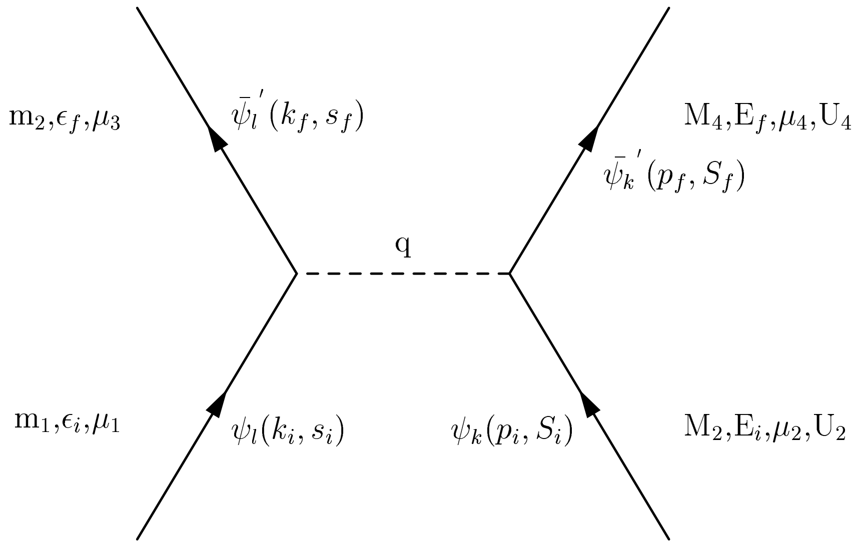

Abbildung 2.1: *Wechselwirkung eines Neutrinos mit einem Nukleon. Links die Wellenfunktionen der ein- und auslaufenden Leptonen, rechts die der zugehörigen Nukleonen.*

Kapitel 3

Neutrino - Streuung am Nukleonengas

3.1 Der Wirkungsquerschnitt

In diesem Kapitel soll der differenzielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Neutrinos an einem Nukleonengas als Funktion der einlaufenden Neutrinoenergie und des Viererimpulsübertrages hergeleitet werden. Der Ausdruck, den wir erhalten, gilt vorerst allgemein sowohl für den neutralen als auch für den geladenen Strom. In den folgenden Kapiteln werden wir dann für die explizite Berechnung beide Fälle getrennt behandeln.
Der differenzielle Wirkungsquerschnitt eines Neutrinos mit Impuls k_i, welches an einem einzelnen Nukleon mit Impuls p_i streut und dabei den Viererimpuls q überträgt, ist gegeben durch den Quotienten aus der Übergangsrate des Prozesses, multipliziert mit dem Phasenraumfaktor n$_i$, und dem einlaufenden Neutrinostrom $|\vec{j}|$:

$$d\sigma_{i\to f} = \frac{R_{i\to f}}{|\vec{j}|} n_i. \tag{3.1}$$

Die Indizes i und f kennzeichnen hierbei den jeweiligen Anfangs- und Endzustand der Streuung.
Wir betrachten im Folgenden einen Kasten vom Volumen V, der ein freies Nukleonengas enthält und ein mit vorgegebener Energie einlaufendes Neutrino ν.
Im Vakuum ist der Phasenraumfaktor $n_i = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3p$. In einem sehr dichten Nukleonengas, wie man es in Neutronensternen findet, sind die Zustände der ein- und auslaufenden Nukleonen und der des auslaufenden Leptons Pauli-geblockt. Dies äußert sich in zusätzlichen Funktionen $f(E) \leq 1$ im Phasenraumfaktor, die die temperaturabhängige Energieverteilung der besetzten Zustände angibt.
Nimmt man für alle Teilchen an, dass sie sich im thermischen Gleichgewicht befinden und einer Fermi-Verteilung

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp(\frac{E-\mu}{T})} \tag{3.2}$$

gehorchen, so sind die Phasenraumfaktoren gegeben durch:

$$\begin{aligned}
&f(E_i)\,\frac{V}{(2\pi)^3}\,d^3p_i && \text{für das einlaufende Nukleon}\\
&(1\,-\,f(E_f))\,\frac{V}{(2\pi)^3}\,d^3p_f && \text{für das auslaufende Nukleon}\\
&(1\,-\,f(\epsilon_f))\,\frac{V}{(2\pi)^3}\,d^3k_f && \text{für das auslaufende Lepton}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Außerdem müssen wir bei der Berechnung der Übergangsrate nach Fermis Goldener Regel über alle möglichen einlaufenden Spins mitteln und über die auslaufenden Spins und Impulse der Nukleonen summieren.
Der Betrag des einlaufenden Stromes ist $|\vec{j}| = \frac{|\vec{k_i}|}{\epsilon_i V}$. Damit erhalten wir für den differenziellen Wirkungsquerschnitt:

$$d^3\sigma = \frac{\epsilon V}{|\vec{k_i}|}\,\frac{V}{(2\pi)^3}\,f(E_i)\,d^3p_i\,\frac{V}{(2\pi)^3}\,(1\,-\,f(E_f))\,d^3p_f\,\frac{V}{(2\pi)^3}\,f(\epsilon_i)\,d^3k_f\,R_{i\to f} \tag{3.4}$$

Um die Übergangsrate zu berechnen, benötigen wir das S-Matrixelement S_{fi}:

$$R_{i\to f} = \frac{|S_{fi}|^2}{T} \qquad \text{T: Reaktionszeit} \tag{3.5}$$

mit

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4\,\delta^4(k_i\,+\,p_i\,-\,(k_f\,+\,p_f))\,\sqrt{\frac{m_1}{\epsilon_i V}\,\frac{m_3}{\epsilon_f V}\,\frac{M_2}{E_i V}\,\frac{M_4}{E_i V}}\,\mathcal{M}_{fi}$$

$\mathcal{M}_{fi}$ bezeichnet hier das invariante Matrixelement.
Das S-Matrixelement besteht aus einem Teil, der die freie Fortbewegung des Neutrinos beinhaltet, hier durch die erste δ_{fi}-Funktion repräsentiert, und einem Wechselwirkungsterm. In diesem garantiert die δ-Funktion, dass die Summe aller einlaufenden Viererimpulse gleich der der auslaufenden ist, Gesamtimpuls und -energie bleiben bei dem Streuprozess natürlich erhalten.
Mit der Relation $|\delta(x)|^2 = \frac{VT}{(2\pi)^4}\,\delta(x)$ kann das S-Matrixelement quadriert werden.
Der Wirkungsquerschnitt pro Raumwinkelement Ω und Energieübertrag $q_0 = \epsilon_i\,-\,\epsilon_f$ lautet mit diesen Überlegungen:

$$\frac{1}{V}\frac{d^3\sigma}{d\Omega\, dq_0} = \frac{m_1\, m_3\, M_2\, M_4}{(2\pi)^3}\,\frac{|\vec{k_f}|}{|\vec{k_i}|}\,\epsilon_f\,(1\,-\,f(\epsilon_f))$$
$$\times \int \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\,\frac{f(E_i)(1\,-\,f(E_f))}{\epsilon_f\, E_i\, E_f}(2\pi)^4\,\delta^4(k_i\,+\,p_i\,-\,(k_f\,+\,p_f))\sum_{s_i,s_f,S_i,S_f}|\mathcal{M}_{fi}|^2 \tag{3.6}$$

Im nächsten Abschnitt werden wir das invariante Matrixelement näher betrachten, um dann die Integration über p_f im Wirkungsquerschnitt ausführen zu können.

3.2 Das invariante Matrixelement $\mathcal{M}_{fi}$

Für kleine Impulsüberträge ist das invariante Matrixelement, das die Wechselwirkung zwischen dem Neutrino und dem Nukleon repräsentiert, durch das Produkt von Leptonen- und Nukleonenstrom gegeben:

$$\mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\,\hat{j}_\mu(k_f, s_f, k_i, s_i)\,\hat{J}^\mu(p_f, S_f, p_i, S_i)$$

G_F ist die Fermi-Kopplungskonstante für die schwache Wechselwirkung. Sie wurde experimentell zu $1.166 \cdot 10^{-11}$ MeV^{-2} bestimmt, wobei wir in natürlichen Einheiten rechnen ($\hbar = \mathrm{c} = 1$).
Der Leptonenstrom setzt sich zusammen aus den Wellenfunktionen der ein- und auslaufenden Leptonen und dem zugehörigen Vertex:

$$\hat{j}_\mu(k_f, s_f, k_i, s_i) = \bar{\psi}'_l(k_f, s_f)\,\gamma_\mu\,(\mathbb{1}\,-\,\gamma_5)\,\psi_l(k_i, s_i)$$

An dem Vertex erkennt man, dass die Neutrinos nur linkshändig sind und die formale Summe über die Spins auch weggelassen werden kann. Dieser projiziert nämlich auf linkshändige Teilchen.
Analog erhält man für den hadronischen Teil:

$$\hat{J}_\mu(p_f, S_f, p_i, S_i) = \sum_{k\,=\,n,p}\bar{\psi}'_k(p_f, S_f)\,\gamma_\mu\,(c_V^k\,-\,c_A^k\,\gamma_5)\,\psi_k(p_i, S_i)$$

c_V und c_A sind die vektoriellen und axialen Kopplungskonstanten, die für neutralen und geladenen Strom unterschiedliche Werte annehmen. Um Verwechslungen zu vermeiden, werden wir sie deshalb für geladene Ströme mit g_V und g_A bezeichnen.

Die aus Referenz [5] übernommenen Kopplungskonstanten sind in Tabelle 3.2 aufgeführt. Wir rechnen hier mit einem gegenüber dem Vakuumwert g_A modifizierten g_A^*, im

Folgenden trotzdem weiterhin mit g_A bezeichnet. Hierbei nehmen wir Bezug auf ein Paper von Carter un Prakash [15], das genau diesen 'Quenching-Effekt' des axialen Stromes behandelt. Der Effekt selbst ist schon lange bekannt. Nach der im Vakuum genau bestimmten mittleren Lebensdauer des Neutrons wurde daraus das Verhältnis von axialer zu vektorieller Kopplungskonstante in Neutronenmaterie zu $|g_A/g_V| = 1.2601 \pm 0.0025$ bestimmt [15]. Für Beta-Zerfälle in Kernen beschreibt die Theorie die Daten jedoch besser, wenn das Verhältnis ungefähr 1 beträgt. Als Ursache für das 'Quenching' der axialen Kopplungskonstante nennen Carter und Prakash unter anderem die teilweise Wiederherstellung der chiralen Symmetrie in nuklearer Materie, der Einfluss des $\Delta(1232)$ auf den axialen Vektorstrom und Tensor-Korrelationen in Kernen, bei denen Schaleneffekte wichtig sind. Wir rechnen in dieser Arbeit mit fixen Werten $g_A^* = 0.7\ g_A$ und $c_A^* = 0.7\ c_A$ für alle Dichten und Temperaturen.

Die Summe über alle Spins des quadrierten Matrixelementes lässt sich durch das Produkt von Leptonen- und Hadronentensor ausdrücken:

$$\sum_{Spins} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{G_F}{2} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} &\text{mit dem Leptonentensor} && L_{\mu\nu} = \sum_{s_i, s_f} \hat{j}^*_\mu \hat{j}_\nu \\ &\text{und dem Hadronentensor} && W_{\mu\nu} = \sum_{S_i, S_f} \hat{J}^*_\mu \hat{J}_\nu \end{aligned} \tag{3.8}$$

Die Produkte führen auf Spuren über γ-Matrizen. Nutzt man einige Eigenschaften dieser Matrizen aus, so können wir die Tensoren leicht berechnen. Dies findet man in Anhang A.
Man erhält letztendlich

	vektoriell	axial
neutraler Strom	$c_V^p = 0.04$	$c_A^p = 0.615$
	$c_V^n = -0.5$	$c_A^n = 0.615$
geladener Strom	$g_V = 1.$	$g_A = 1.23$

Tabelle 3.1: *Kopplungskonstanten für die schwache Wechselwirkung eines Neutrinos mit einem Nukleon.*

$$
\begin{aligned}
L_{\mu\nu}\, W_{\mu\nu} = \frac{4}{m_1\, m_3\, M_2\, M_4}\, \{ & c_V^2\, (k_i \cdot p_i\, k_f \cdot p_f \,+\, k_i \cdot p_f\, k_f \cdot p_i \,-\, M_2\, M_4\, k_i \cdot k_f) \\
& + c_A^2\, (k_i \cdot p_i\, k_f \cdot p_f \,+\, k_i \cdot p_f\, k_f \cdot p_i \,+\, M_2\, M_4\, k_i \cdot k_f) \\
& + 2\, c_V\, c_A\, (k_i \cdot p_i\, k_f \cdot p_f \,-\, k_i \cdot p_f\, k_f \cdot p_i)\}
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

Da wir den Wirkungsquerschnitt als Funktion des Energie- und Impulsübertrages angeben wollen, sind folgende Substitutionen nützlich:

$$
\begin{aligned}
\vec{p_i} &:= \vec{p} & \qquad \vec{p_f} &:= \vec{p} + \vec{q} \\
\vec{k_i} &:= \vec{k} & \qquad \vec{k_f} &:= \vec{k} - \vec{q}
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

Neutronen und Protonen haben Massen von etwa 1 GeV. Die Temperatur in einem Protoneutronenstern beträgt ca. 10 Sekunden nach der Explosion wenige MeV [16]. Somit ist wegen $T \ll M$ eine nichtrelativistische Behandlung der Nukleonen gerechtfertigt:

$$
p_i = \begin{pmatrix} E_i \\ \vec{p_i} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} M_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad p_f = \begin{pmatrix} E_f \\ \vec{p_f} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} M_4 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Die Masse der ein- und auslaufenden Leptonen kann vernachlässigt werden, da für Neutrinos sowie für die auslaufenden Elektronen $m \ll \mu$ gilt:

$$
k_i = \begin{pmatrix} \epsilon_i \\ \vec{k_i} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} |\vec{k_i}| \\ \vec{k_i} \end{pmatrix} \qquad\qquad k_f = \begin{pmatrix} \epsilon_f \\ \vec{k_f} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} |\vec{k_f}| \\ \vec{k_f} \end{pmatrix}
$$

Mit diesen Näherungen ist beispielsweise das Skalarprodukt von ein- und auslaufendem Neutrinoimpuls durch

$$
k_i \cdot k_f = \epsilon_i \epsilon_f\, (1 - \cos\theta) \tag{3.11}
$$

gegeben und wir können alle im invarianten Matrixelement auftauchenden Skalarprodukte mit der Energie des Neutrinos vor und nach dem Stoß und dem Streuwinkel θ ausdrücken:

$$
L_{\mu\nu}\, W_{\mu\nu} = \frac{4}{m_1\, m_3\, M_2\, M_4}\, \{c_V^2\, \epsilon_i\, \epsilon_f\, M_2\, M_4\, (1 + \cos\theta) + c_A^2\, \epsilon_i\, \epsilon_f\, M_2\, M_4\, (3 - \cos\theta)\}
$$

Damit erhalten wir für den Streuquerschnitt:

$$
\frac{1}{V}\frac{d^3\sigma}{d\Omega dq_0} = \frac{G_F^2}{8\pi^3}\, \epsilon_f^2\, (1 - f(\epsilon_f))\, [c_V^2(1 + \cos\theta) + c_A^2(3 - \cos\theta)]\, S(q_0, q) \tag{3.12}
$$

mit der “Response-Funktion” des Gases

$$S(q_0, q) = \frac{1}{2\pi^2} \int d^3p \, \delta(q_0 + E_{\vec{p}} - E_{\vec{p}+\vec{q}}) \, f(E_{\vec{p}})(1 - f(E_{\vec{p}+\vec{q}})) \tag{3.13}$$

Die Proportionalität zum Quadrat der auslaufenden Leptonenenergie ϵ_f^2 gilt nur für kleine Neutrinoenergien, da nur dann die Theorie von Fermi angewendet werden kann.
Während der erste Teil in dem Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt nur von der Kinematik des Streuprozesses bestimmt wird, steckt die “eigentliche Physik” in der Response-Funktion. Sie hängt davon ab, ob man geladene oder neutrale Ströme betrachtet, wie hoch Temperatur, Energie- und Impulsübertrag sind und ob man die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen berücksichtigt. Da die Neutrinos an die Vektor- und Axialvektorströme der Nukleonen koppeln, wird die Antwort parametrisiert in Response-Funktionen $\mathrm{S}_{\sigma\tau}$, wobei σ und τ die Werte 1 und 0 annehmen können, je nachdem, ob Spin und/oder Isospin ausgetauscht werden. Ohne Korrelationen zwischen den Nukleonen ist $\mathrm{S}_{00} = \mathrm{S}_{10} =: \mathrm{S}^0$. Die Funktion S^0 ist proportional zum Imaginärteil der Polarisationsfunktion Π^0 niedrigster Ordnung, die auch als “Lindhard-Funktion” bezeichnet wird:

$$S^0(q_0, q) = \frac{Im\Pi^0(q_0, q)}{1 - exp(-q_0/T)} \tag{3.14}$$

Die Polaristaionsfunktion selbst ist gegeben durch [2]

$$\Pi^0(q_0, q) = \frac{2}{(3\pi)^2} \int d^3p \left[\frac{f(E_p)[1 - f(E_{p+q})]}{q_0 + E_p - E_{p+q} + i\epsilon} - \frac{[1 - f(E_p)]f(E_{p+q})}{q_0 + E_p - E_{p+q} - i\epsilon} \right]. \tag{3.15}$$

In den folgenden Kapiteln werden wir die Response-Funktion für verschiedene Näherungen und unterschiedliche Zusammensetzung der Nukleonenmaterie genauer untersuchen und die daraus resultierenden Wirkungsquerschnitte vergleichen. Dabei gehen wir zunächst vom einfachsten Fall aus, der Streuung an einem freien Nukleonengas, und modifizieren dann unser Modell schrittweise bis hin zu RPA-Rechnungen.

Kapitel 4

Die Responsefunktion eines freien Nukleonengases

4.1 Temperatur $T = 0$

In diesem Kapitel wollen wir die Response-Funktion eines freien Nukleonen-Gases bei T = 0 ausrechnen. Im Folgenden diskutieren wir dann die daraus resultierenden differenziellen Wirkungsquerschnitte und die zugehörigen mittleren freien Weglängen.
Im vorigen Kapitel wurde ein Zusammenhang zwischen dem differenziellen Wirkungsquerschnitt für Neutrinostreuung an Nukleonen und der Response-Funktion hergleitet. Der Wirkungsquerschnitt ist proportional zur Response-Funktion, welche durch

$$S(q_0, q) = \frac{1}{2\pi^2} \int d^3p \; f(E_{\vec{p}}) \; (1 - f(E_{\vec{p}+\vec{q}})) \; \delta(q_0 + E_{\vec{p}} - E_{\vec{p}+\vec{q}}) \tag{4.1}$$

gegeben ist (Gleichung 3.13).
Im freien Gas unterscheiden sich die Massen von Neutronen und Protonen nur um 1.3 MeV, was im Vergleich zu den chemischen Potenzialen, die wir bei solch hohen Dichten wie in einem Neutronenstern haben, vernachlässigbar klein ist. Wir nehmen deshalb für dieses Kapitel $M_2 = M_4 = M = 939$ MeV an. Da die Nukleonen untereinander nicht wechselwirken, ist ihre Gesamtenergie allein durch die kinetische Energie gegeben. Die Dispersionsrelation für ein einzelnes Nukleon lautet demnach

$$E(p) = \frac{p^2}{2M_n}. \tag{4.2}$$

p und q bezeichnen ab jetzt die Beträge der Dreierimpulse.
Für die Energie der Nukleonen nehmen wir also in unseren Rechnungen nur die erste jeweils führende Ordnung mit: Bei Energiedifferenzen E_n-E_p ist dies $E(p)$ aus Gleichung 4.2, wobei p dabei den Relativimpuls bezeichnet, in den anderen Fällen ist die Nukleonenenergie allein durch die Masse des Nukleons gegeben.

Für T = 0 sind die Fermi-Funktionen $f(E_{\vec{p}})$ und $f(E_{\vec{p}+\vec{q}})$ der ein- und auslaufenden Teilchen θ - Funktionen, welche die Grenzen der Integration mitbestimmen:

$$
\begin{aligned}
f(E_{\vec{p}}) &= \theta\left(\mu_2 - E(p)\right) = \theta\left(p_{f2} - p\right) \\
1 - f(E_{\vec{p}+\vec{q}}) &= \theta\left(p - \sqrt{p_{f4}^2 - 2Mq_0}\right) =: \theta\left(p - p_2\right)
\end{aligned}
$$

p_{f2} und p_{f4} bezeichnen die Fermienergien von ein- und auslaufendem Nukleon.
Ob das Argument der δ-Funktion für bestimmte Impulse $\vec{p}$ verschwinden kann und die Response-Funktion damit nicht null wird, hängt vom Betrag des Impulses $\vec{p}$ des einlaufenden Teilchens ab. Um das zu sehen, sind einige Umformungen hilfreich:

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0 + E_{\vec{p}} - E_{\vec{p}+\vec{q}}) &= \delta\left(q_0 + \frac{p^2}{2M} - \frac{p^2 + q^2 + 2pq\cos\theta}{2M}\right) \\
&= \frac{M}{pq}\,\delta\left(\cos\theta - \frac{M}{pq}\left(q_0 - \frac{q^2}{2M}\right)\right) \\
&=: \frac{M}{pq}\,\delta(\cos\theta - \cos\theta_0)
\end{aligned}
$$

Hierbei haben wir die Eigenschaft der δ-Funktion $\delta(ax - x_0) = \frac{1}{|a|}\,\delta\left(x - \frac{x_0}{a}\right)$ benutzt.
Der Betrag von $\cos\theta_0$ darf nicht grösser als 1 werden, wenn das Argument der δ-Funktion verschwinden soll. Dies liefert eine untere Grenze für den Impuls p:

$$
|\cos\theta_0|^2 \;\leq 1 \;\Leftrightarrow\; p \;\geq \frac{M}{q}\left|q_0 - \frac{q^2}{2M}\right| =: p_- \tag{4.3}
$$

Daraus resultierend wird der Integrand durch eine weitere θ-Funktion eingeschränkt:

$$
\delta(q_0 + E_{\vec{p}} - E_{\vec{p}+\vec{q}}) = \frac{M}{pq}\,\delta(\cos\theta - \cos\theta_0)\theta(p^2 - p_-^2) \tag{4.4}
$$

Mit der δ-Funktion für den Winkel θ können wir problemlos über beide Raumwinkel integrieren. Es bleibt das Integral über den Betrag des Impulsübertrages zu lösen:

$$
S(q_0, q) = \frac{M}{\pi q}\int_0^\infty p dp\,\theta_1(p^2 - p_-^2)\,\theta_2\left(p_{f2} - p\right)\theta_3\left(p - p_2\right)
$$

Wir haben über drei θ-Funktionen zu integrieren, wobei verschiedene Fälle eintreten können. Für die Response-Funktion erhalten wir mit diesen Überlegungen:

$$
S(q_0, q) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } p_{f2} \leq p_- \text{ oder } p_{f2} \leq p_2 \\ \frac{M}{2\pi q}(p_{f2}^2 - p_u^2) & \text{sonst} \end{cases}
$$

$$p_u = \begin{cases} p_2 & \text{für} \quad q_0 \leq q_{0sp} \\ p_- & \text{für} \quad q_0 > q_{0sp} \end{cases} \qquad \text{mit } q_{0sp} = \frac{q}{M}(p_{f4} - \frac{q}{2}). \tag{4.5}$$

Die Bedingung $p_{f2} \geq p_2$, für die $S(q_0, q)$ endliche Werte annimmt, ist äquivalent zu der Forderung, dass der Energieübertrag q_0 größer ist als die Differenz der chemischen Potenziale von aus- und einlaufendem Nukleon:

$$q_0 \geq \mu_4 - \mu_2 =: \hat{\mu} \tag{4.6}$$

$p_{f2} \leq p_2$ liefert den maximal möglichen Energieübertrag bei fest vorgegebenem Impulsübertrag:

$$q_{0max} = \frac{(k_{f2} + q)^2}{2M} - \frac{k_{f2}^2}{2M}$$

Abbildung 4.1 zeigt den differenziellen Wirkungsquerschnitt des neutralen Stromes für Neutrinos in Neutronenmaterie als Funktion des Energieübertrages q_0 bei verschiedenen Dichten. Die Neutrinoenergie ϵ_i und der Impulsübertrag q sind hier jeweils 30 MeV. Zugehörige chemische Potenziale für die Neutronen findet man in Tabelle 4.1
In allen Fällen, die wir in diesem Kapitel behandeln, nehmen wir für die Neutrinos ein chemisches Potenzial von $\mu_\nu = 0$ an.
Man sieht, dass der maximal mögliche Energieübertrag mit der Nukleonendichte ansteigt, da auch der Fermiimpuls der Nukleonen mit zunehmender Dichte steigt. Die Größenordnung des Wirkungsquerschnittes selbst hängt, zumindest für den gezeigten Bereich, nicht wesentlich von der Dichte ab.
Der Knick resultiert aus der abschnittsweise definierten Response-Funktion und tritt bei q_{0sp} auf.
Im Vergleich zu Abbildung 4.1 zeigt Abbildung 4.2 den Wirkungsquerschnitt des neutralen Stromes in symmetrischer Kernmaterie für dieselben Dichten und $\epsilon_i = q = 30$ MeV. Chemische Potenziele können in Tabelle 4.1 nachgelesen werden. Der Wirkungsquerschnitt für

	ρ_B/ρ_0	0.25	1	2
T = 0	μ_n in MeV	23.21	58.49	92.84
T = 1 MeV	μ_n in MeV	23.17	58.47	92.83
T = 10 MeV	μ_n in MeV	18.86	57.00	91.34
T = 20 MeV	μ_n in MeV	15.34	53.8	88.98

Tabelle 4.1: *Chemische Potenziale in Neutronenmaterie bei verschiedenen Temperaturen.*

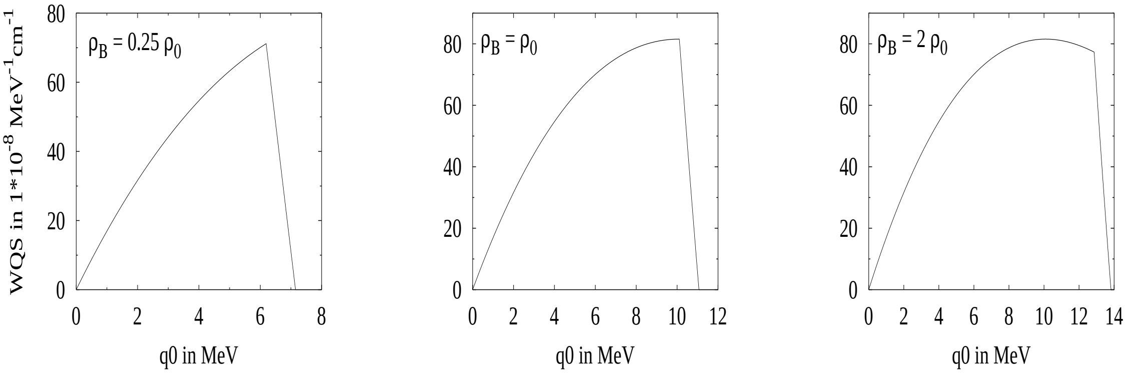

Abbildung 4.1: *Der differenzielle Wirkungsquerschnitt pro Raumwinkelelement Ω und Energieübertrag q_0 : $\frac{1}{V}\frac{d^3\sigma}{d\Omega dq_0}$ für Neutrinos in Neutronenmaterie bei unterschiedlichen Dichten als Funktion des Energieübetrages q_0. Die Energie des einlaufenden Neutrinos ϵ_i und der Impulsübertrag q betragen beide 30 MeV, $T = 0$.*

die Streuung an Protonen ist etwas kleiner, was von den für Protonen und Neutronen unterschiedlichen Kopplungskonstanten verursacht wird. Der Gesamtwirkungsquerschnitt ist um fast eine Größenordnung höher als in Neutronenmaterie. Der maximale Energieübertrag ist dagegen geringer, da auch die Fermi-Energien von Protonen und Neutronen bei gleicher Dichte kleiner sind als in Neutronenmaterie.

