Institut für Kernphysik
Technische Hochschule Darmstadt

Diplomarbeit

Erweiterung der Random Phase Approximation am Beispiel des Nambu-Jona-Lasinio-Modells

Micaela Oertel

September 1997

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Seit der Entdeckung der Unterstruktur des Atomkernes herrscht großes Interesse an der starken Wechselwirkung, die u.a. einen großen Beitrag zur Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung liefert. Heute kennt man eine ganze Reihe weiterer stark wechselwirkender Teilchen, die sogenannten Hadronen. Man weiß, daß diese wiederum aus Quarks aufgebaut sind, die man heute als fundamental ansieht. Man unterteilt die Hadronen in zwei Gruppen: Die Mesonen, die aus Quark-Antiquark-Paaren bestehen, und die Baryonen, die aus drei Quarks bzw. drei Antiquarks zusammengesetzt sind. Die Quantenchromodynamik (QCD) ist heute allgemein als die Theorie der starken Wechselwirkung anerkannt. Die Quarks tragen neben dem Spin noch Quantenzahlen für „Flavour" und Farbe. Es gibt sechs verschiedene Flavours („up", „down", „strange", „charm", „bottom" und „top") und drei mögliche Farbzustände für die Quarks. Die QCD ist nach dem Vorbild der Elektrodynamik als Eichtheorie aufgebaut, ausgehend von einer lokalen Eichinvarianz unter Farb-$SU(3)$-Transformationen. Die Quarks wechselwirken über den Austausch von masselosen Eichbosonen, den sogenannten Gluonen. Der nichtabelsche Charakter der Eichgruppe hat zur Folge, daß die Gluonen Farbladung tragen und miteinander wechselwirken. Die asymptotische Freiheit der QCD führt dazu, daß die Stärke der Wechselwirkung bei hohen Energien abnimmt, deswegen kann man die QCD bei hohen Energien störungstheoretisch behandeln. Gitterrechnungen stellen prinzipiell eine Möglichkeit dar, die QCD numerisch auch bei niedrigen Energien zu lösen. Bzgl. einer Erklärung des Confinements und vor allem bei Rechungen mit endlicher Temperatur zeigen sich die Gitterrechunungen schon recht erfolgreich. Von einer Beschreibung der Hadronen im Rahmen der QCD ist man allerdings noch weit entfernt.
Einerseits versucht man nun, die Eigenschaften von Hadronen in vereinfachten Modellen zu behandeln, und andererseits sucht man nach neuen Methoden, die QCD bei niedrigen Energien zu handhaben. Eine Methode ist z. B. die chirale Störungstheorie (s. [1]), die die chirale $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ Symmetrie der QCD im up- und down-Quark Sektor ausnutzt. Diese Symmetrien kann in zwei verschiedenen Phasen realisiert sein: der sogenannten „Wigner-Weyl-Phase", in der der Grundzustand die gleiche Symmetrie besitzt wie die Lagrangedichte, und der „Nambu-Goldstone-Phase", in der die Symmetrie im Grundzustand spontan gebrochen ist. Nach dem Goldstone-Theorem [2, 3] müssen in diesem Fall masselose Bosonen existieren, wobei eine gebrochene $SU(n)$-Symmetrie $n^2 - 1$ sogenannte Goldstone-Bosonen erfordert. Die niedrigen Massen der pseudoskalaren Mesonen und die Tatsache, daß es keine Paritätsdubletts gibt, sprechen dafür, daß die chirale Symmetrie in der QCD in der Nambu-Goldstone-Phase realisiert ist, d. h. spontan gebrochen ist. Betrachtet man nur den up- und down-Quark-Sektor, dann sind die zugehörigen Goldstone-

Bosonen die Pionen. Im chiralen Limes wechselwirken die masselosen Pionen mit Energie Null nicht. Durch die endliche nackte Masse der Quarks wird die chirale Symmetrie explizit gebrochen, und die Pionen erhalten eine kleine Masse. Die chirale Störungstheorie ist nun eine Entwicklung nach den Parametern $(\frac{m_\pi}{4\pi f_\pi})^2$ und $(\frac{E_\pi}{4\pi f_\pi})^2$, wobei m_π, E_π und f_π die Pionmasse, die Pionenergie und die Pionzerfallskonstante bezeichnen.
Zu den vereinfachten Modellen gehören z. B. die Bag-Modelle (siehe z. B. [4, 5, 6] und [7, 8, 9]) oder Mesonaustauschmodelle (siehe z. B. [10, 11]), die man u.a. nutzt, um eine effektive Beschreibung der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung zu erhalten.
Aus mehreren Gründen wäre es interessant, eine nichtperturbative Methode zu finden. Eine wichtige Forderung an eine nichtperturbative Methode muß nun sein, daß sie die Symmetrien in der richtigen Art und Weise erhält, d. h. daß eine spontan gebrochene Symmetrie auch die Existenz von Goldstone-Bosonen nach sich zieht. Z. Aouissat et al. [12] verwenden für das (chiral symmetrische) lineare Sigma-Modell erfolgreich Techniken der Vielteilchentheorie. Sie benutzen dabei die sogenannte Random Phase Approximation (RPA), die die Symmetrien korrekt behandelt [13]. Dabei geht man von einer Hartree-Fock-Bogoliubov-Näherung für den Grundzustand aus.
Wir werden uns in dieser Arbeit mit einer Erweiterung der RPA am Beispiel des Nambu–Jona-Lasinio-Modells [14] beschäftigen. Dazu werden wir im ersten Kapitel kurz das NJL-Modell vorstellen, so wie es häufig in der Literatur behandelt wird [15, 16]. Im nächsten Kapitel werden wir dann das NJL-Modell in der RPA behandeln und die Existenz der masselosen Goldstone-Bosonen zeigen. In den beiden letzten Kapiteln werden wir uns mit einer Erweiterung der RPA beschäftigen. Es gibt in der Literatur einige Versuche, die Behandlung des NJL-Modell über das RPA-Niveau auszudehnen (s. z. B. [17, 18, 19]). Der Startpunkt ist dabei jeweils eine Modifikation des Grundzustandes bzw. der Gap-Gleichung. Von den hier genannten dürfte der Versuch von Dmitrašinovič et al. [18] der einzige sein, der die Gap-Gleichung konsistent zur Beschreibung der Mesonen abändert und so die chirale Symmetrie erhält.
Wir werden von der „Second" RPA (siehe z. B. [20, 21]) ausgehen, und die Gap-Gleichung unverändert lassen. Es wird sich allerdings herausstellen, daß die Second RPA in dieser Form nicht die erforderlichen Eigenschaften hat. Wir werden zeigen, daß keine Goldstone-Bosonen existieren. Deswegen werden wir den Ansatz für die Second RPA etwas modifizieren müssen. Wir werden sehen, daß dieser modifizierte Ansatz zwar masselose Goldstone-Bosonen liefert, jedoch nicht die erforderlichen nichtwechselwirkenden Goldstone-Bosonen mit Energie Null. Unsere theoretischen Überlegungen zur Erweiterung der RPA im dritten Kapitel werden ergänzt durch ein Beispiel im vierten Kapitel. Da das NJL-Modell in drei Raumdimensionen weder in der Second RPA in ihrer ursprünglichen Form noch in unserer modifizierten Form numerisch behandelt werden kann, werden wir das NJL-Modell in einer Raumdimension als Beispiel verwenden. In der Hartree-Fock-Näherung ist auch hier, wie wir sehen werden, die Symmetrie im Grundzustand gebrochen, so daß es sich als Beispiel heranziehen läßt. Die RPA läßt sich ganz analog zu drei Raumdimensionen behandeln, das soll in den ersten beiden Abschnitten des letzten Kapitels geschehen. In den beiden letzten Abschnitten werden wir dann die Ergebnisse in der Second RPA vorstellen, zuerst in der ursprünglichen, dann in der modifizierten Form.

Kapitel 1

Das Nambu-Jona-Lasinio-Modell

1.1 Grundlagen

Das Nambu-Jona-Lasinio-Modell, 1961 von Nambu und Jona-Lasinio [14] eingeführt, als die QCD noch nicht bekannt war, sollte ursprünglich eine effektive Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung beschreiben. Heute reinterpretiert man das Modell mit Quarks statt Nukleonen. In seiner ursprünglichen Form enthält das Modell nur zwei verschiedene Flavours, up- und down-Quarks, die wie Neutron und Proton ein Isospin-Dublett bilden. Erweitert man das Modell auf $SU(3)$, siehe z. B. [15, 16], dann kann man auch noch seltsame Teilchen behandeln. Wir werden uns in dieser Arbeit auf das $SU(2)$-Modell mit zwei Flavours beschränken. Man geht aus von einer Lagrangedichte der Form

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m_0)\psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2] \ , \tag{1.1}$$

ψ ist dabei das Quarkfeld, G eine Kopplungskonstante mit der Dimension (Energie)$^{-2}$. Diese Lagrangedichte hat die gleichen globalen Symmetrien wie die QCD, wenn man sich im Flavour-Raum nur auf den $SU(2)$-Isospin-Sektor beschränkt. Mit globalen Symmetrien der Lagrangedichte sind über das Noether-Theorem erhaltene Ströme verbunden, von deren über den Raum integrierten Nullkomponente man, in Analogie zum elektromagnetischen Strom, von erhaltenen Ladungen spricht. Dies sind:

a) Die Invarianz unter einer $U_V(1)$-Transformation

$$\psi \to \exp[-i\alpha]\psi \ ,$$

die nichts anderes ist als eine Phasentransformation. Der zugehörige Strom lautet:

$$j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \ .$$

Die erhaltene Ladung ist hier die Baryonenzahl.

b) Die Invarianz unter einer $SU_V(2)$-Transformation

$$\psi \to \exp[-i\vec{\tau}\cdot\vec{\varphi}/2]\psi \ ,$$

die sich ergibt, wenn man bedenkt, daß $\bar{\psi} i\gamma_5 \vec{\tau}\psi$ ein Vektor im Isospinraum ist. Die Transformation stellt eine Drehung in diesem Raum dar. Das Quadrat des Vektors transformiert sich wie ein Skalar. Der zugehörige erhaltene Strom lautet:

$$J_\mu^k = \bar{\psi}\gamma_\mu \tau^k \psi \ .$$

Im chiralen Limes, d. h. $m_0 = 0$, kommt noch eine Symmetrie hinzu:
c) Die Invarianz unter einer $SU_A(2)$-Transformation

$$\psi \to \exp[-i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2]\psi \ .$$

Man kann sie zeigen, wenn man beachtet, daß gilt:

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\psi) &\to (\bar{\psi}\psi)\cos\theta - (\bar{\psi} i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \hat{\theta}\psi)\sin\theta \ , \\ (\bar{\psi} i\gamma_5 \vec{\tau}\psi) &\to (\bar{\psi} i\gamma_5 \vec{\tau}\psi) + (\bar{\psi}\psi)\hat{\theta}\sin\theta - (\bar{\psi} i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \hat{\theta}\psi)\hat{\theta}(1-\cos\theta) \ . \end{aligned}$$

$\hat{\theta}$ ist der Einheitsvektor in θ-Richtung, $\frac{\vec{\theta}}{\theta}$. Der zugehörige Strom lautet:

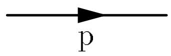
$$J_\mu^k = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5 \tau^k \psi.$$

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß die Lagrangedichte (1.1) im chiralen Limes invariant ist unter einer globalen $SU_V(2) \otimes SU_A(2) \otimes U_V(1)$-Transformation. Im Zusammenhang mit Invarianz unter einer $SU_V(2) \otimes SU_A(2)$-Transformation spricht man auch von einer chiralen Symmetrie.
Im chiralen Limes ist im NJL-Modell die chirale Symmetrie im Grundzustand ab einem bestimmten kritischen Wert für die Kopplungskonstante $G \geq G_{krit.}$ spontan gebrochen, man erhält dann drei masselose pseudoskalare Bosonen, die man mit den Pionen identifiziert. Die chirale Symmetrie ist dann, genau wie in der QCD, in der Nambu-Goldstone-Phase realisiert.
Ausführliche Darstellungen über das NJL-Modell findet man in [15] und [16].

1.2 Die Gap-Gleichung

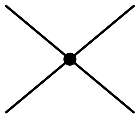
Auf dem Hartree-Fock-Niveau erhalten die Quarks im NJL-Modell eine impulsunabhängige, d. h. konstante, Selbstenergie, die nur für eine Renormierung der Masse sorgt. Die Quarks erhalten also eine dynamisch generierte effektive Masse, die auf Wechselwirkungen mit Quark-Antiquark-Paaren beruht. Die selbstkonsistente Bestimmung der renormierten Masse führt auf die Gap-Gleichung. Im Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB)-Formalismus (s. Kapitel 2) erhält man die Gap-Gleichung aus einer Minimierung der Grundzustandsenergie. Hier soll noch einmal das Verfahren vorgestellt werden, wie das NJL-Modell in der Literatur häufig behandelt wird, bevor im nächsten Kapitel der Zugang über den HFB-Formalismus beschrieben werden soll.
Ausgehend von der Lagrangedichte (1.1) erhält man folgende Feynman-Regeln:

- Propagator für ein nacktes Quark:



$$= iS_F^{(0)}(p) = \frac{i}{\not p - m_0 + i\epsilon} \tag{1.2}$$

- Vertizes:



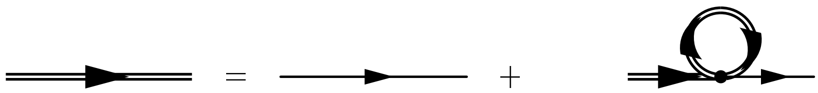
$$= 2iG\Gamma_j \otimes \Gamma_j \tag{1.3}$$

Γ_j kann hier skalar oder pseudoskalar isovektoriell sein:

$$\begin{aligned} \Gamma_S &= 1_{spin} 1_{isospin} 1_{colour} \\ \Gamma_P^k &= i\gamma_5 \tau^k 1_{colour} \end{aligned}$$

- Ein Faktor (-1) und eine Spur über geschlossene Fermion-Loops.

Mit Hilfe dieser Regeln kann man den Propagator selbstkonsistent in HF-Näherung bestimmen:



$$iS_F(p) \quad = \quad iS_F^{(0)}(p) \quad + \quad iS_F(p)(-i\Sigma(p))iS_F^{(0)}(p)\ . \tag{1.4}$$

Löst man diese Gleichung formal nach $S_F(p)$ auf, dann erhält man

$$S_F(p) = \frac{1}{\not p - m_0 - \Sigma(p) + i\epsilon}\ . \tag{1.5}$$

Zur Selbstenergie $\Sigma(p)$ gibt es zwei Beiträge, einen skalaren und einen pseudoskalaren isovektoriellen:

$$\Sigma = \Sigma_P + \Sigma_S\ .$$

Der skalare Anteil ergibt sich zu:

$$-i\Sigma_S = 2iG(-1)\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\{Tr(\Gamma_S iS_F(q))\Gamma_S - \Gamma_S iS_F(q)\Gamma_S\}\ . \tag{1.6}$$

Für den pseudoskalaren isovektoriellen Anteil erhält man:

$$-i\Sigma_P = 2iG(-1)\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\sum_{k=1}^{3}\{Tr(\Gamma_P^k iS_F(q))\Gamma_P^k - \Gamma_P^k iS_F(q)\Gamma_P^k\}\ . \tag{1.7}$$

Der erste Summand beschreibt jeweils den direkten (Hartree-) Anteil, der zweite den Austauschterm (Fock). Wie man sieht, hängt die Selbstenergie nicht vom Impuls p ab, d. h. man kann schreiben:

$$m = m_0 + \Sigma\ . \tag{1.8}$$

Für den Propagator erhält man damit:

$$S_F(p) = \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon} \ . \tag{1.9}$$

Die Masse m läßt sich nun berechnen

$$m = m_0 + 8iG(N_cN_f + \frac{1}{2}) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \ . \tag{1.10}$$

Mit N_c ist hier die Anzahl der Farben gemeint, mit N_f die Anzahl der Flavours. In dieser Arbeit gilt $N_c = 3$, und, da wir uns im Flavour-Raum auf den $SU(2)$-Isospin-Sektor beschränken, $N_f = 2$. Gleichung (1.10) bezeichnet man üblicherweise mit Gap-Gleichung. Im chiralen Limes sieht man, daß es immer eine triviale Lösung mit $m = 0$ gibt. Ab einem bestimmten Wert für die Kopplungskonstante hat diese Gleichung auch im chiralen Limes eine nichttriviale Lösung (s. Abb.1.1). Man sieht auch, daß der Hartree-Beitrag (N_cN_f-Summand) um einen Faktor $2N_cN_f$ größer ist als der Fock-Beitrag ($\frac{1}{2}$-Summand). Aus diesem Grund wird der Fock-Term häufig vernachlässigt, und man löst das Problem nur auf dem Hartree-Niveau.
Die p^0-Integration kann man ohne Schwierigkeiten mit dem Residuensatz ausführen:

$$m = m_0 + 4G(N_cN_f + \frac{1}{2}) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_p} \ , \tag{1.11}$$

mit $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.
Wie man sieht, divergiert das Integral quadratisch. Man wird ein Regularisierungsverfahren einführen müssen, und da das NJL-Modell nicht renormierbar ist, wird das Ergebnis von dem gewählten Verfahren abhängen. Wir werden uns in dieser Arbeit auf zwei von vielen möglichen Verfahren konzentrieren, nämlich Pauli-Villars-Regularisierung und dreidimensionalen Cutoff. Ein dreidimensionaler Cutoff hat zwar den Nachteil, die Kovarianz zu zerstören, aber er ist am leichtesten zu handhaben. Pauli-Villars-Regularisierung ist ein kovariantes Verfahren, ist aber schwieriger zu handhaben.

a) <u>Dreidimensionaler Cutoff</u>

Das Integral in der Gap-Gleichung (1.11) kann man mit einem Cutoff Λ analytisch berechnen

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \rightarrow \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{p^2}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} dp = \frac{1}{4\pi^2} \Big(\Lambda\sqrt{\Lambda^2 + m^2} - m^2 \text{arsinh}(\frac{\Lambda}{m})\Big). \tag{1.12}$$

In der Gap-Gleichung hat man zwei freie Parameter, die Kopplungskonstante G und den Abschneideparameter Λ. Paßt man diese an die Pionzerfallskonstante f_π und das Quarkkondensat $\langle \bar{u}u \rangle$ an (s. [16]), erhält man auf dem Hartree-Niveau im chiralen Limes:

$$G\Lambda^2 = 2.14 \quad ; \quad \Lambda = 653\text{MeV}. \tag{1.13}$$

Für die Masse erhält man damit einen Wert von $m = 313$MeV.

b) Pauli-Villars-Regularisierung

Man führt zusätzliche Terme ein, die die gleiche Struktur wie das divergente Integral in Gleichung (1.11) haben, aber größere Massen als die Quarkmasse m enthalten,so daß sich die Divergenzen gegenseitig wegheben, d. h.

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \rightarrow \lim_{\Lambda \to \infty} \frac{1}{2\pi^2} \sum_i c_i \int_0^\Lambda \frac{p^2}{\sqrt{\vec{p}^2 + m_i^2}} dp \ , \tag{1.14}$$

wobei die zusätzlichen Terme so gewählt werden, daß die rechte Seite von (1.14) endlich wird. Damit diese Forderung erfüllt werden kann, muß gelten

$$\begin{aligned} \sum_i c_i &= 0 \ , \\ \sum_i c_i m_i^2 &= 0 \ , \end{aligned} \tag{1.15}$$

d. h. man braucht zwei Regulatoren. Mit der in der Literatur [22] üblichen Wahl

$$\begin{aligned} m_i^2 &= m^2 + \alpha_i \Lambda^2 \ ; \\ c_0 &= 1; \quad c_1 = 1; \quad c_2 = -2 \ ; \\ \alpha_0 &= 0; \quad \alpha_1 = 2; \quad \alpha_2 = 1 \end{aligned}$$

werden die Bedingungen (1.15) erfüllt. Diese Wahl der Koeffizienten führt dazu, daß die Regulatoren durch einen Parameter Λ festgelegt sind. Man hat also wie im Fall a) zwei freie Parameter.
Die Gap-Gleichung auf dem Hartree-Niveau erhält dann folgende Form:

$$m = m_0 + 4GN_cN_f \frac{m}{8\pi^2} \sum_{i=0}^{2} c_i m_i^2 \ln(\frac{m_i^2}{m^2}) \ . \tag{1.16}$$

Eine Anpassung der Parameter an die gleichen Größen wie in Fall a) führt auf (s. [16]):

$$G\Lambda^2 = 2.84 \quad ; \quad \Lambda = 859\text{MeV} \ . \tag{1.17}$$

Damit erhält man einen Wert von $m = 241$MeV für die Masse.
Im weiteren wird mit den obigen Parametern gearbeitet werden, d. h. in der Nambu-Goldstone-Phase. Nach dem Goldstone-Theorem muß es nun drei masselose Bosonen geben. Die Existenz dieser drei Bosonen wird in Abschnitt 1.4 gezeigt werden.