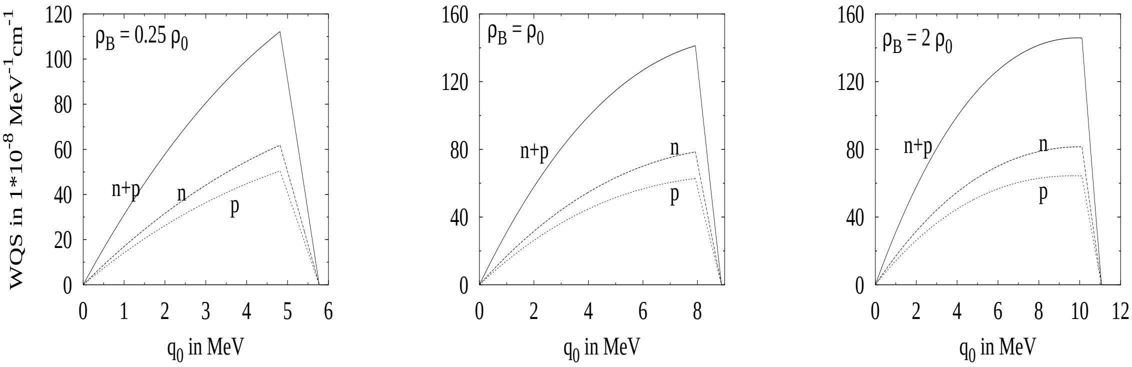

Abbildung 4.2: *Der differenzielle Wirkungsquerschnitt des neutralen Stromes bei T=0 für Neutrinos in symmetrischer Kernmaterie bei unterschiedlichen Dichten. $q = \epsilon_i = 30$ MeV.*

ρ_B/ρ_0	0.25	1	2
$\mu_n = \mu_p$ in MeV	14.62	36.84	58.49

Tabelle 4.2: *Chemische Potenziale in symmetrischer Materie bei $T = 0$.*

Wenn wir neutrale symmetrische Kernmaterie betrachten, haben wir extrem hohe Elektronendichten und damit auch sehr hohe chemische Potenziale für die Elektronen. Die Reaktionen, bei denen geladene Bosonen ausgetauscht werden (geladener Strom), sind deshalb für kleine Neutrinoenergien Pauli-geblockt und erst für Energien ab einigen hundert MeV für den uns interessierenden Dichtebereich möglich. Da diese Energien unrealistisch hoch sind für einen Neutronenstern und um mit den zuvor gezeigten Bildern vergleichen zu können, haben wir den Pauli-Blocking-Faktor der Elektronen in Bild 4.3 weggelassen. Dies gilt für alle in dieser Arbeit gezeigten Wirkungsquerschnitte in symmetrischer Materie. Man sieht, dass der Wirkungsquerschnitt für den geladenen Strom um etwa einen Faktor zwei höher ist als für den neutralen Strom. Dies resultiert aus den betragsmäßig größeren Kopplungskonstanten. Die chemischen Potenziale für Protonen und Neutronen findet man in Tabelle 4.2.

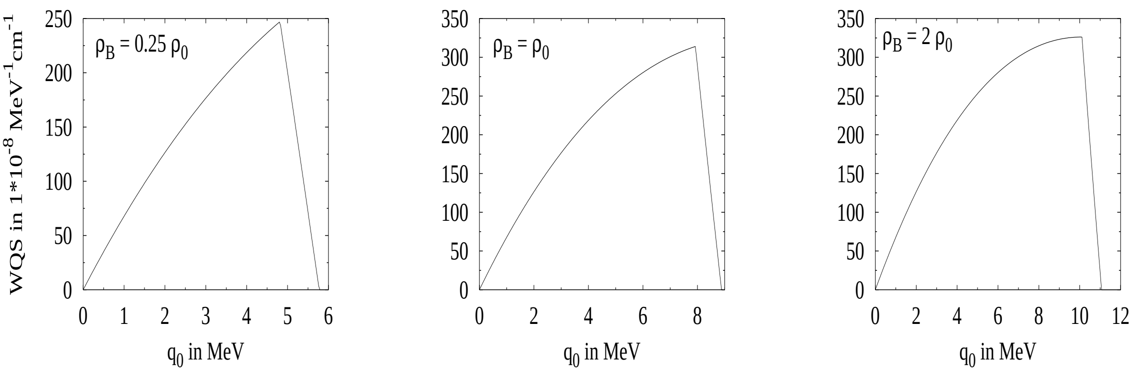

Abbildung 4.3: *Der differenzielle Wirkungsquerschnitt des geladenen Stromes bei T=0 für Neutrinos in symmetrischer Kernmaterie bei unterschiedlichen Dichten. Der Pauli-Blockingsfaktor der Elektronen wurde hier nicht berücksichtigt. Die Energie des einlaufenden Neutrinos und der Impulsübertrag betragen beide 30 MeV.*

Um die zu den differenziellen Wirkungsquerschnitten zugehörige freie Weglänge λ anzugeben, müssen wir uns den totalen Wirkungsquerschnitt pro Volumeneinheit V beschaffen. Dazu integrieren wir über den Raumwinkel Ω und den Energieübertrag q_0:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\sigma}{V} = \int \frac{d^3\sigma}{V d\Omega dq_0} d\Omega dq_0$$

Mit Gleichung 3.12 erhalten wir folgenden Ausdruck:

$$\lambda = \left[\frac{G_F^2}{2\pi^2} [c_V^2 + 3c_A^2] \int_{-\infty}^{\infty} (\epsilon_i - q_0)^2 (1 - f(\epsilon_f))\, S(q_0, q) dq_0 \right]^{-1}$$

Über das Raumwinkelelement dΩ wurde bereits integriert. Für T = 0 sind die Fermi-Funktionen θ-Funktionen und wir haben somit über drei θ-Funktionen zu integrieren:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda} =& \frac{G_F^2}{2\pi^2}[c_V^2 + 3c_A^2]\frac{M}{2\pi q} \\
&\cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\epsilon_i - q_0)^2 \theta_1(\epsilon_f - \mu_3)\theta_2(q_{0max} - q_0)\theta_3(q_0 - \hat{\mu})(p_{f2}^2 - p_u^2)
\end{aligned}
$$

Folglich haben wir wieder verschiedene Fälle zu unterscheiden, abhängig vom Impulsübertrag q und von der Energie des einlaufenden Leptons ϵ_i.
Falls $\hat{\mu} \geq \epsilon_i - \mu_3$ ist, wird die Response-Funktion null und die mittlere freie Weglänge damit unendlich. Das einlaufende Neutrino hat zu wenig Energie, um eine Wechselwirkung mit den Nukleonen einzugehen: Der für die Nukleonen minimale Energieübertrag ist $\hat{\mu}$, bei kleinerem q_0 ist der Prozess verboten, da das auslaufende Nukleon Pauli-geblockt wäre. Umgekehrt muss aus demselben Grund für das auslaufende Lepton ebenfalls eine Energie bleiben, die oberhalb von dessen chemischem Potenzial liegt. Diese beiden Forderungen liefern eine untere Grenze für ϵ_i.

In allen anderen möglichen Fällen verschwindet die Response-Funktion nicht. Die auftretenden Integrale sind einfach auszuführen, da es sich nur um Polynome in q_0 handelt. Wir erhalten jedoch relativ lange Terme, welche im Anhang A näher erläutert werden.
Für die inverse freie Weglänge erhält man schließlich

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{G_F^2}{2\pi^2}(c_V^2 + 3c_A^2)\frac{M}{2\pi q}(A_i - B_i - C_i).$$

A_i, B_i und C_i sind Terme, die wir nach der Integration erhalten. Sie werden in Anhang A aufgeführt.
In Bild 4.4 werden die mittleren freien Weglängen als Funktion der Baryonendichte gezeigt. Für unseren Dichtebereich liegen diese bei einigen Metern. Für den neutralen Strom in symmetrischer Materie ergibt sich aus $\sigma_{tot} = \sigma_n + \sigma_p$ für die freie Weglänge:

$$\lambda = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_p}} \tag{4.7}$$

Die freie Weglänge nimmt beim neutralen sowie beim geladenen Strom mit zunehmender Dichte ab und beträgt in beiden Fällen bei Kernmateriedichte nur noch einige Meter.

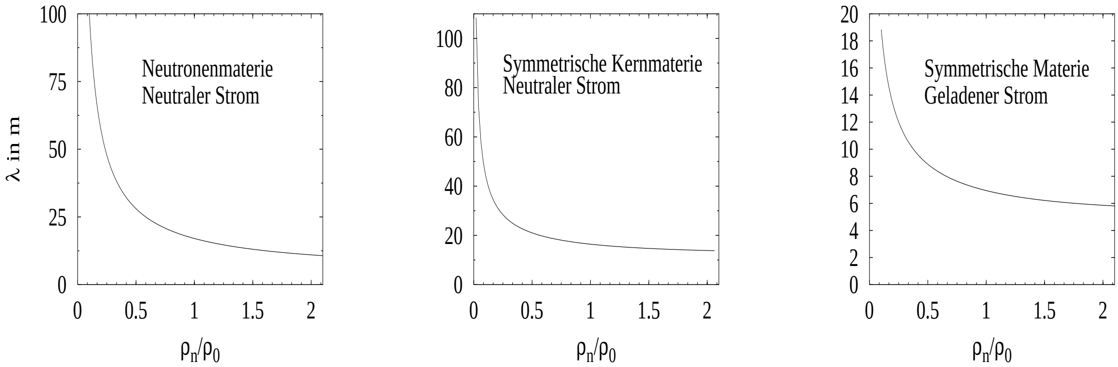

Abbildung 4.4: *Die mittlere freie Weglänge eines Neutrinos in Neutronen- und symmetrischer Kernmaterie als Funktion der Dichte für $q = \epsilon_i = 30$ MeV*

4.2 Endliche Temperatur

Geht man nun über zu endlichen Temperaturen, so sind die Fermi-Funktionen, über die wir in Gleichung 4.1 intergieren müssen, um die Response-Funktion zu erhalten, nicht mehr durch θ-Funktionen gegeben. Die untere Integrationsgrenze ist in diesem Fall p_-, eine obere Grenze gibt es nicht. Die Response-Funktion nimmt somit folgende Form an:

$$S(q_0, q) = \frac{M^2 T}{\pi q} \int_{y(p_-)}^{\infty} dy \, \frac{1}{1 + \exp(y)} \, \frac{1}{exp\left(y - \frac{1}{T}\left(\frac{p^2}{2M} + q_0 - \mu_4\right) + 1\right) + 1}$$

wobei

$$y = \frac{\frac{p^2}{2M} - \mu_2}{T} .$$

Mit dieser Substitution lässt sich die Funktion analytisch integrieren. Man erhält schließlich folgenden Ausdruck für die Response-Funktion:

$$S(q_0, q) = \frac{M^2 T}{\pi q} \frac{1}{1 - \exp(-x)} \cdot (x + \xi_-) \tag{4.8}$$

$$\xi_- = \ln\left(\frac{1 + \exp(y)}{1 + \exp(y + x)}\right) \qquad x = \frac{\mu_2 - \mu_4 + q_0}{T}$$

Bei endlicher Temperatur gibt es keinen exakten Wert für den maximalen Impuls- und Energieübertrag.

In den Abbildungen 4.5, 4.6 und 4.7 sind die Wirkungsquerschnitte in Neutronenmaterie für unterschiedliche Temperaturen gezeigt. Man sieht, dass mit steigender Temperatur auch der Wirkungsquerschnitt für negative q_0 größer wird. Je höher die Temperaturen in einem Neutronenstern sind, desto effektiver ist also auch die Kühlung durch die Neutrinos,

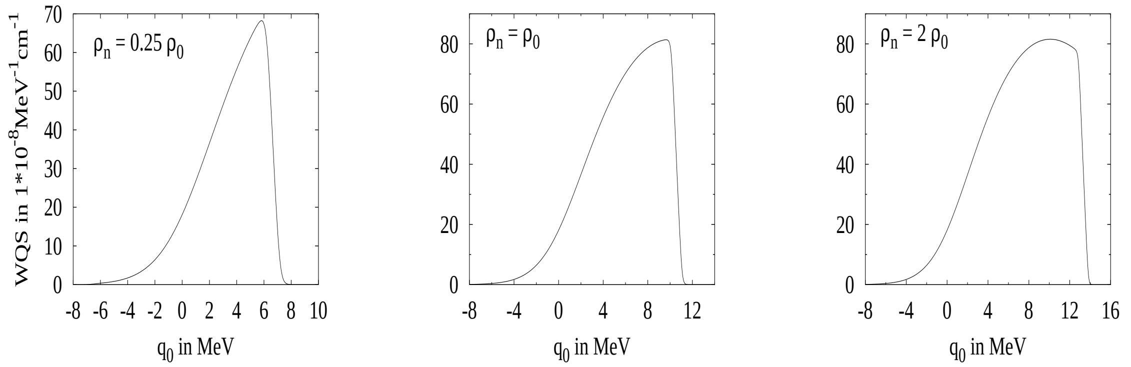

Abbildung 4.5: *Der differenzielle Wirkungsquerschnitt in Neutronenmaterie als Funktion des Energieübertrages bei $T = 1$ MeV für verschiedene Dichten. $q = \epsilon_i = 30$ MeV. Zugehörige chemische Potenziale sind in Tabelle 4.1 aufgeführt.*

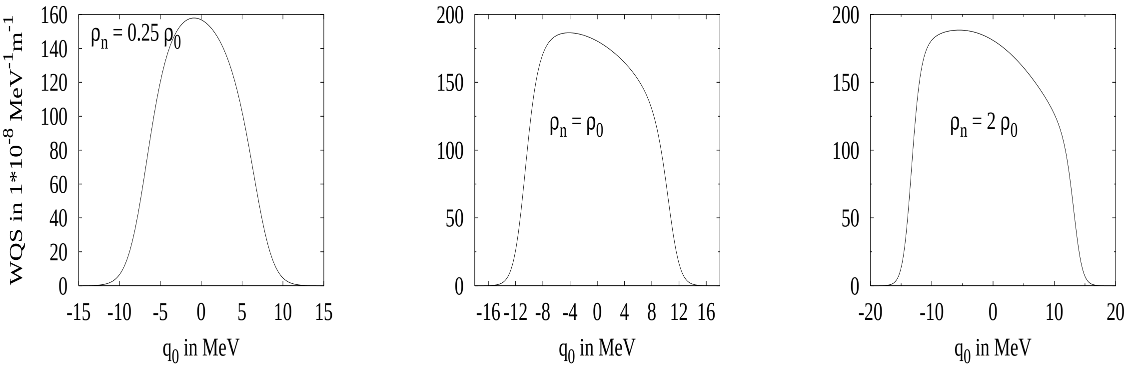

Abbildung 4.6: *Der differenzielle Wirkungsquerschnitt in Neutronenmaterie bei $T = 10$ MeV. $q = \epsilon_i = 30$ MeV. Chemische Potenziale findet man in Tabelle 4.1.*

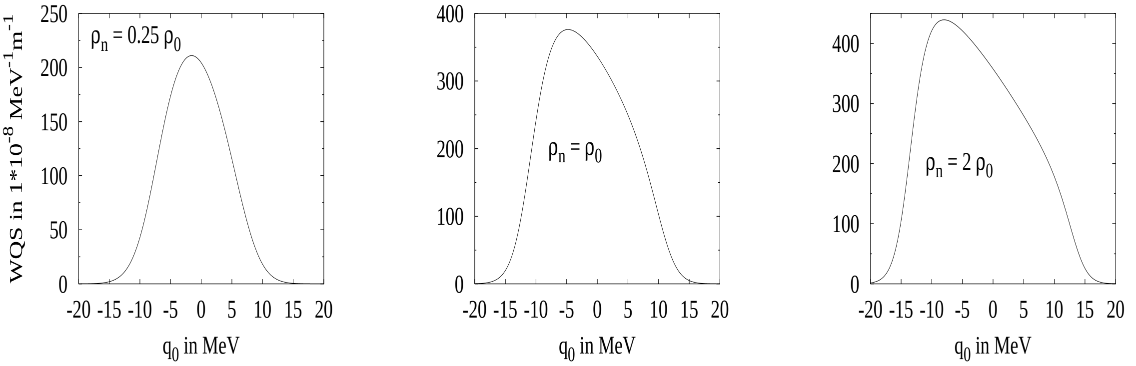

Abbildung 4.7: *Der differenzielle Wirkungsquerschnitt in Neutronenmaterie bei $T = 20$ MeV. $q = \epsilon_i = 30$ MeV. Chemische Potenziale findet man in Tabelle 4.1*

da die Nukleonen verglichen mit kalter Materie bei einer Wechselwirkung mehr Energie an das Neutrino abgeben. Mit steigender Temperatur nimmt der Wirkungsquerschnitt für eine feste Dichte insgesamt zu. Das chemische Potenzial der Neutronen ist im Vergleich zu T = 0 kleiner (Tabelle 4.1).
Für den geladenen Strom in symmetrischer Materie beobachten wir dieselben Effekte, wenn wir zu endlichen Temperaturen gehen: Insgesamt wird der Wirkungsquerschnitt für steigende Temperatur größer und verbreitert sich hin zu größeren Energieüberträgen. Das Maximum verschiebt sich zu negativen q_0. Abbildung 4.8 verdeutlicht diesen Effekt.

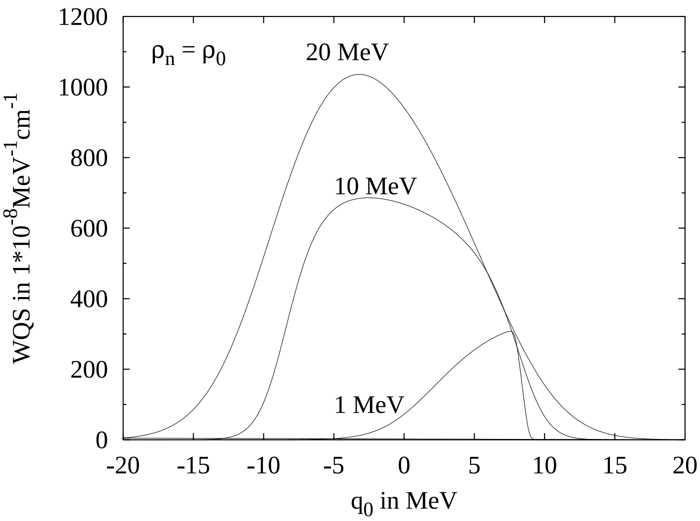

Abbildung 4.8: *Der differenzielle Wirkungsquerschnitt für den geladenen Strom in symmetrischer Materie bei verschiedenen Temperaturen und Kernmateriedichte.* $q = \epsilon_i = 30$ *MeV*

Die mittlere freie Weglänge läßt sich bei endlicher Temperatur nicht mehr vollständig analytisch bestimmen. Über den Energieübertrag q_0 müssen wir numerisch integrieren:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{G_F^2}{2\pi^2}[g_V^2 + 3g_A^2] \int_{-\infty}^{\infty} (\epsilon_i - q_0)^2 (1 - f(\epsilon_i - q_0))\, S(q_0, q) dq_0, \tag{4.9}$$

wobei

$$1 - f(\epsilon_i - q_0) = \frac{1}{1 + exp(\mu_3 - \epsilon_i + q_0)}. \tag{4.10}$$

Abbildung 4.9 zeigt die aus dem differenziellen Wirkungsquerschnitt für den neutralen Strom resultierende freie Weglänge als Funktion der Baryonendichte für Neutronenmaterie und symmetrische Kernmaterie. Diese liegt auch hier im Meterbereich, wird aber mit

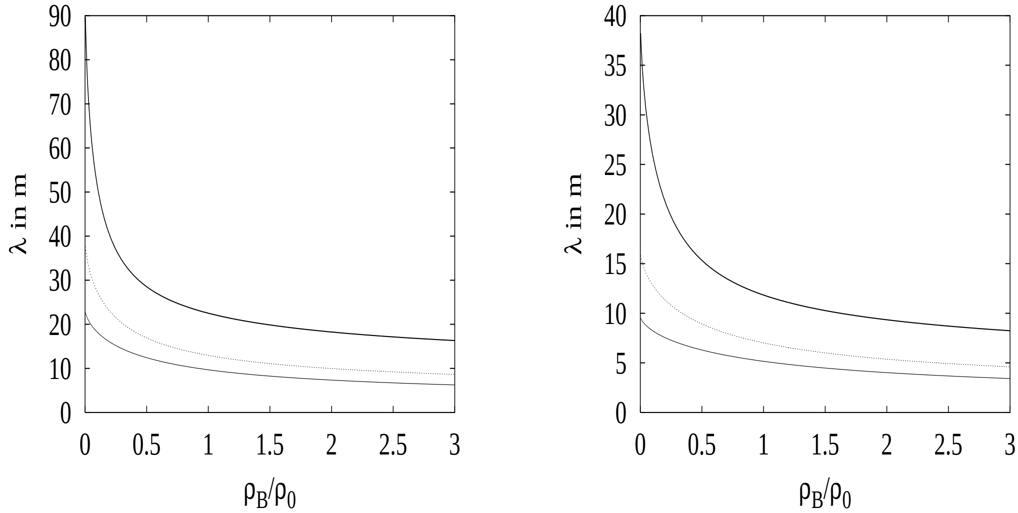

Abbildung 4.9: *Die mittlere freie Weglänge für Neutrinos rechts in Neutronenmaterie und links in symmetrischer Materie (nur neutraler Strom) als Funktion der Baryonendichte bei verschiedenen Temperaturen:* $T = 10$ *MeV (dicke durchgezogene Linie),* $T = 20$ *MeV (gestrichelte Linie) und* $T = 30$ *MeV (dünne durchgezogene Linie).* $q = \epsilon_i = 30$ *MeV.*

steigender Temperatur deutlich kleiner, da auch der differenzielle Wirkungsquerschnitt sowohl größer als auch breiter wird bei höheren Temperaturen.

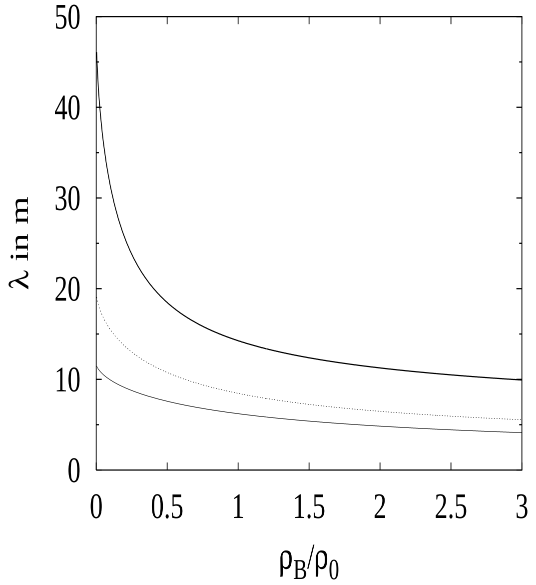

Abbildung 4.10: *Die mittlere freie Weglänge für Neutrinos in symmetrischer Materie (nur geladener Strom) als Funktion der Baryonendichte bei verschiedenen Temperaturen (siehe Abbildung 4.9).* $q = \epsilon_i = 30$ *MeV.*

In Abbildung 4.10 sieht man die freie Weglänge für den geladenen Strom in symmetrischer Materie. Die Größe der freien Weglänge ist vergleichbar mit der aus dem neutralen Strom in symmetrischer Materie resultierenden, da die Kopplungskonstanten für den geladenen Strom zwar größer sind, jedoch nur die Neutronen für eine solche Wechselwirkung zur Verfügung stehen.

Kapitel 5

Kernmaterie im Beta-Gleichgewicht

5.1 Temperatur $T = 0$

Im letzten Kapitel haben wir nur reine Neutronen- und symmetrische Kernmaterie betrachtet. In diesem Kapitel sollen Dichten und daraus resultierende chemische Potenziale für Materie aus Neutronen, Protonen und Elektronen im Beta-Gleichgewicht ausgerechnet werden. Es wird sich zeigen, dass ein nichtverschwindendes chemisches Potenzial der Neutrinos den Protonenanteil erheblich vergrößert im Vergleich zu Materie ohne Neutrinos. Die genaue Zusammensetzung der Materie beeinflusst den Neutrino-Nukleon-Wirkungsquerschnitt des neutralen Stromes auf Grund der unterschiedlichen Kopplungskonstanten für Neutronen und Protonen. Der Wirkungsquerschnitt für den geladenen Strom hängt sehr stark von dem Potenzial der Elektronen und $\hat{\mu}$ (Glg. 4.6) und damit auch von dem Anteil der Protonen ab.
In diesem Abschnitt nehmen wir immer noch nichtwechselwirkende Nukleonen an, wir werden aber in den folgenden Kapiteln schrittweise eine Wechselwirkung einbauen.

Wie setzt sich nun Materie im Beta-Gleichgewicht bei vorgegebener Baryonendichte ρ_B zusammen? Nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik ist die Änderung der Energie Q eines Systems aus i Teilchenarten mit zugehörigen chemischen Potenzialen μ_i gegeben durch

$$dQ = dU + pdV - \sum_i \mu_i dY_i \tag{5.1}$$

Hierbei bezeichnen dU und pdV jeweils die Änderungen der inneren und der mechanischen Energie, $\mu_i \mathrm{d}\mathrm{Y}_i$ gibt die Änderung der Energie bei einer Variation der verschiedenen Teilchendichten an. Betrachtet man ein adiabatisches System, so wird dQ = 0. Nimmt man außerdem ein konstantes Volumen und eine sich nicht ändernde Energiedichte an, so wird zusätzlich $dV = dU = 0$. Mit diesen Bedingungen vereinfacht sich 5.1 zu

$$\sum_i \mu_i dY_i = 0 \tag{5.2}$$

Bei Materie im Beta-Gleichgewicht läuft folgende Reaktion nach links und rechts im Gleichgewicht ab:

$$n + \nu_e \rightleftharpoons p + e \tag{5.3}$$

Damit bekommen wir $dY_n = dY_\nu = -dY_e = -dY_p$, so dass mit 5.2 die Summen der chemischen Potenziale auf der linken und rechten Seite gleich sind:

$$\mu_n + \mu_{\nu_e} = \mu_p + \mu_e \tag{5.4}$$

Die chemischen Potenziale sind über die Fermi-Verteilung $f(p)$ eindeutig mit den Dichten verknüpft:

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p\, f(p) \tag{5.5}$$

g gibt den Entartungsfaktor des Fermions an und ist für Neutronen, Protonen und Elektronen 2, da diese zwei Spinzustände annehmen können, und für Neutrinos 1. Die Fermi-Funktionen sind für T = 0 wieder θ-Funktionen, so dass die Integration leicht ausgeführt werden kann und wir folgenden Zusammenhang zwischen Dichten und chemischem Potenzialen erhalten:

$$\mu = \frac{(3\pi^2\rho)^{\frac{2}{3}}}{2M} \qquad \text{für Protonen und Neutronen} \tag{5.6}$$

$$\mu = \left(\frac{6\pi^2}{g}\rho\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \text{für Elektronen und Neutrinos} \tag{5.7}$$

Hierbei wurden die Nukleonen nichtrelativistisch behandelt und die Massen von Elektron und Neutrino vernachlässigt.
Wollen wir nun bei fest vorgegebener Baryonendichte die genaue Zusammensetzung der Materie bestimmen, so brauchen wir noch zwei weitere Bedingungen. Eine davon ist gegeben durch die Ladungsneutralität, so dass die Dichte der Protonen derjenigen der Elektronen entspricht. Für die zweite nehmen wir einen bei allen Reaktionen konstant bleibenden Leptonenanteil von $Y_l = 0.4$ an [15], [11]. Dies ist gerechtfertigt, solange die Neutrinos im Stern gefangen sind, da die Leptonenzahl bei allen möglichen Wechselwirkungsprozessen erhalten bleibt. Wir können also alle vier Dichten als Funktion der Baryonendichte angeben und müssen dann eine Lösung des daraus resultierenden Gleichungssystems finden:

1. $\frac{(3\pi^2\rho_n)^{\frac{2}{3}}}{2M} + (6\pi^2\rho_{\nu_e})^{\frac{1}{3}} = \frac{(3\pi^2\rho_p)^{\frac{2}{3}}}{2M} + (3\pi^2\rho_e)^{\frac{1}{3}}$ Gleichgewicht der chem. Potenziale

2. $\rho_e = \rho_p$ Ladungsneutralität

3. $\rho_{\nu_e} = Y_l \cdot \rho_B - \rho_e$ konstanter Leptonenanteil

Die Lösung lässt sich numerisch ermitteln.
Weitere Details über Materie im Beta-Gleichgewicht findet man z.B. in [8].

Abbildung 5.1 zeigt die verschiedenen Anteile als Funktion der Baryonendichte für T = 0. Über einen großen Dichtebereich bleibt die Zusammensetzung annähernd konstant, nur für sehr kleine Dichten fällt der relative Protonen- und damit auch der Elektronenanteil etwas ab. Für den uns interessierenden Dichtebereich erhalten wir einen Neutronenanteil von etwa $0,7\rho_B$ und die Neutrinos machen etwa $0,1\rho_B$ aus. Für Protonen und Elektronen bleibt dann jeweils ein Anteil von $0,3\rho_B$. Zugehörige Werte findet man in Tabelle 5.1.
Im Vergleich dazu werden in Abbildung 5.2 die Anteile und chemischen Potenziale in Materie ohne Neutrinos gezeigt. Sind die Neutrinos nicht gefangen, so ist auch die Leptonenzahl nicht erhalten und die Bedingung Y_l = const fällt weg. Man sieht, dass der Protonenanteil wesentlich kleiner ist als in Abbildung 5.1. Ohne gefangene Neutrinos ist der Neutronenstern also noch wesentlich neutronenreicher.
Für ein thermisches Neutrino mit einer Energie unterhalb der Fermikante verschwinden für T = 0 beide Wirkungsquerschnitte sowohl für den geladenen als auch für den neutralen Strom und die mittlere freie Weglänge wird unendlich, da die Endzustände Pauli-geblockt sind: Bei einer Streuung des Neutrinos haben die einlaufenden Teilchen jeweils Energien $\leq E_f$ und können somit beide keine Energie abgeben. Beim Austausch eines W-Bosons (geladener Strom) muss die leptonische Seite mindestens die Energie $q_{0min} = \mu_e - \mu_{\nu_e}$ aufnehmen, das Neutron kann aber höchstens eine Energie von $q_{0max} = \mu_n - \mu_p$ abgeben. Somit sind wegen

ρ_B/ρ_0	0.25	0.5	1	1.5	2	2.5	3
ρ_n/ρ_B in %	71.4	71.1	70.7	70.4	70.2	70.0	69.9
ρ_p/ρ_B in %	28.6	28.9	29.3	29.6	29.8	30.0	30.1
ρ_{ν_e}/ρ_B in %	11.4	11.1	10.7	10.4	10.2	10.0	9.9
μ_n in MeV	18.5	29.3	46.4	60.6	73.3	84.9	95.7
μ_p in MeV	10.1	16.1	25.8	34.1	41.5	48.3	54.7
μ_e in MeV	137.5	173.9	220.1	252.8	278.9	301.1	320.5
μ_{ν_e} in MeV	127.7	159.4	198.3	224.9	245.8	263.2	278.2

Tabelle 5.1: *Dichten und chemische Potenziale für Materie aus Protonen, Neutronen und Elektronen im Beta-Gleichgewicht bei $T = 0$.*

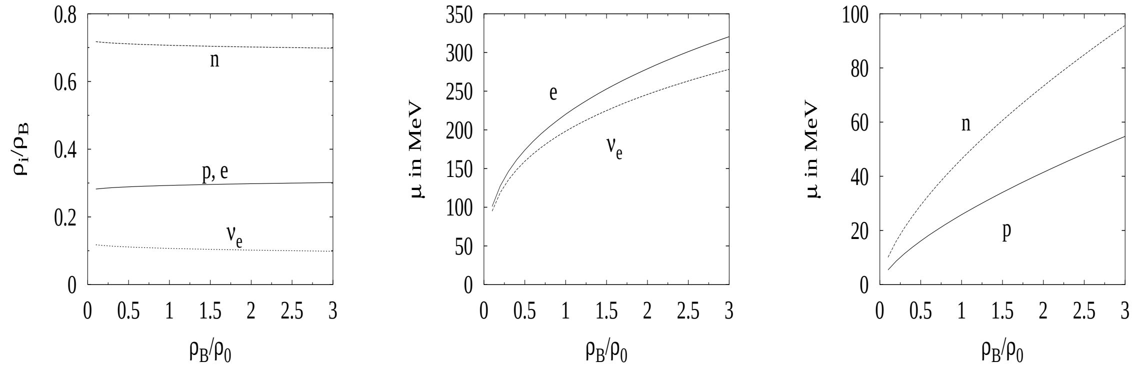

Abbildung 5.1: *Links die Anteile von Neutronen, Protonen, Elektronen und Neutrinos für Materie im Beta-Gleichgewicht mit gefangenen Neutrinos bei T = 0 als Funktion der Baryonendichte, rechts die zugehörigen chemischen Potenziale.*

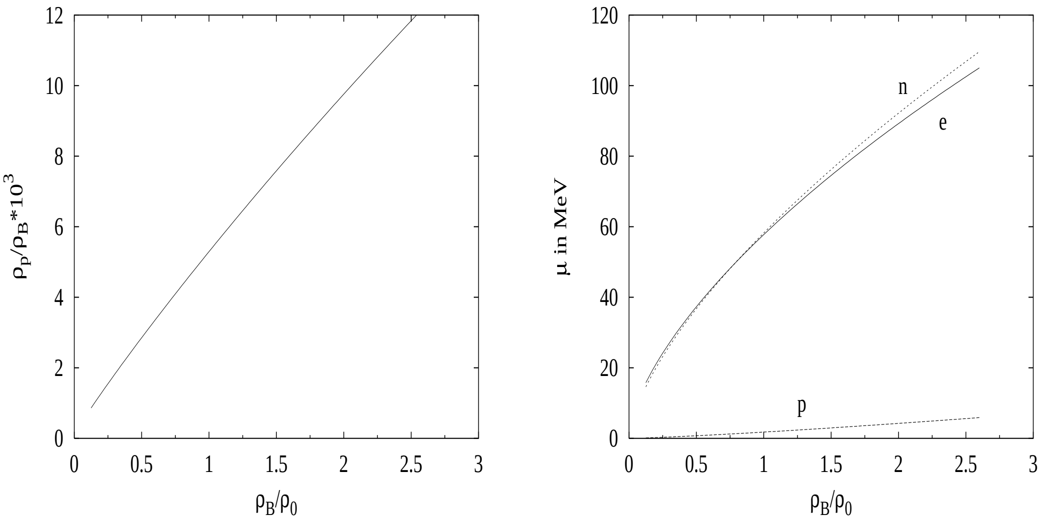

Abbildung 5.2: *Links der Protonenanteil für Materie aus Neutronen, Protonen und Elektronen im Beta-Gleichgewicht ohne getrappte Neutrinos. Rechts die zugehörigen chemischen Potenziale*

$$\mu_n + \mu_{\nu_e} - \mu_p - \mu_e = 0 \tag{5.8}$$

beide Prozesse verboten. Dies ändert sich, wenn wir im nächsten Unterkapitel zu endlichen Temperaturen übergehen, da dann auch Teilchen oberhalb der Fermikante an der Wechselwirkung teilnehmen und es auch unbesetzte Zustände unterhalb der Fermikante gibt.

5.2 Endliche Temperatur

Bei endlicher Temperatur müssen wir die Integration über die Fermi-Funktion numerisch ausführen, um bei gegebenem chemischem Potenzial die zugehörige Dichte auszurechnen:

$$\rho = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty p^2 dp \left(1 + exp\left(\frac{E-\mu}{T}\right)\right)^{-1} \tag{5.9}$$

Mit denselben drei im letzten Kapitel erläuterten Bedingungen ergibt sich die in Abbildung 5.3 für T = 10 MeV und Abbildung 5.4 für T = 60 MeV gezeigte Zusammensetzung der Materie. In dem hier betrachteten Temperaturbereich ändert sich gegenüber T = 0 fast nichts.

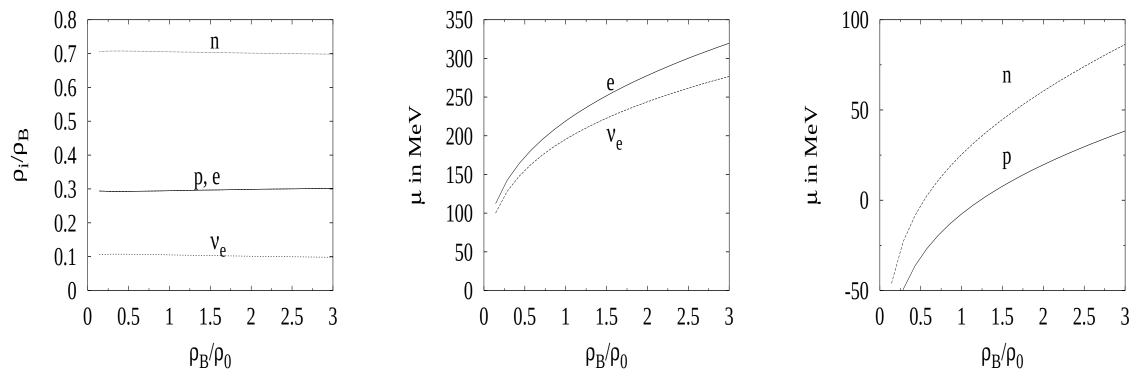

Abbildung 5.3: *Links die Anteile von Neutronen, Protonen, Elektronen und Neutrinos für Materie im Beta-Gleichgewicht mit gefangenen Neutrinos bei T = 10 MeV als Funktion der Baryonendichte, rechts die zugehörigen chemischen Potenziale.*

Zum Vergleich sind in den Abbildungen 5.5 und 5.6 die Zusammensetzungen ohne Neutrinos bei Temperaturen von 10 MeV und 60 MeV gezeigt. Während sich bei Anwesenheit von Neutrinos mit steigender Temperatur kaum etwas an der prozentualen Zusammensetzung ändert, steigt hier der Protonen- und damit auch der Elektronenanteil deutlich an.

Die aus der Zusammensetzung der Materie mit Neutrinos resultierenden Wirkungsquerschnitte sind in den Abbildungen 5.7 für den neutralen und 5.8 für den geladenen Strom bei Temperaturen von 10 MeV und 20 MeV gezeigt. Zugehörige Dichten und chemische Potenziale findet man in den Tabellen 5.2 für T= 10 MeV und 5.3 für T = 20 MeV.

Der Wirkungsquerschnitt des geladenen Stromes hat ein Maximum bei $\hat{\mu}$. Er ist also am größten für einen Energieübertrag, welcher der Differenz der chemischen Potenziale für Protonen und Neutronen entspricht (vgl. auch [17]). Diese wächst mit steigender Dichte.

Bei allen bis jetzt diskutierten Wirkungsquerschnitten haben wir nicht-wechselwirkende

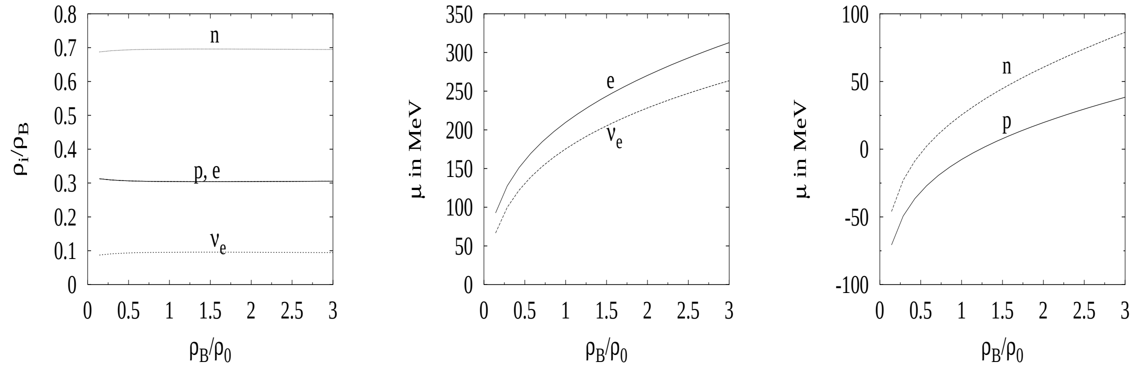

Abbildung 5.4: *Links die Anteile von Neutronen, Protonen, Elektronen und Neutrinos für Materie im Beta-Gleichgewicht mit gefangenen Neutrinos bei T = 60 MeV als Funktion der Baryonendichte, rechts die zugehörigen chemischen Potenziale.*

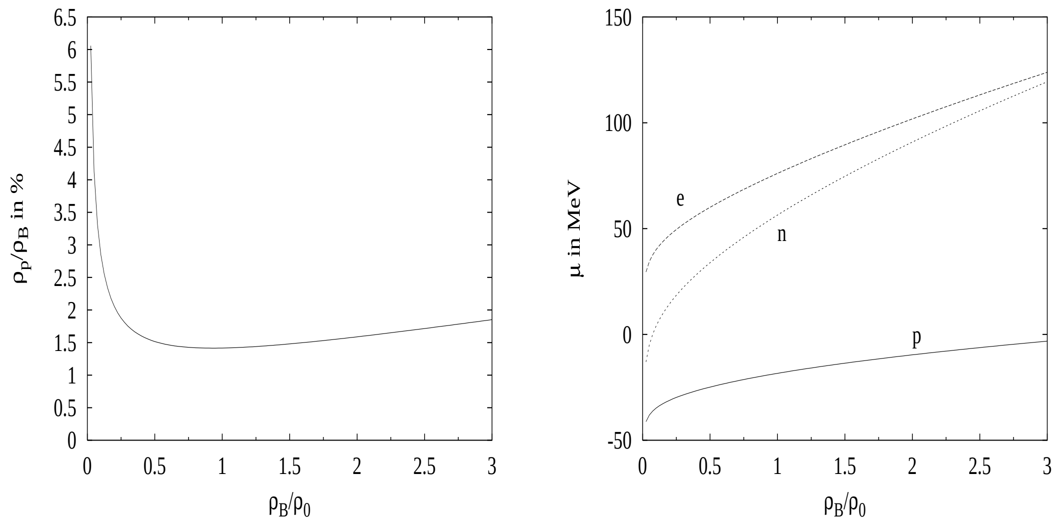

Abbildung 5.5: *Links der Protonenanteil als Funktion der Baryonendichte für Materie aus Protonen, Neutronen und Elektronen im Beta-Gleichgewicht ohne Neutrinos bei T = 10 MeV, rechts die zugehörigen chemischen Potenziale.*

Nukleonen angenommen. Dies ist natürlich eine sehr grobe Vereinfachung, die den Rechenaufwand erheblich vermindert hat. In den nun folgenden Kapiteln werden wir mit verschiedenen Näherungen eine Wechselwirkung berücksichtigen.

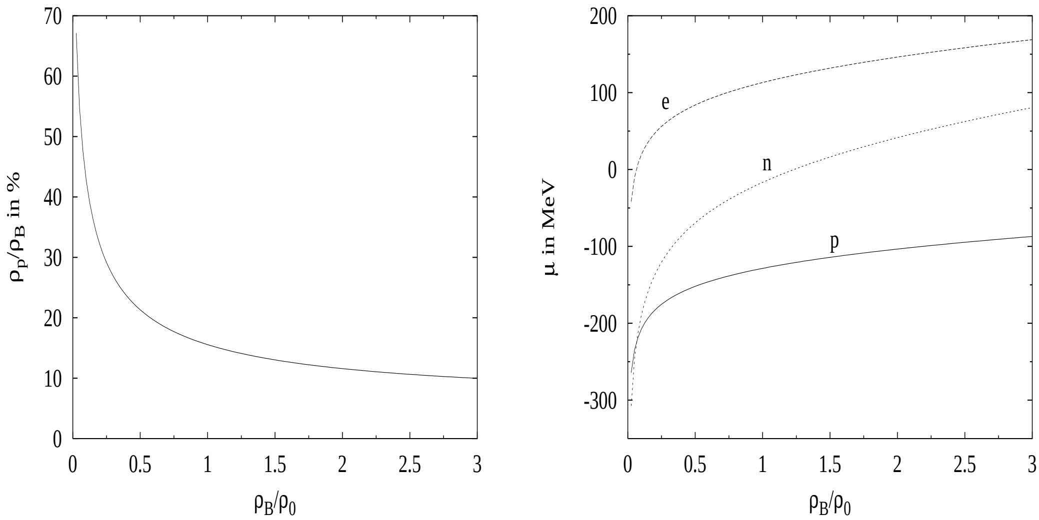

Abbildung 5.6: *Dasselbe wie in Abbildung 5.5 bei einer Temperatur von T = 60 MeV.*

ρ_B/ρ_0	0.25	0.5	1	1.5	2	2.5	3
ρ_n/ρ_B in %	70.7	70.7	70.5	70.3	70.1	70.0	69.8
ρ_p/ρ_B in %	29.3	29.3	29.5	29.7	29.9	30.0	30.2
ρ_{ν_e}/ρ_B in %	10.7	10.7	10.5	10.3	10.1	10.0	9.8
μ_n in MeV	12.8	25.9	44.4	59.1	72.1	83.9	94.8
μ_p in MeV	0.24	9.8	22.1	31.4	39.3	46.5	53.2
μ_e in MeV	136.2	172.8	219.1	251.8	277.9	300.1	319.6
μ_{ν_e} in MeV	122.4	155.4	195.5	222.7	243.9	261.5	276.7

Tabelle 5.2: *Dichten und chemische Potenziale für Neutronen, Protonen, Elektronen und Neutrinos im Beta-Gleichgewicht bei einer Temperatur von 10 MeV. Der Leptonenanteil wurde konstant mit 0.4 angenommen.*

ρ_B/ρ_0	0.25	0.5	1	1.5	2	2.5	3
ρ_n/ρ_B in %	69.8	70.0	70.1	70.0	69.9	69.8	69.7
ρ_p/ρ_B in %	30.2	30.0	29.9	30.0	30.1	30.2	30.3
ρ_{ν_e}/ρ_B in %	9.8	10.0	10.3	10.0	9.9	9.8	9.7
μ_n in MeV	-3.9	14.6	37.3	54.0	68.0	80.4	91.8
μ_p in MeV	-23.1	-7.5	10.3	22.3	31.9	40.3	47.8
μ_e in MeV	130.8	168.6	215.8	248.8	275.2	297.5	317.0
μ_{ν_e} in MeV	110.2	145.3	187.4	215.8	237.9	256.1	271.7

Tabelle 5.3: *Dasselbe wie in Tabelle 5.2 für eine Temperatur von 20 MeV.*

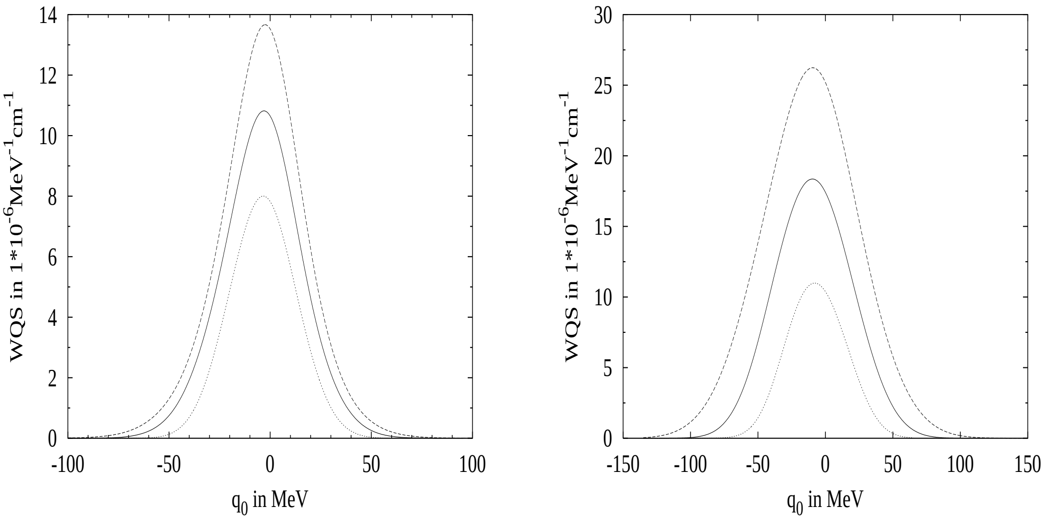

Abbildung 5.7: *Wirkungsquerschnitte für den neutralen Strom in Materie aus Neutronen, Protonen, Elektronen und Neutrinos im Beta-Gleichgewicht für Temperaturen von 10 MeV (links) und 20 MeV (rechts). Die einzelnen Linien entsprechen unterschiedlichen Dichten: Die gepunktete Linie entspricht einer Dichte von 0.25 ρ_0, die durchgezogene Linie entspricht $1\rho_0$ und die gestrichelte Linie $2\rho_0$.*

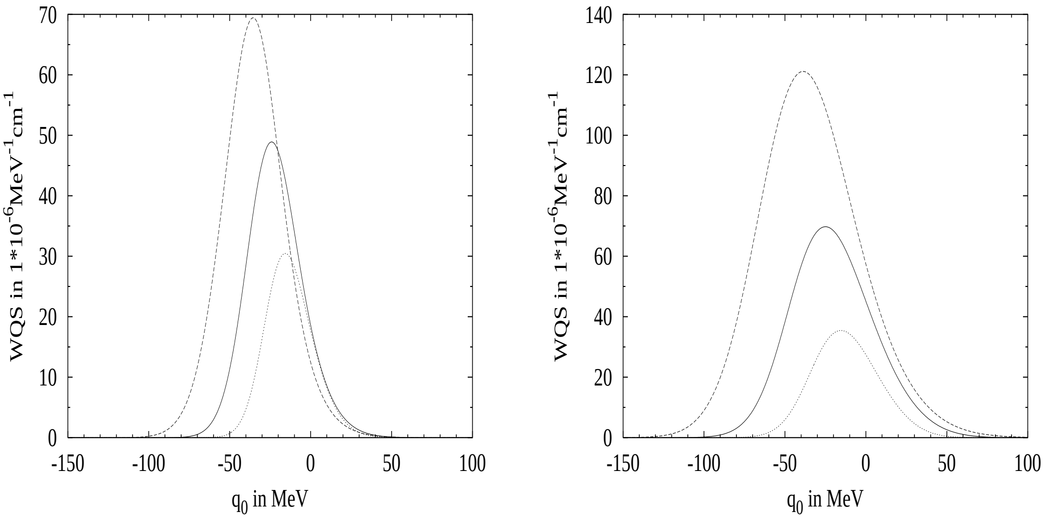

Abbildung 5.8: *Dasselbe wie in Abbildung 5.7, nur für den geladenen Strom.*

Kapitel 6

Die Zustandsgleichung für Kernmaterie

In den vorherigen Kapiteln haben wir die Streuung von Neutrinos an einem nichtwechselwirkenden Nukleonengas betrachtet. Bei solch hohen Dichten und niedrigen Temperaturen wie in einem Neutronenstern ist diese Näherung nicht gerechtfertigt. Daher müssen wir die starke Wechselwirkung in unseren Rechnungen berücksichtigen. Dies wird schon deutlich, wenn man die maximale Masse eines Neutronensternes ohne Wechselwirkungseffekte berechnet. Man kommt auf etwa 0.7 $M_{\odot}$, was viel kleiner ist als die Massen aller beobachteten Neutronensterne, bei denen die meisten oberhalb von 1.3 $M_{\odot}$ liegen [18]. Die bei kleinen Abständen unter 1 fm sehr stark repulsive Kernkraft sorgt für einen zusätzlichen Druck im Sterninneren, der einen Kollaps auch bei größeren Massen verhindert.
Die Eigenschaften von Materie werden durch ihre Zustandsgleichung (ZSG) charakterisiert, die makroskopische Größen wie Druck, Temperatur und Dichte in einen Zusammenhang bringt. In der Kernphysik wird die Energie pro Nukleon als Funktion der Nukleonendichte auch oft als ZSG bezeichnet. Sie bestimmt die genaue Struktur eines Neutronensternes wie beispielsweise die Masse oder den Radius. Da weder die genaue Zusammensetzung der Materie in einem Neutronenstern noch die Wechselwirkung bei diesen extrem hohen Dichten hinreichend bekannt ist, wissen wir bislang auch noch sehr wenig über die Zustandsgleichung in diesem Dichtebereich. Üblicherweise wird für die Beschreibung von Kernmaterie ein realistisches Modell der Nukleon-Nukleon(NN)-Wechselwirkung verwendet, dessen Parameter an experimentelle Streudaten angefittet werden [19]. Kennt man das Nukleon-Potenzial V und die kinetische Energie T, so kann man aus deren Erwartungswerten die ZSG ableiten:

$$\frac{E}{A} = <\Phi|H|\Phi> = <\Phi|T+V|\Phi> \tag{6.1}$$

Für die Berechnung dieses Erwartungswertes wird für die Vielteilchenwellenfunktion $|\Phi>$ in Hartree-Fock-Näherung üblicherweise eine Slaterdeterminante verwendet, die sich aus antisymmetrisierten Produktzuständen von Einteilchenwellenfunktionen ergibt.

In früheren Arbeiten wurden oft Skyrme-Wechselwirkungen verwendet [2], [20], [21], phänomenologische effektive Wechselwirkungen, die explizit von der Dichte abhängen und mit einer relativ kleinen Zahl von Parametern den Grundzustand sphärischer Kerne gut beschreiben [22]. Die Reichweiten der Skyrme-Kräfte sind δ-Funktionen, die die Berechnung der Erwartungswerte sehr erleichtern. Der Hamilton-Operator lässt sich als Dichte-Funktional schreiben und man kann die ZSG relativ schnell bestimmen. Auch ein Grund, weshalb diese Wechselwirkungen oft gerne in Rechnungen verwendet werden [23].
Ein entscheidender Nachteil vieler Skyrme-Modelle ist jedoch, dass sie ab einer Dichte von wenigen ρ_0 Isospin und/oder Spininstabilitäten aufweisen [10], [22]. Ersteres äußert sich in einer bei einer bestimmten Dichte negativ werdenden Asymmetrieenergie β, die bewirkt, dass pure Neutronenmaterie mit diesen Wechselwirkungen stabiler wäre als symmetrische Kernmaterie. Wir verwenden in dieser Arbeit eine parametrisierte ZSG, bei der dieses Problem nicht auftritt. Die Spninstabilitäten werden von dem Dreikörperterm der Skyrmekraft verursacht, der einen stark negativen Beitrag zum Landau-Parameter G_0 liefert [22]. Dies beeinflußt die magnetischen Eigenschaften der Materie. Bei hohen Dichten kann es dann einen ferromagnetischen Übergang geben, über deren Existenz man bis jetzt noch gegensätzliche Aussagen findet [24]. Im folgenden Unterkapitel gehen wir näher auf von uns verwendete ZSG und aus ihr abgeleitete Größen ein.

6.1 Von der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung zur Zustandsgleichung

Zwei Hauptziele der nuklearen Vielteilchentheorie sind die Beschreibung von Kernen mit mikroskopischen NN-Wechselwirkungen und von Materie bei sehr hoher Dichte, wie man sie in astrophysikalischen Systemen findet. Da sich die in diesem Gebiet angewendeten Theorien als sehr schwierig und kompliziert erwiesen haben, benutzt man als Vereinfachung oft unendliche Kernmaterie aus Neutronen und Protonen. Diese ist translationsinvariant und die abstoßenden p-p-Kräfte werden vernachlässigt. Sie wird charakterisiert durch die Angabe ihrer Dichte ρ und ihren Protonenanteil x_p. Zwei Grenzfälle sind von besonderem Interesse: Pure Neutronenmaterie (PNM), in der es keine gebundenen Zustände gibt und von der deshalb auch wenig experimentelle Daten existieren, und symmetrische Kernmaterie (SNM), in der die Nukleonen durch die starke Wechselwirkung gebunden sind und von der auch hinreichend viele Daten aus der Systematik von Atomkernen vorliegen. Die aus Experimenten bestimmten Größen stellen einen guten Test für phänomenologische Wechselwirkungen dar.

Die Sättigungsdichte ρ_0:
Aus Elektron-Nukleon Streudaten geht hervor, dass der Radius von schweren Kernen mit A Nukleonen ziemlich genau die Gleichung

$$R = r_0 \cdot A^{1/3} \tag{6.2}$$

erfüllt. r_0 wurde zu 1.15 fm bestimmt. Dieser Zusammenhang impliziert eine konstante Dichte im Kerninneren, in der Literatur als Kernmateriedichte ρ_0 bezeichnet:

$$\rho_0 = \frac{3}{4\pi r_0^3} \approx 0.16 \pm 0.02 \mathrm{fm}^{-3} \tag{6.3}$$

Dies ist die Dichte von Kernmaterie ohne äußeren Druck, d.h. in Neutronensternen, wo zusätzlich der durch die Gravitationskraft verursachte Druck herrscht, übersteigt die Dichte diejenige von Kernmaterie.

Die Bindungsenergie B pro Nukleon bei ρ_0 beträgt

$$\frac{B}{A} = -15.6 \pm 0.2\,\mathrm{MeV} \tag{6.4}$$

Die Inkompressibilität:
Abgeleitet aus Atmungsmoden ('breathing modes') schwerer Kerne erhält man für die Inkompressibilität symmetrischer Kernmaterie bei ρ_0

$$K = 9\rho^2 \frac{\partial^2 E}{\partial \rho^2}\bigg|_{\rho=\rho_0} \approx 220 \pm 30\ \mathrm{MeV}. \tag{6.5}$$

Weitere Informationen zu den Eigenschaften von Kernmaterie findet man beispielsweise in [20]. Eine fundamentale Beschreibung der Wechselwirkungsmechanismen in Kernmaterie sollte die Wechselwirkung zwischen den Quarks und Gluonen als Grundlage haben (QCD). Da die Rechnungen jedoch oft sehr langwierig sind und Störungstheorie aufgrund der großen Kopplungskonstanten α_s nicht anwendbar ist, wurden gerade in den letzten 25 Jahren viele phänomenologische Nukleon-Nukleon-Potenziale entwickelt. Diese wurden an die aktuellen Streudaten angefittet. Die grundlegenden Freiheitsgrade, die in diese Modelle eingehen, sind neben den Nukleonen die Pionen, durch deren Austausch nach Yukawas Theorie eine langreichweitige Anziehung zustandekommt. Oft werden auch schwerere Mesonen berücksichtigt, die für die Abstoßung bei kurzen Reichweiten verantwortlich sind. Die frühesten NN-Streuexperimente wurden in den 30er Jahren bei sehr niedrigen Energien durchgeführt ($<$ 5 MeV). Man brauchte nur zwei Parameter, um die Daten mit einem einfachen symmetrischen Potenzialwall gut zu beschreiben, da bei diesen Energien nur die radialsymmetrischen s-Wellen zur Streuung beitragen. Die Entdeckung des elektrischen Quadrupolmomentes 1939 zeigte, dass die NN-Wechselwirkung nicht radialsymmetrisch ist und eine Tensorkomponente enthält [30]. Mit dem Zufügen eines Spin-Bahn-Termes schließlich konnte man die gemessenen Streudaten einigermaßen gut beschreiben. Später wurde noch eine Impulsabhängigkeit in die Wechselwirkung eingebaut. Die Urbana-, Argonne- und Bonn-Modelle der Zwei-Körper-NN Wechselwirkung beinhalten alle zuvor aufgeführten Terme. Sie werden als "realistisch" bezeichnet, weil sie sehr gut mit den experimentellen Daten bei Energien unterhalb der Pionen-Produktions-Schwelle übereinstimmen und gleichzeitig andere Eigenschaften wie beispielsweise die Bindungsenergie oder das Quadrupolmoment des Deuterons gut reproduzieren.