1.3 Das Nambu-Jona-Lasinio-Modell in einem endlichen Volumen

Man kann das NJL-Modell ohne größere Schwierigkeiten auch in einem endlichen Volumen V behandeln. Man ersetzt dazu die Integrale im Impulsraum durch Summen über

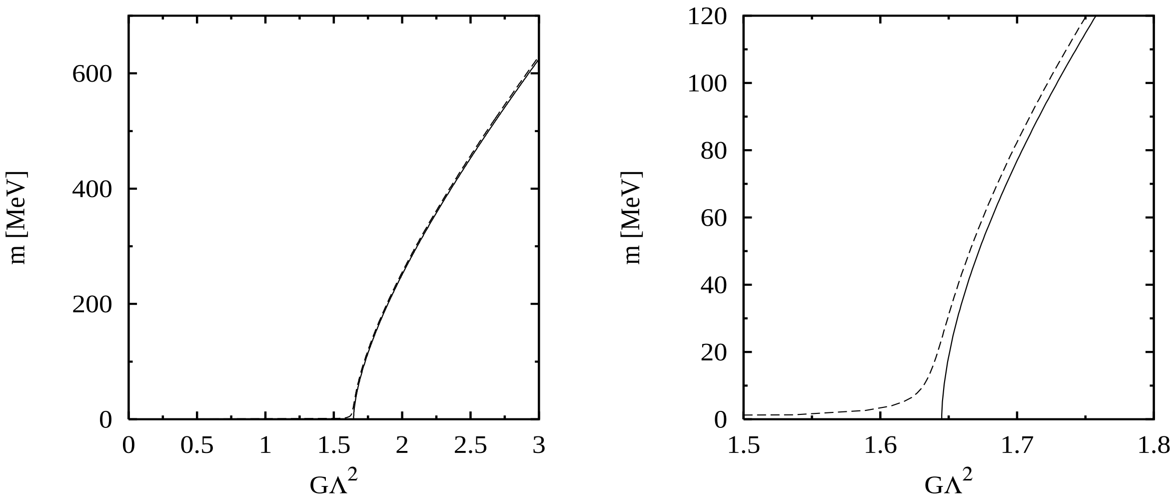


Abbildung 1.1: *Die Quarkmasse in Abhängigkeit von der Kopplungskonstante. Die gestrichelte Linie wurde in einem endlichen Volumen berechnet, die durchgezogene im Kontinuum. Man sieht die kritische Kopplungskonstante im Kontinuum und, deutlicher auf dem rechten Bild, den Effekt des endlichen Volumens. Hier wurde ein dreidimensionaler Cutoff benutzt, mit den Parametern aus Gleichung (1.13) und einer Kantenlänge von $L = 20$ fm.*

die diskreten erlaubten Impulszustände:

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \to \int \frac{dp^0}{2\pi} \sum_{\vec{p}} \frac{1}{V} \ . \qquad (1.18)$$

Die erlaubten Impulszustände sind hierbei mit periodischen Randbedingungen in einem Würfel mit Kantenlänge L

$$p_{x,y,z} = n_{x,y,z} \frac{2\pi}{L} \quad ; \quad n_{x,y,z} \epsilon \boldsymbol{Z} \ .$$

Für die Gap-Gleichung in einem endlichen Volumen erhält man analog zu Gleichung (1.11):

$$m = m_0 + 4G(N_c N_f + \frac{1}{2}) \sum_{\vec{p}} \frac{1}{V} \frac{m}{E_p} \ . \qquad (1.19)$$

Die Ergebnisse im endlichen Volumen unterscheiden sich qualitativ in einem Punkt von denen im Kontinuum: In einem endlichen Volumen gibt es keine kritische Kopplungskonstante, unterhalb derer man im chiralen Limes nur die triviale Lösung hat (s. Abb.1.1). Der Grund dafür ist, daß zur Summe auch der Summand mit $|\vec{p}| = 0$ einen Beitrag liefert, der dazu führt, daß man für $m \to 0$ eine Lösung mit $G \to 0$ bekommt. Es gilt im chiralen Limes:

$$m = 4G(N_c N_f + \frac{1}{2}) \Big(\sum_{\vec{p}=0} \frac{1}{V} + \sum_{\vec{p}\neq 0} \frac{1}{V} \frac{m}{E_p} \Big) \ . \qquad (1.20)$$

Hieran erkennt man, daß es außer für $G = 0$ überhaupt keine triviale Lösung gibt. In diesem Fall hat man also nur eine Nambu-Goldstone-Phase. Im Kontinuumslimes dagegen

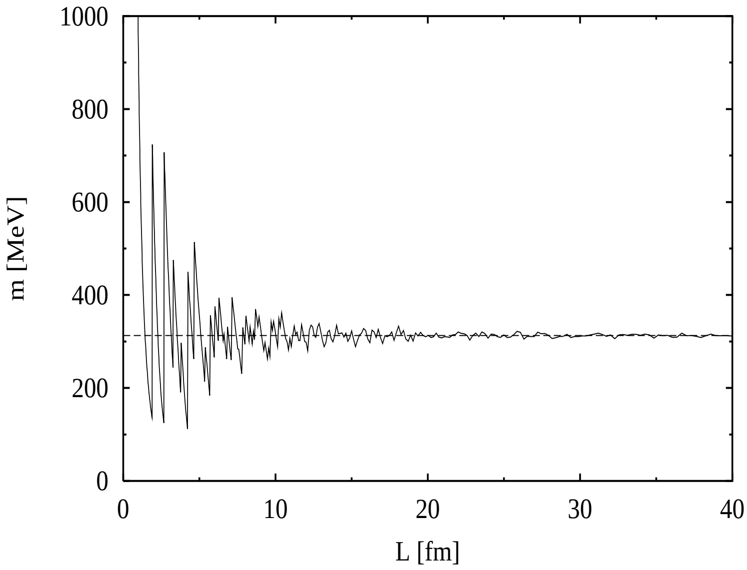


Abbildung 1.2: *Quarkmasse mit Cutoff-Regularisierung in Abhängigkeit von der Kantenlänge. Die gestrichelte Linie stellt den Kontinuumslimes dar. Es wurden die Parameterwerte aus Gleichung (1.13) benutzt.*

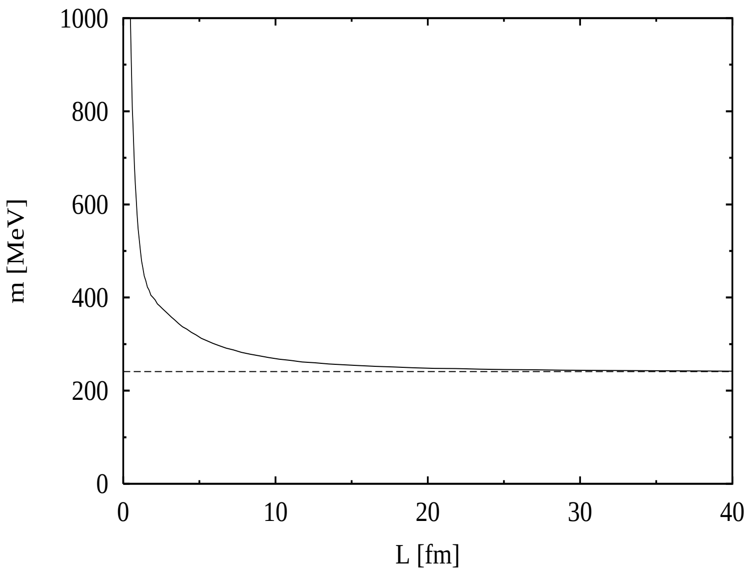


Abbildung 1.3: *Quarkmasse mit Pauli-Villars-Regularisierung in Abhängigkeit von der Kantenlänge. Die gestrichelte Linie stellt den Kontinuumslimes dar. Es wurden die Parameterwerte aus Gleichung (1.17) benutzt.*

gibt es in Abhängigkeit von der Kopplungskonstante zwei Phasen.
Mit den beiden im vorherigen Abschnitt beschriebenen Abschneideverfahren erhält man für die Quarkmasse in einem nicht allzu kleinen Volumen vergleichbare Werte. Mit den gewählten Parametern (Gln. 1.13 bzw. 1.17) befindet man sich im Kontinuum in der Nambu-Goldstone-Phase, so daß der oben beschriebene Effekt hier nicht wichtig ist. Die Ergebnisse für die Quarkmasse mit dreidimensionalem Cutoff, die man in einem Würfel mit Kantenlänge L erhält, sind in Abb. (1.2) zu sehen. Die Rechnungen wurden dabei auf dem Hartree-Niveau durchgeführt. Man erkennt, daß der Wert gegen den Kontinuumslimes konvergiert. Die starken Oszillationen sind darauf zurückzuführen, daß mit einem festen Cutoff bei Längen, bei denen

$$L = n_m \frac{2\pi}{\Lambda}$$

mit

$$n_m = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \quad ; \quad n_{x,y,z} \epsilon \boldsymbol{Z}$$

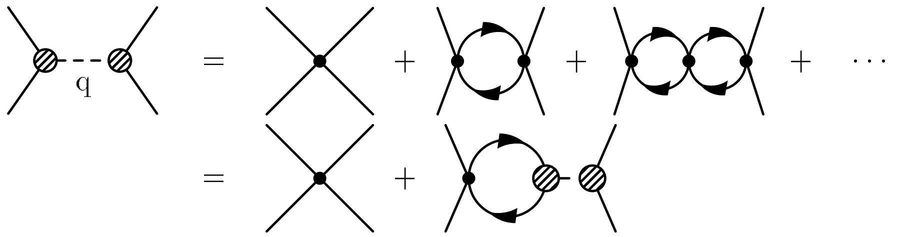
gilt, Summanden dazukommen, die zu einer Zunahme der Masse führen. Zwischen diesen Längen nimmt die Masse dann wieder ab. Dieser Effekt ist mit zunehmender Länge immer geringer, da dann mehr Summanden beitragen, und der Einfluß einzelner Summanden dadurch geringer wird. Für das Pauli-Villars-Verfahren kann man in der Summe im endlichen Volumen V wie im Kontinuum Regulatoren einführen:

$$m = m_0 + 4GN_cN_f m \sum_{\vec{p}} \frac{1}{V} \sum_{i=0}^{2} c_i \frac{1}{\sqrt{\vec{p}^2 + m_i^2}} \ . \tag{1.21}$$

Für den Vergleich der Ergebnisse für die Masse mit dem Kontinuumslimes siehe Abb. (1.3). Die Oszillationen treten hier nicht auf, da man alle Summanden mitnimmt.

1.4 Beschreibung von Mesonen

In diesem Abschnitt soll das übliche Verfahren, Mesonen im NJL-Modell zu behandeln, vorgestellt werden ([15, 16]). Dieses Verfahren ist äquivalent zur Random Phase Approximation (RPA), auf die wir im nächsten Kapitel eingehen werden, und taucht häufig unter diesem Namen in der Literatur auf (siehe z. B. [16]).
Man beschreibt einen Mesonpropagator über eine Bethe-Salpeter-Gleichung, wobei wir der Einfachheit halber nur direkte Anteile betrachten:



$$
\begin{aligned}
iT_j(q^2) &= 2iG + 2iG(-iJ_j(q^2))iT_j(q^2) \\
&= \frac{2iG}{1-2GJ_j(q^2)}
\end{aligned} \tag{1.22}
$$

mit

$$-iJ_j(q^2) = (-1)\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr[\Gamma_j iS_F(p+\frac{q}{2})\Gamma_j iS_F(p-\frac{q}{2})] \ . \tag{1.23}$$

Der Index j bezieht sich hier auf die Quantenzahlen des ausgetauschten Quark-Antiquark-Paares. Mit der Lagrangedichte (1.1) hat man nur zwei verschiedene Sorten von Vertizes: einen skalaren und einen pseudoskalaren isovektoriellen. Diese mischen nicht, da in Gleichung (1.23) schon die Spur über zwei verschiedene Sorten von Vertizes verschwinden würde. $T_j(q^2)$ wird über einen 1-Meson-Austausch parametrisiert:

$$iT_j(q^2) = i\frac{(-ig_{M_jqq})^2}{q^2 - m_{M_j}^2 + i\epsilon} \ . \tag{1.24}$$

Man erhält also drei pseudoskalare isovektorielle Mesonen, die Pionen ($j = P$), und ein skalares Meson, das Sigma ($j = S$). Die Massen der Mesonen erhält man somit über die Pole von $T_j(q^2)$:

$$2GJ_j(q^2 = m_{M_j}^2) = 1 \ . \tag{1.25}$$

Für den pseudoskalaren Kanal gilt:

$$
\begin{aligned}
-iJ_P(q^2) &= (-1)\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\Big(i\gamma_5\tau^j iS_F(p+\frac{q}{2})i\gamma_5\tau^j iS_F(p-\frac{q}{2})\Big) \\
&= 4N_cN_f\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{(p+\frac{q}{2})^2-m^2+i\epsilon}+\frac{1}{(p-\frac{q}{2})^2-m^2+i\epsilon} - \\
&\qquad q^2\frac{1}{((p+\frac{q}{2})^2-m^2+i\epsilon)((p-\frac{q}{2})^2-m^2+i\epsilon)}\Big) \\
&=: 4N_cN_f\frac{1}{2}\Big(I_1(q^2)+I_2(q^2)-q^2I(q^2)\Big) \ .
\end{aligned} \tag{1.26}
$$

Wenn man mit Pauli-Villars-Regularisierung arbeitet, kann man in den Integralen I_1 und I_2 eine Substitution $p \to (p+\frac{q}{2})$ bzw. $p \to (p-\frac{q}{2})$ vornehmen und erhält das gleiche Integral I_3

$$I_3 = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon} \ , \tag{1.27}$$

das nicht mehr vom Impuls abhängt. Es taucht auch in der Gap-Gleichung (1.10) auf, es gilt (nur Hartree-Terme):

$$m = m_0 + 8iGN_cN_f m I_3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m - m_0}{8iGN_cN_f m} = I_3 \; . \tag{1.28}$$

Da man hier nur die direkten Terme betrachtet hat, darf man aus der Gap-Gleichung auch nur die Hartree-Anteile mitnehmen. Das Polarisationsintegral J_P^{jk} läßt sich dann wie folgt schreiben:

$$2GJ_P^{jk}(q^2) = \Big(1 - \frac{m_0}{m} - 4iGN_cN_f q^2 I(q^2)\Big) \; . \tag{1.29}$$

Im chiralen Limes gilt also für die Pionmasse $m_\pi^2 = 0$. Da das Pion ein isovektorielles Teilchen ist, hat man also gezeigt, daß es drei Goldstone-Bosonen gibt. Auf die gleiche Art und Weise kann man auch im endlichen Volumen zeigen, daß mit Pauli-Villars-Regularisierung die drei Pionen im chiralen Limes Masse Null haben, da man auch in den Summen die entsprechende Substitution vornehmen darf.
Der dreidimensionale Cutoff bereitet hier etwas mehr Schwierigkeiten, da man hier nicht ohne weiteres die Substitution vornehmen kann und das Ergebnis von der Verteilung der Impulse auf die Loop-Propagatoren abhängt. In einem System mit $\vec{q} = 0$ sind die beiden Integrale I_1 und I_2, unabhängig von der Bezeichnung der Loop-Impulse, gleich I_3 (s. Gl. 1.27), und man erhält die gewünschten masselosen Bosonen. Man muß sich also in das Ruhesystem des Mesons setzen, wenn man mit dreidimensionalem Cutoff arbeitet.

Für den skalaren Kanal ergibt sich:

$$\begin{aligned} -iJ_S(q^2) &= (-1)\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\Big(iS_F(p+\frac{q}{2})iS_F(p-\frac{q}{2})\Big) \\ &= 4N_cN_f\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{(p+\frac{q}{2})^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{1}{(p-\frac{q}{2})^2 - m^2 + i\epsilon} - \\ &\qquad (q^2 - 4m^2)\frac{1}{((p+\frac{q}{2})^2 - m^2 + i\epsilon)((p-\frac{q}{2})^2 - m^2 + i\epsilon)}\Big) \\ &=: 4N_cN_f\frac{1}{2}\Big(I_1(q^2) + I_2(q^2) - (q^2 - 4m^2)I(q^2)\Big) \; . \end{aligned} \tag{1.30}$$

Mit der gleichen Vorgehensweise wie für den pseudoskalaren Kanal erhält man hier:

$$2GJ_S(q^2) = \Big(1 - \frac{m_0}{m} - 4iGN_cN_f(q^2 - 4m^2)I(q^2)\Big) \; . \tag{1.31}$$

Im chiralen Limes gilt dann $m_\sigma^2 = 4m^2$. Die Bemerkungen bzgl. des dreidimensionalen Cutoffs gelten natürlich auch hier.
Um die Kopplungskonstanten zu bestimmen, entwickelt man das Polarisationsintegral $J_j(q^2)$ in der Nähe des Pols:

$$J_j(q^2) = J_j(m_{M_j}^2) + \frac{d}{dq^2}J_j(q^2)\Big|_{q^2 = m_{M_j}^2}(q^2 - m_{M_j}^2) + \dots \; . \tag{1.32}$$

Für die T-Matrix (s. Gl. 1.22) folgt daraus:

$$T_j(q^2) = -\frac{1}{\frac{d}{dq^2} J_j(q^2)\Big|_{q^2=m^2_{M_j}} (q^2 - m^2_{M_j})} \ . \tag{1.33}$$

Aus einem Vergleich mit Gleichung (1.24) erhält man also für die Kopplungskonstante der Mesonen an Quarks:

$$g^2_{M_j qq} = \Big(\frac{d}{dq^2} J_j(q^2)\Big|_{q^2=m^2_{M_j}} \Big)^{-1} \ . \tag{1.34}$$

Mit Hilfe der Pion-Quark-Kopplungskonstante kann man die Gell-Mann-Oakes-Renner- und die Goldberger-Treimann-Relation verifizieren. Darauf soll hier nicht weiter eingegangen werden, explizite Beweise findet man z. B. bei [15, 16].

Kapitel 2

Die Random Phase Approximation (RPA)

2.1 Die Gap-Gleichung im Hartree-Fock-Bogoliubov-Formalismus

Die in Abschnitt 1.2 über eine Quarkselbstenergie im Formalismus der Feynman-Graphen hergeleitete Gap-Gleichung (1.10) läßt sich auch über einen anderen Ansatz herleiten: Man versucht, die Grundzustandsenergie bzgl. eines Variationsparameters zu minimieren. Dazu nimmt man einen Grundzustand an, der schon Quark-Antiquark-Paare enthält:

$$|\mathrm{gz}\rangle = \prod_{\vec{p},s=\pm 1} \Big(\cos(\frac{\phi(-\vec{p})}{2}) + s \sin(\frac{\phi(-\vec{p})}{2}) b^\dagger(\vec{p},s) d^\dagger(-\vec{p},s) \Big) |\ \rangle \ . \tag{2.1}$$

$b^\dagger$ und $d^\dagger$ sind dabei die Erzeugungsoperatoren für ein Quark bzw. ein Antiquark aus dem Vakuum $|\ \rangle$, sie erfüllen die üblichen Antivertauschungsrelationen für Fermionen. Die Funktion $\phi(\vec{p})$ wird aus der Minimierung der Energie des Grundzustandes $|\mathrm{gz}\rangle$ bestimmt werden. Der Ansatz für den Grundzustand ähnelt dem der BCS-Theorie [23] für die Supraleitung, mit dem Unterschied, daß man dort Paare gleicher Teilchen (Elektronen) im Grundzustand annimmt.
Den Hamiltonoperator erhält man aus der Lagrangedichte (1.1):

$$\begin{aligned} \mathrm{H} &= \mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_1 \\ &= -\int d^3x \bar{\psi}(x)(i\vec{\gamma}\vec{\nabla} - m_0)\psi(x) - G\int d^3x [(\bar{\psi}(x)\psi(x))^2 + (\bar{\psi}(x) i\gamma_5 \vec{\tau}\psi(x))^2] \ . \end{aligned} \tag{2.2}$$

In Zukunft werden wir nur $t = 0$ betrachten und das Zeitargument weglassen. Wir werden im weiteren in einem endlichen Volumen V arbeiten. Die Feldoperatoren sind dann in der Ausgangsbasis im Vakuum gegeben durch:

$$\psi(\vec{x},0) = \sum_{s=\pm 1} \sum_{t=\pm 1} \sum_{c=1..N_c} \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m_0}{\omega_{\vec{p}}}} \Big(b_{\vec{p},s,t,c} u_0(\vec{p},s) e^{i\vec{p}\vec{x}} + d^\dagger_{\vec{p},s,t,c} v_0(\vec{p},s) e^{-i\vec{p}\vec{x}} \Big) \chi_t \varphi_c \ . \tag{2.3}$$

Dabei gilt $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m_0^2}$.
χ_t ist eine Eigenfunktion zu $\vec{\tau}^2$ und τ_3 mit Eigenwert t zum τ_3-Operator, φ_c die entsprechende Funktion für die Farbzustände. u_0 und v_0 sind Dirac-Spinoren für Teilchen mit Masse m_0 (s. Anhang A.1). Im folgenden werden wir die Indizes für Farbe und Isospin an den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren der Übersichtlichkeit halber weglassen.
Wir werden jetzt eine Quasiteilchenbasis über eine Bogoliubovrotation [24] einführen. Die neuen Operatoren $B_{\vec{p},s}$ und $D_{\vec{p},s}$ werden so gewählt, daß sie den in Gleichung (2.1) definierten Grundzustand vernichten:

$$B_{\vec{p},s}|\mathrm{gz}\rangle = D_{\vec{p},s}|\mathrm{gz}\rangle = 0 \ . \tag{2.4}$$