Wir werden eine Parametrisierung eines nichtrelativistischen Modells der Wechselwirkung verwenden, das sich aus dem Zwei-Körper Argonne v_{18} (A18)-Potenzial, dem Drei-Körper Urbana IX (UIX)-Potenzial und einer vom Gesamtimpuls der beiden wechselwirkenden Teilchen abhängigen Korrektur zusammensetzt. Der Hamiltonoperator hat folgende Form:

$$H_{NR} = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i<j} (v_{ij} + \delta v(P_{ij})) + \sum_{i<j<k} V_{ijk} \tag{6.6}$$

Der Zwei-Körper Term v_{ij} setzt sich aus 18 mit radialen Funktionen multiplizierten Operatoren zusammen:

$$v_{ij} = \sum_{p=1,\ldots,18} \left(v_\pi^p(r_{ij}) + v_I^p(r_{ij}) + v_s^p(r_{ij})\right) O_{ij}^p \tag{6.7}$$

mit

$$O_{ij}^{p=1,\ldots,14} = \left(1, \sigma_\mathbf{i} \cdot \sigma_\mathbf{j}, S_{ij}, (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S})_{ij}, L^2, \sigma_\mathbf{i} \cdot \sigma_\mathbf{j} L^2, (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S})_{ij}^2\right) \otimes (1, \tau_\mathbf{i} \cdot \tau_\mathbf{j}) \tag{6.8}$$

$$O_{ij}^{p=15,\ldots,18} = T_{ij}, \sigma_\mathbf{i} \cdot \sigma_\mathbf{j} T_{ij}, S_{ij} T_{ij}, (\tau_{zi} + \tau_{zj}) \tag{6.9}$$

S_{ij} und T_{ij} bezeichenen die Spin- und Isospin-Tensoroperatoren

$$S_{ij} = \frac{3}{r_{ij}^2} \sigma_\mathbf{i} \cdot \mathbf{r_{ij}} \sigma_\mathbf{j} \cdot \mathbf{r_{ij}} - \sigma_\mathbf{i} \cdot \sigma_\mathbf{j} \qquad \mathrm{T}_{ij} \text{ analog} \tag{6.10}$$

Der 1-Operator beschreibt hier den Radialteil der Wechselwirkung, S_{ij} sowie T_{ij} sind die Tensorkomponenten. Der vorher erwähnte im NN-Potenzial wichtige Spin-Bahn-Term L·S sowie eine Impulsabhängigkeit durch L^2 tauchen in dieser Parametrisierung auch auf.
v_π^p beschreibt den Ein-Pionen-Austausch bei langen Reichweiten und enthält Yukawa-Funktionen mit kurzreichweitigen Cut-Off-Parametern. Die anderen beiden Terme sind rein phänomenologisch. Sie repräsentieren den bei mittleren Reichweiten attraktiven Teil, der durch den Austausch zweier Pionen zustande kommt (v_I^p), und die kurzreichweitige Abstoßung durch den Austausch schwererer Mesonen.
Während die ersten 14 Terme von dem "Vorgängermodell" v_{14} stammen, die an np-Streudaten und Eigenschaften des Deuterons angepasst wurden, sorgen die restlichen vier Terme für eine Ladungsabhängigkeit des Potenzials. A18 wurde an alle np- und pp-Daten aus der Nijmegen-Gruppe angefittet und beschreibt außerdem nn-Streudaten bei niedrigen Energien. Zusätzlich wird noch ein vom Gesamtimpuls der miteinander wechselwirkenden Teilchen abhängiger Term $\delta v(P_{ij})$ addiert (in Referenz [18] mit 'relativistic boost correction' bezeichnet), der bei hohen Dichten einen großen Beitrag liefert. Die Parameter der Dreikörper-Wechselwirkung V_{ijk} wurden an Rechnungen von H-3 und SNM angepasst. UIX enthält zwei statische Anteile: den Zwei-Pionen Austauschterm und einen repulsiven phänomenologischen Term mittlerer Reichweite.
Näheres über die genaue Form der Wechselwirkung und die Parameterwerte findet man in [25].

Um die ZSG für kalte Kernmaterie abzuleiten, müssen wir den Erwartungswert der Hamilton-Funktion berechnen:

$$\langle H\rangle = \sum_i \langle i|\frac{p_i^2}{2m}|i\rangle + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\langle ij|v_{ij}|ij\rangle + \frac{1}{6}\sum_{i,j,k}\langle ijk|V_{ijk}|ijk\rangle \tag{6.11}$$

Die in dieser Arbeit verwendete effektive Wechselwirkung ist an das oben beschriebene Potenzial angefittet. Sie stammt von Akmal, Pandharipande und Ravenhall [18] und gilt streng genommen nur für T = 0. Da wir jedoch sehr große Massen und chemische Potenziale im Vergleich zur Temperatur haben, unterscheiden sich die Fermi-Verteilungen für die einzelnen Teilchen nicht sehr stark von T = 0 und die Näherung ist deshalb gerechtfertigt. Die Nukleonen werden in dieser Wechselwirkung nichtrelativistisch behandelt.
Die effektive Hamiltonfunktion lässt sich als Energie-Dichte-Funktional schreiben. Hierzu wurden dichteabhängige Funktionen eingeführt, die zwischen $x_p = 0$ und $x_p = 0.5$ interpolieren.

$$H_{eff} = \left(\frac{\hbar^2}{2M} + f(\rho_B, x_p)\right)\tau_p + \left(\frac{\hbar^2}{2M} + f(\rho_B, 1-x_p)\right)\tau_n + g(\rho_B, x_p) + H_{grad} \tag{6.12}$$

$\frac{\hbar^2}{2M}\tau_i$ bezeichnet die kinetischen Energiedichten, x_i sind die Protonen- bzw. Neutronenanteile. Die Funktion f resultiert aus der in der der Wechselwirkung angenommenen Impulsabhängigkeit:

$$f(\rho_B, x_p) = (p_3 + x_p p_5)\rho_B e^{-p_4\rho_B} \tag{6.13}$$

$$f(\rho_B, 1-x_p) = (p_3 + (1-x_p)p_5)\rho_B e^{-p_4\rho_B} \tag{6.14}$$

Aus ihr gehen dichte- und isospinabhängige effektive Massen m_i^* hervor:

$$\frac{\hbar^2}{2M_p^*(\rho_B, x_p)} := \frac{\hbar^2}{2M} + f(\rho_B, x_p) \qquad \text{für Protonen} \tag{6.15}$$

$$\frac{\hbar^2}{2M_n^*(\rho_B, x_p)} := \frac{\hbar^2}{2M} + f(\rho_B, 1-x_p) \qquad \text{für Neutronen} \tag{6.16}$$

Die effektiven Massen sind als Funktion der Baryonendichte für PNM, SNM und Materie im Beta-Gleichgewicht in Abbildung 6.1 gezeigt. Bei der gewählten Parametrisierung haben wir in Neutronenmaterie auch eine effektive Masse für die Protonen. Diese resultiert aus der für $x_p = 0$ nicht verschwindenden Funktion $f(\rho_B, x_p)$ und ist sogar kleiner als die effektive Neutronenmasse. In symmetrischer Materie haben alle Nukleonen dieselbe effektive Masse, während wir im Beta-Gleichgewicht wieder zwischen M_n^* und M_p^* unterscheiden müssen. Insgesamt hängen die effektiven Massen sehr stark von der Dichte ab,

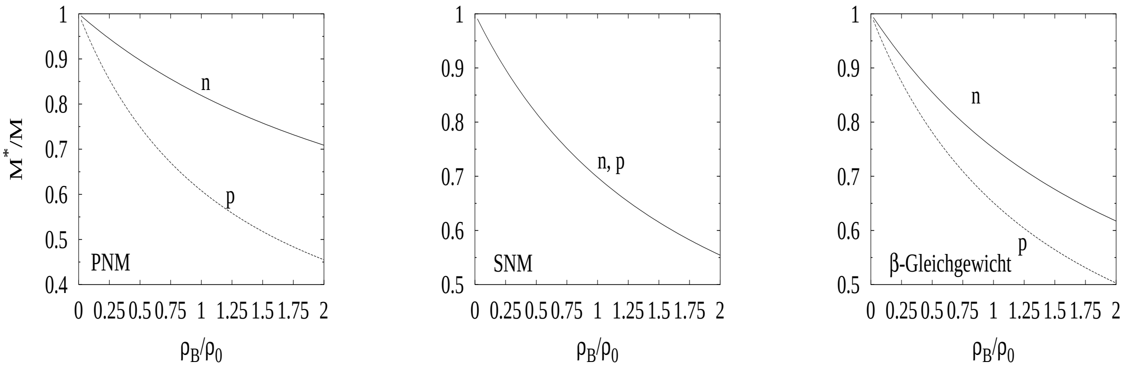

Abbildung 6.1: *Die effektiven Massen für Protonen und Neutronen in PNM, SNM und Materie im Beta-Gleichgewicht.*

sie gehen bei zweifacher Kernmateriedichte bis auf 0.5 M nach unten. Wir erwarten also auch einen deutlichen Effekt im Wirkungsquerschnitt, da die Massen in diesen eingehen. Der Term H_{grad} in Gleichung 6.12 hängt von Dichtegradienten ab und bezieht sich somit auf endliche Systeme. Er wird in den weiteren Rechnungen vernachlässigt, da wir uns auf unendlich ausgedehnte Kernmaterie beschränken und keine Randeffekte berücksichtigen. Die Funktion $g(\rho, x_p)$ repräsentiert die potenzielle Energie. Die Interpolation zwischen PNM und SNM wird durch eine $(1\text{-}2x_p)^2$-Abhängigkeit der Funktion erreicht [18]:

$$g(\rho_B, x_p) = g(\rho_B, x_p = 0.5)(1 - (1 - 2x_p)^2) + g(\rho_B, x_p = 0)(1 - 2x_p)^2 \tag{6.17}$$

mit

$$g(\rho_B, x_p = 0.5) = -\rho_B^2(p_1 + p_2\rho_B + p_6\rho_B^2 + (p_{10} + p_{11}\rho_B)e^{-p_9^2\rho_B^2}) \tag{6.18}$$

$$g(\rho_B, x_p = 0) = -\rho_B^2(\frac{p_{12}}{\rho_B} + p_7 + p_8\rho_B + p_{13}e^{-p_9^2\rho_B^2}) \tag{6.19}$$

Wir übernehmen aus Referenz [18] folgende Werte für die Parameter:

$$\begin{array}{lll}
p_1 = 337.2 MeV fm^3 & p_2 = -382 MeV fm^6 & p_3 = 89.9 MeV fm^5 \\
p_4 = 0.457\, fm^3 & p_5 = -59.0\, MeV fm^5 & p_6 = -19.1\, MeV fm^9 \\
p_7 = 214.6\, MeV fm^3 & p_8 = -384\, MeV fm^6 & p_9 = 6.4\, fm^3 \\
p_{10} = 69\, MeV fm^3 & p_{11} = -33\, MeV fm^6 & p_{12} = 0.35\, MeV
\end{array}$$

Die Gesamtenergie des Systems erhalten wir dann einfach durch Integration über den ganzen Raum:

$$E = \int H_{eff} d^3r \tag{6.20}$$

In unendlich ausgedehnter Materie können wir nur eine Energiedichte oder eine Energie pro Nukleon angeben. In Abbildung 6.2 ist die Energie pro Nukleon für Neutronenmaterie, symmetrische Kernmaterie und Materie im Beta-Gleichgewicht über der Dichte aufgetragen. Man sieht, dass es in reiner Neutronenmaterie keinen gebundenen Zustand gibt, die Energie pro Nukleon steigt mit der Dichte stetig an. Bei symmetrischer Kernmaterie nimmt die Energie ein Minimum bei ρ_0 an. Auch die Bindungsenergie wird bei dieser Dichte mit ungefähr 16 MeV gut wiedergegeben. Bei Materie im Beta-Gleichgewicht ist das Minimum zu einer etwas geringeren Dichte verschoben und auch die Bindungsenergie ist kleiner.

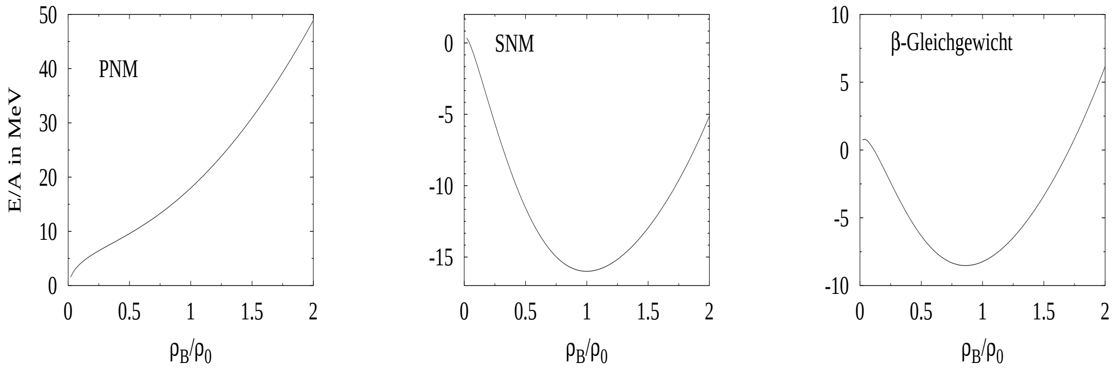

Abbildung 6.2: *Die Energie pro Nukleon als Funktion der Dichte für Neutronenmaterie, symmetrische Kernmaterie und Materie im Beta-Gleichgewicht mit getrappten Neutrinos.*

Für Materie im Beta-Gleichgewicht ergibt sich bei Kernmateriedichte mit Gleichung 6.5 ein Kompressionsmodul von K = 218 MeV, in symmetrischer Materie erhalten wir K = 210 MeV. Die Werte stimmen also gut mit den vorher diskutierten Vorhersagen für Kernmaterie überein.
Wie wir die für unsere Rechnungen nötigen Parameter aus der ZSG ableiten, werden wir im folgenden Unterkapitel erläutern.

6.2 Parameter aus der Wechselwirkung für die RPA-Rechnungen

In der im nächsten Kapitel näher erläuterten Random Phase Approximation werden Korrelationen zwischen Teilchen und Löchern berücksichtigt. Mit Loch-Zuständen sind hier alle Einteilchenzustände gemeint, die im Grundzustand besetzt sind. Das heisst wir müssen Parameter aus der Zustandsgleichung ableiten, die die Stärke der Teilchen-Loch-Wechselwirkung V_{ij} charakterisieren. Die Indizes i und j kennzeichnen hier eine Spin- bzw. Isospinabhängigkeit der Wechselwirkung: V_{00} ist der spin- und isospinunabhängige Teil, auch als "vektorieller Teil" bezeichnet. V_{10} hängt vom Spin, nicht aber vom Isospin ab und taucht in der Literatur auch als "axialer Teil" der Wechselwirkung auf. Entsprechendes gilt für V_{01} und V_{11}, wobei die Parametrisierung des Zentralteils der Wechselwirkung gegeben ist durch [23]

$$V_C = V_{00}(r) + V_{10}(r)(\vec{\sigma_1} \cdot \vec{\sigma_2}) + V_{01}(r)(\vec{\tau_1} \cdot \vec{\tau_2}) + V_{11}(\vec{\sigma_1} \cdot \vec{\sigma_2})(\vec{\tau_1} \cdot \vec{\tau_2}) \tag{6.21}$$

In unserer Parametrisierung betrachten wir jedoch nur die ersten beiden Terme.
V_{ij} ist eine Funktion von der Dichte, der Temperatur sowie des Impuls- und Energieübertrages. Nach der "Landau-Fermi-Liquid-Theorie", auch bekannt unter "Theorie der Fermiflüssigkeiten", ist sie gegeben durch die zweite Ableitung der Energiedichte nach den Dichten [26]

$$V_{ij} = \frac{\partial^2 \epsilon(\rho)}{\partial \rho_i \partial \rho_j} \tag{6.22}$$

und beschreibt wie die Einteilchenpotenziale auf Dichtefluktuationen reagieren [20]. Sie wird normalerweise in Form von Fermi-Liquid-Parametern angegeben. Diese wurden von Landau eingeführt zur Beschreibung von großen Fermi-Systemen mit kleinen Anregungsenergien, wie wir sie in Neutronensternen finden, und sind verbunden mit den niedrigsten Anregungen und ihren Wechselwirkungen. Alle makroskopischen Eigenschaften eines unendlichen Systems aus Fermionen können nach seiner Theorie mit diesen wenigen Parametern hergeleitet werden. Beispielsweise sind die effektive Masse M^*, die Kompressibilität χ und die Asymmetrieenergie β aus der Massenformel von Bethe und Weizsäcker mit den Fermi-Liquid-Parametern F_0, F_1 und F_0' verknüpft [20]:

$$F_1 = 3\left(\frac{M^*}{M} - 1\right) \tag{6.23}$$

$$F_0 = \frac{3}{2\rho\chi\epsilon_f} - 1 = \rho^2 \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \tag{6.24}$$

mit

$$\mu = \frac{d\epsilon}{d\rho_B} \qquad \text{bei festem } x_p \tag{6.25}$$

$$F_0' = \frac{3\beta}{\epsilon_f} - 1 \tag{6.26}$$

Aus der Wechselwirkung resultieren neben den kinetischen auch potenzielle Energien U_i, i = n,p, für die Nukleonen. Um die spinunabhängigen Teilchen-Loch-Parameter f_{ij} und die Parameter g_{ij}, die vom Spin abhängen, zu erhalten, müssen wir diese Potenziale nach den Dichten ableiten:

$$f_{nn} = \frac{\delta U_n}{\delta \rho_n} \qquad f_{pp} = \frac{\delta U_p}{\delta \rho_p} \qquad f_{np} = \frac{\delta U_n}{\delta \rho_p} \qquad f_{pn} = \frac{\delta U_p}{\delta \rho_n} \tag{6.27}$$

Die Ausdrücke, die wir für die Parameter erhalten, sind in Anhang C aufgeführt.
In Neutronenmaterie besteht folgender einfacher Zusammenhang zwischen den Teilchen-Loch-Parametern und den Fermi-Liquid-Parametern:

$$f_{nn} = \frac{F_0}{N_0} \qquad g_{nn} = \frac{G_0}{N_0}. \tag{6.28}$$

mit der Zustandsdichte an der Fermikante

$$N_0 = \frac{2M^* k_F}{\pi^2}. \tag{6.29}$$

In symmetrischer Materie gilt

$$f_{nn} = \frac{F_0 + F_0'}{N_0} \qquad f_{np} = \frac{F_0 - F_0'}{N_0} \qquad g_{nn} = \frac{G_0 + G_0'}{N_0} \qquad g_{np} = \frac{G_0 - G_0'}{N_0} \tag{6.30}$$

Außerdem ist
$\mathrm{f}_{pp} = \mathrm{f}_{nn} \qquad \mathrm{f}_{pn} = \mathrm{f}_{np} \qquad \mathrm{g}_{nn} = \mathrm{g}_{pp} \qquad \mathrm{g}_{pn} = \mathrm{g}_{np}$.

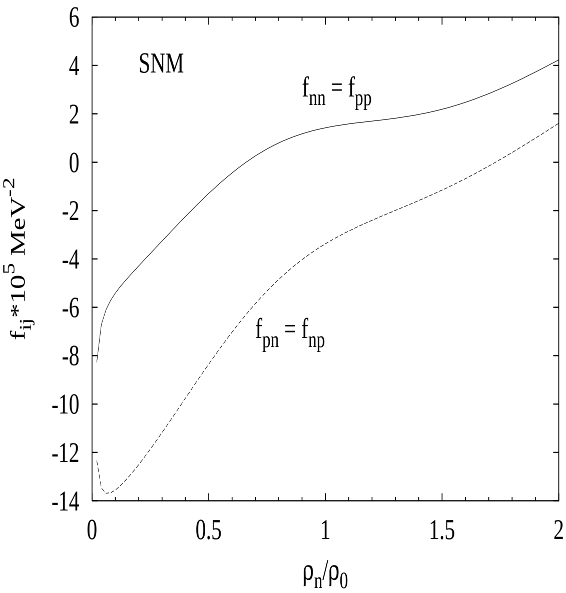

Abbildung 6.3: *Teilchen-Loch-Parameter f_{ij} für den RPA-Wirkungsquerschnitt in symmetrischer Kernmaterie.*

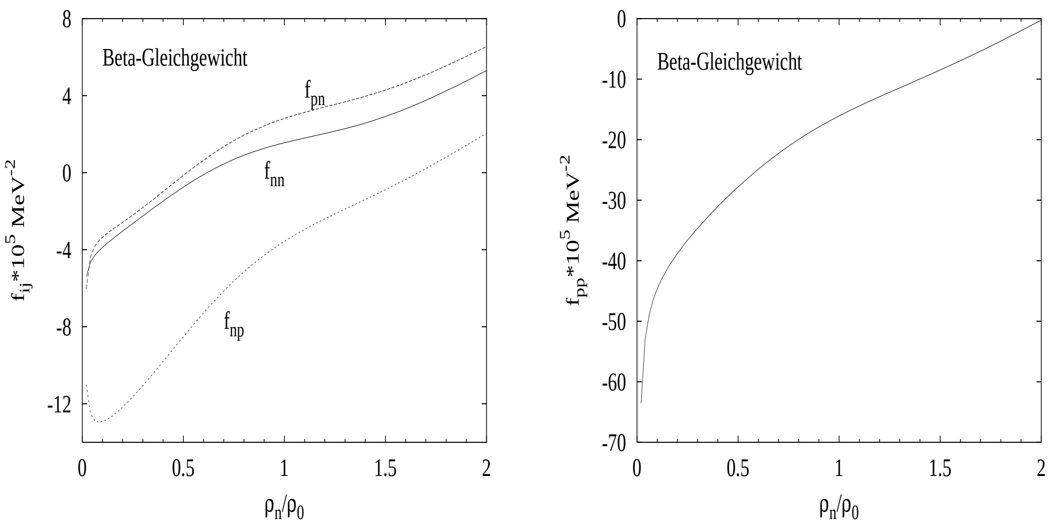

Abbildung 6.4: *Teilchen-Loch-Parameter für den RPA-Wirkungsquerschnitt in Materie im Beta-Gleichgewicht.*

In den Tabellen 6.1, 6.2 und 6.3 findet man die Parameter für die RPA-Rechnungen im nächsten Kapitel aufgelistet. In den Abbildungen 6.3 und 6.4 sind die Teilchen-Loch-Parameter über der Dichte aufgetragen. Man sieht in den Tabellen, dass die Asymmetrieenergie β hier für alle uns interessierenden Dichtebereiche positiv ist. Da unsere Wechselwirkung keine explizit spinabhängigen Terme enthält, sind die Ableitungen der Potenziale nach den Spindichten null und damit erhalten wir auch für die Parameter g_{nn} und g_{np} null. Da die starke Wechselwirkung jedoch vom Spin abhängt, verwenden wir hier für g_{ij} Parameter aus Referenz [2]:

$$g_{nn} = 4.5 * 10^{-5} MeV^{-2} \tag{6.31}$$
$$g_{np} = -4.5 * 10^{-5} MeV^{-2} \tag{6.32}$$

Diese Angaben beziehen sich in der Referenz auf Kernmateriedichte, wir werden sie in

ρ_B/ρ_0	0.25	1	2
μ_n^* in MeV	9.87	39.06	130.77
m_n^*/m	0.94	0.82	0.71
$f_{nn} \cdot 10^{-5}$ in MeV^{-2}	-3.96	9.71	5.08
U_i in MeV	-14.88	-32.35	-0.2

Tabelle 6.1: *Effektive Massen, chemische Potenziele und Teilchen-Loch-Parameter für PNM*

dieser Arbeit auch für 0.25 ρ_0 verwenden.
In den nächsten Kapiteln werden wir die hier diskutierten Parameter der starken Wechselwirkung zwischen den Nukleonen mit Hilfe verschiedener Näherungen in den Wirkungsquerschnitt einbauen.

ρ_B/ρ_0	0.25	1	2	3
x_p in %	23.7	25.7	26.6	27.3
x_n in %	76.3	74.3	73.4	72.7
x_{ν_e} in %	6.3	4.3	3.44	2.7
μ_p^* in MeV	-25.5	-51.4	16.43	83.4
μ_n^* in MeV	-0.7	13.0	81.0	211.8
m_p^*/m	0.87	0.65	0.50	0.42
m_n^*/m	0.92	0.75	0.62	0.53
F_0	-2.4	-0.43	1.63	4.05
F_0'	1.50	1.10	0.72	0.53
β in MeV	17.60	44.63	70.18	94.00
$f_{pp} \cdot 10^{-5}$ in MeV^{-2}	-36.62	-16.10	-0.25	17.45
$f_{nn} \cdot 10^{-5}$ in MeV^{-2}	-2.64	1.55	5.30	10.49
$f_{pn} \cdot 10^{-5}$ in MeV^{-2}	-2.20	2.82	6.55	11.59
$f_{np} \cdot 10^{-5}$ in MeV^{-2}	-11.64	-3.56	2.05	8.06
U_p in MeV	-35.72	-87.65	-92.63	-37.86
U_n in MeV	-21.67	-50.85	-41.35	27.63

Tabelle 6.2: *Zusammensetzung der Materie und Teilchen-Loch-Parameter für Materie im Beta-Gleichgewicht.*

ρ_B/ρ_0	0.25	1	2	3
μ^* in MeV	-12.55	-15.97	35.50	151.60
m^*/m	0.90	0.70	0.55	0.47
F_0	-2.21	-0.34	1.02	2.88
F_0'	1.14	0.84	0.46	0.33
β in MeV	11.65	32.35	51.32	71.97
$f_{ii} \cdot 10^{-5}$ in MeV^{-2}	-3.77	1.42	4.24	9.43
$f_{ij} \cdot 10^{-5}$ in MeV^{-2}	-11.86	-3.38	1.61	7.50
U_i in MeV	-28.84	-68.75	-70.01	-10.95

Tabelle 6.3: *Effektive Massen, chemische Potenziele und Teilchen-Loch-Parameter für SNM*

Kapitel 7

Der Wirkungsquerschnitt in Hartree-Näherung

Die einfachste Methode, Effekte der starken Wechselwirkung zwischen den Nukleonen zu berücksichtigen, ist die Molekularfeldnäherung oder auch Mean-Field-Approximation (MF). Man nimmt an, dass sich die Nukleonen unabhängig voneinander in einem gemeinsamen Potenzial bewegen. Die Dispersionsrelation für ein Nukleon wird hierbei folgendermaßen modifiziert:

$$E(p) = \frac{p^2}{2M^*} + U \tag{7.1}$$

Die effektive Masse sowie der im letzten Kapitel bereits eingeführte Potenzialterm U hängen von der Wechselwirkung ab.
Das effektive chemische Potenzial, das in der Fermi-Funktion auftaucht, über die wir intergieren müssen, ergibt sich aus der Ableitung der Energiedichte nach der Teilchenzahldichte, wobei die Dichte der anderen Teilchen jeweils konstant gelassen wird:

$$\mu_i^* = (\frac{\partial \epsilon^*}{\partial \rho_i})_{\rho_j}$$

Für unsere Wechselwirkung (Gleichung 6.12) ergibt das

$$\begin{aligned}\mu_i^* =& \frac{\partial}{\partial \rho_i}\Big[\left(\frac{\hbar^2}{2M} + f(\rho_B, 1-x_p)\right)\tau_n + \left(\frac{\hbar^2}{2M} + f(\rho_B, x_p)\right)\tau_p + \\ & g\left(\rho_B, x_p = 0.5\right)\left(1-(1-2x_p)^2\right) + g\left(\rho_B, x_p = 0\right)(1-2x_p)^2\Big]\end{aligned} \tag{7.2}$$

Nach dem Differenzieren erhalten wir folgende effektive Potenziale für Neutronen und Protonen:

$$
\begin{aligned}
\mu_n^* = &\left(\frac{\hbar^2}{2m} + f(\rho_B, 1-x_p)\right)\frac{\partial}{\partial\rho_n}\tau_n + \tau_p\frac{\partial}{\partial\rho_n}f(\rho_B, x_p) + \tau_n\frac{\partial}{\partial\rho_n}f(\rho_B, 1-x_p) \\
&+ \left(1-(1-2x_p)^2\right)\frac{\partial}{\partial\rho_n}g\left(\rho_B, x_p = 0.5\right) + (1-2x_p)^2\frac{\partial}{\partial\rho_n}g\left(\rho_B, x_p = 0\right) \\
&- 4(1-2x_p)\frac{x_p}{\rho_B}\left(g\left(\rho_B, x_p = 0\right) + g\left(\rho_B, x_p = 0.5\right)\right)
\end{aligned} \tag{7.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_p^* = &\left(\frac{\hbar^2}{2m} + f(\rho_B, x_p)\right)\frac{\partial}{\partial\rho_p}\tau_p + \tau_n\frac{\partial}{\partial\rho_p}f(\rho_B, x_n) + \tau_p\frac{\partial}{\partial\rho_p}f(\rho_B, x_p) \\
&+ \left(1-(1-2x_p)^2\right)\frac{\partial}{\partial\rho_p}g\left(\rho_B, x_p = 0.5\right) + (1-2x_p)^2\frac{\partial}{\partial\rho_p}g\left(\rho_B, x_p = 0\right) \\
&- 4(1-2x_p)\frac{x_n}{\rho_B}\left(g\left(\rho_B, x_p = 0\right) + g\left(\rho_B, x_p = 0.5\right)\right)
\end{aligned} \tag{7.4}
$$

wobei die hier auftretenden Ableitungen gegeben sind durch

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\rho_n}\tau_n = (3\pi^2\rho_n)^{2/3} \\
&\frac{\partial}{\partial\rho_n}f(\rho_B, x_p) = e^{-p_4\rho_B}(p_3 - p_3\rho_B p_4 - \rho_p p_4 p_5) \\
&\frac{\partial}{\partial\rho_n}f(\rho_B, 1-x_p) = \left[e^{-p_4\rho_B}(p_5 x_p + (p_3 + (1-x_p)p_5)(1-p_4\rho_B))\right] \\
&\frac{\partial}{\partial\rho_n}g\left(\rho_B, x_p = 0.5\right) = -2\rho_B p_1 - 3\rho_B^2 p_2 - 4\rho_B^3 p_6 - (p_{11}\rho_B^2 + (p_{10} + p_{11}\rho_B)(2\rho_B - 2p_9^2\rho_B^3))e^{-p_9^2\rho_B^2} \\
&\frac{\partial}{\partial\rho_n}g\left(\rho_B, x_p = 0\right) = -p_{12} - 2\rho_B p_7 - 3\rho_B^2 p_8 - (2p_{13}\rho_B - 2\rho_B^3 p_9^2 p_{13})e^{-p_9^2\rho_B^2}
\end{aligned} \tag{7.5}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\rho_p}\tau_p = (3\pi^2\rho_p)^{2/3} \\
&\frac{\partial}{\partial\rho_p}f(\rho_B, 1-x_p) = e^{-p_4\rho_B}(p_3 - p_3\rho_B p_4 - \rho_n p_4 p_5) \\
&\frac{\partial}{\partial\rho_p}f(\rho_B, x_p) = \left[e^{-p_4\rho_B}(p_5 x_n + (p_3 + x_p p_5)(1-p_4\rho_B))\right] \\
&\frac{\partial}{\partial\rho_p}g\left(\rho_B, x_p = 0.5\right) = \frac{\partial}{\partial\rho_n}g\left(\rho_B, x_p = 0.5\right) \\
&\frac{\partial}{\partial\rho_p}g\left(\rho_B, x_p = 0\right) = \frac{\partial}{\partial\rho_n}g\left(\rho_B, x_p = 0\right)
\end{aligned} \tag{7.6}
$$

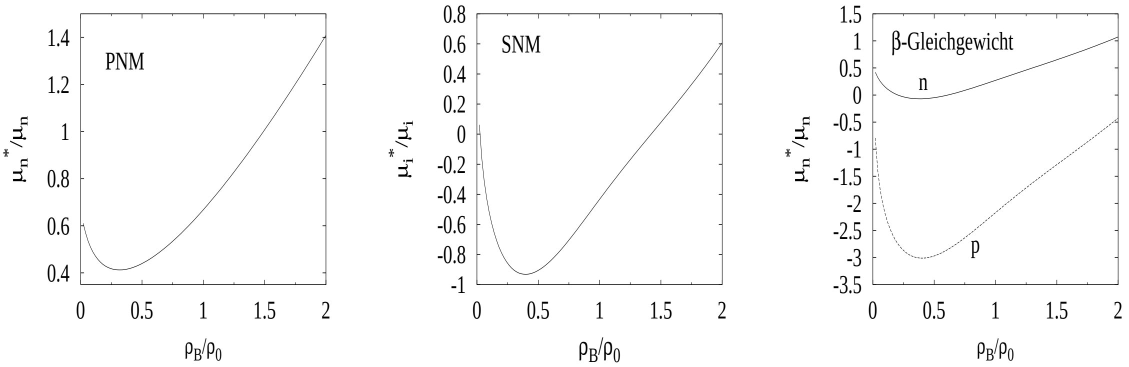

Abbildung 7.1: *Das Verhältnis von effektivem chemischem Potenzial zu chemischem Potenzial ohne Wechselwirkung für Neutronenmaterie, symmetrische Materie und Materie im Beta-Gleichgewicht*

In Abbildung 7.1 sind die Verhältnisse der effektiven chemischen Potenziale zu den chemischen Potenzialen ohne Wechselwirkung als Funktion der Baryonendichte gezeigt. Insgesamt sind die Verhältnisse bis 1.5 ρ_0 kleiner als eins, steigen jedoch bei großen Dichten an. Während die chemischen Potentiale ohne Wechselwirkung proportional zu $\rho^{2/3}$ ansteigen, können die effektiven Potenziale bei Dichten kleiner als ρ_0 auch negativ werden. Bei Materie im β-Gleichgewicht werden zwar beide Potenziale von Protonen und Neutronen abgesenkt, das der Protonen verringert sich jedoch wesentlich mehr. Dies hat Einfluss auf die Anteile der verschiedenen Teilchensorten, wie man in Abbildung 7.2 sehen kann: Der Neutronenanteil ist besonders bei niedrigen Dichten bis 0.5 ρ_0 mit 75-80% höher als in Materie mit nicht wechselwirkenden Neutronen, geht jedoch mit wachsender Dichte wieder auf 70% zurück. Die Protonen- und Elektronenanteile sind dementsprechend bei niedrigen Dichten kleiner als 30%, wachsen jedoch mit der Dichte an. Die Neutrinos bleiben als Folge der verringerten effektiven Potenziale der Nukleonen gerade bei hohen Dichten deutlich unter 10%.

Der Potenzialterm U_i in der Spektralfunktion der Nukleonen ergibt sich nach Gleichung 7.1 aus der Differenz von effektivem chemischem Potenzial μ_i^* und $p_{fi}^2/2M_i^*$, wenn man für die Energie die Fermienergie E_F einsetzt:

$$U_i = \mu_i^* - p_{fi}^2/2M_i^* \tag{7.7}$$

In Abbildung 7.3 sind die Potenzialterme für Protonen und Neutronen als Funktion der Baryonendichte gezeigt. In Neutronenmaterie gibt es "formal" auch ein nichtverschwindendes Potenzial für die Protonen, da das effektive chemische Potenzial $\mu_p \neq 0$ ist. Sowohl in symmetrischer Materie als auch in Materie im Beta-Gleichgewicht ist der Betrag des Protonenpotenzials größer als der des Neutronenpotenzials.

Welchen Einfluss haben die effektiven Massen und Potenziale auf die Response-

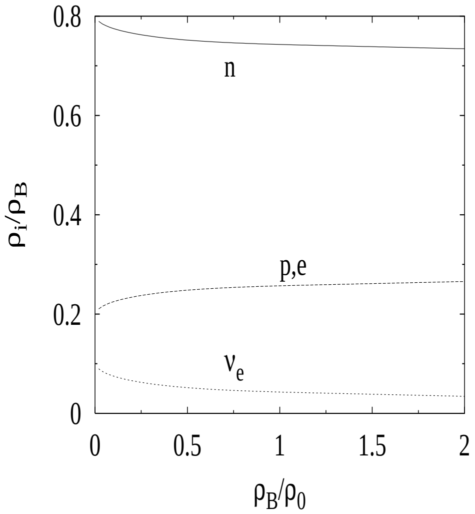

Abbildung 7.2: *Anteile von Neutronen, Protonen, Elektronen und Elektron-Neutrinos in Materie im Beta-Gleichgewicht mit wechselwirkenden Nukleonen.*

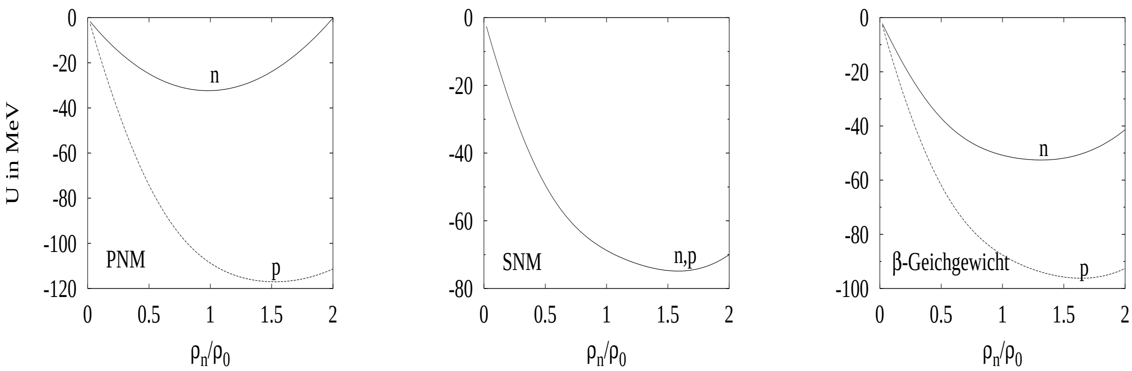

Abbildung 7.3: *Die aus der Wechselwirkung resultierenden Potenzialterme für Protonen und Neutronen*

Funktion des Nukleonengases? Dazu schauen wir uns wieder die δ-Funktion an, über die wir intergieren müssen, um die Responsefunktion (Gleichung 4.1) zu erhalten:

$$S = \frac{1}{2\pi^2} \int d^3p\delta(q_0 + E_p - E_{p+q}) f_p (1 - f_{p+q}) \tag{7.8}$$

$$\delta(q_0 + E_p + E_{p+q}) = \frac{M_4}{pq} \delta(cos\theta - cos\theta_0) \tag{7.9}$$

mit

$$
\begin{aligned}
cos\theta_0 &= \frac{M_4}{pq}\left(c - \frac{\chi p^2}{2M_4}\right) \\
c &= q_0 + U_2 - U_4 - \frac{q^2}{2M_4} \\
\chi &= 1 - \frac{M_4}{M_2}
\end{aligned} \tag{7.10}
$$

Aus der Forderung, dass der Betrag von cos θ_0 kleiner als eins sein muss, damit die δ-Funktion nicht überall verschwindet, erhalten wir ein Polynom 2.Grades in p mit zwei Nullstellen $p_\pm$, zwischen denen das Argument der δ-Funktion null werden kann. Die anderen beiden Bereiche müssen durch θ-Funktionen wieder ausgeschlossen werden, die diesmal eine obere und untere Integrationsgrenze liefern:

$$
p_\pm^2 = \frac{2q^2}{\chi^2}\left[\left(1 + \frac{\chi M_4 c}{q^2}\right) \pm \sqrt{1 + \frac{2\chi M_4 c}{q^2}}\right] \tag{7.11}
$$

$$
S = \frac{M_4}{\pi q}\int pdp\theta(E_p - e_-)\theta(e_+ - E_p) f_p(1 - f_{p+q}) \tag{7.12}
$$

Ab jetzt müssen wir beim Ausführen der Integration wieder zwischen T = 0 und endlicher Temperatur unterscheiden.

7.1 T = 0

Für T = 0 ist das Produkt der Fermi-Funktionen gegeben durch

$$
f_p(1 - f_{p+q}) = \theta_1\left(\mu_2 - U_2 - \frac{p^2}{2M_2}\right)\theta_2\left(\frac{p^2}{2M_2} + q_0 - \mu_4 + U_2\right) \tag{7.13}
$$

Wir haben also über vier θ-Funktionen zu integrieren und erhalten für die Response-Funktion:

$$
S(q_0, q) = \begin{cases} \frac{M_4}{2\pi q}(p_o^2 - p_u^2) & p_1 > p_2 \,\text{und}\, p_+ > p_2 \,\text{und}\, p_1 > p_- \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{7.14}
$$

$$
p_o = \begin{cases} p_+ & \text{wenn } p_+ < p_1 \\ p_1 & \text{sonst} \end{cases} \qquad p_u = \begin{cases} p_- & \text{wenn} p_2 < p_- \\ p_2 & \text{sonst} \end{cases} \tag{7.15}
$$

$$
p_1 = p_{f2} \tag{7.16}
$$

$$
p_2 = \sqrt{2M_2(-q_0 + \mu_4 - U_2)} \tag{7.17}
$$

$p_\pm$ sind in Gleichung 7.11 definiert.
Die Bedingung $p_1 > p_2$ ist, wie auch im wechselwirkungsfreien Fall, äquivalent zu der Forderung, dass der Energieübertrag q_0 mindestens $\hat{\mu} = \mu_p - \mu_n$ betragen muss. Die anderen Bedingungen dafür, dass die Response-Funktion nicht verschwindet, sind mit etwas komplizierteren Einschränkungen an q_0 verknüpft, hier der Einfachheit wegen durch die vorher eingeführten Impulse p_1, p_2 und $p_\pm$ ausgedrückt.

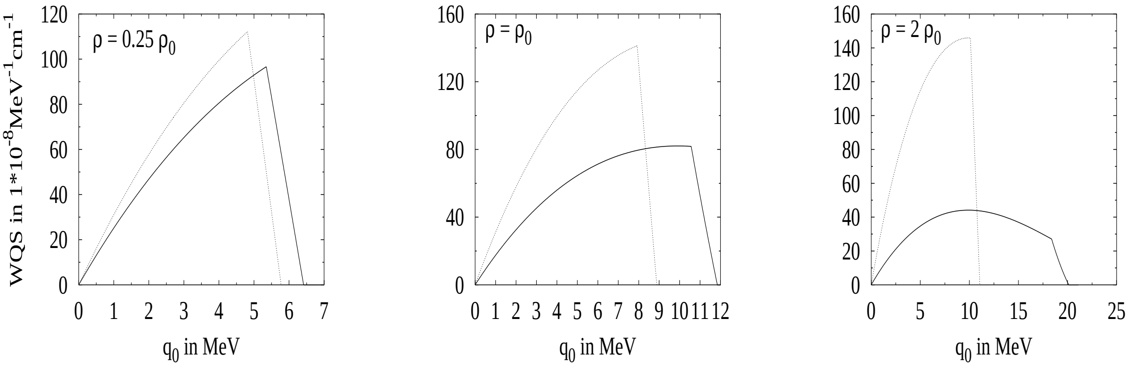

Abbildung 7.4: *Der Wirkungsquerschnitt des neutralen Stromes in symmetrischer Kernmaterie bei verschiedenen Dichten. Die durchgezogene Linie kennzeichnet das Ergebnis für die Hartree-Näherung, die gestrichelte ist zum Vergleich für ein freies Gas eingezeichnet.* $q = \epsilon_i =$ *30 MeV,* $T = 0$

In Abbildung 7.4 ist der Wirkungsquerschnitt des neutralen Stromes in symmetrischer Materie für verschiedene Dichten gezeigt. Dieser hängt nur von der effektiven Masse ab, nicht vom Potenzialterm, der in der Differenz E-μ nicht mehr vorkommt:

$$E - \mu = \frac{p^2}{2M^*} + U - \mu^* \tag{7.18}$$

$$= \frac{p^2}{2M^*} + U - (\frac{p_f^2}{2M^*} + U) \tag{7.19}$$

$$= \frac{p^2}{2M^*} - \frac{p_f^2}{2M^*} \tag{7.20}$$

Die zugehörigen effektiven Massen findet man in Tabelle 6.2. Der maximale Energieübertrag ist im Vergleich zum freien Gas größer, da er proportional zu M^{*-1} ist, somit also mit kleinerer Masse steigt. Der Wirkungsquerschnitt selbst wird jedoch kleiner als im freien Gas Fall. Beide Effekte werden größer mit wachsender Dichte, da mit dieser auch die effektive Masse immer mehr von $M_n = 939$ MeV abweicht.

Die aus diesen WQS resultierenden mittleren freien Weglängen sind in Bild 7.6 dargestellt.

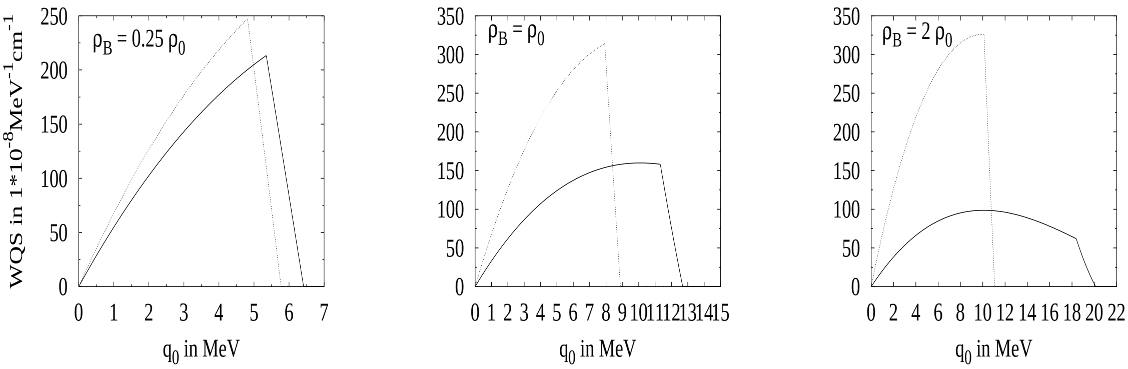

Abbildung 7.5: *Der Wirkungsquerschnitt des geladenen Stromes in symmetrischer Kernmaterie in Hartree-Näherung (durchgezogene Linie) und zum Vergleich für ein freies Gas (gestrichelte Linie) bei verschiedenen Dichten.* $q = \epsilon_i = 30$ *MeV,* $T = 0$.

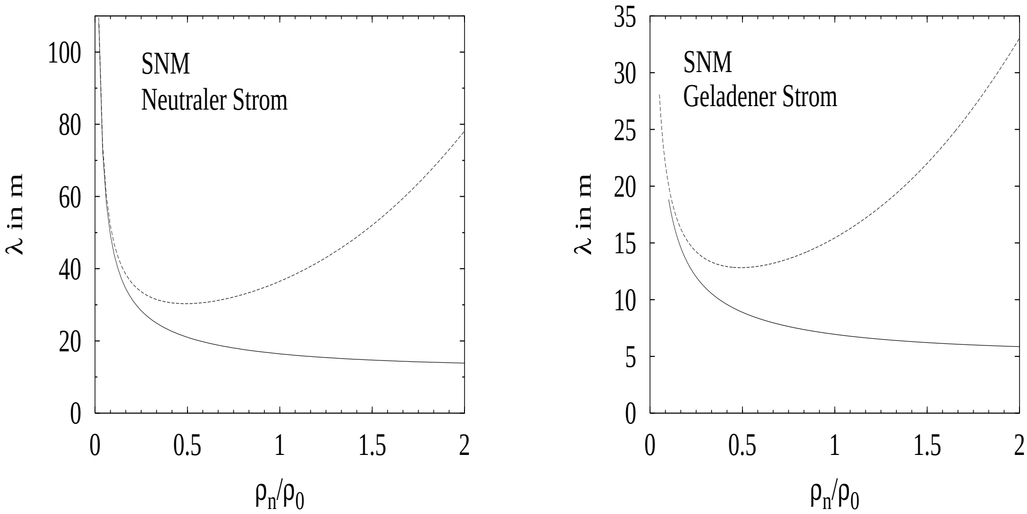

Abbildung 7.6: *Die mittlere freie Weglänge bei* $T = 0$ *als Funktion der Dichte für* $q = \epsilon_i = 30$ *MeV. Links für den neutralen, rechts für den geladenen Strom. Zum Vergleich sind die freien Weglängen auch für den Fall eines freien Gases gezeigt (durchgezogene Linie).*

Im Vergleich zur Weglänge im freien Nukleonengas ist sie bei hohen Dichten wesentlich größer. Auf den ersten Blick vielleicht erstaunlich ist, dass sie bei einer Dichte von etwa 0.5 ρ_0 ein Minimum erreicht und dann wieder ansteigt. Ursache ist auch hier die effektive Masse, die mit steigender Dichte sehr stark abnimmt und λ proportional zur inversen Masse ist.
Dieselben Effekte beobachtet man auch in Neutronenmaterie und in Materie im Beta-Gleichgewicht sowohl für den geladenen als auch für den neutralen Strom. Die Wechselwirkung in Hartree-Näherung liefert also zumindest bei T = 0 insgesamt eine wesentlich größere freie Weglänge für die Neutrinos in Kernmaterie.

7.2 Endliche Temperatur

Bei endlicher Temperatur liefern die beiden θ-Funktionen in Gleichung 7.13 die Integrationsgrenzen. Es bleibt über das Produkt der Fermi-Funktionen zu integrieren. Mit wenigen Umformungen können wir die Response-Funktion auf folgende Form bringen:

$$S = \frac{M_2 M_4 T}{\pi q} \int_{p_-}^{p_+} dy \frac{1}{1+e^y} \left(1 + exp \left(-y + \frac{\hat{\mu} - q_0 - U_2}{T} \right) \right)^{-1} \tag{7.21}$$

mit der Substitution

$$y = \frac{1}{T} \left(\frac{p^2}{2M_2} - \mu_2 + U_2 \right). \tag{7.22}$$

Diese Integration lässt sich analytisch ausführen. Man erhält schließlich für den geladenen Strom:

$$S(q_0, q) = \frac{M_2 M_4 T}{\pi q} \frac{1}{1 - e^{-z}} (\xi_- - \xi_+) \tag{7.23}$$

$$z = \frac{1}{T}(q_0 - \hat{\mu} + U_2) \tag{7.24}$$

$$\xi_\pm = ln \left(\frac{1 + exp[(e_\pm - \mu_2 + U_2)/T]}{1 + exp[(e_\pm + q_0 - \mu_4 + U_2)/T]} \right) \tag{7.25}$$

$$e_\pm = \frac{p_\pm^2}{2M_2} \tag{7.26}$$

Der Ausdruck für den neutralen Strom sieht wegen $\mathrm{U}_2 = \mathrm{U}_4$, die Potenzialterme, die in $\hat{\mu}$ eingehen, $\mathrm{M}_2 = \mathrm{M}_4$ und $\mu_2 = \mu_4$ etwas einfacher aus:

$$S(q_0, q) = \frac{M_2^2 T}{\pi q} \frac{1}{1 - e^{-z}} (z + \xi_-) \tag{7.27}$$

mit

$$z = \frac{q_0}{T} \tag{7.28}$$

$$\xi_- = ln \left(\frac{1 + exp[(e_- - \mu_2 + U_2)/T]}{1 + exp[(e_- + q_0 - \mu_2 + U_2)/T]} \right) \tag{7.29}$$

$$e_- = \frac{p_-^2}{2M_2} \tag{7.30}$$

$$p_-^2 = \left(\frac{M_2 q_0}{q} - \frac{q}{2} \right)^2 \tag{7.31}$$

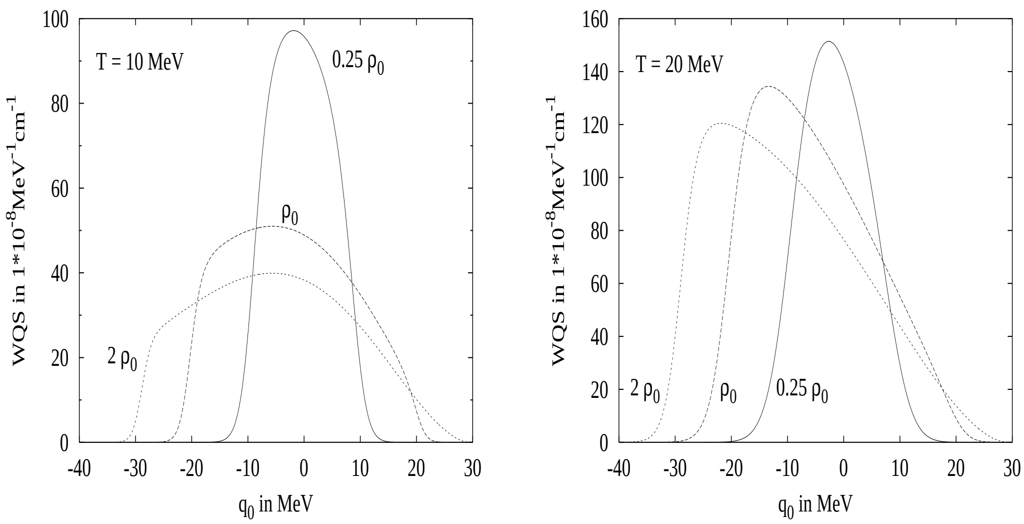

Abbildung 7.7: *Der Wirkungsquerschnitt in Neutronenmaterie in Hartree-Näherung bei unterschiedlichen Dichten.* $q = \epsilon_i = 30\ MeV$

In Abbildung 7.7 ist der Wirkungsquerschnitt in Neutronenmaterie für T = 10 MeV und T = 20 MeV und unterschiedliche Dichten gezeigt. Zugehörige effektive Massen findet man in Tabelle 6.2. Auch hier beobachten wir im Vergleich zu den Ergebnissen im freien Nukleonengas die zwei bei T = 0 diskutierten Tendenzen: Der Wirkungsquerschnitt nimmt durch die effektive Masse ab, der Betrag des maximalen Impulsübertrages wird jedoch größer. Je höher die Dichte, desto deutlicher sind diese Effekte.

Der Wirkungsquerschnitt des neutralen Stromes für Materie im Beta-Gleichgewicht (Abbildung 7.8) wird durch die effektive Masse bei hohen Dichten deutlich reduziert. In dem hier gezeigten Dichtebereich (0.25-2ρ_0) bleibt er fast konstant. Im Fall eines freien Gases würde man einen Anstieg mit der Dichte erwarten. Die Energie des einlaufenden Neutrinos wurde hier gleichgesetzt mit ihrem chemischen Potenzial, da Neutrinos an der Fermikante besonders gerne Wechselwirkungen eingehen. Da μ mit $\rho^{1/3}$ ansteigt, würde man hier eine Verschiebung zu höherem Energieübertrag q_0 mit wachsender Dichte erwarten, aber auch dies wird durch die Wechselwirkung unterdrückt.

Abbildung 7.9 zeigt den Wirkungsquerschnitt für den geladenen Strom bei verschiedenen Dichten. Im Vergleich dazu ist in Abbildung 7.10 der Wirkungsquerschnitt im Fall eines freien Gases zu sehen. Auch hier wurden Energie des Neutrinos und Impulsübertrag gleich dem chemischen Potenzial der Neutrinos gesetzt. Im Gegensatz zum neutralen Strom vergrößert die Wechselwirkung hier den Wirkungsquerschnitt. Der Protonenanteil ist mit Wechselwirkung kleiner, was sich gleichzeitig in einem größeren $|\hat{\mu}|$ bemerkbar macht und den Wirkungsquerschnitt vergrößert. Das Maximum liegt nicht mehr bei $\hat{\mu}$, sondern ist zu einem größeren q_0 hin verschoben.

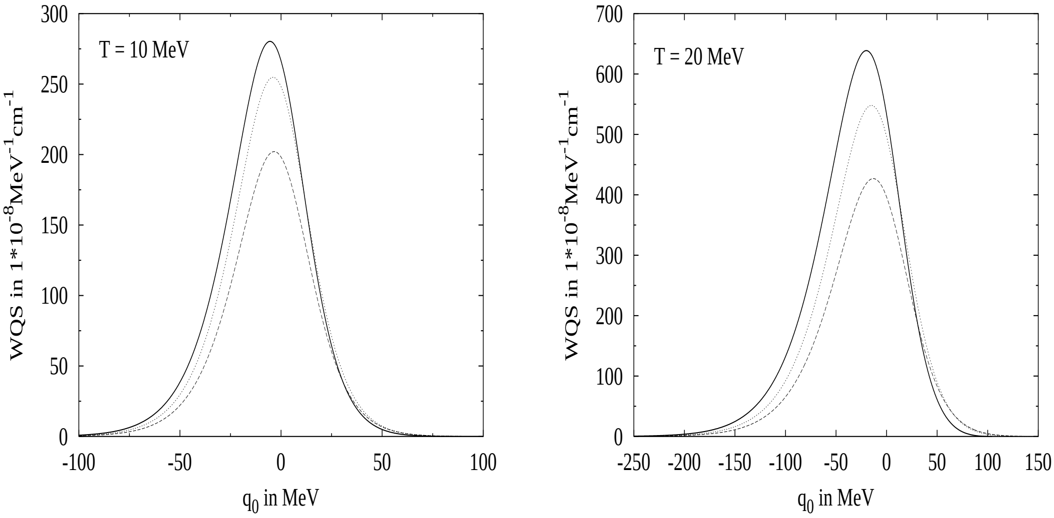

Abbildung 7.8: *Der Wirkungsquerschnitt des neutralen Stromes bei 10 MeV (links) und 20 MeV (rechts) in Materie im Beta-Gleichgewicht in Hartree-Näherung bei unterschiedlichen Dichten: Die durchgezogene Linie ist bei einer Dichte von 0.25* ρ_0 *gerechnet, die gepunktete Linie bei Kernmateriedichte und die gestrichelte Linie bei doppelter Kernmateriedichte.* $q = \epsilon_i = \mu_{\nu_e}$. *Werte für die chemischen Potenziale können in der Tabelle 6.2 abgelesen werden*

In der Mean-Field-Näherung wird der Wirkungsquerschnitt des neutralen Stromes durch die effektiven Massen also unterdrückt, während der maximal mögliche Impulsübertrag steigt. Der Wirkungsquerschnitt für den geladenen Strom wird einerseits durch einen geringeren Protonenanteil in Materie im Beta-Gleichgewicht vergrößert, dieser Effekt wird jedoch durch die effektiven Massen verdeckt, die ihn wieder nach unten drücken.