Die Bogoliubovrotation läßt sich mit Hilfe der Funktion $\phi(\vec{p})$ schreiben:

$$\begin{aligned} B_{\vec{p},s} &= \cos(\frac{\phi(-\vec{p})}{2})b_{\vec{p},s} - s\sin(\frac{\phi(-\vec{p})}{2})d^\dagger_{-\vec{p},s} \ , \\ D_{\vec{p},s} &= \cos(\frac{\phi(\vec{p})}{2})d_{\vec{p},s} + s\sin(\frac{\phi(\vec{p})}{2})b^\dagger_{-\vec{p},s} \ . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Die neuen Operatoren erfüllen die richtigen Antivertauschungsrelationen für Fermionen

$$\begin{aligned} \{B_{\vec{p},s}, B^\dagger_{\vec{p\prime},s\prime}\} &= \delta_{s,s\prime}\delta_{\vec{p},\vec{p\prime}} \ , \\ \{D_{\vec{p},s}, D^\dagger_{\vec{p\prime},s\prime}\} &= \delta_{s,s\prime}\delta_{\vec{p},\vec{p\prime}} \ . \end{aligned}$$

Mit den neuen Operatoren lassen sich die Feldoperatoren in folgender Form schreiben:

$$\psi(\vec{x},0) = \sum_{s=\pm1}\sum_{t=\pm1}\sum_{c=1..N_c}\sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m_0}{\omega_{\vec{p}}}}\Big(B_{\vec{p},s}\tilde{u}(\vec{p},s)e^{i\vec{p}\vec{x}} + D^\dagger_{\vec{p},s}\tilde{v}(\vec{p},s)e^{-i\vec{p}\vec{x}}\Big)\chi_t\varphi_c, \tag{2.6}$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\vec{p},s) &= (\cos(\frac{\phi(-\vec{p})}{2})u_0(\vec{p},s) + s\sin(\frac{\phi(-\vec{p})}{2})\gamma_0 v_0(\vec{p},s)) \ , \\ \tilde{v}(\vec{p},s) &= (\cos(\frac{\phi(\vec{p})}{2})v_0(\vec{p},s) + s\sin(\frac{\phi(\vec{p})}{2})\gamma_0 u_0(\vec{p},s)) \ . \end{aligned}$$

Der Erwartungswert des Hamilton-Operators (2.2) im neuen Grundzustand läßt sich in drei Anteile zerlegen, einen freien Anteil aus H_0, einen Hartree-Anteil und einen Fock-Anteil:

$$\langle\mathrm{gz}|\mathrm{H}|\mathrm{gz}\rangle = \langle\mathrm{gz}|\mathrm{H}_0|\mathrm{gz}\rangle + \langle\mathrm{gz}|\mathrm{H}_1|\mathrm{gz}\rangle_{Hartree} + \langle\mathrm{gz}|\mathrm{H}_1|\mathrm{gz}\rangle_{Fock} \ , \tag{2.7}$$

mit

$$\begin{aligned} \langle\mathrm{gz}|\mathrm{H}_0|\mathrm{gz}\rangle = & \int d^3x \sum_{s_1,s_2}\sum_{c_1,c_2}\sum_{t_1,t_2}\sum_{\vec{p}_1}\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{p}_2}\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m_0^2}{\omega_{\vec{p}_1}\omega_{\vec{p}_2}}} \\ & \langle\mathrm{gz}|D_1 D_2^\dagger|\mathrm{gz}\rangle \ \bar{\tilde{v}}(\vec{p}_1,s_1)\chi^\dagger_{t_1}\varphi^\dagger_{c_1}(-\vec{\gamma}\vec{p}_2 + m_0)\chi_{t_2}\varphi_{c_2}\tilde{v}(\vec{p}_2,s_2)e^{i(\vec{p}_1-\vec{p}_2)\vec{x}} \ , \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\langle \mathrm{gz}|\mathrm{H}_1|\mathrm{gz}\rangle_{Hartree} &= -G\int d^3x \sum_{s_1,\dots s_4}\sum_{c_1,\dots c_4}\sum_{t_1,\dots t_4}\sum_{\vec p_1,\dots \vec p_4}\frac{1}{V^2}\sqrt{\frac{m_0^4}{\omega_{\vec p_1}\omega_{\vec p_2}\omega_{\vec p_3}\omega_{\vec p_4}}}\sum_{\Gamma=1,i\gamma_5\vec\tau} \\
&\quad \Big(\langle \mathrm{gz}|D_1D_2^\dagger D_3 D_4^\dagger|\mathrm{gz}\rangle \qquad\qquad , \\
&\quad \bar{\tilde v}(\vec p_1,s_1)\chi_{t_1}^\dagger\varphi_{c_1}^\dagger\Gamma\chi_{t_2}\varphi_{c_2}\tilde v(\vec p_2,s_2) \\
&\quad \bar{\tilde v}(\vec p_3,s_3)\chi_{t_3}^\dagger\varphi_{c_3}^\dagger\Gamma\chi_{t_4}\varphi_{c_4}\tilde v(\vec p_4,s_4) \\
&\quad e^{i(\vec p_1+\vec p_3-\vec p_2-\vec p_4)\vec x}\Big) \\
\langle \mathrm{gz}|\mathrm{H}_1|\mathrm{gz}\rangle_{Fock} &= -G\int d^3x \sum_{s_1,\dots s_4}\sum_{c_1,\dots c_4}\sum_{t_1,\dots t_4}\sum_{\vec p_1,\dots \vec p_4}\frac{1}{V^2}\sqrt{\frac{m_0^4}{\omega_{\vec p_1}\omega_{\vec p_2}\omega_{\vec p_3}\omega_{\vec p_4}}}\sum_{\Gamma=1,i\gamma_5\vec\tau} \\
&\quad \Big(\langle \mathrm{gz}|D_1B_2B_3^\dagger D_4^\dagger|\mathrm{gz}\rangle \\
&\quad \bar{\tilde v}(\vec p_1,s_1)\chi_{t_1}^\dagger\varphi_{c_1}^\dagger\Gamma\chi_{t_2}\varphi_{c_2}\tilde u(\vec p_2,s_2) \\
&\quad \bar{\tilde u}(\vec p_3,s_3)\chi_{t_3}^\dagger\varphi_{c_3}^\dagger\Gamma\chi_{t_4}\varphi_{c_4}\tilde v(\vec p_4,s_4) \\
&\quad e^{i(\vec p_1+\vec p_2-\vec p_3-\vec p_4)\vec x}\Big)\ .
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Wir werden uns hier für die Herleitung der Gap-Gleichung auf den freien und den Hartree-Anteil beschränken. Für den freien Anteil gilt:

$$
\begin{aligned}
\langle \mathrm{gz}|\mathrm{H}_0|\mathrm{gz}\rangle &= N_cN_f\sum_{s_1,s_2}\sum_{\vec p_1,\vec p_2}\frac{1}{V}\sqrt{\frac{m_0^2}{\omega_{\vec p_1}\omega_{\vec p_2}}}\delta_{s_1,s_2}\delta_{\vec p_1,\vec p_2}\bar{\tilde v}(\vec p_1,s_1)(-\vec\gamma\vec p_2+m_0)\tilde v(\vec p_2,s_2) \\
&= -2N_cN_f\sum_{\vec p}\omega_{\vec p}\cos\phi(\vec p)\ .
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Für den Hartree-Anteil gibt es zwei unterschiedliche Terme, einen mit skalarer und einen mit pseudoskalarer isovektorieller Wechselwirkung. Letzterer liefert keinen Beitrag zum Grundzustandserwartungswert. Also ergibt sich der Hartree-Beitrag zu:

$$
\begin{aligned}
\langle \mathrm{gz}|\mathrm{H}_1|\mathrm{gz}\rangle_{\mathrm{Hartree}} &= -G(N_cN_f)^2\sum_{s_1,\dots s_4}\sum_{\vec p_1,\dots \vec p_4}\frac{1}{V^2}\sqrt{\frac{m_0^4}{\omega_{\vec p_1}\omega_{\vec p_2}\omega_{\vec p_3}\omega_{\vec p_4}}}\delta_{s_1,s_2}\delta_{s_3,s_4}\delta_{\vec p_1,\vec p_2}\delta_{\vec p_3,\vec p_4} \\
&\quad \bar{\tilde v}(\vec p_1,s_1)\tilde v(\vec p_2,s_2)\bar{\tilde v}(\vec p_3,s_3)\tilde v(\vec p_4,s_4) \\
&= -4G(N_cN_f)^2\Big\{\sum_{\vec p}\frac{1}{\sqrt V}\Big(\frac{m_0}{\omega_{\vec p}}\cos\phi(\vec p)-\sin\phi(\vec p)\frac{|\vec p|}{\omega_{\vec p}}\Big)\Big\}^2\ .
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Für den Grundzustandserwartungswert in Hartree-Näherung erhält man damit:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{W}[\phi(\vec{\mathrm{p}})] = \langle \mathrm{gz}|\mathrm{H}|\mathrm{gz}\rangle = &- 2N_cN_f \sum_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}} \cos\phi(\vec{p}) \\
&- 4G(N_cN_f)^2 \Big\{ \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{V}} \Big(\frac{m_0}{\omega_{\vec{p}}} \cos\phi(\vec{p}) - \frac{|\vec{p}|}{\omega_{\vec{p}}} \sin\phi(\vec{p}) \Big) \Big\}^2 .
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

Um das Minimum zu bestimmen, bildet man die Funktionalableitung der Größe $\mathrm{W}[\phi]$ bzgl. ϕ und setzt diese null:

$$
\frac{\delta \mathrm{W}}{\delta\phi(\vec{\mathrm{p}})} = 0. \tag{2.12}
$$

Daraus resultiert die Gleichung

$$
\sin\phi(\vec{p})\omega_{\vec{p}} = -(m - m_0)\Big(\frac{m_0}{\omega_{\vec{p}}} \sin\phi(\vec{p}) + \frac{|\vec{p}|}{\omega_{\vec{p}}} \cos\phi(\vec{p}) \Big) , \tag{2.13}
$$

wobei die Masse m wie folgt definiert wurde:

$$
m = m_0 + 4GN_cN_f \sum_{\vec{p}} \frac{1}{V} \Big(\frac{m_0}{\omega_{\vec{p}}} \cos\phi(\vec{p}) - \frac{|\vec{p}|}{\omega_{\vec{p}}} \sin\phi(\vec{p}) \Big) . \tag{2.14}
$$

Durch Auflösen nach dem Variationsparameter ϕ erhält man

$$
\phi(\vec{p}) = -\arctan\Big(\frac{m - m_0}{mm_0 + \vec{p}^2} |\vec{p}| \Big) . \tag{2.15}
$$

ϕ hängt nur vom Betrag des Impulses und nicht von der Richtung ab, wie es auch zu erwarten war wegen der Drehinvarianz des Vakuums und des Grundzustandes. Setzt man das nun in Gleichung (2.14) ein, ergibt sich

$$
m = m_0 + 4GN_cN_f \sum_{\vec{p}} \frac{1}{V} \frac{m}{\mathrm{E}_p} , \tag{2.16}
$$

mit $\mathrm{E}_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.
Dies ist genau die Gap-Gleichung (1.19) für die Konstituentenmasse m in Hartree-Näherung, so wie wir sie schon in Kapitel 1 erhalten hatten. Nimmt man den Fock-Anteil hinzu, erhält man wie in Kapitel 1 einen Summanden mit einem Faktor $\frac{1}{2}$ statt N_cN_f:

$$
m = m_0 + 4G(N_cN_f + \frac{1}{2}) \sum_{\vec{p}} \frac{1}{V} \frac{m}{\mathrm{E}_p} . \tag{2.17}
$$

Setzt man das Ergebnis für ϕ (Gl. 2.15) in den Feldoperator (2.6) ein, dann läßt sich zeigen, daß die Feldoperatoren sich in der neuen Basis äquivalent zu Gleichung (2.3) mit Spinoren u und v für Quarks der Masse m schreiben lassen:

$$
\psi(\vec{x},0) = \sum_s \sum_t \sum_c \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{\mathrm{E}_p}} \Big(B_{\vec{p},s,t,c} u(\vec{p},s) e^{i\vec{p}\vec{x}} + D^\dagger_{\vec{p},s,t,c} v(\vec{p},s) e^{-i\vec{p}\vec{x}} \Big) \chi_t \varphi_c . \tag{2.18}
$$

Im folgenden werden wir den in diesem Abschnitt bestimmten Grundzustand $|\mathrm{gz}\rangle$ mit $|\mathrm{HF}\rangle$ bezeichnen.
In der hier bestimmten HF-Basis ergibt sich der Hamilton-Operator zu:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H} \;=\; & \sum_{\vec{p},s,t,c} E_p (B^\dagger_{\vec{p},s,c,t} B_{\vec{p},s,c,t} + D^\dagger_{\vec{p},s,c,t} D_{\vec{p},s,c,t}) \\
& -\frac{G}{V} \sum_{s_1,\ldots s_4} \sum_{c_1,\ldots c_4} \sum_{t_1,\ldots t_4} \sum_{\vec{p}_1,\ldots \vec{p}_4} \sqrt{\frac{m^4}{E_{\vec{p}_1} E_{\vec{p}_2} E_{\vec{p}_3} E_{\vec{p}_4}}} \delta_{c_1,c_2} \delta_{c_3,c_4} \sum_{\Gamma=1,i\gamma_5\vec{\tau}} \\
& \Big\{ (\; \bar{u}(\vec{p}_1,s_1)\chi^\dagger_{t_1}\Gamma\chi_{t_2} u(\vec{p}_2,s_2) \bar{u}(\vec{p}_3,s_3)\chi^\dagger_{t_3}\Gamma\chi_{t_4} u(\vec{p}_4,s_4) \quad B^\dagger_1 B^\dagger_3 B_2 B_4 \\
& \quad + \; \bar{v}(\vec{p}_1,s_1)\chi^\dagger_{t_1}\Gamma\chi_{t_2} v(\vec{p}_2,s_2) \bar{v}(\vec{p}_3,s_3)\chi^\dagger_{t_3}\Gamma\chi_{t_4} v(\vec{p}_4,s_4) \quad D^\dagger_2 D^\dagger_4 D_1 D_3 \;)\delta_{\vec{p}_1+\vec{p}_3,\vec{p}_2+\vec{p}_4} \\
& + (\; \bar{u}(\vec{p}_1,s_1)\chi^\dagger_{t_1}\Gamma\chi_{t_2} v(\vec{p}_2,s_2) \bar{u}(\vec{p}_3,s_3)\chi^\dagger_{t_3}\Gamma\chi_{t_4} v(\vec{p}_4,s_4) \quad B^\dagger_1 D^\dagger_2 B^\dagger_3 D^\dagger_4 \\
& \quad + \; \bar{v}(\vec{p}_4,s_4)\chi^\dagger_{t_4}\Gamma\chi_{t_3} u(\vec{p}_3,s_3) \bar{v}(\vec{p}_2,s_2)\chi^\dagger_{t_2}\Gamma\chi_{t_1} u(\vec{p}_1,s_1) \quad D_4 B_3 D_2 B_1 \;)\delta_{\vec{p}_1+\vec{p}_3,-\vec{p}_2-\vec{p}_4} \\
& +2(\; \bar{u}(\vec{p}_1,s_1)\chi^\dagger_{t_1}\Gamma\chi_{t_2} u(\vec{p}_2,s_2) \bar{u}(\vec{p}_3,s_3)\chi^\dagger_{t_3}\Gamma\chi_{t_4} v(\vec{p}_4,s_4) \quad B^\dagger_1 B^\dagger_3 D^\dagger_4 B_2 \\
& \quad + \; \bar{v}(\vec{p}_4,s_4)\chi^\dagger_{t_4}\Gamma\chi_{t_3} u(\vec{p}_3,s_3) \bar{u}(\vec{p}_2,s_2)\chi^\dagger_{t_2}\Gamma\chi_{t_1} u(\vec{p}_1,s_1) \quad B^\dagger_2 D_4 B_3 B_1 \;)\delta_{\vec{p}_1+\vec{p}_3+\vec{p}_4,\vec{p}_2} \\
& +2(\; \bar{u}(\vec{p}_1,s_1)\chi^\dagger_{t_1}\Gamma\chi_{t_2} v(\vec{p}_2,s_2) \bar{v}(\vec{p}_3,s_3)\chi^\dagger_{t_3}\Gamma\chi_{t_4} v(\vec{p}_4,s_4) \quad B^\dagger_1 D^\dagger_4 D^\dagger_2 D_3 \\
& \quad + \; \bar{v}(\vec{p}_4,s_4)\chi^\dagger_{t_4}\Gamma\chi_{t_3} v(\vec{p}_3,s_3) \bar{v}(\vec{p}_2,s_2)\chi^\dagger_{t_2}\Gamma\chi_{t_1} u(\vec{p}_1,s_1) \quad D^\dagger_3 D_2 D_4 B_1 \;)\delta_{\vec{p}_1+\vec{p}_2+\vec{p}_4,\vec{p}_3} \\
& +2(\; \bar{u}(\vec{p}_1,s_1)\chi^\dagger_{t_1}\Gamma\chi_{t_2} v(\vec{p}_2,s_2) \bar{v}(\vec{p}_3,s_3)\chi^\dagger_{t_3}\Gamma\chi_{t_4} u(\vec{p}_4,s_4) \\
& \quad - \; \bar{u}(\vec{p}_1,s_1)\chi^\dagger_{t_1}\Gamma\chi_{t_4} u(\vec{p}_4,s_4) \bar{v}(\vec{p}_3,s_3)\chi^\dagger_{t_3}\Gamma\chi_{t_2} v(\vec{p}_2,s_2) \;) B^\dagger_1 D^\dagger_2 D_3 B_4 \; \delta_{\vec{p}_1+\vec{p}_2,\vec{p}_3+\vec{p}_4} \Big\} ,
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

wobei für die Indizes an den Operatoren eine abgekürzte Schreibweise eingefürt wurde: $B_1 \hat{=} B_{\vec{p}_1,s_1,c_1,t_1}$. Für die anderen Operatoren gilt das in analoger Weise.
Die (divergente) Grundzustandsenergie ist schon abgezogen, d. h. es gilt jetzt für den Erwartungswert des Hamilton-Operators im Grundzustand

$$\langle \mathrm{HF}|\mathrm{H}|\mathrm{HF}\rangle = 0 \; .$$

Der Einteilchenanteil des Hamilton-Operators ist diagonal, wie es auch nach Anwendung des Hartree-Fock Verfahrens zu erwarten war. Der HF-Grundzustand ist allerdings kein Eigenzustand des Hamilton-Operators, der Term mit vier Erzeugern im Wechselwirkungsanteil verhindert das.