Das Hartree-Bild, in dem sich die Nukleonen unabhängig voneinander bewegen, ist eine erste Näherung und für unser Problem immer noch sehr vereinfacht. Im nächsten Kapitel werden wir deshalb mittels RPA-Rechnungen Korrelationen zwischen den Teilchen berücksichtigen.

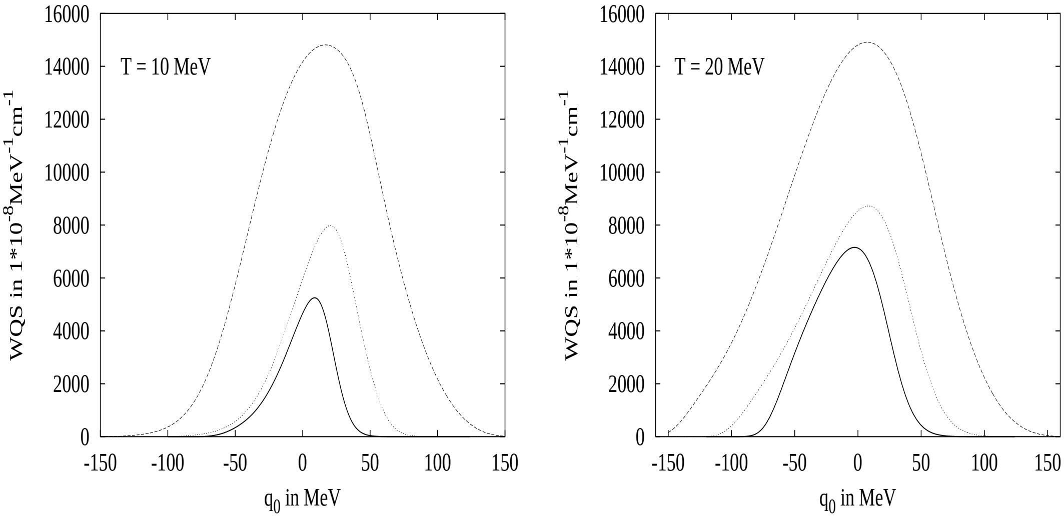

Abbildung 7.9: *Der Wirkungsquerschnitt des geladenen Stromes bei 10 MeV (links) und 20 MeV (rechts) in Materie im Beta-Gleichgewicht in Hartree-Näherung bei unterschiedlichen Dichten: Die durchgezogene Linie ist bei einer Dichte von 0.5* ρ_0 *gerechnet, die gepunktete Linie bei Kernmateriedichte und die gestrichelte Linie bei doppelter Kernmateriedichte.* $q = \epsilon_i = \mu_{\nu_e}$. *Werte für das chemische Potenzial können in den Tabellen 7.1 und 7.2 abgelesen werden.*

ρ_B/ρ_0	0.25	1	2
x_n	0.69	0.67	0.67
$x_p = x_e$	0.31	0.33	0.33
x_{ν_e}	0.09	0.07	0.07
μ_n in MeV	-7	8	72
μ_p in MeV	-32	47	-4
μ_e in MeV	139	227	288
μ_{ν_e} in MeV	114	172	212

Tabelle 7.1: T = 10 MeV

ρ_B/ρ_0	0.25	1	2
x_n	0.68	0.67	0.67
$x_p = x_e$	0.32	0.33	0.33
x_{ν_e}	0.08	0.07	0.07
μ_n in MeV	-23	2.5	70
μ_p in MeV	-53	-54	7.5
μ_e in MeV	133	223	285
μ_{ν_e} in MeV	103	166	207

Tabelle 7.2: T = 20 MeV

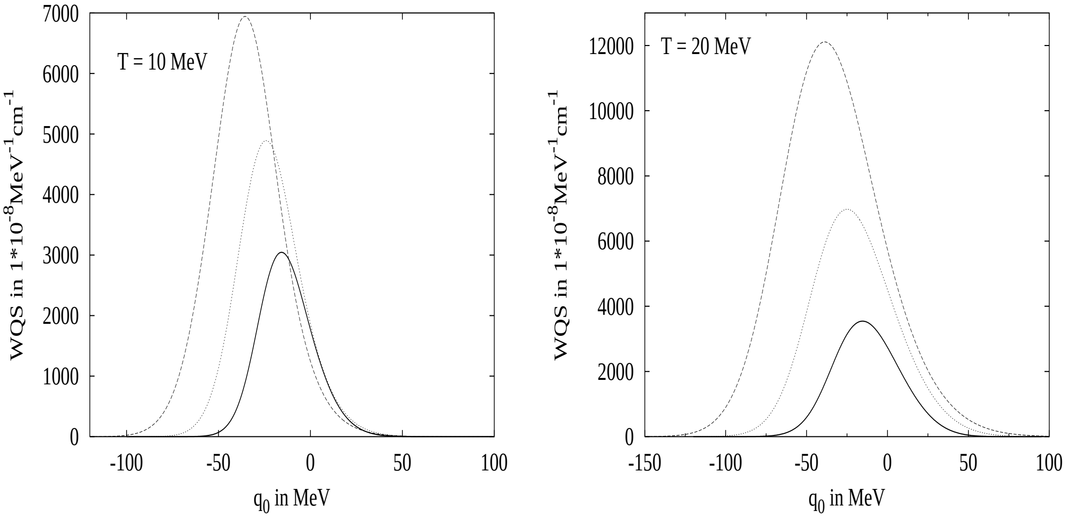

Abbildung 7.10: *Der Wirkungsquerschnitt des geladenen Stromes bei 10 MeV (links) und 20 MeV (rechts) in Materie im Beta-Gleichgewicht für ein freies Nukleonengas bei unterschiedlichen Dichten: Die durchgezogene Linie ist bei einer Dichte von 0.5 ρ_0 gerechnet, die gepunktete Linie bei Kernmateriedichte und die gestrichelte Linie bei doppelter Kernmateriedichte. $q = \epsilon_i = \mu_{\nu_e}$. Werte für das chemische Potenzial können in den Tabellen 7.1 und 7.2 abgelesen werden.*

Kapitel 8

Random Phase Approximation

In der Mean-Field-Theorie macht man die Voraussetzung, dass die mittlere freie Weglänge hinreichend groß ist, um die Nukleonen als sich voneinander unabhängige in einem effektiven Feld bewegende Teilchen zu beschreiben. Auf dieser Annahme beruht auch das Schalenmodell für Kerne. Bereits hier, wo die Dichte Kernmateriedichte nicht übersteigt, versagt es jedoch, wenn es um die Beschreibung kollektiver Phänomene wie Riesenresonanzen geht. Riesenresonanzen sind Dichteschwingungen des Atomkerns, an denen praktisch alle Nukleonen beteiligt sind. Sie sind vergleichbar mit den Schallwellen in einer Flüssigkeit und können durch Absorption von Phononen oder bei inelastischer Sreuung verursacht werden. Im Wirkungsquerschnitt treten sie dann als scharfe Peaks auf, die mehr als 50% des Gesamtwirkungsquerschnittes ausmachen. Für Neutronensternmaterie sind sie interessant, da die Variation der Resonanzfrequenzen mit der Kernmassenzahl eine Extrapolation auf homogene Kernmaterie zulässt und sich somit Materialkonstanten wie die Kompressibilität oder die Polarisierbarkeit experimentell bestimmen lassen [27]. Aufgrund der Ergebnisse dieser Extrapolationen erwarten wir auch für unendliche Kernmaterie Resonanzen im Wirkungsquerschnitt, die eine Mean-Field-Näherung nicht liefert. Unser Ziel ist es deshalb, das Bild der sich unabhängig voneinander bewegenden Nukleonen aufzugeben und Korrelationen in den Wirkungsquerschnitt einzubauen. In diesem Kapitel wollen wir den Einfluss von Teilchen-Loch-Anregungen mithilfe der Random Phase Approximation (RPA) untersuchen. Dies ist ein erster Schritt, eine selbstkonsistente Theorie zwischen dem Verhalten der Kernmaterie unter Neutrino-induzierter Anregung und der zugrundeliegenden Zustandsgleichung aufzubauen. Die RPA wird insbesondere angewandt, um Anregungen von Materie mit hoher Dichte wie in einem Neutronenstern oder in Kernen zu beschreiben. Wie auch die Tamm Dankoff Näherung (TDA) hat sie sich bei Beschreibung kollektiver Anregungen (Riesenresonanzen) in Kernen in den letzten Jahrzehnten sehr bewährt. Störungstheorie ist hier nicht anwendbar, da die Wechselwirkung zwischen den Teilchen nicht als klein angenommen werden kann.

Der Hamiltonoperator setzt sich in der TDA aus einem "freien" Anteil H_0, der die kinetische Energien T_α und Einteilchenpotenziale V_α enthält, und einer Restwechselwirkung $\hat{H}_1 + \hat{H}_2$ zusammen:

$$\hat{H} = H_0 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2 \tag{8.1}$$

$\hat{H}_1$ und $\hat{H}_2$ enthalten Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger$, a, $b^\dagger$ und b für Teilchen- und Lochzustände [12]:

$$\hat{H}_1 = \sum_{\alpha > F} \epsilon_\alpha a^\dagger_\alpha a_\alpha - \sum_{\alpha < F} \epsilon_\alpha b^\dagger_{-\alpha} b_{-\alpha} \tag{8.2}$$

$$\hat{H}_2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} < \alpha\beta|V|\gamma\delta > [N(c^\dagger_\alpha c^\dagger_\beta c_\delta c_\gamma), a^\dagger_\alpha b^\dagger_\beta] \tag{8.3}$$

$N(\sum_i x_i)$ bezeichnet das normalgeordnete Produkt von Operatoren. Alle Vernichtungsoperatoren stehen rechts von den Erzeugungsoperatoren und jede Permutation ändert das Vorzeichen von N. Die Operatoren c_i vernichten ein Teilchen, falls die Energie i größer ist als die Fermieenergie, oder sie erzeugen ein Loch unterhalb der Fermikante:

$$c_\alpha = \theta(\alpha - F) a_\alpha + \theta(F - \alpha) S_\alpha b^\dagger_{-\alpha} \tag{8.4}$$

Mit der Einführung eines Teilchen-Loch-Erzeugungsoperators, der ein Loch unterhalb der Fermikante und ein Teilchen oberhalb der Fermikante erzeugt,

$$\hat{\xi}^\dagger_{\alpha,\beta} = a^\dagger_\alpha b^\dagger_\beta \tag{8.5}$$

können wir das Matrixelement, das in die Übergangswahrscheinlichkeit vom Grundzustand $|\Phi_0 >$ in den angeregten Zustand $|\Phi_n >$ eingeht, mit dem Kommutator $[\hat{H},\hat{\xi}^\dagger_{\alpha,\beta}]$ ausdrücken:

$$< \Phi_n|[\hat{H}, \hat{\xi}^\dagger_{\alpha,\beta}]|\Phi_0 >= (E_n - E_0) < \Phi_n|\hat{\xi}^\dagger_{\alpha,\beta}|\Phi_0 > \tag{8.6}$$

H_0 kommutiert mit $\hat{\xi}^\dagger_{\alpha,\beta}$ und der Kommutator $[\hat{H}_1,\hat{\xi}^\dagger_{\alpha,\beta}]$ ist auch relativ einfach auszurechnen. Probleme macht der Kommutator von H_2 mit $\hat{\xi}^\dagger_{\alpha,\beta}$. In der TDA macht man nun die Annahme, dass im Grundzustand alle Zustände bis zur Fermikante besetzt und alle oberhalb unbesetzt sind und sich der angeregte Zustand als lineare Kombination von Teilchen-Loch-Zuständen schreiben lässt:

$$|\Phi_0 >= |0 > \qquad a_\alpha|0 >= b_\beta|0 >= 0 \tag{8.7}$$

$$|\Phi_n >= \sum_{\alpha,\beta} \Phi^{(n)*}_{\alpha\beta} \hat{\xi}^\dagger_{\alpha,\beta}|0 > \tag{8.8}$$

Der Kommutator kann damit entwickelt werden, da er nur noch Terme mit $a^\dagger b^\dagger$ enthält, der Rest verschwindet zwischen den so definierten Zuständen. Für das Matrixelement 8.6 ergibt sich damit ein Satz linearer homogener Gleichungen für die Feldoperatoren $\Phi^{(n)}_{\lambda\gamma}$.
Die RPA ist eine Verallgmeinerung der TDA. In ihr kann auch der Grundzustand schon

Teilchen-Loch-Zustände beinhalten und wir müssen neben einem Operator, der Teilchen-Loch-Paare erzeugt, auch einen Operator einführen, der sie vernichtet:

$$\hat{\xi}_{\alpha,\beta} = b_\beta a_\alpha \tag{8.9}$$

Die angeregten Zustände können dann im Gegensatz zur TDA nicht nur durch Erzeugung, sondern auch durch Vernichtung von Teilchen-Loch-Paaren erreicht werden. Die Bewegungsgleichungen für die Feldoperatoren sind jedoch immer noch linear.
Durch die Teilchen-Loch-Wechselwirkung können die Paare sich nun auch im Medium ausbreiten, was zu kollektiven Anregungen führen kann. Dies tritt auch bei unseren Rechnungen auf.
Der zu dieser Näherung gehörige Feynmangraph, mit dessen Hilfe wir das invariante Matrixelement berechnen können, enthält eine unendliche Iteration von Teilchen-Loch-Schleifen. Repräsentativ ist hier ein Ausschnitt gezeigt, der alle möglichen Schleifen enthält:

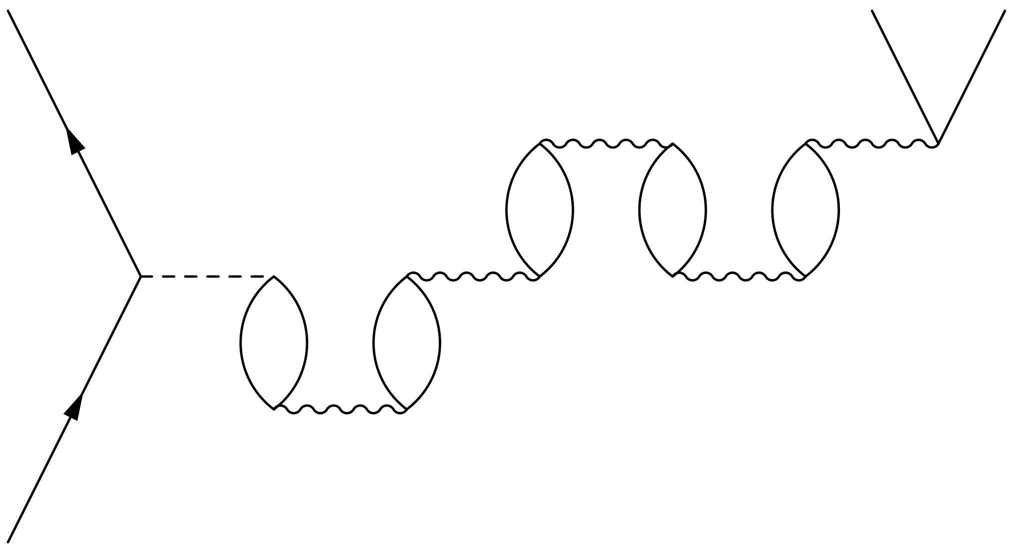

Abbildung 8.1: *Wechselwirkung eines Neutrinos mit einem Nukleon mit Teilchen-Loch-Korrelationen. Links die Wellenfunktionen der ein- und auslaufenden Leptonen, rechts die Teilchen-Loch-Paare, die erzeugt und vernichtet werden können.*

Im Gegensatz zur Hartree-Näherung werden hier alle möglichen Schleifen berücksichtigt und wir "schneiden den Feynman-Graph nicht nach der niedrigsten Ordnung ab", so dass man von einer "selbstkonsisitenten Näherung" sprechen kann.
Die Rechnung liefert eine Integralgleichung, die Dyson-Gleichung, für die Greensche Funk-

tion $G_{\alpha\beta}$. In einem räumlich homogenen System führt dies auf eine Matrixgleichung für $G_{\alpha\beta}(k)$ im Impulsraum, die die Selbstenergie Σ(k) definiert [28]:

$$G_{\alpha\beta}(k) = G^0_{\alpha\beta}(k) + G^0_{\alpha\beta}(k)\Sigma(k)G_{\alpha\beta}(k) \tag{8.10}$$

G^0(k) bezeichnet hier die Green'sche Funktion ohne Wechselwirkung. Die Matrizen in dieser Gleichung haben Diagonalgestalt und die Dyson-Gleichung kann damit gelöst werden. Die Polarisationsfunktion Π^0 ist mit der Greenschen Funktion verknüpft durch

$$\Pi^0(q_0, q) = -\frac{2i}{\hbar(2\pi)^4}\int d^4k\, G^0(k)G^0(k+q). \tag{8.11}$$

Auch für sie erhalten wir eine geometrische Reihe, von der wir den Imaginärteil ausrechnen müssen, um die Response-Funktion zu erhalten, was in den nächsten Unterkapiteln ausgeführt wird.
Weitere Informationen über RPA und TDA findet man beispielsweise in [12] oder [30].
In den folgenden Unterkapiteln werden wir vorerst den einfachsten Fall behandeln, den Wirkungsquerschnitt in reiner Neutronenmaterie, bevor wir unsere Rechnungen auf symmetrische Kernmaterie und Materie im Beta-Gleichgewicht ausdehnen.

8.1 Neutronenmaterie

Wie bereits angedeutet, müssen wir mithilfe der Dyson-Gleichung [2]

$$\Pi^{RPA}_{ij} = \frac{\Pi^0}{1 - V_{ij}\Pi^0} \tag{8.12}$$

die Response-Funktion

$$S_{ij} = \frac{1}{1 - exp(q_0/T)} Im\, \Pi^{RPA}_{ij} \tag{8.13}$$

ausrechnen. Mit Π^0 = Re Π^0 + i Im Π^0 erhält man für S_{ij} nach wenigen Umformungen für die Response-Funktion

$$S_{ij} = \frac{1}{1 - exp(q_0/T)} \frac{Im\Pi^0}{\epsilon_{ij}} \tag{8.14}$$

mit

$$\epsilon_{ij} = Re^2(1 - V_{ij}\Pi^0) + Im^2(1 - V_{ij}\Pi^0). \tag{8.15}$$

Die Response-Funktion unterscheidet sich von der im Fall eines freien Gases durch die Funktion ϵ_{ij}. Diese wird in der Literatur auch häufig als "Screening-Funktion" bezeichnet. Ist die Wechselwirkung abstoßend ($\epsilon_{ij}(q_0 = 0, q) > 1$), so wird die Antwort des Mediums unterdrückt, während eine anziehende Wechselwirkung ($\epsilon_{ij}(q_0 = 0, q) < 1$)

eine Verstärkung zur Folge hat. Bei sehr starker Abstoßung erwarten wir kollektive Anregungen, welche die Antwort verstärken, wenn der Energieübertrag q_0 denselben Betrag wie die Energie des kollektiven Zustandes besitzt [2].

Im Wirkungsquerschnitt tritt nun neben dem Imaginär- auch der Realteil der Polarisationsfunktion auf. Diesen kann man mit Hilfe der Dispersionsrelation

$$Re\,\Pi^0(q_0,q) = -\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Im\,\Pi^0(\omega,q)}{\omega-q_0}d\omega \tag{8.16}$$

für T = 0 ganz und für endliche Temperatur zumindest teilweise analytisch berechnen.

T = 0:

$$Im\Pi^0(q_0,q) = \begin{cases} \frac{M^2}{\pi q}q_0 & : \text{ für } |q_0| \le a \\ \frac{M^2}{\pi q}\left(\mu - \frac{M}{2q^2}\left(q_0 - \frac{q^2}{2M}\right)\right) & : \text{ für } a < q_0 \le b \\ -\frac{M^2}{\pi q}\left(\mu - \frac{M}{2q^2}\left(q_0 - \frac{q^2}{2M}\right)\right) & : \text{ für } -a > q_0 \ge -b \\ 0 & : \text{ sonst} \end{cases} \tag{8.17}$$

mit

$$a := -\frac{q^2}{2M} + q\sqrt{\frac{2\mu}{M}} \tag{8.18}$$

$$b := \frac{q^2}{2M} + q\sqrt{\frac{2\mu}{M}} \tag{8.19}$$

Der Realteil Re Π^0 ist hier antisymmetrisch und die Dispersionsrelation vereinfacht sich in diesem Fall zu

$$Re\,\Pi^0 = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{Im\,\Pi^0}{\omega^2-q_0^2}\,d\omega^2 \tag{8.20}$$

und wir müssen nur von 0 bis ∞ integrieren.
Daraus folgt für den Realteil nach der Integration

$$Re\Pi^0(q_0,q) = -\frac{2M^2}{\pi^2 q}\left[a + \frac{q_0}{2}log\left(|\frac{a-q_0}{a+q_0}|\right) + \frac{\mu}{2}log\left(|\frac{b^2-q_0^2}{a^2-q_0^2}|\right) - \frac{M}{2q^2}\chi\right] \tag{8.21}$$

$$\begin{aligned}\chi =& \frac{1}{2}(b^2-a^2) + \frac{a-b}{M}q^2 + \frac{1}{2M}q^2q_0log\left(|\frac{1-\frac{a}{q_0}}{1-\frac{b}{q_0}}|\right) + \frac{1}{2M}q^2q_0log\left(|\frac{b+q_0}{a+q_0}|\right)\\ &+ \frac{q^4}{8M^2}log\left(|\frac{b^2-q_0^2}{a^2-q_0^2}|\right) + \frac{q_0^2}{2}log\left(|\frac{b^2-q_0^2}{a^2-q_0^2}|\right)\end{aligned} \tag{8.22}$$

T $\neq$ 0:

Hier müssen wir die obere Intergationsgrenze ω_{max} numerisch festlegen, da die Fermi-Funktion für die Responsefunktion 4.1 keinen maximalen Energieübertrag mehr liefert. Führt man in Gleichung 8.20 eine Partialbruchzerlegung durch, so erhält man zwei Terme, über die integriert werden muss. Eines der Integrale lässt sich analytisch lösen, während der zweite Ausdruck numerisch integriert werden muss. Der Ausdruck für den Realteil lautet damit wie folgt:

$$Re\Pi^0 = -\frac{2M^2}{\pi^2 q}\Bigg[\omega_{max} + \frac{q_0}{2} ln\left(|\frac{\omega_{max}-q_0}{\omega_{max}+q_0}|\right) \tag{8.23}$$

$$+T\int_0^{\omega_{max}} ln\left(\frac{1+exp((e_- - \mu_n)/T)}{1+exp((e_- + \omega - \mu_n)/T)}\right)\frac{\omega}{\omega^2 - q_0^2}d\omega\Bigg] \tag{8.24}$$

In den RPA-Rechnungen können auch effektive Massen und Potenziale verwendet werden. Die Formeln ändern sich nicht, wenn wir M durch M* und μ durch $p_f^2./2M^*$ ersetzen.

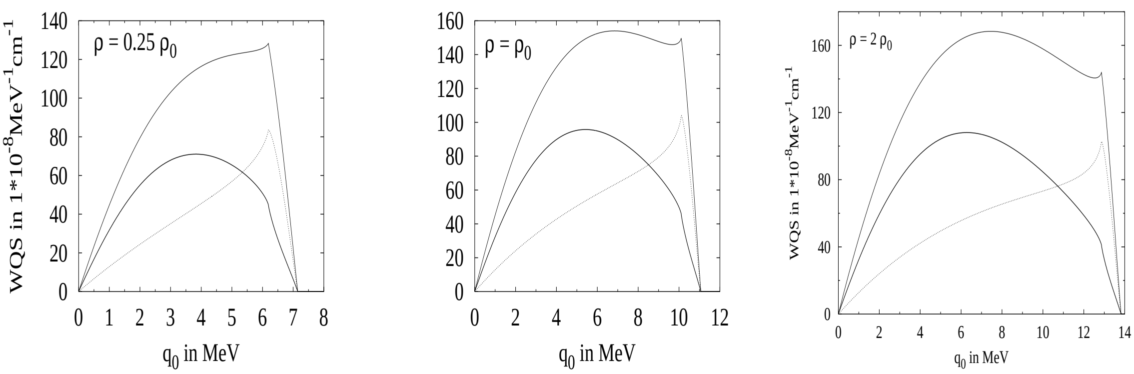

Abbildung 8.2: *Der RPA-Wirkungsquerschnitt in Neutronenmaterie für unterschiedliche Dichten bei T = 0. Die dicke durchgezogene Linie ist der vektorielle Teil, die gepunktete der axiale und dünne Linie ist der Gesamtwirkungsquerschnitt.* $q = \epsilon_i = 30$ *MeV.*

Die Abbildungen 8.2 und 8.3 zeigen den differenziellen Wirkungsquerschnitt für T = 0 in Neutronenmaterie bei unterschiedlichen Dichten mit und ohne effektive Massen und chemische Potenziale. Die bei den Rechnungen verwendeten Teilchen-Loch-Parameter findet man für alle hier gezeigten Abbildungen in Tabelle 6.2.
Der axiale Part ist insgesamt kleiner, trägt aber mehr bei, wenn man zu höheren Energieüberträgen q$_0$ geht. Vergleicht man mit dem Fall eines freien Gases, so vergrößert sich der Wirkungsquerschnitt in der Random Phase Approximation.

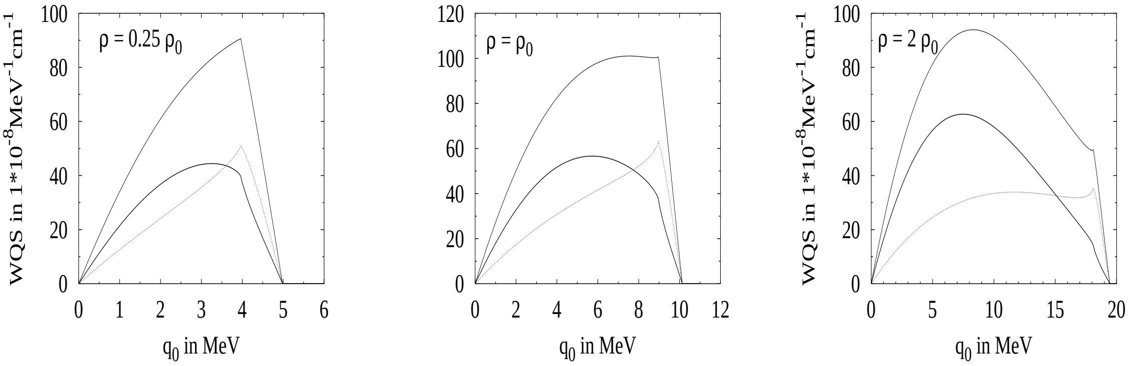

Abbildung 8.3: *Der RPA-Wirkungsquerschnitt in Neutronenmaterie für unterschiedliche Dichten bei T = 0. Bei der Rechnung wurden effektive Massen und chemische Potentiale verwendet. Die verschiedenen Linientypen wurden analog zu Abbildung 8.2 gewählt.* $q = \epsilon_i = 30$ *MeV.*

In den Abbildungen 8.5 und 8.6 ist der Wirkungsquerschnitt für unterschiedliche Dichten bei T = 10 MeV und T = 20 MeV gezeigt. Der Wirkungsquerschnitt wird für eine Dichte von 0.25 ρ_0 hauptsächlich von einer Resonanz um $q_0 = 0$ dominiert, die vom spinunabhängigen Teil erzeugt wird. Der axiale Teil trägt nur einen sehr kleinen Teil zum Gesamtwirkungsquerschnitt bei, wird jedoch im Gegensatz zum vektoriellen Teil größer für größere Energieüberträge $|q_0|$. Bei Kernmateriedichte treten Resonanzen bei endlichem $|q_0|$ auf. Die innere wird vom spinabhängigen Teil, die äußere vom spinunabhängigen Teil verursacht.
In den Abbildungen 8.7, 8.8 und 8.9 wurden effektive Massen und chemische Potenziale bei den Rechnungen verwendet. Dichten und Temperatur wurden im Vergleich zu den zuvor beschriebenen Abbildungen 8.5 und 8.6 nicht variiert. Der Wirkungsquerschnitt wird, wie auch schon in der Hartree-Näherung, dadurch insgesamt kleiner, der maximale Energieübertrag jedoch größer. Auch die Resonanzen verschieben sich hin zu größeren $|q_0|$ und sind stärker ausgeprägt. Die Form des Wirkungsquerschnittes ändert sich gegenüber den vorher diskutierten Bildern nicht.