2.2 Die Herleitung der RPA-Gleichungen

In diesem Abschnitt sollen die RPA-Gleichungen im Bewegungsgleichungs-Formalismus („Equation of motion method"[25]) hergeleitet werden. Dazu nimmt man an, man kenne die Eigenzustände des Hamilton-Operators, also den Grundzustand $|0\rangle$ und die angeregten Zustände $|\nu\rangle$ mit den zugehörigen Anregungsoperatoren $\mathrm{Q}^\dagger_\nu$, die, angewendet auf den Grundzustand $|0\rangle$, die angeregten Zustände mit den entsprechenden Quantenzahlen $\{\nu\}$ ergeben:

$$\mathrm{Q}^\dagger_\nu|0\rangle = |\nu\rangle \ , \tag{2.20}$$

mit

$$\mathrm{Q}_\nu|0\rangle = 0 \ . \tag{2.21}$$

Die Eigenzustände $|\nu\rangle$ sind die stationären Punkte des Funktionals

$$\mathrm{E}_\nu = \frac{\langle\nu|\mathrm{H}|\nu\rangle}{\langle\nu|\nu\rangle} \ . \tag{2.22}$$

Man beachte, daß wegen Gleichung (2.21) die angeregten Zustände immer orthogonal auf dem Grundzustand stehen. Deswegen läßt sich Gleichung (2.22) in einer äquivalenten Form schreiben:

$$\mathrm{E}_\nu = \frac{\langle 0|\mathrm{Q}_\nu[\mathrm{H},\mathrm{Q}^\dagger_\nu]|0\rangle}{\langle 0|[\mathrm{Q}_\nu,\mathrm{Q}^\dagger_\nu]|0\rangle} + \frac{\langle 0|[\mathrm{Q}_\nu,\mathrm{Q}^\dagger_\nu]\mathrm{H}|0\rangle}{\langle 0|[\mathrm{Q}_\nu,\mathrm{Q}^\dagger_\nu]|0\rangle} \ . \tag{2.23}$$

Die eckigen Klammern bezeichnen hier Kommutatoren. Wenn wir dies jetzt bzgl. Q_ν variieren erhalten wir:

$$\mathrm{E}_\nu\langle 0|[\delta\mathrm{Q},\mathrm{Q}^\dagger_\nu]|0\rangle - \langle 0|[\delta\mathrm{Q},\mathrm{Q}^\dagger_\nu]\mathrm{H}|0\rangle = \langle 0|\delta\mathrm{Q},[\mathrm{H},\mathrm{Q}^\dagger_\nu]|0\rangle \ . \tag{2.24}$$

Dies läßt sich mit

$$\mathrm{H}|0\rangle = \mathrm{E}_0|0\rangle \tag{2.25}$$

und mit Hilfe von Gleichung (2.21) auf die wohlbekannte Form ([21, 25, 26])

$$\langle 0|[\delta\mathrm{Q},[\mathrm{H},\mathrm{Q}^\dagger_\nu]]|0\rangle = \Omega_\nu\langle 0|[\delta\mathrm{Q},\mathrm{Q}^\dagger_\nu]|0\rangle \tag{2.26}$$

bringen. Ω_ν bezeichnet hier die Differenz von E_ν zur Grundzustandsenergie: $\Omega_\nu = \mathrm{E}_\nu - \mathrm{E}_0$. Man beachte, daß eine im Grundzustand gebrochene Symmetrie der Lagrangedichte hier auf einen sogenannten „spuriosen" Zustand führt, d. h. einen Zustand mit Energie $\Omega_\nu = 0$. Wie in Kapitel 1 schon erwähnt, führt eine Symmetrie der Lagrangedichte über das Noether-Theorem zu einem erhaltenen Strom j^μ. Der Operator der erhaltenen Ladung

$$\mathrm{Q} = \int d^3x j^0(x) \ ,$$

vertauscht mit dem Hamilton-Operator, d. h.

$$[\mathrm{H},\mathrm{Q}] = 0 \ .$$

Ist die Symmetrie nun aber im Grundzustand gebrochen, dann gilt (siehe z. B. [27])

$$\mathrm{Q}|0\rangle \neq 0 \ . \tag{2.27}$$

Beachtet man die Äquivalenz der Bewegungsgleichungen (2.26) zu

$$[\mathrm{H}, \mathrm{Q}_\nu^\dagger]|0\rangle = \Omega_\nu \mathrm{Q}_\nu^\dagger|0\rangle \ , \tag{2.28}$$

dann ist klar, daß ein Zustand, der durch den Symmetrieoperator aus dem Vakuum angeregt wird, die Energie $\Omega_\nu = 0$ haben muß.
Bis jetzt wurde noch keine Annahme über die Form der Anregungsoperatoren $\mathrm{Q}_\nu^\dagger$ gemacht. Diese sind in ihrer exakten Form komplizierte Vielteilchenoperatoren. Die Gleichungen (2.26) wird man im Normalfall nicht exakt lösen können, deswegen wird man zu einer Näherung gezwungen sein. Dazu entwickelt man die Anregungsoperatoren $\mathrm{Q}_\nu^\dagger$ nach Einteilchenoperatoren, Zweiteilchenoperatoren, usw., bricht diese Entwicklung irgendwann ab, und schränkt sich so auf einen Teilraum ein. Die Variationen $\delta\mathrm{Q}$ werden dabei immer aus dem gleichen Raum gewählt wie die Anregungsoperatoren $\mathrm{Q}_\nu^\dagger$. Obwohl die Herleitung der Bewegungsgleichungen (2.26) einige Annahmen enthält, die für Näherungen im allgemeinen nicht gelten, wie z. B. die Relation (2.25), geht man bei Näherungen immer von den Bewegungsgleichungen (2.26) aus.
Die Näherung im Rahmen der RPA besteht nun darin, daß man sich auf Einteilchenoperatoren beschränkt. Man spricht dabei in der Kernphysik häufig davon, daß man sich auf 1-Teilchen-1-Loch-Anregungen beschränkt. Den RPA-Grundzustand $|\mathrm{RPA}\rangle$, eine Näherung des exakten Grundzustandes $|0\rangle$, definiert man analog zu Gleichung (2.21)

$$\mathrm{Q}_\nu|\mathrm{RPA}\rangle = 0 \ . \tag{2.29}$$

Die Zustände, die durch die Anregungsoperatoren aus den Grundzustand angeregt werden, spannen jetzt aber nicht mehr den vollen Hilbert-Raum auf, sondern nur den durch 1-Teilchen-1-Loch-Anregungen aufgespannten Unterraum. In unserem Fall des NJL-Modells entsprechen die 1-Teilchen-1-Loch-Anregungen Quark-Antiquark-Anregungen.
Eine häufig gebrauchte Näherung in der RPA ist die sogenannte „Quasi-Boson-Approximation", bei der man den RPA-Grundzustand $|\mathrm{RPA}\rangle$ in den Bewegungsgleichungen durch den Hartree-Fock-Grundzustand $|\mathrm{HF}\rangle$ ersetzt. Mit dieser Näherung werden wir uns im nächsten Abschnitt begnügen, wenn wir uns mit der RPA im NJL-Modell beschäftigen. In dieser Näherung erhält man die RPA-Gleichungen mit den entsprechenden Anregungsoperatoren:

$$\langle\mathrm{HF}|[\delta\mathrm{Q}, [\mathrm{H}, \mathrm{Q}_\nu^\dagger]]|\mathrm{HF}\rangle = \Omega_\nu \langle\mathrm{HF}|[\delta\mathrm{Q}, \mathrm{Q}_\nu^\dagger]|\mathrm{HF}\rangle \ . \tag{2.30}$$

Eine Näherung für den Grundzustand, sollte, sofern die Symmetrie in dieser Näherung gebrochen ist, an der Existenz der spuriosen Lösung nichts ändern. Man beachte, daß nur ein Ansatz für die Anregungsoperatoren $\mathrm{Q}_\nu^\dagger$, der auch den vollen Symmetrieoperator enthält, die Existenz der spuriosen Lösung sicherstellt, falls es in diesem Raum ein $\delta\mathrm{Q}$ gibt, so daß $\langle[\delta\mathrm{Q}, \mathrm{Q}_\nu^\dagger]\rangle \neq 0$ gilt, denn die Äquivalenz der Bewegungsgleichungen (2.26) zu den Gleichungen (2.28) ist im allgemeinen nicht gegeben, wenn man für den Grundzustand eine Näherung einsetzt. Diese Überlegung wird uns im nächsten Abschnitt zu einem Ansatz für die Anregungsoperatoren für die RPA im NJL-Modell führen.

2.3 Das Nambu-Jona-Lasinio-Modell in RPA

Im Abschnitt 2.1 sahen wir, daß die Quarks im HF-Grundzustand eine endliche Masse bekommen. Das führt dazu, daß die $SU_A(2)$-Symmetrie im HF-Grundzustand gebrochen ist (s. [14]). Daraus folgt, daß der Symmetrieoperator

$$\vec{\mathrm{Q}}_5 = \int d^3x \bar{\psi}(x)\gamma^0\gamma^5\vec{\tau}\psi(x) \; , \tag{2.31}$$

angewendet auf den Grundzustand, nicht null ergibt.

$$[H, \vec{\mathrm{Q}}_5] = 0, \quad \text{aber} \quad \vec{\mathrm{Q}}_5|\mathrm{HF}\rangle \neq 0 \; . \tag{2.32}$$

In der in Abschnitt 2.1 eingeführten Basis (Gl. 2.18) hat der Symmetrieoperator folgende Form:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathrm{Q}}_5 &= \int d^3x \sum_{s_1,s_2}\sum_{t_1,t_2}\sum_{c_1,c_2}\sum_{\vec{p}_1,\vec{p}_2} \frac{1}{V}\sqrt{\frac{m^2}{E_1E_2}}\delta_{c1,c2} \; \Big\{ B_1^\dagger B_2 \; \bar{u}_1\gamma^0\gamma^5 u_2 \; \chi_1^\dagger\vec{\tau}\chi_2 \; e^{-i(\vec{p}_1-\vec{p}_2)\vec{x}} \\
&\qquad + B_1^\dagger D_2^\dagger \; \bar{u}_1\gamma^0\gamma^5 v_2 \; \chi_1^\dagger\vec{\tau}\chi_2 \; e^{-i(\vec{p}_1+\vec{p}_2)\vec{x}} \\
&\qquad + D_1 B_2 \; \bar{v}_1\gamma^0\gamma^5 u_2 \; \chi_1^\dagger\vec{\tau}\chi_2 \; e^{i(\vec{p}_1+\vec{p}_2)\vec{x}} \\
&\qquad + D_1 D_2^\dagger \; \bar{v}_1\gamma^0\gamma^5 v_2 \; \chi_1^\dagger\vec{\tau}\chi_2 \; e^{i(\vec{p}_1-\vec{p}_2)\vec{x}} \Big\} \\
&= \sum_s\sum_c\sum_{\vec{p}} \frac{1}{V} \; \Big(\tfrac{|\vec{p}|}{E_p} s (B^\dagger_{\vec{p},s,t_1,c} B_{\vec{p},s,t_2,c} + D^\dagger_{\vec{p},s,t_2,c} D_{\vec{p},s,t_1,c}) \\
&\qquad - (B^\dagger_{\vec{p},s,t_1,c} D^\dagger_{-\vec{p},s,t_2,c} + D_{-\vec{p},s,t_1,c} B_{\vec{p},s,t_2,c}) \Big) \vec{\mathrm{T}}_{12} \; .
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Die vollen Argumente sind hier unterdrückt. B_1 bedeutet $B_{\vec{p}_1,s_1,t_1,c_1}$, χ_1 bedeutet χ_{t_1}, und u_1 heißt $u(\vec{p}_1, s_1)$. Außerdem wurde $\vec{\mathrm{T}}_{12}$ definiert:

$$\vec{\mathrm{T}}_{12} = \begin{pmatrix} \delta_{t_1,-t_2} \\ (-it_1)\delta_{t_1,-t_2} \\ t_1\delta_{t_1,t_2} \end{pmatrix} . \tag{2.34}$$

Die Struktur des Symmetrioperators legt für die Anregungsoperatoren folgenden Ansatz nahe, damit der Symmetrieoperator in dem von den $\mathrm{Q}_\nu^\dagger$ aufgespannten Raum enthalten ist:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}_\nu^\dagger = \sum_{m1,m2} \; &\Big\{ (X^\nu_{m1m2} B^\dagger_{m1} D^\dagger_{m2} - Y^\nu_{m1m2} D_{m2} B_{m1}) \delta_{\vec{p}_{m1},-\vec{p}_{m2}} \\
&+ (P^\nu_{m1m2} B^\dagger_{m1} B_{m2} - Q^\nu_{m1m2} D^\dagger_{m2} D_{m1}) \delta_{\vec{p}_{m1},\vec{p}_{m2}} \Big\} \; .
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Die Indizes $m1, m2$ sollen hier alle Quantenzahlen enthalten, d. h. $m1 \hat{=} \{\vec{p}_{m1}, s_{m1}, t_{m1}, c_{m1}\}$. Die beiden Impuls-Kronecker-Deltas sorgen dafür, daß man sich im Schwerpunktsystem des erzeugten Quark-Antiquark-Paares befindet. Das werden wir in Zukunft voraussetzen und die Kronecker-Deltas nicht mehr explizit aufführen. In der Literatur tauchen üblicherweise nur die ersten beiden Terme auf [21, 26] . Wir werden sehen, daß man sich, solange man nur RPA bei Temperatur Null betreibt, auf die ersten beiden Terme beschränken kann, ohne die Symmetrie zu zerstören. Dazu betrachten wir die Gleichung (2.30). Diese läßt sich mit dem Ansatz (2.35) für $\mathrm{Q}_\nu^\dagger$ in eine Matrixgleichung umformen:

$$\begin{pmatrix} A^{(2)} & -B^{(2)} & H^{(2)} & -J^{(2)} \\ B^{(2)*} & -A^{(2)*} & \tilde{H}^{(2)} & -\tilde{J}^{(2)} \\ C^{(2)} & -\tilde{C}^{(2)} & E^{(2)} & -\tilde{G}^{(2)} \\ D^{(2)} & -\tilde{D}^{(2)} & G^{(2)} & -F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \\ P^\nu \\ Q^\nu \end{pmatrix} = \Omega_\nu \begin{pmatrix} \langle\mathrm{HF}|[D_{i2}B_{i1}, \mathrm{Q}_\nu^\dagger]|\mathrm{HF}\rangle \\ \langle\mathrm{HF}|[B^\dagger_{i1}D^\dagger_{i2}, \mathrm{Q}_\nu^\dagger]|\mathrm{HF}\rangle \\ \langle\mathrm{HF}|[B^\dagger_{i2}B_{i1}, \mathrm{Q}_\nu^\dagger]|\mathrm{HF}\rangle \\ \langle\mathrm{HF}|[D^\dagger_{i1}D_{i2}, \mathrm{Q}_\nu^\dagger]|\mathrm{HF}\rangle \end{pmatrix} , \tag{2.36}$$

mit den üblichen RPA-Matrixelementen

$$\begin{aligned}
A_{im}^{(2)} &= \langle \mathrm{HF}|[D_{i2}B_{i1},[\mathrm{H},B_{m1}^{\dagger}D_{m2}^{\dagger}]]|\mathrm{HF}\rangle = A_{mi}^{(2)*} \ , \\
B_{im}^{(2)} &= \langle \mathrm{HF}|[D_{i2}B_{i1},[\mathrm{H},D_{m2}B_{m1}]]|\mathrm{HF}\rangle = B_{mi}^{(2)} \ ,
\end{aligned}$$

und den zusätzlichen Matrixelementen

$$\begin{aligned}
C_{im}^{(2)} &= \langle \mathrm{HF}|[B_{i2}^{\dagger}B_{i1},[\mathrm{H},B_{m1}^{\dagger}D_{m2}^{\dagger}]]|\mathrm{HF}\rangle \ , \\
\tilde{C}_{im}^{(2)} &= \langle \mathrm{HF}|[B_{i2}^{\dagger}B_{i1},[\mathrm{H},D_{m2}B_{m1}]]|\mathrm{HF}\rangle \ , \\
D_{im}^{(2)} &= \langle \mathrm{HF}|[D_{i1}^{\dagger}D_{i2},[\mathrm{H},B_{m1}^{\dagger}D_{m2}^{\dagger}]]|\mathrm{HF}\rangle \ , \\
\tilde{D}_{im}^{(2)} &= \langle \mathrm{HF}|[D_{i1}^{\dagger}D_{i2},[\mathrm{H},D_{m2}B_{m1}]]|\mathrm{HF}\rangle \ , \\
E_{im}^{(2)} &= \langle \mathrm{HF}|[B_{i2}^{\dagger}B_{i1},[\mathrm{H},B_{m1}^{\dagger}B_{m2}]]|\mathrm{HF}\rangle \ , \\
F_{im}^{(2)} &= \langle \mathrm{HF}|[D_{i1}^{\dagger}D_{i2},[\mathrm{H},D_{m2}^{\dagger}D_{m1}]]|\mathrm{HF}\rangle \ , \\
G_{im}^{(2)} &= \langle \mathrm{HF}|[D_{i1}^{\dagger}D_{i2},[\mathrm{H},B_{m1}^{\dagger}B_{m2}]]|\mathrm{HF}\rangle \ , \\
\tilde{G}_{im}^{(2)} &= \langle \mathrm{HF}|[B_{i2}^{\dagger}B_{i1},[\mathrm{H},D_{m2}^{\dagger}D_{m1}]]|\mathrm{HF}\rangle \ , \\
H_{im}^{(2)} &= \langle \mathrm{HF}|[D_{i2}B_{i1},[\mathrm{H},B_{m1}^{\dagger}B_{m2}]]|\mathrm{HF}\rangle \ , \\
\tilde{H}_{im}^{(2)} &= \langle \mathrm{HF}|[B_{i1}^{\dagger}D_{i2}^{\dagger},[\mathrm{H},B_{m1}^{\dagger}B_{m2}]]|\mathrm{HF}\rangle \ , \\
J_{im}^{(2)} &= \langle \mathrm{HF}|[D_{i2}B_{i1},[\mathrm{H},D_{m2}^{\dagger}D_{m1}]]|\mathrm{HF}\rangle \ , \\
\tilde{J}_{im}^{(2)} &= \langle \mathrm{HF}|[B_{i1}^{\dagger}D_{i2}^{\dagger},[\mathrm{H},D_{m2}^{\dagger}D_{m1}]]|\mathrm{HF}\rangle \ .
\end{aligned}$$

Die Matrizen C bis J in Gleichung (2.36) verschwinden. Das ist kein spezifischer Effekt des NJL-Modells. Das Verschwinden der Matrizen C bis G folgt aus der Eigenschaft der Operatoren (Gl.2.4). Für die Matrizen H bis J folgt es aus der Diagonalstruktur des Einteilchenanteils des Hamilton-Operators (2.19). Die Zweiteilchenanteile des Hamilton-Operators tragen zu diesen Matrizen nicht bei, wie man sich anhand der normalgeordneten Struktur des Hamilton-Operators und der Anzahl an Erzeugungs– und Vernichtungsoperatoren für Teilchen bzw. Antiteilchen überlegen kann. In der Gleichung (2.36) verschwinden also bei Temperatur Null alle Matrixelemente außer den Elementen der Matrizen A und B. Die rechte Seite der Gleichung (2.36) läßt sich auch vereinfachen, und man erhält

$$\begin{pmatrix} A^{(2)} & -B^{(2)} & 0 & 0 \\ B^{(2)*} & -A^{(2)*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{\nu} \\ Y^{\nu} \\ P^{\nu} \\ Q^{\nu} \end{pmatrix} = \Omega_{\nu} \begin{pmatrix} X^{\nu} \\ Y^{\nu} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{2.37}$$

Alle Vektoren, die nur in den Komponenten P^{ν} und Q^{ν} nicht verschwinden, sind Lösungen dieser Gleichung mit beliebiger Energie Ω_{ν}. Für alle anderen Lösungen kann man die Amplituden P^{ν} und Q^{ν} beliebig wählen. Der Grund hierfür ist das Verschwinden der Matrixelemente C bis G und der rechten Seite für die Amplituden P^{ν} und Q^{ν}. Die Amplituden P^{ν} und Q^{ν} sind jedoch physikalisch irrelevant, weil sie zur Response-Funktion nichts beitragen, wie im nächsten Abschnitt noch etwas genauer erläutert werden wird,

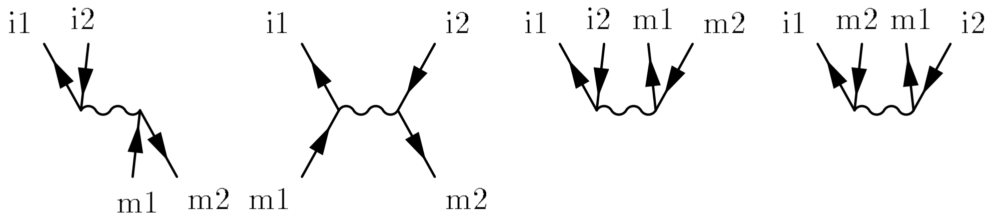


Abbildung 2.1: *Veranschaulichung der Wechselwirkungsanteile der Matrizen A und B. Von links nach rechts ist zu sehen: direkter Anteil von A_{im}, Austauschanteil von A_{im}, direkter Anteil von B_{im}, Austauschanteil von B_{im} .*

dewegen kann man sie auf null setzen.
Deshalb genügt es also in der RPA bei Temperatur Null völlig, mit einem eingeschränkten Ansatz für die Anregungsoperatoren

$$Q_\nu^\dagger = \sum_{m1,m2} (X^\nu_{m1m2} B^\dagger_{m1} D^\dagger_{m2} - Y^\nu_{m1m2} D_{m2} B_{m1}) \delta_{\vec{p}_{m1},-\vec{p}_{m2}} \tag{2.38}$$

das Eigenwertproblem

$$\begin{pmatrix} A^{(2)} & -B^{(2)} \\ B^{(2)*} & -A^{(2)*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix} = \Omega_\nu \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

zu lösen. Bei endlicher Temperatur verschwinden die Anteile aus dem von den letzten beiden Summanden in Gleichung (2.35) aufgespannten Raum nicht (siehe z. B. [28]), man muß dann den Ansatz (2.35) für die Anregungsoperatoren wählen.
Wir werden sehen, daß die spuriose Lösung im Fall des NJL-Modells die Quantenzahlen eines Pions hat, d. h. mit den Goldstone-Bosonen in Kapitel 1 übereinstimmt. Dazu berechnen wir als erstes die nichtverschwindenden Matrixelemente $A^{(2)}_{im}$ und $B^{(2)}_{im}$. Im Rahmen der RPA wird der obere Index 2 bei diesen Matrizen in Zukunft weggelassen, wenn wir in Kapitel 3 eine Erweiterung der RPA diskutieren, wird er dann wieder gebraucht.
Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} A_{im} &= 2E_m \delta_{i,m} - 2G \frac{m^2}{V E_i E_m} \delta_{c_{i1},c_{i2}} \delta_{c_{m1},c_{m2}} \sum_{\Gamma=1,i\gamma_5\vec{\tau}} \Big\{ \bar{u}_{i1} \chi^\dagger_{t_{i1}} \Gamma \chi_{t_{i2}} v_{i2} \; \bar{v}_{m2} \chi^\dagger_{t_{m2}} \Gamma \chi_{t_{m1}} u_{m1} \\ &\qquad - \bar{u}_{i1} \chi^\dagger_{t_{i1}} \Gamma \chi_{t_{m1}} u_{m1} \; \bar{v}_{m2} \chi^\dagger_{t_{m2}} \Gamma \chi_{t_{i2}} v_{i2} \Big\} \\ B_{im} &= 2G \frac{m^2}{V E_i E_m} \delta_{c_{i1},c_{i2}} \delta_{c_{m1},c_{m2}} \sum_{\Gamma=1,i\gamma_5\vec{\tau}} \Big\{ \bar{u}_{i1} \chi^\dagger_{t_{i1}} \Gamma \chi_{t_{i2}} v_{i2} \; \bar{u}_{m1} \chi^\dagger_{t_{m1}} \Gamma \chi_{t_{m2}} v_{m2} \\ &\qquad - \bar{u}_{i1} \chi^\dagger_{t_{i1}} \Gamma \chi_{t_{m2}} v_{m2} \; \bar{u}_{m1} \chi^\dagger_{t_{m1}} \Gamma \chi_{t_{i2}} v_{i2} \Big\} \; . \end{aligned} \tag{2.40}$$

$\delta_{i,m}$ bedeutet dabei $\delta_{i1,m1}\delta_{i2,m2}$.
Man beachte, daß der freie Anteil des Hamilton-Operators nur zur Matrix A beiträgt, er liefert den rein diagonalen Term $2E_m\delta_{im}$. In Abb. (2.1) ist eine anschauliche Darstellung der Wechselwirkungsanteile der Matrizen A und B zu sehen, die Schlangenlinie muß dabei auf einen Punkt zusammengezogen werden, sie ist nur zur Verdeutlichung des Unterschiedes zwischen dem direkten und dem Austauschterm eingeführt worden.
Der Einfachheit halber werden wir hier im folgenden nur direkte Terme betrachten, in Gleichung (2.40) sind das im Wechselwirkungsanteil jeweils die ersten. Dann erhält man:

$$
\begin{aligned}
A_{im} &= 2E_m\delta_{i,m} - \frac{2G}{VE_iE_m}\Big\{\delta_{t_{i1},t_{i2}}\delta_{t_{m1},t_{m2}}\delta_{c_{i1},c_{i2}}\delta_{c_{m1},c_{m2}}\vec{p}_{i1}\cdot\vec{\mathrm{S}}_{s_{i1},s_{i2}}\ \vec{p}_{m1}\cdot\vec{\mathrm{S}}_{s_{m2},s_{m1}} \\
&\quad +\delta_{s_{i1},s_{i2}}\delta_{s_{m1},s_{m2}}\delta_{c_{i1},c_{i2}}\delta_{c_{m1},c_{m2}}\vec{\mathrm{T}}_{t_{i1},t_{i2}}\cdot\vec{\mathrm{T}}_{t_{m2},t_{m1}}E_mE_i\Big\}\ , \\
B_{im} &= \frac{2G}{VE_iE_m}\Big\{\delta_{t_{i1},t_{i2}}\delta_{t_{m1},t_{m2}}\delta_{c_{i1},c_{i2}}\delta_{c_{m1},c_{m2}}\vec{p}_{i1}\cdot\vec{\mathrm{S}}_{s_{i1},s_{i2}}\ \vec{p}_{m1}\cdot\vec{\mathrm{S}}_{s_{m1},s_{m2}} \\
&\quad -\delta_{s_{i1},s_{i2}}\delta_{s_{m1},s_{m2}}\delta_{c_{i1},c_{i2}}\delta_{c_{m1},c_{m2}}\vec{\mathrm{T}}_{t_{i1},t_{i2}}\cdot\vec{\mathrm{T}}_{t_{m1},t_{m2}}E_mE_i\Big\}\ ,
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

mit der Definition

$$
\vec{\mathrm{S}}_{12} = \begin{pmatrix} \delta_{s_1,-s_2} \\ (-is_1)\delta_{s_1,-s_2} \\ s_1\delta_{s_1,s_2} \end{pmatrix}
\tag{2.42}
$$

für den Spin analog zur Definition (2.34) für den Isospin.