8.2 Materie aus Protonen und Neutronen

Wie im vorherigen Kapitel parametrisieren wir die Teilchen-Loch-Wechselwirkung in einen spinunabhängigen Kanal $V_{00} =: D_V$ und einen Kanal $V_{10} =: D_A$, der vom Spin anhängt. Für beide Kanäle haben wir nun unabhängig die Dyson-Gleichung zu lösen:

$$\Pi^{RPA}_{V/A} = \Pi^0 + \Pi^{RPA}_{V/A} D_{V/A} \Pi^0 \tag{8.25}$$

Auflösen nach $\Pi^{RPA}_{V/A}$ ergibt:

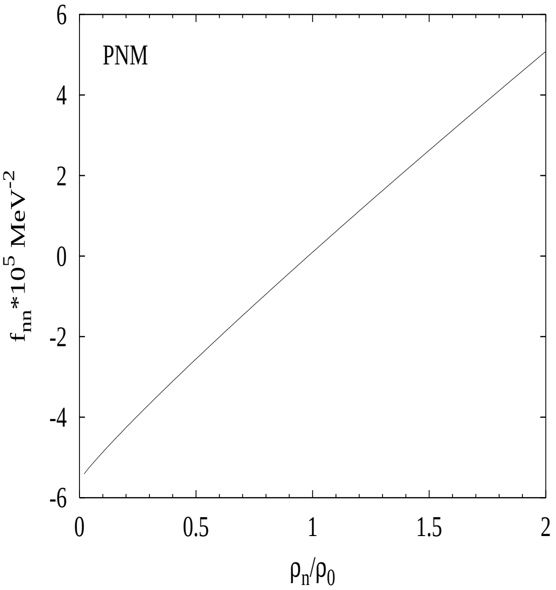

Abbildung 8.4: *Teilchen-Loch-Parameter für den RPA-Wirkungsquerschnitt in Neutronenmaterie.*

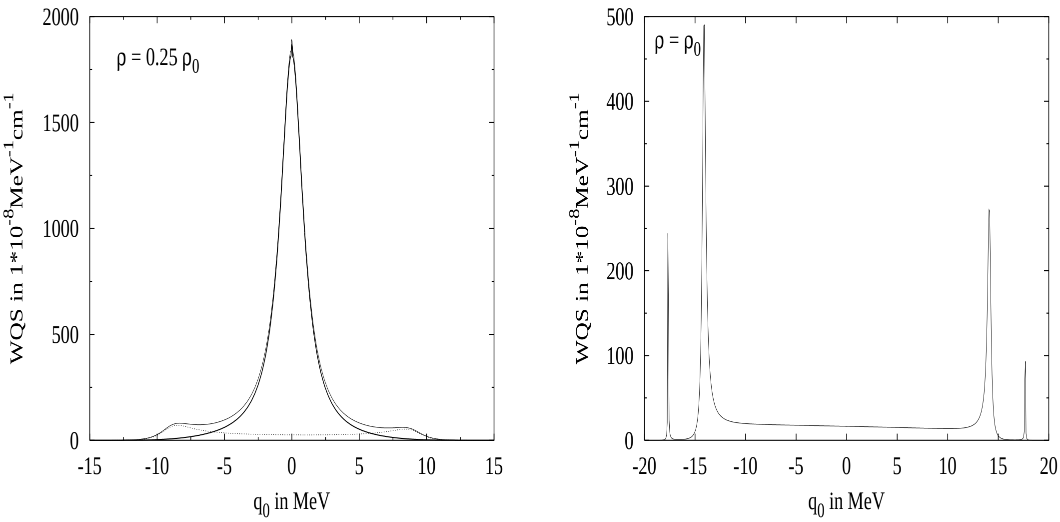

Abbildung 8.5: *Der RPA-Wirkungsquerschnitt in Neutronenmaterie für unterschiedliche Dichten bei T = 10 MeV. $q = \epsilon_i$ = 30 MeV.*

$$\Pi^{RPA}_{V/A} = \Pi^0 \left[1 - D_{V/A}\Pi^0\right]^{-1} \tag{8.26}$$

Wir können diese Gleichungen als Matrixgleichungen interpretieren:

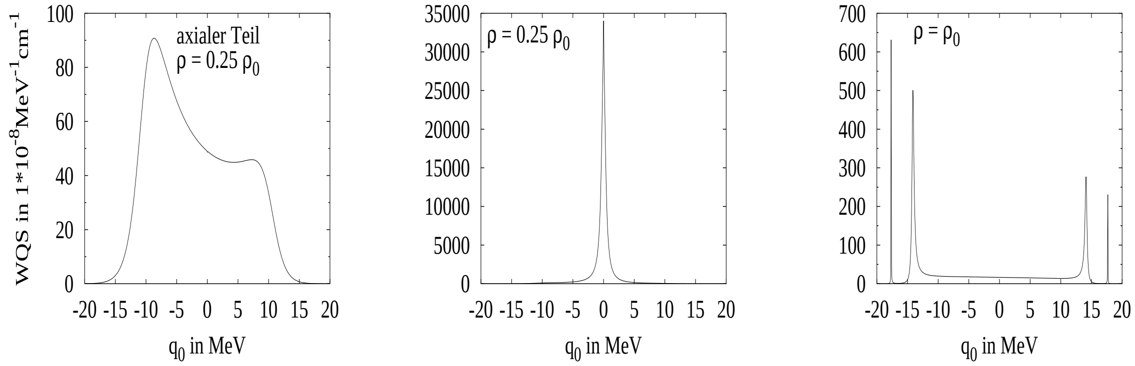

Abbildung 8.6: *Der RPA-Wirkungsquerschnitt in Neutronenmaterie für unterschiedliche Dichten bei T = 20 MeV. $q = \epsilon_i$ = 30 MeV.*

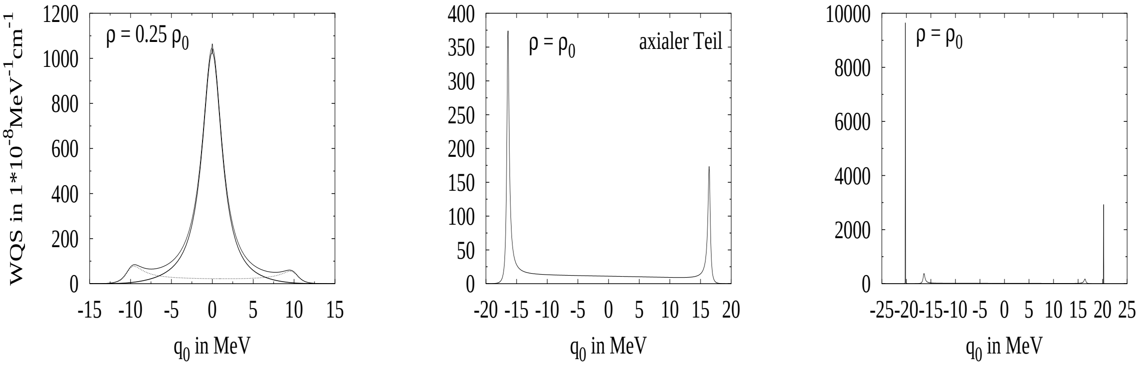

Abbildung 8.7: *Der RPA-Wirkungsquerschnitt in Neutronenmaterie für unterschiedliche Dichten bei T = 10 MeV. Bei der Rechnung wurden effektive Massen und chemische Potenziale verwendet. $q = \epsilon_i$ = 30 MeV.*

$$\Pi_V^{RPA} = \begin{pmatrix} \Pi_p^0 & 0 \\ 0 & \Pi_n^0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_{pp}\Pi_p^0 & f_{pn}\Pi_n^0 \\ f_{np}\Pi_p^0 & f_{nn}\Pi_n^0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \tag{8.27}$$

Ausmultipliziert ergibt das schließlich für die Polarisationsfunktion:

$$\Pi_V^{RPA} = \frac{1}{Det_V} \begin{pmatrix} (1 - f_{nn}\Pi_n^0)\Pi_p^0 & f_{np}\Pi_n^0\Pi_p^0 \\ f_{pn}\Pi_n^0\Pi_p^0 & (1 - f_{pp}\Pi_p^0)\Pi_n^0 \end{pmatrix} \tag{8.28}$$

mit

$$Det_V = (1 - f_{pp}\Pi_p^0)(1 - f_{nn}\Pi_n^0) - f_{pn}f_{np}\Pi_p^0\Pi_n^0 \tag{8.29}$$

Analoges gilt für die spinabhängige Polarisationsfunktion Π_A^{RPA} mit der Ersetzung $f_{ij} = g_{ij}$.

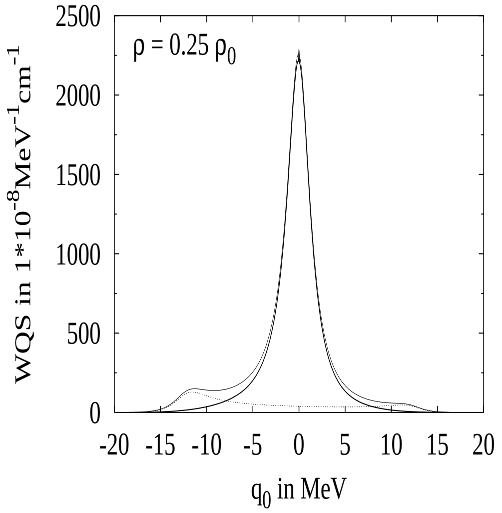

Abbildung 8.8: *Der RPA-Wirkungsquerschnitt in Neutronenmaterie für eine Dichte von 0.25* ρ_0 *bei* $T = 20$ *MeV. Bei der Rechnung wurden effektive Massen und chemische Potenziale verwendet.* $q = \epsilon_i = 30$ *MeV.*

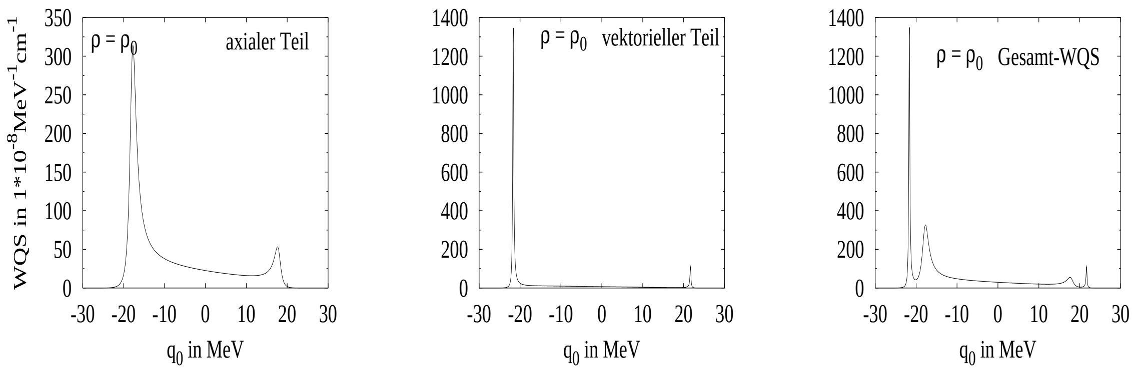

Abbildung 8.9: *Der RPA-Wirkungsquerschnitt in Neutronenmaterie für Kernmateriedichte bei* $T = 20$ *MeV. Hier wurden effektive Massen und chemische Potenziale verwendet.* $q = \epsilon_i = 30$ *MeV.*

Um die Erwartungswerte der Polarisationsfunktion zu berechnen, bilden wir einen gemischten Zustand aus Isospin 0 und 1, gewichtet mit den zugehörigen Kopplungskonstanten:

$$|\Psi_{V/A}>= c^p_{V/A}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c^n_{V/A}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{8.30}$$

Damit erhalten wir

$$< \Pi_V^{RPA} >= \frac{1}{Det_V}\left[c_V^{p2}(1 - f_{nn}\Pi_n^0)\Pi_p^0 + c_V^{n2}(1 - f_{pp}\Pi_p^0)\Pi_n^0 + c_V^n c_V^p(f_{pn} + f_{np})\Pi_p^0\Pi_n^0\right] \tag{8.31}$$

Für die Responsefunktion, die im Wirkungsquerschnitt auftaucht, brauchen wir wieder den Imaginärteil von Π^{RPA}:

$$S_V(q_0, q) = \frac{1}{1 - exp(-q_0/T)} Im\Pi_V^{RPA} \tag{8.32}$$

$$S_A(q_0, q) = \frac{1}{1 - exp(-q_0/T)} Im\Pi_A^{RPA} \tag{8.33}$$

Der differenzielle Wirkungsquerschnitt für den neutralen Strom nimmt damit folgende Form an:

$$\frac{1}{V}\frac{d^3\sigma}{d\Omega^2 dq_0} = \frac{G_F^2}{8\pi^3}\epsilon_f^2(1 - f(\epsilon_f))\left[(1 + cos\theta)S_V(q_0, q) + (3 - cos\theta)S_A(q_0, q)\right] \tag{8.34}$$

In symmetrischer Kernmaterie sind effektive Massen und chemische Potenziale für Protonen und Neutronen gleich, da diese nur dichte-, nicht aber isospinabhängig sind. Es gilt deshalb $\Pi_n^0 = \Pi_p^0$ und $f_{nn} = f_{pp}$, $f_{pn} = f_{np}$.

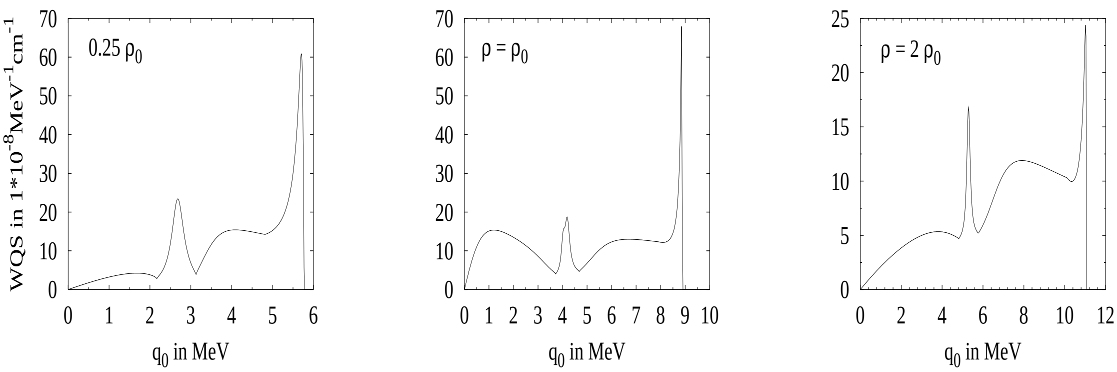

Abbildung 8.10: *Der Wirkungsquerschnitt des neutralen Stromes für T = 0 in symmetrischer Kernmaterie bei unterschiedlichen Dichten.* $q = \epsilon_i = 30\ MeV$.

In den Abbildungen 8.10 und 8.11 sind die Wirkungsquerschnitte des neutralen Stromes für symmetrische Materie bei T = 0 ohne und mit effektiven Massen und chemischen Potenzialen gezeigt. Für alle Dichten gibt es zwei Energieüberträge, bei denen der Wirkungsquerschnitt ein scharfes Maximum erreicht. Insgesamt wird der Wirkungsquerschnitt

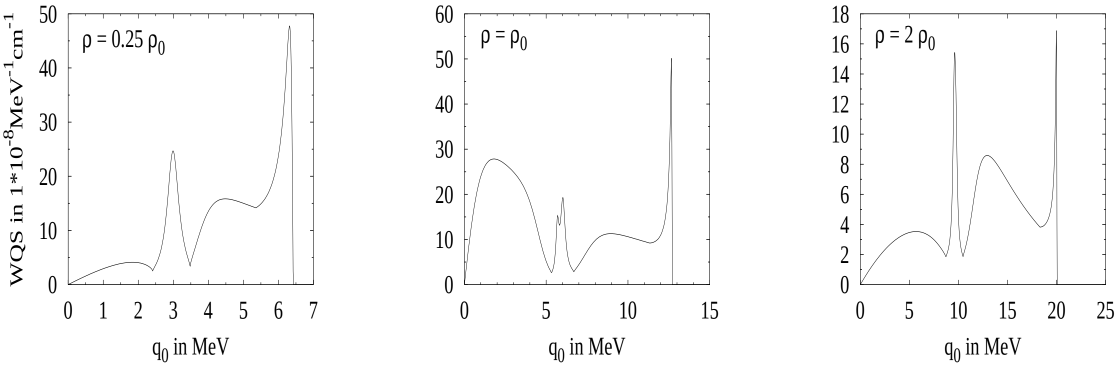

Abbildung 8.11: *Der Wirkungsquerschnitt des neutralen Stromes für $T = 0$ in symmetrischer Kernmaterie bei unterschiedlichen Dichten. Bei der Rechnung wurden effektive Massen und chemische Potenziale verwendet. $q = \epsilon_i = 30$ MeV.*

mit wachsender Dichte kleiner.
Für den geladenen Strom erhalten wir analog zum neutralen Strom in Neutronenmaterie

$$Im\Pi_V^{RPA} = Im\left[\frac{\Pi_V}{1-f_c\Pi_V}\right] \qquad \text{mit } f_c = \frac{2F_0'}{N_0} = fnn - fnp \tag{8.35}$$

$$Im\Pi_A^{RPA} = Im\left[\frac{\Pi_A}{1-g_c\Pi_A}\right] \qquad \text{mit } g_c = \frac{2G_0'}{N_0} = gnn - gnp \tag{8.36}$$

$$S_V^{RPA} = \frac{1}{1-exp(q_0/T)}\frac{Im\Pi^0}{\epsilon_{ijV}} \qquad \text{mit } \epsilon_{ijV} = \left[1-f_cRe\Pi^0\right]^2 + \left[f_cIm\Pi^0\right]^2 \tag{8.37}$$

$$S_A^{RPA} = \frac{1}{1-exp(q_0/T)}\frac{Im\Pi^0}{\epsilon_{ijA}} \qquad \text{mit } \epsilon_{ijA} = \left[1-g_cRe\Pi^0\right]^2 + \left[g_cIm\Pi^0\right]^2 \tag{8.38}$$

In Abbildung 8.12 sieht man den Wirkungsquerschnitt des geladenen Stromes bei T = 0 in symmetrischer Kernmaterie. Im Vergleich zum freien Gas ist er um mehr als eine Größenordnung kleiner, was durch die 'Screening'-Funktionen ϵ_{ijV} und ϵ_{ijA} verursacht wird. Verwendet man effektive Massen und chemische Potenziale, so ändert sich im Gegensatz zur einfachen Hartree-Näherung nichts an der Größe des Wirkungsquerschnittes, der maximale Impulsübertrag wird jedoch auch bei den RPA-Rechnungen größer.

In Materie mit unterschiedlichem Protonen- und Neutronenanteil sind die Potenzialterme U_n und U_p und somit auch die Teilchen-Loch-Parameter f_{nn} und f_{pp}, f_{pn} und f_{np} im allgemeinen nicht gleich. Außerdem ist der Imaginärteil der Korrelationsfunktion nicht mehr antisymmetrisch, so dass für die Berechnung des Realteils mit der Kramers-Kronig-Relation von $-\infty$ bis $+\infty$ integriert werden muss:

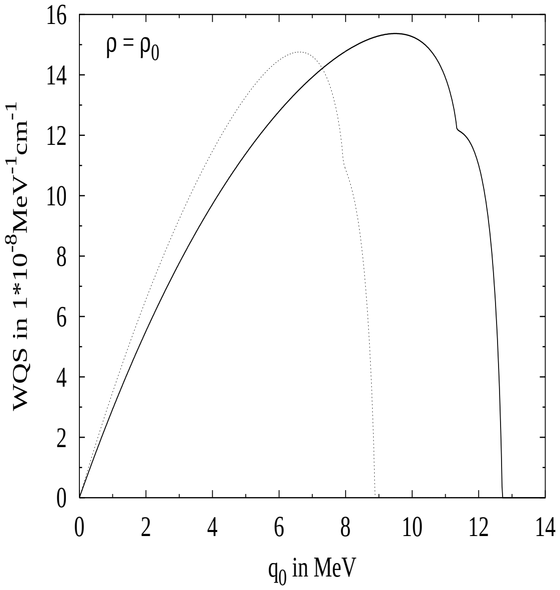

Abbildung 8.12: *Der Wirkungsquerschnitt des geladenen Stromes für $T = 0$ in symmetrischer Materie bei Kernmateriedichte. Für die durchgezogene Linie wurden effektive Massen und chemische Potenziale verwendet, der gestrichelte WQS enthält freie Nukleonenmassen. $q = \epsilon_i = 30$ MeV.*

$$Re\,\Pi^0(q_0, q) = -\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Im\,\Pi^0(\omega, q)}{\omega - q_0} d\omega \qquad (8.39)$$

Sonst ändert sich an den Ausdrücken für den Wirkungsquerschnitt gegenüber den für symmetrische Materie behandelten nichts.
In den Abbildungen 8.13 und 8.14 ist der Wirkungsquerschnitt für den geladenen Strom bei Kernmateriedichte und bei 0.25 ρ_0 für verschiedene Temperaturen gezeigt. Sowohl im Vergleich zum Fall eines freien Gases als auch zum entsprechenden Hartree-Wirkungsquerschnitt ist hier der Wirkungsquerschnitt um etwa eine Größenordnung kleiner. Insgesamt wächst er mit steigender Temperatur sehr stark an, was wir auch schon in den vorangegangenen Kapiteln festgestellt haben. Auch hier verschiebt sich das Maximum hin zu kleineren Energieüberträgen q_0.

Zusammenfassend können wir feststellen, dass wir durch die Random Phase Approximation kollektive Anregungen bekommen, die sich im Wirkungsquerschnitt als scharfe Peaks bemerkbar machen. Lage und Breite dieser Peaks hängen dabei stark von der Dichte und auch von der Temperatur ab. Der axiale Teil der Wechselwirkung trägt im Wesentlichen bei größeren $|q_0|$ bei, die Form des vektoriellen Teiles ist sehr dichteabhängig. Der Wirkungsquerschnitt ist für kleine Energieüberträge in allen Fällen sowohl im Vergleich zum Fall eines freien Gases als auch im Vergleich zur Mean-Field-

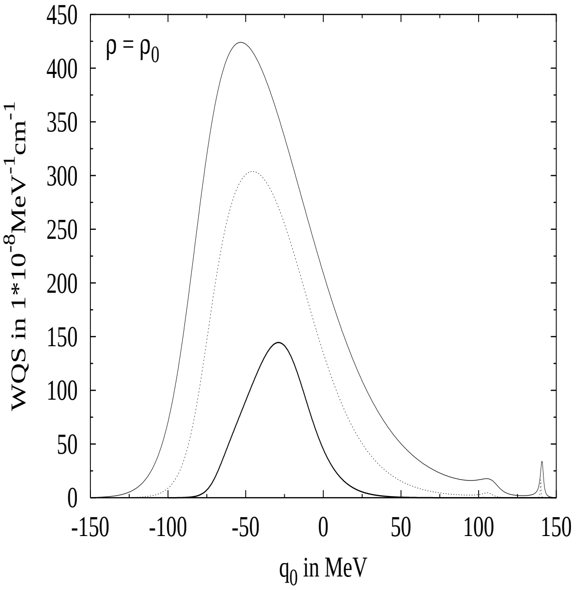

Abbildung 8.13: *Der RPA-Wirkungsquerschnitt in Materie im Beta-Gleichgewicht bei Kernmateriedichte für verschiedene Temperaturen: T = 10 MeV (dicke durchgezogene Linie), T = 20 MeV (gestrichelte Linie), T = 30 MeV (dünne durchgezogene Linie).* $\epsilon_i = q = \mu_{\nu_e}$.

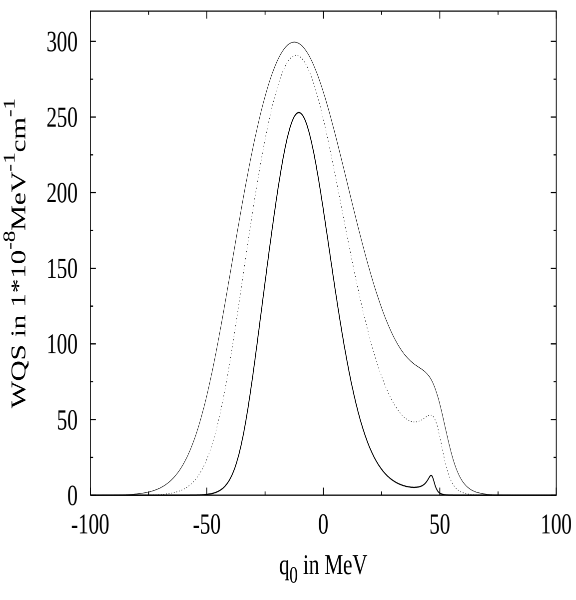

Abbildung 8.14: *Der RPA-Wirkungsquerschnitt in Materie im Beta-Gleichgewicht bei 0.25* ρ_0 *für verschiedene Temperaturen (siehe Abbildung 8.13).* $\epsilon_i = q = \mu_{\nu_e}$.

Näherung stark unterdrückt. Dies äußert sich in einer größeren mittleren freien Weglänge der Neutrinos, welche wiederum in die Modelle zur Entwicklung von Neutronensternen eingeht.
Die Ergebnisse stehen im Einklang mit Langanke [17], der auch eine durch ein negatives G_0' verursachte Resonanz in seinen Arbeiten gefunden hat, während der Wirkungsquerschnitt bei kleinen Energien stark unterdrückt ist und die freie Weglänge bei kleinen Temperaturen und Kernmateriedichte damit im Vergleich zur Mean-Field-Näherung größer wird.

Kapitel 9

Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war es, den Wirkungsquerschnitt für die Wechselwirkung von Neutrinos mit Nukleonen, bei Temperaturen und Dichten wie wir sie in einem Proto-Neutronenstern erwarten, auf verschiedene Aspekte hin zu untersuchen und Effekte der starken Wechselwirkung mittels RPA-Rechnungen zu berücksichtigen. Dabei sollte eine realistische Zustandsgleichung verwendet werden, die heute gut bekannte Größen von Kernmaterie wie beispielsweise die Sättigungsdichte, die Bindungsenergie pro Nukleon oder das Kompressionsmodul, hinreichend gut beschreibt.
Sowohl die Angaben der Dichte im Kern eines PNS als auch die der dort herrschenden Temperaturen hängen sehr stark vom jeweiligen Sternmodell ab: In der für diese Arbeit verwendeten Literatur findet man Dichteangaben von 0.25 ρ_0 bis hin zu dreifacher Kernmateriedichte bei Temperaturen von 5 MeV bis 30 MeV. Da der Wirkungsquerschnitt von beiden Parametern abhängt, wurde auch ein besonderes Augenmerk auf den Einfluss dieser Größen gelegt.
Nachdem im ersten Kapitel dieser Arbeit Grundlagen über die Abläufe bei der Entstehung eines PNS und über die schwache Wechselwirkung erarbeitet wurden, wurde im zweiten Kapitel ein allgemeiner Ausdruck für die Wechselwirkung von Neutrinos und Nukleonen nach Fermis Theorie hergeleitet, der in allen folgenden Kapiteln verwendet wurde. Darin taucht die Response-Funktion des Nukleonengases auf, in die Parameter und Eigenschaften der Kernmaterie eingehen. Im dritten Kapitel habe ich die Response-Funktion für pure Neutronenmaterie und symmetrische Kernmaterie untersucht. Hier fallen zwei Tendenzen auf: Mit steigender Materiedichte nimmt die Größe des differenziellen Wirkungsquerschnittes pro Raumwinkelelement Ω und pro Energieübertrag q_0 nur gering zu, der wesentlich höhere totale Wirkungsquerschnitt resultiert daher hauptsächlich aus den größeren Energieüberträgen, die bei kleinen Dichten nicht möglich sind. Die mittlere freie Weglänge, in die der totale Wirkungsquerschnitt proportional eingeht, nimmt deshalb mit wachsender Dichte sehr stark ab. Der Wirkungsquerschnitt vergrößert sich auch mit steigender Temperatur erheblich, da die Neutrinos im Gegensatz zu T = 0 nun auch Energie von den Nukleonen aufnehmen können. Zusätzlich stehen mehr Nukleonen für eine Wechselwirkugn zur Verfügung, der Pauli-Blockingsfaktor reduziert

sich. Die Kühlung durch Neutrinos ist also wie auch erwartet bei höherer Sterntemperatur wesentlich effektiver.
Die erste Modifikation habe ich in dem folgenden vierten Kapitel eingebaut: Es wurde die Zusammensetzung von Kernmaterie im Beta-Gleichgewicht ausgerechnet. Unsere Materie setzt sich in dieser Arbeit aus Nukleonen, Elektronen und Neutrinos zusammen. Hierbei kann man feststellen, dass der Neutrinoanteil einen großen Einfluss auf das Verhältnis von Neutronen zu Protonen hat. Während die Neutrinos im Stern getrappt sind, ist auch der Protonenanteil wesentlich höher als in Materie ohne Neutrinos. Dichte und Temperatur beeinflußen die genaue Zusammensetzung jedoch nur wenig. Im Vergleich zur symmetrischen Materie sind beide Wirkungsquerschnitte für den neutralen und den geladenen Strom größer, da auch der Neutronenanteil höher ist. An der Temperatur- und Dichteabhängigkeit des differenziellen Wirkungsquerschnittes ändert sich im Vergleich zum vorherigen Kapitel nichts. Die Kühlung durch Neutrinos ist jedoch bei kleinerem Protonenanteil effektiver, da das Maximum des WQS für den geladenen Strom bei negativen q_0 liegt und die Neutrinos bei dieser Wechselwirkung somit mehr Energie aufnehmen als bei einer reinen Streuung.
Der restliche Teil der Arbeit beschäftigt sich damit, die starke Wechselwirkung in den Wirkungsquerschnitt einzubauen. Dazu habe ich eine Parametrisierung des NN-Potenzials von Ravenhall und Pandharipande verwendet, die sowohl Sättigungsdichte und Bindungsenergie als auch das Kompressionsmodul K von symmetrischer Materie gut wiedergibt. Aus der von diesem Potenzial resultierenden Zustandsgleichung wurden in Kapitel 5 die Parameter für den Wirkungsquerschnitt abgeleitet.
In der im sechsten Kapitel behandelten Hartree-Näherung, in der sich die Nukleonen unabhängig voneinander in einem effektiven gemeinsamen Potenzial bewegen, gehen von der Dichte abhängige Potenzialterme und effektive Massen ein. Dies hat erstens Auswirkungen auf die Zusammensetzung der Materie im Beta-Gleichgewicht und damit indirekt auf den Wirkungsquerschnitt, zweitens modifiziert es den Wirkungsquerschnitt auch direkt über die effektiven Massen. Der Protonenanteil wird zumindest bei der hier verwendeten Wechselwirkung besonders für kleine Dichten geringer, was den totalen Wirkungsquerschnitt erhöht. Dieser Effekt wird jedoch aufgehoben durch die effektiven Massen, die den differenziellen Wirkungsquerschnitt gerade für hohe Dichten sehr unterdrücken. Der maximal mögliche Energieübertrag wird etwas größer in der Hartree-Näherung, ebenfalls eine Folge der effektiven Massen. Alle Effekte resultieren insgesamt in einer im Vergleich zum Fall eines freien Nukleonengases größeren mittleren freien Weglänge, die sogar ein Minimum aufweist und ab einer bestimmten Dichte wieder ansteigt. Eine größere Dichte in einem Proto-Neutronenstern könnte also aufgrund der Wechselwirkung zwischen den Nukleonen eine größere freie Weglänge zur Folge haben. Die Form des differenziellen Wirkungsquerschnittes als Funktion des Energieübertrages q_0 bleibt in der Hartree-Näherung erhalten. Dies ändert sich jedoch, wenn wir zu RPA-Rechnungen übergehen, wie sie in Kapitel 7 behandelt wurden. Hierbei berücksichtigen wir Korrelationen zwischen Teilchen-Loch-Paaren, was dazu führt, dass diese Paare erzeugt und vernichtet werden können und sich somit auch im

Medium ausbreiten können. Es kann zu kollektiven Anregungen (Riesenresonanzen) kommen, wie wir es auch bei endlichen Kernen beobachten. Der Wirkungsquerschnitt steigt dann bei einem bestimmen Energieübertrag sehr steil an und fällt sofort wieder ab. Die Wechselwirkung selbst wird dabei in einen spinabhängigen Teil und einen Teil, der nicht vom Spin abhängt, parametrisiert. Die auftretenden Effekte müssen für Neutronenmaterie, symmetrische Materie ud Materie im Beta-Gleichgewicht getrennt diskutiert werden, da wir unterschiedliche Beobachtungen machen. In Neutronenmaterie finden wir eine Resonanz bei einer Dichte von 0.25 ρ_0 um $q_0 = 0$, die vom spinunabhängigen oder vektoriellen Teil verursacht wird. Der spinabhängige oder axiale Teil des Wirkungsquerschnittes trägt mehr bei größeren Energieüberträgen $|q_0|$ bei. Bei Kernmateriedichten ist der Wirkungsquerschnitt für kleine Beträge von q_0 stark unterdrückt, während wir scharfe Resonanzen bei endlichen q_0 finden, die sowohl vom axialen, als auch vom vektoriellen Teil verursacht werden können. In symmetrischer Materie hat der differenzielle Wirkungsquerschnitt zwei Maxima bei endlichen Energieüberträgen, insgesamt ist der Wirkungsquerschnitt jedoch im Vergleich zum Fall eines freien Gases stark unterdrückt, was sich in einer weitaus größeren mittleren freien Weglänge äußert.

Ein Nachteil der hier verwendeten Wechselwirkung ist, dass sie keine spinabhängigen Terme besitzt und die aus ihr abgeleiteten axialen Teilchen-Loch-Parameter g_{ij} deshalb verschwinden. Die hier verwendeten Parameter wurden aus einer anderen Wechselwirkung "per Hand" übernommen, womit wir an diesem Punkt die Selbstkonsistenz unserer Theorie aufgegeben haben. Die Wechselwirkung müsste um diese Terme erweitert werden, so dass alle nötigen Parameter aus ihr abgeleitet werden können.
Weiterhin wurden in dieser Arbeit Korrekturterme im Hadronenstrom vernachlässigt, die unter anderem in einem Paper von Krmpotic, Mariano und Samana [29] angesprochen werden: Die eigentliche Form des hadronischen Stromes ist

$$J_\nu = \gamma_0 \left[g_V \gamma_\nu - g_A \gamma_\nu \gamma_5 + \frac{g_M}{2M} i\sigma_{\mu\nu} q_\nu + \frac{g_p}{m_l} q_\nu \gamma_5 \right] \tag{9.1}$$

mit dem Viererimpulsübertrag q, der Nukleonenmasse M und der Masse m_l des Elektrons. g_V, g_A, g_M und g_p bezeichnen die vektoriellen, axialen, schwach-magnetischen und pseudoskalaren Kopplungskonstanten. Die letzten beiden Terme in der Klammer tauchen in den in dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen nicht auf. Numerische Werte für die Kopplungskonstanten sind

$$g_M = 3.70 \qquad g_P = g_A \frac{2Mm_l}{q^2 + m_\pi^2} \tag{9.2}$$

Mit dem Argument, dass der Viererimpulsübertrag q klein ist, haben wir sie hier nicht berücksichtigt. Es wäre jedoch interessant, ihren Beitrag zum Wirkungsquerschnitt zu bestimmen.
Eine weitere Verfeinerung des Modells könnte darin bestehen, mehr Freiheitsgrade in die Zusammensetzung der Materie zu stecken. Diese könnte nach vielen Neutronensternmodel-

len neben Nukleonen und Elektronen beispielsweise auch Myonen enthalten. Schaut man sich die chemischen Potenziale der Elektronen an, so ist dies gar nicht so unwahrscheinlich: Diese liegen je nach Dichte bei einigen hundert MeV, während die Myonenmasse knapp über 100 MeV beträgt. Die Myonen könnten zum Teil die Rolle der Elektronen übernehmen und für Ladungsneutralität sorgen, was auch Einfluss auf die Protonen- und Neutronenanteile hätte.
Weiterhin werden Modelle diskutiert, bei denen im Sterninnern Hyperonen wie das Σ- oder das Λ-Teilchen auftauchen, die mindestens ein Strange-Quark enthalten. Auch dies ist bei hohen Dichten denkbar, da die Massen für die Hyperonen bei 1400 MeV beginnen und die chemischen Potenziale für Neutronen und Protonen in diesen Größenbereich kommen. Dies hängt allerdings auch stark von der verwendeten Zustandsgleichung und den damit verbundenen effektiven Potenzialen im Medium ab. Ausserdem könnten auch Kaonen und Pionen erzeugt werden. All diese Teilchen koppeln unterschiedlich an die Neutrinos und somit würde die genaue Zusammensetzung der Materie Einfluss auf die Wechselwirkung mit den Neutrinos haben.
Nach dem Phasenmodell der QCD könnten sich sowohl die Neutronen als auch die Quarks in einer supraleitenden Phase befinden und zu Bosonenpaaren gekoppelt sein. Dies hätte sowohl Einfluss auf die Zustandsgleichung und damit auf die Parameter, die wir aus dieser ableiten und die in den Wirkungsquerschnitt eingehen, als auch wieder auf die chemischen Potenziale und folglich auf die Zusammensetzung der Sternmaterie.
Es stellt sich auch die Frage, bis zu welchen Dichte- und Temperaturbereichen die hier verwendete nichtrelativistische Behandlung der Nukleonen noch gerechtferigt ist. Für sehr hohe Temperaturen und hohe Dichten muss diese Näherung modifiziert werden.

Anhang A

Der Leptonen- und Hadronentensor

Hier wird das Produkt aus Leptonen- und Hadronentensor hergeleitet, das man bei der Berechnung des invarianten Matrixelementes für den Wirkungsquerschnitt von Neutrinostreuung an Nukleonen benötigt.

$$\begin{aligned}
L^{\mu\nu} &= \sum_{s_i,s_f} \hat{\jmath}^*_\mu \hat{\jmath}_\nu \\
&= \sum_{s_i,s_f} \left[\bar{u}(k_f,s_f)(\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma_5)u(k_i,s_i)\right]^* \left[\bar{u}(k_f,s_f)(\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma_5)u(k_i,s_i)\right] \\
&= \sum_{s_i,s_f} \left[\bar{u}^\dagger(k_i,s_i)(\gamma^{\mu\dagger} - \gamma_5\gamma^{\mu\dagger})\gamma^{0\dagger}u(k_f,s_f)\right]^* \left[\bar{u}(k_f,s_f)(\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma_5)u(k_i,s_i)\right]
\end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1\!\!1 \\ 1\!\!1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1\!\!1 & 0 \\ 0 & 1\!\!1 \end{pmatrix}$$

$1\!\!1$ bezeichnet hier die 2x2-Einheitsmatrix und σ^j sind die Pauli-Spinmatrizen. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass gilt:

$$\gamma_0^\dagger = \gamma_0 \qquad \gamma_5^\dagger = \gamma_5 \qquad \gamma^{j\dagger} = -\gamma^j \qquad \gamma_5^\dagger\gamma^{\mu\dagger}\gamma^{0\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma_5 \tag{A.2}$$

Damit können wir den Leptonentensor mit Hilfe von Spuren über Γ-Matrizen ausdrücken, die leicht zu berechnen sind:

$$L^{\mu\nu} = \sum_{s_i,s_f} \bar{u}(k_i,s_i)(\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma_5)u(k_f,s_f)\left[\bar{u}(k_f,s_f)(\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma_5)u(k_i,s_i)\right] \tag{A.3}$$

$$= tr\left[\sum_{s_i}(u(k_i,s_i)\bar{u}(k_i,s_i))(\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma_5)\sum_{s_f}(u(k_f,s_f)\bar(u)(k_f,s_f))(\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma_5)\right] \tag{A.4}$$

$$= \frac{1}{4m_1m_3}\left\{2tr\left[\not{k}_i\gamma^\mu\not{k}_f\gamma^\nu\right] - 2\left[\gamma_5\not{k}_f\gamma^\nu\not{k}_i\gamma^\mu\right]\right\} \tag{A.5}$$

$$= \frac{2}{m_1m_3}\left\{k_i^\mu k_f^\nu + k_f^\mu k_i^\nu - k_ik_fg^{\mu\nu} - i\epsilon^{\alpha\nu\beta\mu}k_{f\alpha}k_{i\beta}\right\} \tag{A.6}$$

Analog dazu bekommen wir für den Hadronentensor:

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{4M_2M_4}\left\{tr\left[(\not{p}_i + M_2)(g_V\gamma^\mu - g_A\gamma^\mu\gamma_5)(\not{p}_f + M_4)(g_V\gamma^\nu - g_A\gamma^\nu\gamma_5)\right]\right\} \tag{A.7}$$

$$= \frac{1}{4M_2M_4}\left\{(g_V^2 + g_A^2)tr[\not{p}_i\gamma^\mu\not{p}_f\gamma^\nu] - 2g_Vg_Atr[\gamma_5\not{p}_f\gamma^\nu\not{p}_i\gamma^\mu] + (g_V^2 - g_A^2)M_2M_4tr[\gamma^\mu\gamma^\nu]\right\} \tag{A.8}$$

$$= \frac{1}{M_2M_4}\left\{(g_V^2 + g_A^2)(p_i^\mu p_f^\nu + p_f^\mu p_i^\nu - p_ip_fg^{\mu\nu}) + (g_V^2 - g_A^2)M_2M_4g^{\mu\nu} + 2ig_Vg_A\epsilon^{\gamma\delta\mu\nu}p_{i\gamma}p_{f\delta}\right\} \tag{A.9}$$

Mit $\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\epsilon^{\gamma\delta\mu\nu} = -2(g_\alpha^\gamma g_\beta^\delta - g_\alpha^\delta g_\beta^\gamma)$ kann man schließlich das Produkt der beiden Tensoren auf folgende Form bringen:

$$L_{\mu\nu}W^{\mu\nu} = \frac{4}{m_1m_3M_2M_4}(g_V^2(k_i\cdot p_ik_f\cdot p_f + k_i\cdot p_fk_f\cdot_i - M_2M_4k_i\cdot k_f) \tag{A.10}$$

$$+ g_A^2(k_i\cdot p_ik_f\cdot p_f + k_i\cdot p_fk_f\cdot p_i + M_2M_4k_i\cdot k_f) \tag{A.11}$$

$$+ 2g_Vg_A(k_i\cdot p_ik_f\cdot p_f - k_i\cdot p_fk_f\cdot p_i) \tag{A.12}$$

Anhang B

Fallunterscheidung für λ bei T = 0 im Fall eines freien Gases

Um aus dem differentiellen Wirkungsquerschnitt die mittlere freie Weglänge λ zu erhalten, müssen wir über das Raumwinkelelement dΩ und den Energieübertrag dq_0 integrieren. Die erste Integration ist leicht auszuführen, bei der zweiten geht das zwar für T = 0 noch analytisch, wir müssen jedoch verschiedene Fälle unterscheiden. Diese sind hier für den Fall eines freien Gases aufgeführt:

1. $\hat{\mu} \leq q_{0sp} \leq \epsilon_i - \mu_3 \leq q_{0max}$

$$A_1 - B_1 - C_1 = \int_{\hat{\mu}}^{\epsilon_i - \mu_3} f_1(q_0) dq_0 - \int_{\hat{\mu}}^{q_{0sp}} f_2(q_0) dq_0 - \int_{q_{0sp}}^{\epsilon_i - \mu_3} f_3(q_0) dq_0$$

2. $q_{0sp} \leq \hat{\mu} \leq q_{0max} \leq \epsilon_i - \mu_3$

$$A_2 - B_2 - C_2 = \int_{\hat{\mu}}^{q_{0max}} f_1(q_0) dq_0 - \int_{\hat{\mu}}^{q_{0max}} f_3(q_0) dq_0$$

3. $\epsilon_i - \mu_3 \leq q_{0sp} \leq q_{0max}$

$$A_3 - B_3 - C_3 = \int_{\hat{\mu}}^{\epsilon_i - \mu_3} f_1(q_0) dq_0 - \int_{\hat{\mu}}^{\epsilon_i - mu_3} f_2(q_0) dq_0$$

4. $\hat{\mu} \leq q_{0sp} \leq q_{0max} \leq \epsilon_i - \mu_3$

$$A_4 - B_4 - C_4 = \int_{\hat{\mu}}^{\epsilon_i-\mu_3} f_1(q_0)dq_0 - \int_{\hat{\mu}}^{q_{0sp}} f_2(q_0)dq_0 - \int_{q_{0sp}}^{q_{0max}} f_3(q_0)dq_0$$

5. $q_{0sp} \leq \hat{\mu} \leq \epsilon_i - \mu_3 \leq q_{0max}$

$$A_5 - B_5 - C_5 = \int_{\hat{\mu}}^{\epsilon_i-\mu_3} f_1(q_0)dq_0 - \int_{\hat{\mu}}^{\epsilon_i-\mu_3} f_3(q_0)dq_0$$

$$f_1(x) = p_{f2}^2(\epsilon_i - x)^2$$
$$\int_a^b f_1(x)dx = -\frac{p_{f2}^2}{3}[(\epsilon_i - b)^3 - (\epsilon_i - a)^3]$$

$$f_2(x) = (\epsilon_i - x)^2 p_2^2 dx = (\epsilon_i - x)^2(p_{f4}^2 - 2Mx)$$
$$\int_a^b f_2(x)dx = 2M\frac{a^4 - b^4}{4} + (p_{f4}^2 + 4M\epsilon_i)\frac{b^3 - a^3}{3} - (2p_{f4}^2\epsilon_i + 8M\epsilon_i^2)\frac{b^2 - a^2}{2} + (\epsilon_i p_{f4})^2(b - a)$$

$$f_3(x) = (\epsilon_i - x)^2 p_-^2 = (\epsilon_i - x)^2\left(\frac{Mx}{q} - \frac{q}{2}\right)^2$$
$$\int_a^b f_2(x)dx = (\frac{M}{q})^2\frac{1}{5}[b^5 - a^5] + (M + 2\epsilon(\frac{M}{q})^2)\frac{1}{4}[a^4 - b^4]$$
$$+ (\frac{q^2}{4} + (\frac{M}{q})^2\epsilon_i^2 + 2M\epsilon_i)[b^3 - a^3]$$
$$+ (\epsilon_i\frac{q^2}{2} + M\epsilon_i^2)\frac{1}{2}[a^2 - b^2] + (\frac{\epsilon_i q}{2})^2[b - a]$$

Anhang C

Teilchen-Loch-Parameter für die RPA-Rechnungen

Im Folgenden sind Ausdrücke für die Teilchen-Loch-Parameter f_{ij} angegeben, die sich aus der Wechselwirkung ableiten lassen:

$$f_{nn} = \frac{\delta U_n}{\delta \rho_n} = \frac{\delta \mu_n^*}{\delta \rho_n} - \frac{\delta}{\delta \rho_n}\left(\frac{p_{fn}^2}{2M_n^*}\right) \tag{C.1}$$

mit

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mu_n^*}{\delta \rho_n} =& \frac{5/h^2}{9m\rho_n^2}\tau_n + \left(\frac{5}{3\rho_n} - p_4 + \frac{1}{\rho_B}\right)\frac{d}{d\rho_n}(f_{x_n}\tau_n) - f_{x_n}\tau_n\left(\frac{5}{3\rho_n^2} + \frac{1}{\rho_B^2}\right)\\
&+ \tau_n e^{-p_4\rho_B} p_5 x_p \left(\frac{5}{3\rho_n} - p_4 - \frac{1}{\rho_B}\right)\\
&+ \tau_p\left(\left(\left(\frac{1}{\rho_B} - p_4\right)\frac{d}{d\rho_n} f_{x_p} - \frac{f_{x_p}}{\rho_B^2} + p_5 e^{-p_4\rho}\left(\frac{\rho_p}{\rho_B^2} + x_p p_4\right)\right)\right)\\
&+ 4(1-2x_p)\frac{\rho_p}{\rho_B^2}\frac{d}{d\rho_n}(g_{nm} - g_{sm}) + (1-(1-2x_p)^2)\frac{d^2}{d\rho_n^2}g_{sm}\\
&- 4\frac{d}{d\rho_n}\left[(1-2x_p)\frac{rho_p}{\rho_B^2}(g_{nm} + g_{sm})\right] + (1-2x_p)^2\frac{d^2}{d\rho_n^2}g_{nm}
\end{aligned}$$

$$\frac{\delta}{\delta \rho_n}\left(\frac{p_{fn}^2}{2M_n^*}\right) = \frac{p_{fn}^2}{M_n^*}\left[\frac{M^2}{M_n^*}\frac{1}{/h^2\left(1 + \frac{2m}{/h^2}f_{x_n}\right)^2}\frac{df_{x_n}}{d\rho_n} + \frac{1}{3\rho_n}\right] \tag{C.2}$$

Hierbei haben wir folgende Abkürzungen verwendet:

$$
\begin{aligned}
f_{x_n} &= (p_3 + (1 - x_p)p_5)\rho_B e^{-p_4\rho_B} && \text{(C.3)} \\
f_{x_p} &= (p_3 + x_p p_5)\rho_B e^{-p_4\rho_B} && \text{(C.4)} \\
g_{nm} &= -\rho_B^2 \left(\frac{p_{12}}{\rho_B} + p_7 + p_8\rho_B + p_{13}e^{-p_9^2\rho_B^2}\right) && \text{(C.5)} \\
g_{sm} &= -\rho_B^2 \left(p_1 + p_2\rho_B + p_6\rho_B^2 + (p_{10} + p_{11}\rho_B)e^{-p_9^2\rho_B^2}\right) && \text{(C.6)}
\end{aligned}
$$

$$
f_{pp} = \frac{\delta U_p}{\delta \rho_p} = \frac{\delta \mu_p^*}{\delta \rho_p} - \frac{\delta}{\delta \rho_p}\left(\frac{p_{fp}^2}{2M_p^*}\right) \tag{C.7}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta \mu_p^*}{\delta \rho_p} =& \frac{5/h^2}{9m\rho_p^2}\tau_p + \left(\frac{5}{3\rho_p} - p_4 + \frac{1}{\rho_B}\right)\frac{d}{d\rho_p}(f_{x_p}\tau_p) - f_{x_p}\tau_p\left(\frac{5}{3\rho_p^2} + \frac{1}{\rho_B^2}\right) \\
&+ \tau_p e^{-p_4\rho_B} p_5 x_n \left(\frac{5}{3\rho_p} - p_4 - \frac{1}{\rho_B}\right) \\
&+ \tau_n\left(\left(\frac{1}{\rho_B} - p_4\right)\frac{d}{d\rho_p}f_{x_n} - \frac{f_{x_n}}{\rho_B^2} + p_5 e^{-p_4\rho_B}\left(\frac{\rho_n}{\rho_B^2} + x_n p_4\right)\right) \\
&+ 4(1-2x_p)\frac{\rho_n}{\rho_B^2}\frac{d}{d\rho_n}(g_{nm} - g_{sm}) + (1 - (1-2x_p)^2)\frac{d^2}{d\rho_p^2}g_{sm} \\
&- 4\frac{d}{d\rho_p}\left[(1-2x_p)\frac{rho_n}{\rho_B^2}(g_{nm} + g_{sm})\right] + (1-2x_p)^2\frac{d^2}{d\rho_p^2}g_{nm}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\delta}{\delta \rho_p}\left(\frac{p_{fp}^2}{2M_p^*}\right) = \frac{p_{fp}^2}{M_p^*}\left[\frac{M^2}{M_p^*}\frac{1}{\hbar^2\left(1 + \frac{2m}{\hbar^2}f_{x_p}\right)^2}\frac{df_{x_p}}{d\rho_p} + \frac{1}{3\rho_p}\right] \tag{C.8}
$$

Literaturverzeichnis

[1] P.J.Schinder, Astrophys.J., Suppl.Ser.74,249 (1990)

[2] S.Reddy, M.Prakash, J.M.Lattimer, *Neutrino interactions in hot and dense matter*, Phys.Rev.D58(1998) 013009

[3] Sawyer, Phys.Rev. D11, 2740 (1975)

[4] Sawyer, Phys.Rev. C40, 865 (1989)

[5] S.Reddy, M.Prakash, J.M.Lattimer, J.A.Pons, *Effects of Strong and Electromagnetic Correlations on Neutrino Interactions in Dense Matter*, Phys.Rev.C59 (1999) 2888ff.

[6] K.Grotz/H.v.Klapdor, *Die schwache Wechselwirkung in Kern-, Teilchen- und Astrophysik*, B.G.Teubner Stuttgart 1989

[7] M.Prakash, J.M.Lattimer, R.F.Sawyer, R.R.Volkas, *Neutrino Propagation in Dense Astrophysical Systems*, Ann.Rev.Nucl.Part.Sci.51(2001) p.295ff

[8] S.L.Shapiro, S.A.Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*, Wiley-Interscience

[9] M.Prakash, J.M.Lattimer, J.A.Pons, A.W.Steiner, *Evolution of a Neutron Star from its Birth to Old Age*, Lect.Notes Phys.578 (2001) 364ff

[10] J.Margueron, J.Navarro, N.Van Giai, W.Jiang, *Neutrino Propagation in Neutron Matter and the Nuclear Equation of State*, NATO Science Series II (Kluwer Academic Publishers)

[11] S.Reddy, M.Prakash, *Neutrino Scattering in a newly born Neutron Star*, astro-ph/9610115

[12] A.L.Fetter,J.D.Walecka, *Quantum Theory of Many Particle Systems*, 1971

[13] M.Hellwig, *Aufbau eines Datensystems zum Supernova-Nachweis mit dem Amanda-Detektor*, Diplomarbeit, Johannes Gutenberg Universität Mainz (10/2000)

[14] G.G.Raffelt (MPP,Munich), *Mu- and Tau-Neutrino Spectra Formation in Supernovae*, astro-ph/0105250 5/2001

[15] G.W.Carter, M.Prakash, *The Quenching of the Axial Coupling in Nuclear and Neutron Star Matter*, Phys.Lett.B 525 (2002) p.249ff.

[16] G.Fabbri, F.Matera, *Neutrino mean free path in asymmetric nuclear matter at high density*, Phys. Rev.C, volume 54, nb.4 (1996)

[17] K.Langanke, G.Martinez-Pinedo, *Nuclear weak-interaction processes in stars*, nucl-th/0203071 v1

[18] A.Akmal, V.R.Pandharipande, D.G.Ravenhall, *Equation of state of nucleon matter and neutron star structure*, Phys.Rev.C, volume 58,nb.3 (1998)

[19] F.Hofmann, *Kernstrukturrechnungen mit dichteabhängigen Wechselwirkungen*, Diplomarbeit (1996)

[20] J.P.Blaizot, *Nuclear Compressibilities*, Phys.Rep.64,nb.4 (1980)

[21] D.Vautherin, D.M.Brink, Phys.Rev.C 5,626(1972)

[22] S.Krewald, *Kernspektroskopie mit dichteabhängigen effektiven Wechselwirkungen*, Doktorarbeit (1976)

[23] C.J.Pethick, D.G.Ravenhall, C.P.Lorenz, *The inner boundary of a neutron-star crust*, Nucl.Phys.A 584 (1995) 675ff

[24] J.Margueron, J.Navarro, N.Van Giai, *Instabilities of infinite matter with effective Skyrme-type interactions*, submitted to Phys.Rev.C (2002)

[25] A.Akmal, *Variational Studies of Nucleon Matter with realistic Potentials*, Doktorarbeit (1998)

[26] A.B/Migdal, *Theory of finite Fermi Systems and Applicatuons to Atomic Nuclei*, Interscience Publishers

[27] G.E.Brown, *Die Entdeckung der Multipol-Riesenresonanzen in Atomkernen*, Phy.Bl.53 (1997)

[28] O.Nachtmann, *Elementarteilchenphysik - Phänomene und Konzepte*, Vieweg Verlag

[29] F.Krmpotic, A.Mariano, A.Samana, *RPA puzzle in* ^{12}C *weak decay processes*, nucl-th/0205026

[30] H.Feldmeier, Vorlesungsskript *Einführung in die theoretische Kernphysik*, TUD, WS 2000/2001

Ich bedanke mich bei Herrn Prof.Dr.J.Wambach für die Anregung zu dieser interessanten Arbeit und für die hilfreichen Diskussionen, die wir im Laufe des Jahres geführt haben.

Ein besonderer Dank geht auch an Herrn Dr. Michael Buballa, der mir mit viel Zeit und Geduld aufkommende Fragen beantwortet hat.

Für die ständige Unterstützung bei PC-Problemen möchte ich mich bei Herrn Dipl.Phys. Carsten Isselhorst und Herrn Dipl.Phys. Thomas Roth bedanken.

Allen Mitgliedern der Gruppe danke ich für eine sehr angenehme Atmosphäre und ihre ständige Hilfsbereitschaft, was dazu beigetragen hat, dass diese Arbeit für mich mit viel Spass verbunden war.

Ein Dankeschön gilt auch allen, die sich die Zeit genommen haben, meine Arbeit Korrektur zu lesen und die mir mit konstruktiver Kritik geholfen haben.

Schließlich möchte ich mich besonders bei meiner Mutter Monika und Thomas Götz bedanken, die mir während meines gesamten Studiums ständig zur Seite gestanden haben.