Im nächsten Abschnitt werden wir die RPA-Matrix (2.37) numerisch diagonalisieren, um dann die Response-Funktion in verschiedenen Kanälen mit festen Quantenzahlen auszurechnen. Man kann aber bereits mit relativ wenig Aufwand im chiralen Limes analytisch die Lösung mit Energie $\Omega_\nu = 0$ für das Pion und die Lösung mit Energie $\Omega_\nu = 2m$ für das Sigma zeigen. Um ein Teilchen mit den Quantenzahlen eines Pions oder Sigmas zu erhalten, werden wir als erstes eine Basistransformation auf den Gesamtisospin T und die z-Komponente T_3 des einlaufenden und auslaufenden Quark-Antiquark-Paares vornehmen. Die Indizes (im) sollen dabei im folgenden nur Impuls-, Farb- und Spinquantenzahlen enthalten. Zunächst transformieren wir die Vektoren X und Y in die neue Basis:

$$
\begin{aligned}
X^\nu_{i,T_i,T_{3i}} &= \sum_{t_{i1},t_{i2}} \Big(\langle\frac{1}{2}t_{i1}|\otimes\langle\frac{1}{2}t_{i2}|\Big)|T_iT_{3i}\rangle X^\nu_{i,t_{i1},t_{i2}}\ , \\
Y^\nu_{i,T_i,T_{3i}} &= \sum_{t_{i1},t_{i2}} \Big(\langle\frac{1}{2}t_{i1}|\otimes\langle\frac{1}{2}t_{i2}|\Big)|T_iT_{3i}\rangle Y^\nu_{i,t_{i1},t_{i2}}
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

und nun die Matrizen:

$$
\begin{aligned}
A_{iT_iT_{3i},mT_mT_{3m}} &= \sum_{\substack{t_{m1},t_{m2},\\ t_{i1},t_{i2}}} A_{it_{i1}t_{i2},mt_{m1},t_{m2}}\Big(\langle\frac{1}{2}t_{i1}|\otimes\langle\frac{1}{2}t_{i2}|\Big)|T_iT_{3i}\rangle\Big(\langle\frac{1}{2}t_{m1}|\otimes\langle\frac{1}{2}t_{m2}|\Big)|T_mT_{3m}\rangle\ , \\
B_{iT_iT_{3i},mT_mT_{3m}} &= \sum_{\substack{t_{m1},t_{m2},\\ t_{i1},t_{i2}}} B_{it_{i1}t_{i2},mt_{m1},t_{m2}}\Big(\langle\frac{1}{2}t_{i1}|\otimes\langle\frac{1}{2}t_{i2}|\Big)|T_iT_{3i}\rangle\Big(\langle\frac{1}{2}t_{m1}|\otimes\langle\frac{1}{2}t_{m2}|\Big)|T_mT_{3m}\rangle\ .
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

Wegen der Isospinerhaltung muß für die Matrizen

$$
\begin{aligned}
A_{iT_iT_{3i},mT_mT_{3m}} &= \delta_{T_i,T_m}\delta_{T_{3i},T_{3m}}A_{i,m}\ , \\
B_{iT_iT_{3i},mT_mT_{3m}} &= \delta_{T_i,T_m}\delta_{T_{3i},T_{3m}}A_{i,m}
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

gelten. Im Fall $T = T_3 = 0$ erhält man

$$
\begin{aligned}
A_{i,m} &= 2E_i\delta_{i,m} - \frac{2GN_f}{VE_iE_m}\vec{p}_{i1}\cdot\vec{\mathrm{S}}_{s_{i1},s_{i2}}\ \vec{p}_{m1}\cdot\vec{\mathrm{S}}_{s_{m2},s_{m1}}\delta_{c_{m1},c_{m2}}\delta_{c_{i1},c_{i2}}\ , \\
B_{i,m} &= -\frac{2GN_f}{VE_iE_m}(-\vec{p}_{i1}\cdot\vec{\mathrm{S}}_{s_{i1},s_{i2}})\ \vec{p}_{m1}\cdot\vec{\mathrm{S}}_{s_{m1},s_{m2}}\delta_{c_{m1},c_{m2}}\delta_{c_{i1},c_{i2}}\ ,
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

im Fall $T = 1, T_3 = 0$ gilt

$$
\begin{aligned}
A_{i,m} &= 2E_i\delta_{i,m} - \frac{2G}{V}N_f\delta_{s_{m1},s_{m2}}\delta_{s_{i1},s_{i2}}\delta_{c_{m1},c_{m2}}\delta_{c_{i1},c_{i2}}\ , \\
B_{i,m} &= -\frac{2G}{V}N_f\delta_{s_{m1},s_{m2}}\delta_{s_{i1},s_{i2}}\delta_{c_{m1},c_{m2}}\delta_{c_{i1},c_{i2}}\ .
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

Hier haben wir uns auf eine Einstellmöglichkeit für die z-Komponente des Isospins beschränkt, da die anderen Ergebnisse sich nicht davon unterscheiden.
Eine Projektion auf Farbsingulettzustände analog zur Projektion auf Gesamtisospin $T = 0$ oder $T = 1$ führt dazu, daß sich in den Matrizen statt des Faktors GN_f ein Faktor GN_cN_f ergibt.
Anhand der Parität und des Spins von Pion und Sigma kann man sich überlegen, welchen Gesamtspin die Quark-Antiquark-Paare haben müssen. Das Pion hat negative Parität, ein Quark-Antiquark-Paar hat negative innere Parität, d. h. Quark und Antiquark müssen geraden relativen Bahndrehimpuls haben, um ein Pion bilden zu können. Da das Pion ein pseudoskalares Teilchen ist, muß der Gesamtdrehimpuls von Quark und Antiquark verschwinden, d. h. also der Gesamtspin S muß ebenfalls verschwinden. Ähnliche Überlegungen für das Sigma führen auf einen Gesamtspin $S = 1$ für Quark und Antiquark in diesem Kanal. Eine Projektion der Matrizen auf Gesamtspin $S = 0$ bzw. $S = 1$ zeigt, daß in den beiden Isospinkanälen jeweils nur ein Gesamtspin enthalten ist: Der $T = 0$–Kanal hat nur einen $S = 1$–Anteil, der $T = 1$–Kanal nur einen $S = 0$–Anteil. Diese Projektion führt außerdem zu einem Faktor $2GN_cN_f$ statt GN_cN_f in den Matrizen. Wir können nun die Lösung der RPA-Gleichungen (2.30) in zwei Räumen durchführen, einem, der nur Teilchen mit den Quantenzahlen eines Sigmas enthält, und einem, der nur Teilchen mit den Quantenzahlen eines Pions enthält.
Wir werden uns zuerst mit dem Pion beschäftigen. Dazu betrachten wir die RPA-Gleichungen (2.30). Es ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
(\Omega_\nu - 2E_i)X^\nu(\vec{p}_{i1}) &= -4GN_cN_f\sum_{\vec{p}_{m1}}\frac{1}{V}\Big(X^\nu(\vec{p}_{m1}) - Y^\nu(\vec{p}_{m1})\Big)\ , \\
(\Omega_\nu + 2E_i)Y^\nu(\vec{p}_{i1}) &= -4GN_cN_f\sum_{\vec{p}_{m1}}\frac{1}{V}\Big(X^\nu(\vec{p}_{m1}) - Y^\nu(\vec{p}_{m1})\Big)\ .
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

Die vollständigen Amplituden X^ν und Y^ν erhält man aus den hier bestimmten, nur impulsabhängigen, durch Hinzufügen der Kronecker-Deltas für Gesamtspin, Gesamtisospin, deren z-Komponenten und das Farbsingulett. Auflösen nach den Amplituden führt auf

$$\begin{aligned} X^\nu(\vec{p}_{i1}) &= -\frac{4GN_cN_f}{\Omega_\nu - 2E_i}C_P \ , \\ Y^\nu(\vec{p}_{i1}) &= -\frac{4GN_cN_f}{\Omega_\nu + 2E_i}C_P \ , \end{aligned} \tag{2.49}$$

mit $C_P = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{V}\Big(X^\nu(\vec{p}) - Y^\nu(\vec{p})\Big)$. Setzt man die Amplituden in die Definition von C_P ein, dann ergibt sich

$$C_P = -4GN_cN_fC_P \sum_{\vec{p}} \frac{1}{V}\frac{4E}{\Omega_\nu^2 - 4E^2} \ . \tag{2.50}$$

Vergleicht man diese Gleichung nun mit der Gap-Gleichung (2.16), dann erkennt man, daß sie im Fall $\Omega_\nu = 0$ für beliebige C_P lösbar ist. Damit wäre also die Existenz eines masselosen π^0 gezeigt, für $\pi^\pm$ läuft der Beweis analog.
Die gleiche Vorgehensweise führt im Fall des Sigmas auf die zu Gleichung (2.50) analoge Gleichung:

$$C_S = -4GN_cN_fC_S \sum_{\vec{p}} \frac{1}{V}\frac{4\vec{p}^2}{E}\frac{1}{\Omega_\nu^2 - 4E^2} = -4GN_cN_fC_S \sum_{\vec{p}} \frac{1}{V}\frac{4\vec{p}^2}{E}\frac{1}{\Omega_\nu^2 - 4(m^2+\vec{p}^2)} \ . \tag{2.51}$$

Diese ist für $\Omega_\nu = 2m$ für beliebige C_S lösbar, womit auch die Existenz des Sigmas mit Masse $2m$ gezeigt wäre.
Die hier eingeführten Konstanten C_P und C_S lassen sich durch die Normierung bestimmen. Damit die angeregten Zustände $|\nu\rangle$ orthogonal aufeinander stehen, fordert man folgende Normierung:

$$\langle\mu|\nu\rangle = \langle \mathrm{HF}|[\mathrm{Q}_\mu, \mathrm{Q}_\nu^\dagger]|\mathrm{HF}\rangle = \delta_{\mu,\nu} \ . \tag{2.52}$$

Dies ist erfüllt, wenn für die Amplituden X^ν und Y^ν folgende Bedingung gilt:

$$\sum_m (X_m^{\mu^*}X_m^\nu - Y_m^{\mu^*}Y_m^\nu) = \delta_{\mu,\nu} \ . \tag{2.53}$$

Betrachtet man die Gleichung (2.49), dann sieht man, daß für die Lösung mit Energie $\Omega_\nu = 0$ die Amplituden X und Y betragsgleich sind, unabhängig von der Wahl von C_P. Die Normierung wird also auf unendliche Amplituden für die spuriose Lösung führen.

2.4 Response-Funktionen für Pion und Sigma

In diesem Abschnitt wollen wir die Response-Funktionen für Pion und Sigma in RPA-Näherung ausrechnen und so die Anregungsspektren des Systems Vakuum plus Pion bzw. Vakuum plus Sigma berechnen.

Als erstes werden wir die Definition der Response-Funktion betrachten. Dazu gehen wir aus von der relativistischen Definition des Propagators (s. [29])

$$G_{ij}(x_1 - x_2) = -i\langle 0|T(\varphi_i(x_1)\varphi_j^\dagger(x_2))|0\rangle, \tag{2.54}$$

der Operator T ist der Zeitordnungsoperator, die Felder φ sind das Pion- bzw. Sigma-Feld. Wegen der Periodizität der Feldoperatoren hängt der Propagator auch in einem endlichen Volumen nur von der Differenz $x_1 - x_2$ ab. Den Propagator im Impulsraum erhält man durch Fouriertransformation:

$$G_{ij}(\vec{p}, E) = \int d^3x dt e^{i(Et - \vec{p}\vec{x})} G_{ij}(\vec{x}, t) \ , \tag{2.55}$$

mit $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ und $t = t_1 - t_2$.
In einem System mit $\vec{p} = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} G_{ij}(0, E) &= \int d^3x dt e^{iEt} G_{ij}(t, \vec{x}) \\ &= \frac{1}{V} \int dt e^{iEt} \int d^3x_1 d^3x_2 G_{ij}(t, \vec{x}_1 - \vec{x}_2) \\ &= \frac{-i}{V} \int dt e^{iEt} \langle 0|T(\varphi_i(t)\varphi_j^\dagger(0))|0\rangle \ , \end{aligned} \tag{2.56}$$

mit

$$\varphi_i(t) = \int d^3x \varphi_i(t, \vec{x}).$$

Hierbei wurde o.B.d.A. $t_2 = 0$ gesetzt. Das ist bis auf Proportionalitätsfaktoren gleich der nichtrelativistischen Definition der Response-Funktion ([21, 26, 30])

$$R_{ij}(E) = \int dt e^{iEt} \langle 0|T(\varphi_i(t)\varphi_j^\dagger(0))|0\rangle. \tag{2.57}$$

Wenn wir also die Response-Funktionen für Pion und Sigma berechnen, bedeutet das nichts anderes, als daß wir (bis auf Proportionalitätskonstanten) den Propagator im Ruhesystem des Mesons berechnen.
Bereits in Kapitel 1 sahen wir, daß ein dreidimensionaler Cutoff Schwierigkeiten bereitet, wenn man nicht im Schwerpunktsystem des Quark-Antiquark-Paares arbeitet, die Benennung der Loop-Impulse war nicht mehr eindeutig, und die Existenz des Goldstone-Bosons ging verloren. Da sich die Einführung eines Pauli-Villars-Regularisierungsverfahrens in diesem Formalismus als sehr aufwendig gestalten würde, werden wir weiter nur mit Cutoff in einem System mit $\vec{p} = 0$ arbeiten.
In Spektraldarstellung läßt sich die Response-Funktion wie folgt schreiben ([21, 26, 30]):

$$\begin{aligned} R_{ij}(E) &= \sum_\nu \Big\{ \frac{\langle 0|\varphi_i(0)|\nu\rangle\langle\nu|\varphi_j^\dagger(0)|0\rangle}{E - \Omega_\nu + i\epsilon} - \frac{\langle 0|\varphi_j^\dagger(0)|\nu\rangle\langle\nu|\varphi_i(0)|0\rangle}{E + \Omega_\nu - i\epsilon} \Big\} \\ &= \sum_\nu \Big\{ \frac{\langle 0|[\varphi_i(0), \mathrm{Q}_\nu^\dagger]|0\rangle\langle 0|[\mathrm{Q}_\nu, \varphi_j^\dagger(0)]|0\rangle}{E - \Omega_\nu + i\epsilon} - \frac{\langle 0|[\varphi_j^\dagger(0), \mathrm{Q}_\nu^\dagger]|0\rangle\langle 0|[\mathrm{Q}_\nu, \varphi_i(0)]|0\rangle}{E + \Omega_\nu - i\epsilon} \Big\}. \end{aligned} \tag{2.58}$$

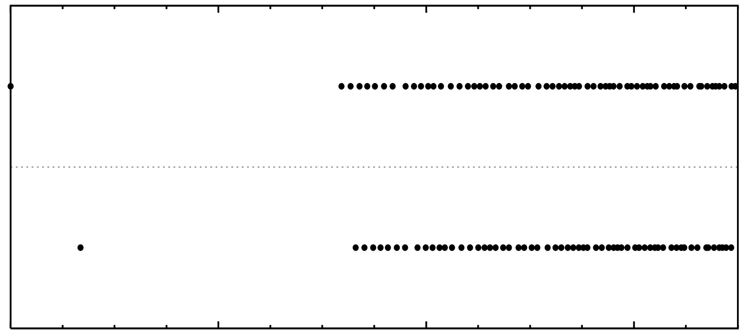


Abbildung 2.2: *Die Verteilung der Eigenwerte der RPA-Matrix im Pionkanal (in MeV) mit* Λ*=653 MeV,* $G\Lambda^2$*=2.14, L=16.9 fm. Das obere Bild zeigt die Verteilung im chiralen Limes, d. h. mit* $m_0 = 0$ *MeV und damit* $m = 318$ *MeV. Das untere Bild zeigt die Verteilung mit* $m_0 = 5$ *MeV und* $m = 332$ *MeV.*

Bis hierhin haben wir noch keinerlei Näherungen gemacht.
In der RPA gewinnt man die Energien Ω_ν und die Amplituden X^ν und Y^ν numerisch durch Lösen des Eigenwertproblems in Gleichung (2.39). Anhand der Eigenschaft der Operatoren (Gl. 2.4) läßt sich nun zeigen, daß in der Quasi-Boson-Approximation nur die Amplituden X^ν und Y^ν zur Response-Funktion beitragen können. Die Wahl der, in Gleichung (2.39) bereits vernachlässigten, Amplituden P^ν und Q^ν (s. Abschnitt 2.3) hat also keinen Einfluß auf physikalisch relevante Ergebnisse.
Um die Dimension der numerisch zu diagonalisierenden Matrix möglichst klein zu halten, nutzen wir die im vorigen Abschnitt erläuterte Projektion auf die unterschiedlichen Isospin-Kanäle, um die Matrix getrennt in den beiden Unterräumen mit Gesamtisospin $T = 0$ und $T = 1$ zu diagonalisieren. In unserem Fall sind die Matrizen A und B, nachdem man auf Gesamtisospin und Gesamtspin projiziert hat, reell. Das hat zur Folge, daß man das Problem auf die Diagonalisierung von zwei Matrizen der halben Dimension reduzieren kann (s. Anhang B.1). Die Dimension der Matrix ist bestimmt durch die Anzahl der Impulszustände, die man berücksichtigt. Diese werden festgelegt durch die Größe des betrachteten Volumens und einen Cutoff. Die Matrixelemente hängen in unserem Fall nur vom Betrag des Impulses ab, die daraus folgende Entartung läßt sich ausnutzen, um die Dimension der Matrix weiter zu reduzieren (s. Anhang B.2).
Zuerst werden wir das Pion betrachten. Der Pionoperator ist

$$\vec{\pi}(x) = N_\pi G \bar{\psi}(x) i\gamma_5 \vec{\tau} \psi(x) \ . \tag{2.59}$$

N_π ist dabei eine dimensionslose Normierungskonstante. Die Kopplungskonstante G wurde hier eingeführt, damit der Operator die richtige Dimension (Energie)$^{-2}$ bekommt, ohne daß man der Normierungskonstante eine Dimension geben müßte. Der bereits über den

Ort integrierte Operator sieht folgendermaßen aus:

$$\vec{\pi}(t=0) = \int d^3x \vec{\pi}(t=0,\vec{x}) = N_\pi G \sum_{s_1,s_2} \delta_{s_1,s_2} \sum_{t_1,t_2} \vec{T}_{t_1,t_2} \sum_{c_1,c_2} \delta_{c_1,c_2} \sum_{\vec{p}} \left(B_1^\dagger D_2^\dagger - D_1 B_2\right). \tag{2.60}$$

Für die Response-Funktion ergibt sich damit folgendes:

$$R_{ij}(E) = \delta_{ij}(N_\pi G)^2 (2N_c N_f)^2 \sum_\nu \Big| \sum_{\vec{p}} \frac{1}{V}(X^\nu(\vec{p}) - Y^\nu(\vec{p}))\Big|^2 \Big(\frac{1}{E-\Omega_\nu + i\epsilon} - \frac{1}{E+\Omega_\nu - i\epsilon}\Big). \tag{2.61}$$

Die Verteilung der Energien Ω_ν, d. h. der Eigenwerte der Matrix für Gesamtisospin $T=1$ und Gesamtspin $S=0$ im chiralen Limes ist in Abb. (2.2) zu sehen. Folgende Parameterwerte wurden dabei benutzt:

$$\Lambda = 653 \text{ MeV}; \quad G\Lambda^2 = 2.14; \quad L = 16.9 \text{ fm} . \tag{2.62}$$

Die Werte für den Cutoff Λ und die Kopplungskonstante $G\Lambda^2$ sind die gleichen wie im vorherigen Kapitel und wurden [16] entnommen. Mit dem hier gewählten Volumen L^3 ergibt sich für die Quarkmasse im chiralen Limes ein Wert von $m = 318$ MeV. Auf die Bestimmung der Normierungskonstante N_π soll hier verzichtet werden. Deswegen ist die Response-Funktion nur bis auf eine Konstante festgelegt.
Man erkennt die Lösung mit $\Omega_\nu = 0$ und weitere Lösungen ab der Zwei-Quark-Schwelle bei $2m$. Diese Zwei-Quark-Schwelle, ab der die Mesonen in ein Quark und ein Antiquark zerfallen können, ist unphysikalisch und kommt daher, daß es im NJL-Modell kein Confinement gibt. Im letzten Abschnitt haben wir die Lösung mit Energie $\Omega_\nu = 0$ im Pion-Kanal analytisch gezeigt. Die zugehörigen Amplituden X und Y lassen sich durch eine Wahl von C_P (s. Gl. 2.49) ebenfalls bestimmen. Unabhängig von der Wahl von C_P sind die beiden Amplituden betragsgleich mit unterschiedlichem Vorzeichen. Die Normierung (2.53) führt dann auf unendliche Amplituden X und Y für die spuriose Lösung, und unendliche Stärke bei $E = 0$.
Mit einer endlichen nackten Quarkmasse m_0 bekommt das Pion eine endliche Masse. In Abb. (2.3) ist das Quadrat des kleinsten Eigenwertes im Pion-Kanal in Abhängigkeit von der nackten Quarkmasse zu sehen. Man sieht, daß das Quadrat der Pionmasse näherungsweise proportional zur nackten Quarkmasse ist. In der Nähe des chiralen Limes sollte sich damit die Gell-Mann–Oakes–Renner Relation

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -m_0 \langle \bar{\psi}\psi \rangle \tag{2.63}$$

überprüfen lassen. Gleichung (2.63) läßt sich mit Hilfe der Gap-Gleichung (1.10), man erhält

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{m - m_0}{2G} , \tag{2.64}$$

nach der Pionzerfallskonstante f_π auflösen

$$f_\pi^2 = \frac{m_0}{m_\pi^2} \frac{m - m_0}{2G} . \tag{2.65}$$

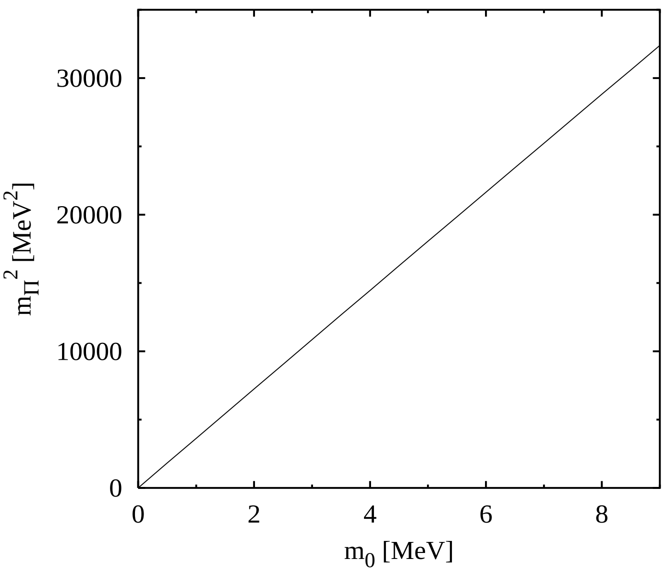


Abbildung 2.3: *Das Quadrat des kleinsten Eigenwertes der Matrix im Pion-Kanal in Abhängigkeit einer nackten Quarkmasse m_0 (in MeV) mit den Parameterwerten aus Gleichung (2.62).*

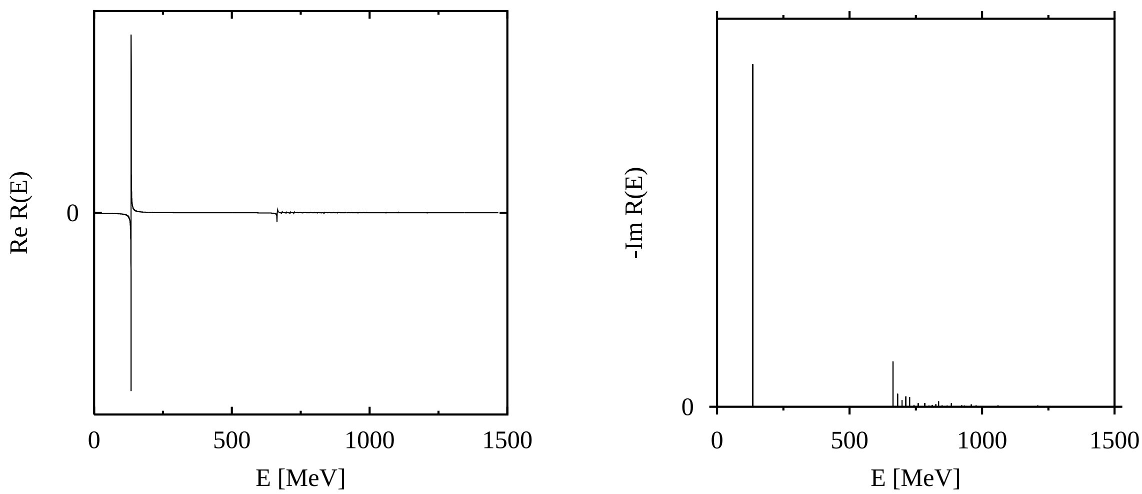


Abbildung 2.4: *Real- und Imaginärteil der Response-Funktion im Pion-Kanal in willkürlichen Einheiten mit $m_0 = 5$ MeV, auf dem linken Bild der Realteil, auf dem rechten der Imaginärteil multipliziert mit (-1). Die Parameterwerte aus Gleichung (2.62) wurden benutzt.*

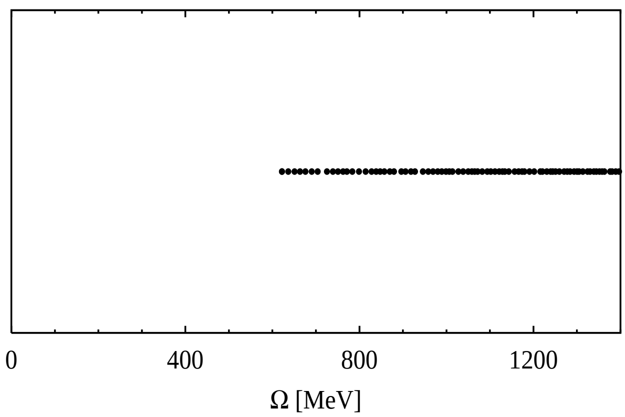


Abbildung 2.5: *Die Verteilung der Eigenwerte der RPA-Matrix im chiralen Limes im Sigmakanal (in MeV) mit Λ=653 MeV, $G\Lambda^2$=2.14, L=16.9 fm, m=318 MeV.*

Wir haben hier die gleichen Parameterwerte (s. Gl. 1.13 bzw. Gl. 2.62) wie im vorigen Kapitel benutzt. Diese wurden an die Pionzerfallskonstante f_π und das Quarkkondensat $\langle \bar{u}u \rangle$ angepaßt. Für die Pionzerfallskonstante wurde bei der Anpassung ein Wert von 93 MeV benutzt [16]. In der Nähe des chiralen Limes kann man diesen Wert aus Gleichung (2.65) mit den aus der Diagonalisierung der RPA-Matrix (2.39) bestimmten Werten für die Pionmasse recht gut reproduzieren. Bei $m_0 = 0.5$ MeV erhält man $f_\pi = 93.34$ MeV.
Die Response-Funktion im Pion-Kanal ist in Abb. (2.4) zu sehen, mit einer nackten Quarkmasse von 5 MeV. Die Quarkmasse m liegt dann mit den Parameterwerten aus Gleichung (2.62) bei $m = 332$ MeV. Das Pion bekommt eine Masse von 134 MeV, das zugehörige Maximum im Imaginärteil der Response-Funktion ist deutlich zu erkennen.
Einen Ansatz für den Sigmaoperator $\sigma(x)$ gewinnt man auf die gleiche Weise wie für den Pionoperator:

$$\sigma(x) = N_\sigma G \bar{\psi}(x)\psi(x), \tag{2.66}$$

mit der Normierungskonstante N_σ. Der über den Ort integrierte Operator sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \sigma(t=0) = \int d^3x \sigma(t=0,\vec{x}) \;&=\; N_\sigma G \sum_{t_1,t_2} \delta_{t_1,t_2} \sum_{s_1,s_2} \sum_{c_1,c_2} \delta_{c_1,c_2} \sum_{\vec{p}} \Big\{ \delta_{s_1,s_2} \frac{m}{E_p} \Big(B_1^\dagger B_2 + D_2^\dagger D_1 \Big) \\ &\quad - \frac{1}{E_p} \Big(B_1^\dagger D_2^\dagger \; \vec{p} \cdot \vec{\mathrm{S}}_{s_1,s_2} + D_1 B_2 \; \vec{p} \cdot \vec{\mathrm{S}}_{s_2,s_1} \Big) \Big\} \; . \end{aligned} \tag{2.67}$$

Für die Response-Funktion ergibt sich damit folgendes:

$$R(E) = (N_\sigma G)^2 (2N_c N_f)^2 \sum_\nu \Big| \sum_{\vec{p}} \frac{1}{V} \frac{|\vec{p}|}{E_p} (X^\nu(\vec{p}) + Y^\nu(\vec{p})) \Big|^2 \Big(\frac{1}{E - \Omega_\nu + i\epsilon} - \frac{1}{E + \Omega_\nu - i\epsilon} \Big). \tag{2.68}$$

Die Verteilung der Energien Ω_ν, d. h. der Eigenwerte der Matrix für Gesamtisospin $T = 0$ und Gesamtspin $S = 1$ im chiralen Limes ist in Abb. (2.5) zu sehen. Es wurden die gleichen

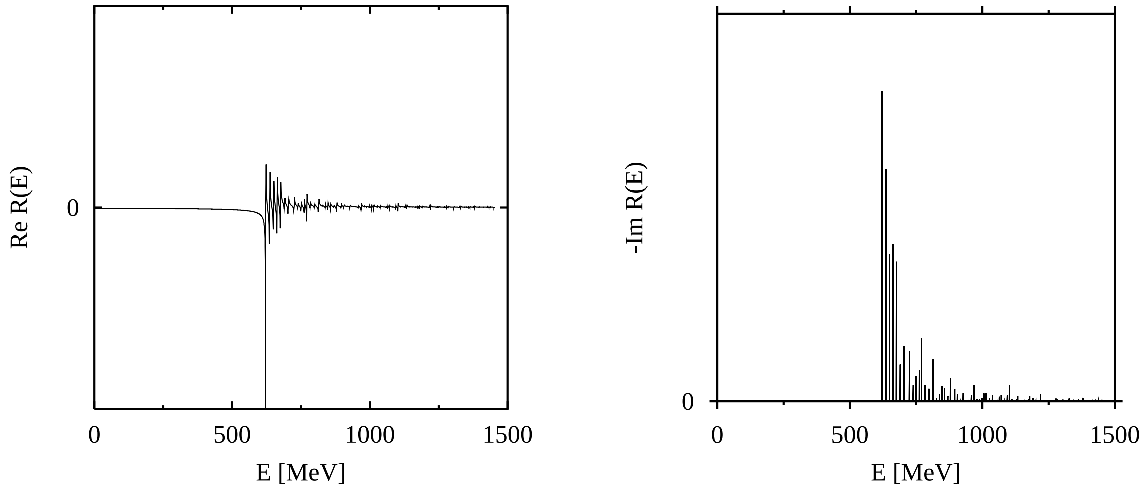


Abbildung 2.6: *Real- und Imaginärteil der Response-Funktion im Sigma-Kanal im chiralen Limes in willkürlichen Einheiten, auf dem linken Bild der Realteil, auf dem rechten der Imaginärteil, multipliziert mit* (-1) *für die Parameterwerte aus Gleichung (2.62).*

Parameterwerte benutzt wie für den Pionkanal (Gl. 2.62). Für N_σ gilt das gleiche wie für N_π, auf die Bestimmung soll hier ebenfalls verzichtet werden. Im Sigma-Kanal ergibt sich keine Lösung mit Energie $\Omega_\nu = 0$, erst ab der Zwei-Quark-Schwelle gibt es Lösungen. Das hängt damit zusammen, daß das Sigma im chiralen Limes die Masse $m_\sigma = 2m$ hat, und deswegen die niedrigste mögliche Anregungsenergie gerade bei der Zwei-Quark-Schwelle liegt. Der Real- und der Imaginärteil der Response-Funktion sind in Abb. (2.6) zu sehen. Auch hier hat der Imaginärteil sein Maximum bei der Masse des Teilchens, in diesem Fall also des Sigmas. Zum Realteil ist hier zu sagen, daß der Übersichtlichkeit halber der y-Achsen Bereich so gewählt wurde, daß der Wert an der Stelle $E \approx 2m$ über diesen Bereich hinausgeht.

Kapitel 3

Erweiterung der Random Phase Approximation (SRPA)

3.1 Ansatz für eine Erweiterung der RPA

Im Abschnitt 2.2 leiteten wir eine allgemeine Form der Bewegungsgleichungen (s. Gl. 2.26) her. Anschließend machten wir zwei Näherungen. Wir wählten unseren Ansatz für die Anregungsoperatoren $Q_\nu^\dagger$ so, daß er nur Einteilchenoperatoren enthielt, dieser Schritt führte uns auf die RPA. Als weitere Näherung führten wir die Quasi-Boson-Approximation ein, indem wir in den Bewegungsgleichungen den RPA-Grundzustand durch den HF-Grundzustand ersetzten (s. Gl. 2.30). Wir werden zunächst den Ansatz für die Anregungsoperatoren erweitern. Eine naheliegende Erweiterung besteht nun darin, ihn auf Zweiteilchenoperatoren auszudehnen. Der Ansatz

$$\begin{aligned} Q_\nu^\dagger &= \sum_m \left(X_m^{(1)\nu} B_{m1}^\dagger D_{m2}^\dagger - Y_m^{(1)\nu} D_{m2} B_{m1} \right) \\ &\quad + \sum_{m<j} \left(X_{mj}^{(2)\nu} B_{m1}^\dagger D_{m2}^\dagger B_{j1}^\dagger D_{j2}^\dagger - Y_{mj}^{(2)\nu} D_{j2} B_{j1} D_{m2} D_{m1} \right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

wird in der Literatur (siehe z. B. [20, 21, 31]) unter dem Namen „Second" RPA (SRPA) gebraucht. Dies ist die naheliegendste Erweiterung des eingeschränkten Ansatzes (2.38) für die Anregungsoperatoren in der RPA. Man erhält ihn einfach, indem man die einzelnen Anteile des Ansatzes (2.38) quadriert und zum RPA-Anteil addiert. So wie der eingeschränkte Ansatz in der RPA nur Teile des Raums der Einteilchenoperatoren enthält, enthält auch dieser Ansatz nur einen Teilraum des Raums der Ein– und Zweiteilchenoperatoren. Yannouleas [20] behauptet zwar, die SRPA in der obigen Form enthielte die spuriosen Lösungen, aber wir werden sehen, daß das nicht der Fall ist. Auch Adachi und Lipparini [31] bemerkten bereits, daß man mit diesem Ansatz Probleme mit den spuriosen Lösungen bekommt. In der SRPA muß es zwei verschiedene Arten von spuriosen Lösungen geben, die sogenannte einfach und die doppelt Lösung. Die einfache Lösung ist hierbei genau die gleiche, die wir auch schon in der RPA kennengelernt haben, ihre Existenz beruht darauf, daß der Symmetrieoperator mit dem Hamiltonoperator vertauscht. Das

Quadrat des Symmetrieoperators vertauscht ebenfalls mit dem Hamiltonoperator. Diese Tatsache führt zur sogenannten doppelten spuriosen Lösung. Beim Quadrat des Symmetrieoperators handelt es sich um einen Zweiteilchenoperator, so daß wir uns in der RPA noch keine Gedanken um die doppelt spuriose Lösung machen mußten. Physikalisch läßt sich die doppelt spuriose Lösung als zwei nichtwechselwirkende Pionen mit Energie Null interpretieren. Wir werden uns hier zuerst einmal nur mit der einfachen spuriosen Lösung befassen.
Wenn der volle Symmetrieoperator im Raum der Anregungsoperatoren liegt, dann ist nach den Überlegungen von Abschnitt 2.2 sichergestellt, daß die spuriose Lösung existiert. Im darauffolgenden Abschnitt 2.3 zeigten wir jedoch, daß im Rahmen der RPA der eingeschränkte Ansatz (2.38) im Fall von Temperatur Null vollkommen genügt. Wir werden sehen, daß man im Rahmen der SRPA den vollen Einteilchenraum mitnehmen muß, um die spuriose Lösung zu erhalten. Dazu machen wir für die Anregungsoperatoren nun folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}_\nu^\dagger &= \sum_m \left(X_m^{(1)\nu} B_{m1}^\dagger D_{m2}^\dagger - Y_m^{(1)\nu} D_{m2} B_{m1} + P_m^\nu B_{m1}^\dagger B_{m2} - Q_m^\nu D_{m2}^\dagger D_{m1} \right) \\ &\quad + \sum_{m<j} \left(X_{mj}^{(2)\nu} B_{m1}^\dagger D_{m2}^\dagger B_{j1}^\dagger D_{j2}^\dagger - Y_{mj}^{(2)\nu} D_{j2} B_{j1} D_{m2} D_{m1} \right) . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Damit erhalten wir analog zu Gleichung (2.36) eine Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} A^{(2)} & -B^{(2)} & 0 & 0 & A^{(3)} & -B^{(3)} \\ B^{(2)*} & -A^{(2)*} & 0 & 0 & B^{(3)*} & -A^{(3)*} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C^{(3)} & -\tilde{C}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D^{(3)} & \tilde{D}^{(3)} \\ \tilde{A}^{(3)} & -B^{(3)^T} & H^{(3)} & -J^{(3)} & A^{(4)} & -B^{(4)} \\ B^{(3)\dagger} & -\tilde{A}^{(3)*} & \tilde{H}^{(3)} & -\tilde{J}^{(3)} & B^{(4)*} & -A^{(4)*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(1)\nu} \\ Y^{(1)\nu} \\ P^\nu \\ Q^\nu \\ X^{(2)\nu} \\ Y^{(2)\nu} \end{pmatrix} = \Omega_\nu \begin{pmatrix} X^{(1)\nu} \\ Y^{(1)\nu} \\ 0 \\ 0 \\ X^{(2)\nu} \\ Y^{(2)\nu} \end{pmatrix} . \tag{3.3}$$

Neben den bereits aus der RPA bakannten Matrixelementen wurde hier

$$\begin{aligned} A_{i,mj}^{(3)} &= \langle \mathrm{HF} | [D_{i2} B_{i1}, [\mathrm{H}, B_{m1}^\dagger D_{m2}^\dagger B_{j1}^\dagger D_{j2}^\dagger]] | \mathrm{HF} \rangle , \\ \tilde{A}_{ik,m}^{(3)} &= \langle \mathrm{HF} | [D_{k2} B_{k1} D_{i2} B_{i1}, [\mathrm{H}, B_{m1}^\dagger D_{m2}^\dagger]] | \mathrm{HF} \rangle = A_{m,ik}^{(3)*} , \\ B_{i,mj}^{(3)} &= \langle \mathrm{HF} | [D_{i2} B_{i1}, [\mathrm{H}, D_{j2} B_{j1} D_{m2} B_{m1}]] | \mathrm{HF} \rangle , \\ C_{i,mj}^{(3)} &= \langle \mathrm{HF} | [B_{i2}^\dagger B_{i1}, [\mathrm{H}, B_{m1}^\dagger D_{m2}^\dagger B_{j1}^\dagger D_{j2}^\dagger]] | \mathrm{HF} \rangle , \\ \tilde{C}_{i,mj}^{(3)} &= \langle \mathrm{HF} | [B_{i2}^\dagger B_{i1}, [\mathrm{H}, D_{j2} B_{j1} D_{m2} B_{m1}]] | \mathrm{HF} \rangle , \\ D_{i,mj}^{(3)} &= \langle \mathrm{HF} | [D_{i1}^\dagger D_{i2}, [\mathrm{H}, B_{m1}^\dagger D_{m2}^\dagger B_{j1}^\dagger D_{j2}^\dagger]] | \mathrm{HF} \rangle , \\ \tilde{D}_{i,mj}^{(3)} &= \langle \mathrm{HF} | [D_{i1}^\dagger D_{i2}, [\mathrm{H}, D_{j2} B_{j1} D_{m2} B_{m1}]] | \mathrm{HF} \rangle , \\ H_{ik,m}^{(3)} &= \langle \mathrm{HF} | [D_{k2} B_{k1} D_{i2} B_{i1}, [\mathrm{H}, B_{m1}^\dagger B_{m2}]] | \mathrm{HF} \rangle , \\ \tilde{H}_{ik,m}^{(3)} &= \langle \mathrm{HF} | [B_{i1}^\dagger D_{i2}^\dagger B_{k1}^\dagger D_{k2}^\dagger, [\mathrm{H}, B_{m1}^\dagger B_{m2}]] | \mathrm{HF} \rangle , \\ J_{ik,m}^{(3)} &= \langle \mathrm{HF} | [D_{k2} B_{k1} D_{i2} B_{i1}, [\mathrm{H}, D_{m2}^\dagger D_{m1}]] | \mathrm{HF} \rangle , \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{J}^{(3)}_{ik,m} &= \langle \mathrm{HF}|[B^\dagger_{i1}D^\dagger_{i2}B^\dagger_{k1}D^\dagger_{k2},[\mathrm{H},D^\dagger_{m2}D_{m1}]]|\mathrm{HF}\rangle \ , \\
A^{(4)}_{ik,mj} &= \langle \mathrm{HF}|[D_{k2}B_{k1}D_{i2}B_{i1},[\mathrm{H},B^\dagger_{m1}D^\dagger_{m2}B^\dagger_{j1}D^\dagger_{j2}]]|\mathrm{HF}\rangle \ , \\
B^{(4)}_{ik,mj} &= \langle \mathrm{HF}|[D_{k2}B_{k1}D_{i2}B_{i1},[\mathrm{H},D_{j2}B_{j1}D_{m2}B_{m1}]]|\mathrm{HF}\rangle
\end{aligned}
$$

definiert. Die Elemente der Matrizen $B^{(3)}$ und $B^{(4)}$ verschwinden, wie man schon an der Anzahl der Vernichtungsoperatoren sehen kann. Die Elemente der Matrizen C bis D verschwinden hier genauso wie in der RPA aufgrund der Eigenschaft der Operatoren (s. Gl. 2.4) bei Temperatur Null. Im letzten Kapitel sahen wir, daß aufgrund der Diagonalstruktur des Einteilchenanteils im Hamilton-Operator (2.19) die Matrizen $H^{(2)}$, $\tilde{H}^{(2)}$, $J^{(2)}$ und $\tilde{J}^{(2)}$ verschwinden. Bei den Matrizen $H^{(3)}$, $\tilde{H}^{(3)}$, $J^{(3)}$ und $\tilde{J}^{(3)}$ kann man so nicht argumentieren, denn hier trägt auch der (nichtdiagonale) Zweiteilchenanteil des Hamiltonoperators bei, was dazu führt, daß diese Matrizen nicht verschwinden. Wir können nicht mit dem Ansatz (3.1) arbeiten, sondern müssen den Ansatz (3.2) benutzen, wenn wir die einfache spuriose Lösung erhalten wollen ohne in der Gap-Gleichung über das HF-Niveau hinauszugehen. Im folgenden werden wir im Zusammenhang mit SRPA immer vom Ansatz (3.2) für die Anregungsoperatoren sprechen.
Mit obigen Überlegungen erhalten wir aus Gleichung (3.3):

$$
\begin{pmatrix}
A^{(2)} & -B^{(2)} & 0 & 0 & A^{(3)} & 0 \\
B^{(2)*} & -A^{(2)*} & 0 & 0 & 0 & -A^{(3)*} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
A^{(3)\dagger} & 0 & H^{(3)} & -J^{(3)} & A^{(4)} & 0 \\
0 & -A^{(3)T} & \tilde{H}^{(3)} & -\tilde{J}^{(3)} & 0 & -A^{(4)*}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
X^{(1)\nu} \\ Y^{(1)\nu} \\ P^\nu \\ Q^\nu \\ X^{(2)\nu} \\ Y^{(2)\nu}
\end{pmatrix}
= \Omega_\nu
\begin{pmatrix}
X^{(1)\nu} \\ Y^{(1)\nu} \\ 0 \\ 0 \\ X^{(2)\nu} \\ Y^{(2)\nu}
\end{pmatrix} . \tag{3.4}
$$

Es handelt sich hierbei um ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem, da die mittleren beiden Blockgleichungen für beliebige Vektoren und beliebige Energien zu lösen sind. Es läßt sich auch zeigen, daß dieses Gleichungssystem allgemein für beliebige Energien lösbar ist. Das wäre allerdings nicht das physikalisch gewünschte Ergebnis von diskreten Anregungsenergien. In der RPA hatten wir ein ähnliches, ebenfalls unterbestimmtes, Gleichungssystem (s. Gl. 2.37). Dort konnten wir dann aber die physikalisch irrelevanten Amplituden P^ν und Q^ν einfach auf null setzen und erhielten so ein Eigenwertproblem. Hier werden die Amplituden P^ν und Q^ν aber benötigt, um die Existenz der spuriosen Lösung sicherzustellen. Um dieses Problem zu umgehen, werden wir die Erwartungswerte der Kommutatoren in den Bewegungsgleichungen erst einmal bei endlicher Temperatur berechnen.
Wir gehen also von der Form

$$
\langle\!\langle [\delta \mathrm{Q},[\mathrm{H},\mathrm{Q}^\dagger_\nu]] \rangle\!\rangle = \Omega_\nu \langle\!\langle [\delta \mathrm{Q},\mathrm{Q}^\dagger_\nu] \rangle\!\rangle \tag{3.5}
$$

der Bewegungsgleichungen aus. Den Erwartungswert bei endlicher Temperatur haben wir durch $\langle\!\langle \ldots \rangle\!\rangle$ abgekürzt. Für eine gerade Anzahl von normalgeordneten Fermion-Operatoren $a_1, \ldots, a_n$ gilt bei endlicher Temperatur das Wick-Theorem in folgender Form (siehe z. B. Fetter/Walecka [30]):

$$\langle\langle a_1 \dots a_n \rangle\rangle = n_1\Big(\{a_1, a_2\}\langle\langle a_3 \dots a_n\rangle\rangle - \{a_1, a_3\}\langle\langle a_2 a_4 \dots a_n\rangle\rangle + - + \{a_1, a_n\}\langle\langle a_2 \dots a_{n-1}\rangle\rangle\Big). \tag{3.6}$$

n_k bezeichnet dabei die Besetzungszahl des Einteilchenzustandes $|k\rangle$ für Fermionen bei vorgegebener Temperatur T:

$$n_k = \frac{1}{1 + e^{\frac{E_k}{T}}} \ . \tag{3.7}$$

Für die rechte Seite der Gleichungen (3.5) erhält man damit

$$\begin{aligned}
\langle\langle [D_{i2}B_{i1}, \mathrm{Q}_\nu^\dagger]\rangle\rangle &= (1 - n_{i1} - n_{i2})X_i^{(1)\nu} \ , \\
\langle\langle [B_{i1}^\dagger D_{i2}^\dagger, \mathrm{Q}_\nu^\dagger]\rangle\rangle &= (1 - n_{i1} - n_{i2})Y_i^{(1)\nu} \ , \\
\langle\langle [B_{i2}^\dagger B_{i1}, \mathrm{Q}_\nu^\dagger]\rangle\rangle &= (n_{i2} - n_{i1})P_i^{(1)\nu} \ , \\
\langle\langle [D_{i1}^\dagger D_{i2}, \mathrm{Q}_\nu^\dagger]\rangle\rangle &= (n_{i2} - n_{i1})Q_i^{(1)\nu} \ , \\
\langle\langle [D_{k2}B_{k1}D_{i2}B_{i1}, \mathrm{Q}_\nu^\dagger]\rangle\rangle &= \Big((1-n_{i1})(1-n_{i2})(1-n_{k1})(1-n_{k2}) - n_{k1}n_{k2}n_{i1}n_{i2}\Big)X_{ik}^{(2)\nu} \ , \\
\langle\langle [B_{i1}^\dagger D_{i2}^\dagger B_{k1}^\dagger D_{k2}^\dagger, \mathrm{Q}_\nu^\dagger]\rangle\rangle &= \Big((1-n_{i1})(1-n_{i2})(1-n_{k1})(1-n_{k2}) - n_{k1}n_{k2}n_{i1}n_{i2}\Big)Y_{ik}^{(2)\nu}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Genau wie im Ansatz für die Anregungsoperatoren (3.2) haben wir uns hier auf $i < k$ bei den Zweiteilchenamplituden $X^{(2)\nu}$ und $Y^{(2)\nu}$ beschränkt. Im Limes $T \to 0$ gehen die Besetzungszahlen n_k gegen null, d. h. der thermische Erwartungswert geht in den HF-Erwartungswert über. Betrachtet man Gleichung (3.8) in diesem Limes, dann sieht man, daß man wieder die rechte Seite der Gleichung (3.4) erhält, also den HF-Erwartungswert. Bis hierhin hat man also noch nichts gegenüber dem HF-Grundzustand gewonnen.

Die Matrixelemente auf der linken Seite der Gleichung (3.5) enthalten alle in den entsprechenden Zeilen die gleichen Vorfaktoren wie in Gleichung (3.8). Die Matrixelemente von

$$C_{i,mj}^{(3)} = \langle\langle [B_{i2}^\dagger B_{i1}, [\mathrm{H}, B_{m1}^\dagger D_{m2}^\dagger B_{j1}^\dagger D_{j2}^\dagger]]\rangle\rangle$$

sind z. B. proportional zu $n_{i2} - n_{i1}$. Dividiert man zuerst alle Zeilen durch den entsprechenden Vorfaktor und bildet dann erst den Limes $T \to 0$, erhält man

$$\begin{pmatrix}
A^{(2)} & -B^{(2)} & 0 & 0 & A^{(3)} & 0 \\
B^{(2)*} & -A^{(2)*} & 0 & 0 & 0 & -A^{(3)*} \\
C^{(2)} & -\tilde{C}^{(2)} & 0 & 0 & C^{(3)} & -\tilde{C}^{(3)} \\
D^{(2)} & -\tilde{D}^{(2)} & 0 & 0 & D^{(3)} & -\tilde{D}^{(3)} \\
A^{(3)\dagger} & 0 & C^{(3)\dagger} & -D^{(3)\dagger} & A^{(4)} & 0 \\
0 & -A^{(3)^T} & -\tilde{C}^{(3)\dagger} & \tilde{D}^{(3)\dagger} & 0 & -A^{(4)*}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} X^{(1)\nu} \\ Y^{(1)\nu} \\ P^\nu \\ Q^\nu \\ X^{(2)\nu} \\ Y^{(2)\nu} \end{pmatrix}
= \Omega_\nu \begin{pmatrix} X^{(1)\nu} \\ Y^{(1)\nu} \\ P^\nu \\ Q^\nu \\ X^{(2)\nu} \\ Y^{(2)\nu} \end{pmatrix} . \tag{3.9}$$

Alle Matrixelemente wurden hier analog zu Gleichung (3.3) bzw. Gleichung (2.36) definiert über den eben beschriebenen Umweg mit der endlichen Temperatur, es gilt:

$$A_{im}^{(2)} = \lim_{T\to 0} \langle\langle \frac{[D_{i2}B_{i1}, [\mathrm{H}, B_{m1}^\dagger D_{m2}^\dagger]]}{1 - n_{i1} - n_{i2}} \rangle\rangle \ ,$$

$$
\begin{aligned}
B^{(2)}_{im} &= \lim_{T\to 0}\langle\!\langle \frac{[D_{i2}B_{i1},[\mathrm{H},D_{m2}B_{m1}]]}{1-n_{i1}-n_{i2}}\rangle\!\rangle\ ,\\
C^{(2)}_{im} &= \lim_{T\to 0}\langle\!\langle \frac{[B^{\dagger}_{i2}B_{i1},[\mathrm{H},B^{\dagger}_{m1}D^{\dagger}_{m2}]]}{n_{i2}-n_{i1}}\rangle\!\rangle\ ,\\
\tilde{C}^{(2)}_{im} &= \lim_{T\to 0}\langle\!\langle \frac{[B^{\dagger}_{i2}B_{i1},[\mathrm{H},D_{m2}B_{m1}]]}{n_{i2}-n_{i1}}\rangle\!\rangle\ ,\\
D^{(2)}_{im} &= \lim_{T\to 0}\langle\!\langle \frac{[D^{\dagger}_{i1}D_{i2},[\mathrm{H},B^{\dagger}_{m1}D^{\dagger}_{m2}]]}{n_{i2}-n_{i1}}\rangle\!\rangle\ ,\\
\tilde{D}^{(2)}_{im} &= \lim_{T\to 0}\langle\!\langle \frac{[D^{\dagger}_{i1}D_{i2},[\mathrm{H},D_{m2}B_{m1}]]}{n_{i2}-n_{i1}}\rangle\!\rangle\ ,\\
A^{(3)}_{i,mj} &= \lim_{T\to 0}\langle\!\langle \frac{[D_{i2}B_{i1},[\mathrm{H},B^{\dagger}_{m1}D^{\dagger}_{m2}B^{\dagger}_{j1}D^{\dagger}_{j2}]]}{1-n_{i1}-n_{i2}}\rangle\!\rangle\ ,\\
C^{(3)}_{i,mj} &= \lim_{T\to 0}\langle\!\langle \frac{[B^{\dagger}_{i2}B_{i1},[\mathrm{H},B^{\dagger}_{m1}D^{\dagger}_{m2}B^{\dagger}_{j1}D^{\dagger}_{j2}]]}{n_{i2}-n_{i1}}\rangle\!\rangle\ ,\\
\tilde{C}^{(3)}_{i,mj} &= \lim_{T\to 0}\langle\!\langle \frac{[B^{\dagger}_{i2}B_{i1},[\mathrm{H},D_{j2}B_{j1}D_{m2}B_{m1}]]}{n_{i2}-n_{i1}}\rangle\!\rangle\ ,\\
D^{(3)}_{i,mj} &= \lim_{T\to 0}\langle\!\langle \frac{[D^{\dagger}_{i1}D_{i2},[\mathrm{H},B^{\dagger}_{m1}D^{\dagger}_{m2}B^{\dagger}_{j1}D^{\dagger}_{j2}]]}{n_{i2}-n_{i1}}\rangle\!\rangle\ ,\\
\tilde{D}^{(3)}_{i,mj} &= \lim_{T\to 0}\langle\!\langle \frac{[D^{\dagger}_{i1}D_{i2},[\mathrm{H},D_{j2}B_{j1}D_{m2}B_{m1}]]}{n_{i2}-n_{i1}}\rangle\!\rangle\ ,\\
A^{(4)}_{ik,mj} &= \lim_{T\to 0}\langle\!\langle \frac{[D_{k2}B_{k1}D_{i2}B_{i1},[\mathrm{H},B^{\dagger}_{m1}D^{\dagger}_{m2}B^{\dagger}_{j1}D^{\dagger}_{j2}]]}{(1-n_{i1})(1-n_{i2})(1-n_{k1})(1-n_{k2})-n_{i1}n_{i2}n_{k1}n_{k2}}\rangle\!\rangle\ .
\end{aligned}
$$

Die üblichen SRPA-Matrixelemente A und B sind mit diesem Verfahren gleich den bei Temperatur Null berechneten Matrixelementen im HF-Grundzustand. Mit diesem Verfahren haben wir also wie in der RPA ein Eigenwertproblem erhalten, dessen Lösung uns die Energien Ω_ν und die dazugehörigen Amplituden liefert. Wir haben auch durch den Ansatz für die Anregungsoperatoren (s. Gl. 3.2) die Existenz der einfach spuriosen Lösung sichergestellt.

An der Matrix in Gleichung (3.9) fällt auf, daß zwar die Matrizen $H^{(2)}$, $\tilde{H}^{(2)}$, $J^{(2)}$ und $\tilde{J}^{(2)}$ verschwinden, die Matrizen $C^{(2)}$, $\tilde{C}^{(2)}$, $D^{(2)}$ und $\tilde{D}^{(2)}$ jedoch nicht. Die Matrixelemente bzgl. eines Eigenzustands des Hamilton-Operators erfüllen die Symmetrie

$$
\langle\Phi|[\delta\mathrm{Q},[\mathrm{H},\mathrm{Q}^{\dagger}_{\nu}]]|\Phi\rangle = \langle\Phi|[\mathrm{Q}_{\nu},[\mathrm{H},\delta\mathrm{Q}^{\dagger}]]|\Phi\rangle^{*}\ . \tag{3.10}
$$

Der Zustand $|\Phi\rangle$ soll ein beliebiger Eigenzustand des Hamilton-Operators sein. Bildete man die Matrixelemente bzgl. eines Eigenzustandes des Hamilton-Operators müßte also gelten

$$
C^{(2)}_{i,m} = H^{(2)*}_{m,i}\ ,
$$

und entsprechendes für die anderen Matrixelemente. Die Differenz der beiden Ausdrücke auf der rechten und linken Seite der Gleichung (3.10) ist

$$
\langle\Phi|[\delta\mathrm{Q},[\mathrm{H},\mathrm{Q}^{\dagger}_{\nu}]]|\Phi\rangle - \langle\Phi|[\mathrm{Q}_{\nu},[\mathrm{H},\delta\mathrm{Q}^{\dagger}]]|\Phi\rangle^{*} = \langle\Phi|[\mathrm{H},[\delta\mathrm{Q},\mathrm{Q}^{\dagger}_{\nu}]]|\Phi\rangle\ , \tag{3.11}
$$

d. h. ein Erwartungswert bzgl. eines Eigenzustandes des Hamilton-Operators hat damit die Symmetrieeigenschaft (3.10), jeder andere Erwartungswert nicht unbedingt. Wie man an der Matrix (3.4) sieht, haben z. B. bei der Erwartungswertbildung bzgl. des HF-Grundzustandes die Matrizen A,B, $C^{(2)}$, $\tilde{C}^{(2)}$, $\tilde{D}^{(2)}$ und $D^{(2)}$ die Symmetrieeigenschaft, die restlichen nicht. Man würde nicht erwarten, daß in unserem Verfahren, erst die Matrixelemente bei endlicher Temperatur zu berechnen, dann einzelne (für jede Zeile unterschiedliche) Faktoren auf beiden Seiten der Gleichungen herauszudividieren, die Matrixelemente die Symmetrieeigenschaft (3.10) haben. Die Matrizen A und B sind in unserem Verfahren gleich den im HF-Grundzustand berechneten, d. h. sie erfüllen auch dann die Gleichung (3.10). Es zeigt sich aber, daß unser Verfahren die Symmetrie bei den Matrizen $C^{(2)}$, $\tilde{C}^{(2)}$, $\tilde{D}^{(2)}$ und $D^{(2)}$ stört. Denn bildet man den Erwartungswert im HF-Grundzustand haben die Matrizen die Symmetrieeigenschaft, auch der Erwartungswert bei endlicher Temperatur erhält noch die Symmetrieeigenschaft. Kurioserweise stellt dieses Verfahren die Symmetrie bei den Matrizen $C^{(3)}$, $\tilde{C}^{(3)}$, $\tilde{D}^{(3)}$ und $D^{(3)}$ fast wieder her (bis auf Minuszeichen), die weder bzgl. des HF-Grundzustandes noch bzgl. des Erwartungswertes bei endlicher Temperatur vorhanden ist.
Die Forderung (s. Gl. 2.52)

$$\langle\mu|\nu\rangle = \langle \mathrm{HF}|[\mathrm{Q}_\mu, \mathrm{Q}_\nu^\dagger]|\mathrm{HF}\rangle = \delta_{\mu,\nu} \; . \tag{3.12}$$

führt im Fall der SRPA mit dem Ansatz (3.2) für die Anregungsoperatoren auf die Normierungsbedingung

$$\sum_m (X_m^{(1)\mu^*} X_m^{(1)\nu} - Y_m^{(1)\mu^*} Y_m^{(1)\nu}) + \sum_{m<j} (X_{mj}^{(2)\mu^*} X_{mj}^{(2)\nu} - Y_{mj}^{(2)\mu^*} Y_{mj}^{(2)\nu}) = \delta_{\mu,\nu} \; . \tag{3.13}$$

3.2 Das NJL-Modell in SRPA

Nachdem wir im vorigen Abschnitt auf das Verfahren eingegangen sind, wie man die RPA erweitern könnte, werden wir das am Beispiel des NJL-Modells vorführen. Eine Abschätzung der Größe der zu diagonalisierenden $n \times n$ SRPA-Matrix (s. Gl. 3.9) zeigt, daß die numerische Diagonalisierung in drei Raumdimensionen praktisch unmöglich ist. Die Dimension n setzt sich zusammen aus

$$n = 4n_2 + 2n_4 \, ,$$

wobei n_2 die Anzahl der möglichen Zwei-Quark-Zustände ist, n_4 die Anzahl der möglichen Vier-Quark-Zustände. Für eine Abschätzung genügt es, die Vier-Quark-Zustände zu betrachten, da deren Anzahl wesentlich größer als die der Zwei-Quark-Zustände ist. In Tab. (3.1) ist die Anzahl der möglichen Vier-Quark-Zustände in Abhängigkeit von der Anzahl der Impulszustände N_p pro Raumrichtung aufgetragen. N_p ist bestimmt durch das gewählte Volumen $V = L^3$ und den Cutoff Λ. In Tab. (3.1) wurde bereits der Gesamtimpuls Null für die vier Quarks vorausgesetzt, und es wurden weder Farb- noch Isospinfreiheitsgrade berücksichtigt. Durch eine Basistransformation auf Gesamtspin (s. letztes Kapitel) läßt sich die Anzahl noch etwa auf $\frac{1}{4}$ reduzieren, man sieht aber, daß eine Rechnung trotzdem unmöglich ist.

N_p	3+1 Dimensionen	1+1 Dimensionen
1	1	0
3	26963	3
5	2447837	16
7	49243407	47

Tabelle 3.1: *Anzahl der möglichen Vier-Quark-Zustände in einer bzw. drei Raumdimensionen, N_p ist die Anzahl der Impulszustände pro Raumdimension.*

In einer Raumdimension liegen die Dinge anders, dort hat die SRPA-Matrix eine behandelbare Größe, zum Vergleich sind in Tab. (3.1) auch die möglichen Vier-Quark-Zustände in einer Dimension in Abhängigkeit von der Anzahl der Impulszustände zu sehen. Farb- und Isospinfreiheitsgrade wurden ebenfalls nicht berücksichtigt, und der Gesamtimpuls Null für die vier Quarks wurde vorausgesetzt.
Um unsere Überlegungen bzgl. der SRPA an einem möglichst einfachen Beispiel untersuchen zu können, werden wir im folgenden das NJL-Modell in einer Raumdimension behandeln. Zur weiteren Vereinfachung werden wir auch darauf verzichten, Farb- und Isospinfreiheitsgrade zu berücksichtigen.

Kapitel 4

SRPA am Beispiel des NJL-Modells in 1+1 Dimensionen

4.1 Das NJL-Modell in 1+1 Dimensionen

In diesem und im folgenden Abschnitt soll erst einmal das NJL-Modell in 1+1 Dimensionen kurz vorgestellt werden, und die Eigenschaften in der RPA sollen untersucht werden, bevor wir uns dann der SRPA zuwenden.
Die NJL-Lagrangedichte (1.1) läßt sich in einer Raumdimension formal in der gleichen Weise wie in drei Raumdimensionen schreiben:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0)\psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2] \ , \tag{4.1}$$

ψ ist hier ein Fermion-Feld für ein Teilchen der Masse m_0, das wir im folgenden „Quark" nennen wollen, G eine dimensionslose Kopplungskonstante. Die γ-Matrizen müssen die Antikommutatorrelationen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{4.2}$$

mit dem metrischen Tensor

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

erfüllen, sie müssen spurlos sein, γ^1 muß antihermitesch sein mit $(\gamma^1)^2 = -1$, γ^0 muß hermitesch sein mit $(\gamma^0)^2 = 1$ (s. [29]). Eine mögliche Darstellung ist

$$\gamma^0 = \sigma^3, \quad \gamma^1 = i\sigma^2, \quad \gamma^5 = \gamma^0\gamma^1 = \sigma^1 \ , \tag{4.4}$$

mit den Pauli-Matrizen σ^k. Die Definition von γ_5 wurde so gewählt, daß γ_5 hermitesch ist.
Solange wir 1+1 Dimensionen behandeln, ist x bzw. p die Raumkomponente, nicht wie in den letzten Kapiteln ein Vierer-Vektor. In einem eindimensionalen „Volumen" der Länge L haben die Feldoperatoren für ein Teilchen der Masse m_0 die Gestalt

$$\psi(x,t) = \sum_p \frac{1}{\sqrt{L}} \sqrt{\frac{m_0}{\omega_p}} \Big(b_p u_0(p) e^{-i(\omega_p t - px)} + d_p^\dagger v_0(p) e^{i(\omega_p t - px)} \Big) \ , \tag{4.5}$$

mit $\omega_p = \sqrt{p^2 + m_0^2}$.
Die Operatoren $b_p^\dagger$ und $d_p^\dagger$ erzeugen ein Quark bzw. ein Antiquark mit dem Impuls p aus dem Vakuum. Die „Dirac-Spinoren" u_0 und v_0 für ein Teilchen der Masse m_0 in 1+1 Dimensionen müssen den Gleichungen

$$(\not{p} - m_0)u_0(p) = 0, \quad (\not{p} + m_0)v_0(p) = 0 \tag{4.6}$$

genügen. Die Spinoren

$$u(p) = \sqrt{\frac{\omega_p + m_0}{2m_0}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p}{\omega_p + m_0} \end{pmatrix}, \quad v(p) = \sqrt{\frac{\omega_p + m_0}{2m_0}} \begin{pmatrix} \frac{p}{\omega_p + m_0} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

erfüllen neben Gleichung(4.6) die Normierungsbedingung $\bar{u}(p)u(p) = -\bar{v}(p)v(p) = 1$.
Die Lagrangedichte (4.1) ist im „chiralen" Limes, d. h. $m_0 = 0$, invariant unter einer globalen „chiralen" Transformation

$$\psi(x,t) \to e^{i\alpha\gamma_5}\psi(x,t). \tag{4.8}$$

Dies führt zu einem erhaltenen Strom

$$j^\mu(x,t) = \bar{\psi}(x,t)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x,t)$$

und einer erhaltenen Ladung

$$\mathrm{Q}_5 = \int dx\bar{\psi}(x,t)\gamma_0\gamma_5\psi(x,t) \ . \tag{4.9}$$

Im chiralen Limes vertauscht der Symmetrieoperator (4.9) mit dem Hamilton-Operator, d. h. $[\mathrm{H}, \mathrm{Q}_5] = 0$.
An dieser Stelle sollte bemerkt werden, daß man mit Hilfe einer Fierz-Transformation zeigen kann, daß das NJL-Modell in der hier betrachteten Form äquivalent zum Thirring-Modell ist. Dieses läßt sich exakt lösen (siehe z. B. [32]). Prinzipiell bietet sich also hier die Möglichkeit, die exakte Lösung mit der RPA bzw. SRPA zu vergleichen. Darauf wird hier nicht weiter eingegangen werden. S. Coleman hat außerdem gezeigt (s.[33]), daß das Thirring-Modell im masselosen Fall, d. h. für uns im chiralen Limes, äquivalent zu einer Theorie von masselosen Bosonen ist. Diese merkwürdige Tatsache kommt durch das Fehlen von Spin in 1+1 Dimensionen zustande. Wir würden also im exakten Fall nur masselose bosonische Lösungen erwarten. Wir werden sehen, daß das weder in der RPA noch in der oben beschriebenen Form der SRPA der Fall ist. Uns geht es hier allerdings nicht um eine exakte Lösung des NJL-Modells in 1+1 Dimensionen, sondern darum, das in Kapitel 3 entwickelte Verfahren an einem einfachen Beispiel zu untersuchen, das möglichst nah mit dem (numerisch nicht handhabbaren) NJL-Modell in 3+1 Dimensionen verwandt ist.
Wir interessieren uns vor allem für die spuriose Lösung in der SRPA, die durch den Symmetrieoperator erzeugt wird. Voraussetzung für die Existenz dieser spuriosen Lösung ist natürlich, daß die Symmetrie im HF-Grundzustand spontan gebrochen ist. Deswegen werden wir als erstes den HF-Grundzustand untersuchen, und nach dem gleichen Verfahren wie in Abschnitt 2.1 die Gap-Gleichung in 1+1 Dimensionen herleiten. Wir werden den

Grundzustand hier analog zu Gleichung (2.1) mit Quark-Antiquark-Paaren im Vakuum ansetzen, jedoch ohne Spin, da die Teilchen in 1+1 Dimensionen keine Spin-Freiheitsgrade haben:

$$|\mathrm{gz}\rangle = \prod_p \Big(\cos(\frac{\phi(-p)}{2}) + \sin(\frac{\phi(-p)}{2}) b^\dagger(p) d^\dagger(-p)\Big)|\ \rangle \ . \tag{4.10}$$

Die Notation ist die gleiche wie in Abschnitt 2.1, $|\ \rangle$ bezeichnet das Vakuum und $|\mathrm{gz}\rangle$ den Grundzustand. Die Funktion $\phi(p)$ soll aus der Minimierung der Grundzustandsenergie bestimmt werden.
Der Hamiltonoperator hat die gleiche Form wie in Gleichung (2.2), mit den Feldoperatoren (4.5) ist er durch

$$\begin{aligned} \mathrm{H}(t) &= \mathrm{H}_0(t) + \mathrm{H}_1(t) \\ &= -\int dx \bar{\psi}(x,t)(i\vec{\gamma}\vec{\nabla} - m_0)\psi(x,t) \\ &\quad -G\int dx[(\bar{\psi}(x,t)\psi(x,t))^2 + (\bar{\psi}(x,t)i\gamma_5\psi(x,t))^2] \end{aligned} \tag{4.11}$$

gegeben. Im folgenden werden wir nur $t = 0$ betrachten, und das Zeitargument weglassen. Eine Bogoliubovrotation [24] der Form

$$\begin{aligned} B_p &= \cos\left(\frac{\phi(-p)}{2}\right) b_p - \sin\left(\frac{\phi(-p)}{2}\right) d^\dagger_{-p} \ , \\ D_p &= \cos\left(\frac{\phi(p)}{2}\right) d_p + \sin\left(\frac{\phi(p)}{2}\right) b^\dagger_{-p} \ , \end{aligned} \tag{4.12}$$

führt uns auf neue Operatoren B_p und D_p, die den Grundzustand vernichten:

$$B_p|\mathrm{gz}\rangle = D_p|\mathrm{gz}\rangle = 0 \ . \tag{4.13}$$

Diese erfüllen die Antivertauschungsrelationen für Fermionen. Den Feldoperator (s. Gl. 4.5) können wir in der neuen Basis schreiben. Damit zerfällt der Grundzustandserwartungswert des Hamilton-Operators wie in Abschnitt 2.1 in drei Anteile, einen freien Anteil aus H_0, einen Hartree-Anteil und einen Fock-Anteil:

$$W[(\phi(p))] = \langle \mathrm{gz}|\mathrm{H}|\mathrm{gz}\rangle = \langle \mathrm{gz}|\mathrm{H}_0|\mathrm{gz}\rangle + \langle \mathrm{gz}|\mathrm{H}_1|\mathrm{gz}\rangle_{Hartree} + \langle \mathrm{gz}|\mathrm{H}_1|\mathrm{gz}\rangle_{Fock} \ . \tag{4.14}$$

Wir werden hier im Gegensatz zu Abschnitt 2.1 auch den Fock-Term mitnehmen. Für die einzelnen Anteile ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{gz}|\mathrm{H}_0|\mathrm{gz}\rangle &= -\sum_p \omega_p \cos\phi(p) \ , \\ \langle \mathrm{gz}|\mathrm{H}_1|\mathrm{gz}\rangle_{Hartree} &= -\frac{G}{L}\Big\{ \sum_p \Big(\frac{m_0}{\omega_p}\cos\phi(p) - \frac{p}{\omega_p}\sin\phi(p)\Big)\Big\}^2 \ , \\ \langle \mathrm{gz}|\mathrm{H}_1|\mathrm{gz}\rangle_{Fock} &= -\frac{G}{L}\bigg(\Big\{ \sum_p \Big(\frac{m_0}{\omega_p}\sin\phi(p) + \frac{p}{\omega_p}\cos\phi(p)\Big)\Big\}^2 + N_p^2 \bigg) \ . \end{aligned} \tag{4.15}$$

Das Minimum läßt sich aus der Funktionalableitung von $W[\phi(p)]$ bzgl. $\phi(p)$ bestimmen. Diese muß verschwinden:

$$\frac{\delta W}{\delta \phi(p)} = 0 \ . \tag{4.16}$$

Die resultierende Gleichung

$$\begin{aligned} \omega_p \sin\phi(p) &= -(m-m_0)(\frac{m_0}{\omega_p}\sin\phi(p) + \frac{p}{\omega_p}\cos\phi(p)) \\ &\quad +C(\frac{m_0}{\omega_p}\cos\phi(p) - \frac{p}{\omega_p}\sin\phi(p)) \end{aligned} \tag{4.17}$$

läßt sich nach

$$\tan\phi(p) = -\frac{mp - m_0(p+C)}{p(p+C)+mm_0} \tag{4.18}$$

auflösen. Wir haben hier

$$m = m_0 + \frac{2G}{L}\sum_p(\frac{m_0}{\omega_p}\cos\phi(p) - \frac{p}{\omega_p}\sin\phi(p)) \tag{4.19}$$

und

$$C = -\frac{2G}{L}\sum_p(\frac{m_0}{\omega_p}\sin\phi(p) + \frac{p}{\omega_p}\cos\phi(p)) \tag{4.20}$$

definiert. Setzt man Gleichung (4.18) in Gleichung (4.20) ein, dann zeigt sich, daß C verschwinden muß. Damit ergibt sich

$$\tan\phi(p) = -\frac{m-m_0}{p^2+mm_0}p \ , \tag{4.21}$$

d. h. der Fock-Anteil trägt nichts zu $\phi(p)$ und damit nichts zu m bei. Für m ergibt sich schließlich

$$m = m_0 + \frac{2G}{L}\sum_p \frac{m}{E_p} \ , \tag{4.22}$$

mit $E_p = \sqrt{m^2+p^2}$.
Gleichung (4.22) ist nichts anderes als die Gap-Gleichung in 1+1 Dimensionen (ohne Farb- und Isospinfreiheitsgrade) für die dynamisch generierte Masse m in HF-Näherung.
Mit Hilfe der Gleichungen (4.12) und (4.21) lassen sich die Feldoperatoren (s. Gl. 4.5) in der neuen Basis mit Spinoren u und v für Teilchen der Masse m schreiben:

$$\psi(x,0) = \sum_p \frac{1}{\sqrt{L}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\left(B_p u(p)e^{ipx} + D_p^\dagger v(p)e^{-ipx}\right) \ . \tag{4.23}$$

Im folgenden werden wir den hier bestimmten Grundzustand $|\text{gz}\rangle$ mit $|\text{HF}\rangle$ bezeichnen. In dieser Basis ergibt sich der Hamilton-Operator analog zu Gleichung (2.19):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H} \;=\; & \sum_p E_p(B_p^\dagger B_p + D_p^\dagger D_p) \\
& -\frac{G}{L}\sum_{p_1,\dots p_4}\sqrt{\frac{m^4}{E_{p_1}E_{p_2}E_{p_3}E_{p_4}}}\sum_{\Gamma=1,i\gamma_5} \\
& \Big\{ (\ \bar{u}(p_1)\Gamma u(p_2)\bar{u}(p_3)\Gamma u(p_4) \quad B_{p_1}^\dagger B_{p_3}^\dagger B_{p_2} B_{p_4} \\
& +\ \ \bar{v}(p_1)\Gamma v(p_2)\bar{v}(p_3)\Gamma v(p_4) \quad D_{p_2}^\dagger D_{p_4}^\dagger D_{p_1} D_{p_3}\ )\delta_{p_1+p_3,p_2+p_4} \\
& +(\ \bar{u}(p_1)\Gamma v(p_2)\bar{u}(p_3)\Gamma v(p_4) \quad B_{p_1}^\dagger D_{p_2}^\dagger B_{p_3}^\dagger D_{p_4}^\dagger \\
& +\ \ \bar{v}(p_4)\Gamma u(p_3)\bar{v}(p_2)\Gamma u(p_1) \quad D_{p_4} B_{p_3} D_{p_2} B_{p_1}\ )\delta_{p_1+p_3,-p_2-p_4} \\
& +2(\ \bar{u}(p_1)\Gamma u(p_2)\bar{u}(p_3)\Gamma v(p_4) \quad B_{p_1}^\dagger B_{p_3}^\dagger D_{p_4}^\dagger B_{p_2} \\
& +\ \ \bar{v}(p_4)\Gamma u(p_3)\bar{u}(p_2)\Gamma u(p_1) \quad B_{p_2}^\dagger D_{p_4} B_{p_3} B_{p_1}\ )\delta_{p_1+p_3+p_4,p_2} \\
& +2(\ \bar{u}(p_1)\Gamma v(p_2)\bar{v}(p_3)\Gamma v(p_4) \quad B_{p_1}^\dagger D_{p_4}^\dagger D_{p_2}^\dagger D_{p_3} \\
& +\ \ \bar{v}(p_4)\Gamma v(p_3)\bar{v}(p_2)\Gamma u(p_1) \quad D_{p_3}^\dagger D_{p_2} D_{p_4} B_{p_1}\ )\delta_{p_1+p_2+p_4,p_3} \\
& +2(\ \bar{u}(p_1)\Gamma v(p_2)\bar{v}(p_3)\Gamma u(p_4) \\
& -\ \ \bar{u}(p_1)\Gamma u(p_4)\bar{v}(p_3)\Gamma v(p_2)\ )B_{p_1}^\dagger D_{p_2}^\dagger D_{p_3} B_{p_4}\ \delta_{p_1+p_2,p_3+p_4}\Big\} \; .
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

Die (divergente) Grundzustandsenergie wurde hier bereits abgezogen, d. h.

$$\langle \mathrm{HF}|\mathrm{H}|\mathrm{HF}\rangle = 0 \; .$$

Ein Vergleich mit Gleichung (2.19) zeigt, daß die Operatorstruktur hier die gleiche ist wie in drei Dimensionen, d. h. die Überlegungen bzgl. des Ansatzes für einen Anregungsoperator in der RPA bzw. der SRPA sollten sich direkt auf eine Dimension übertragen lassen.

4.2 Das NJL-Modell in 1+1 Dimensionen in RPA

Bevor wir uns der SRPA zuwenden, werden wir noch die spuriose „Pion"-Lösung in der RPA anlytisch zeigen. Pion heißt in diesem Fall einfach eine Lösung mit den Quantenzahlen eines pseudoskalaren Teilchens.

Für den Anregungsoperator $\mathrm{Q}_\nu^\dagger$ in der RPA betrachten wir folgenden Ansatz (s. Gl. 2.38):

$$\mathrm{Q}_\nu^\dagger = \sum_{m1,m2}\left(X_{m1m2}^\nu B_{m1}^\dagger D_{m2}^\dagger - Y_{m1m2}^\nu D_{m2} B_{m1}\right)\delta_{m1,-m2} \; . \tag{4.25}$$

Wir haben nur Impulsfreiheitsgrade, d. h. die Indizes $m1$ und $m2$ bedeuten hier einfach p_{m1} bzw. p_{m2}. Ansonsten gleicht der Ansatz dem für die RPA in drei Dimensionen, die Struktur der zu lösenden Eigenwertgleichung (s. Gl. 2.39) bleibt also gleich. Wir setzen auch hier voraus, daß wir uns im Schwerpunktsystem des Quark-Antiquark-Paares befinden, und werden das Kronecker-Delta im folgenden weglassen. Die Matrizen $A^{(2)}$ und $B^{(2)}$ haben in 1+1 Dimensionen die Form:

$$
\begin{aligned}
A^{(2)}_{im} &= 2E_m\delta_{m,i} - \frac{2G}{L}\frac{m^2}{E_m E_i}\sum_{\Gamma=1,i\gamma_5}\Big\{\bar{u}_{i1}\Gamma v_{i2}\bar{v}_{m2}\Gamma u_{m1} - \bar{u}_{i1}\Gamma u_{m1}\bar{v}_{m2}\Gamma v_{i2}\Big\} \\
&= 2E_i\delta_{m,i} - \frac{2G}{L}\Big\{\frac{p_m p_i}{E_m E_i} + \frac{m^2}{E_m E_i} + 1\Big\}\ , \\
B^{(2)}_{im} &= \frac{2G}{L}\frac{m^2}{E_m E_i}\sum_{\Gamma=1,i\gamma_5}\Big\{\bar{u}_{i1}\Gamma v_{i2}\bar{u}_{m1}\Gamma v_{m2} - \bar{u}_{i1}\Gamma v_{m2}\bar{u}_{m1}\Gamma v_{i2}\Big\} \\
&= -\frac{2G}{L}\Big\{-\frac{p_m p_i}{E_m E_i} - \frac{m^2}{E_m E_i} + 1\Big\}\ ,
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

mit $p_i \hat{=} p_{i1}$. Die Austauschterme liefern hier jeweils die Terme mit m^2/E_iE_m in den Matrixelementen. Mit dem gleichen Verfahren wie in Abschnitt 2.3 erhält man für die Amplituden

$$
\begin{aligned}
X_i^\nu &= -\frac{2G}{E_i(\Omega_\nu - 2E_i)}\Big\{p_iC_S + mC_V + E_iC_P\Big\}\ , \\
Y_i^\nu &= -\frac{2G}{E_i(\Omega_\nu + 2E_i)}\Big\{-p_iC_S + mC_V + E_iC_P\Big\}\ .
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

Die Konstanten C_P, C_S, C_V wurden dabei wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
C_P &= \sum_p \frac{1}{L}(X^\nu(p) - Y^\nu(p))\ , \\
C_S &= \sum_p \frac{1}{L}\frac{p}{E_p}(X^\nu(p) + Y^\nu(p))\ , \\
C_V &= \sum_p \frac{1}{L}\frac{m}{E_p}(X^\nu(p) + Y^\nu(p))\ .
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

Setzt man die Amplituden in die Definition der Konstanten ein, dann muß man sich hier etwas mehr Mühe geben als im Abschnitt 2.3. Dort berücksichtigten wir nur direkte Terme und die beiden Kanäle (Pion und Sigma) ließen sich problemlos separieren. Die Berücksichtigung der Austauschterme führt dazu, daß wir noch eine weitere Konstante C_V einführen mußten, die, wie wir gleich sehen werden, mit C_P „ mischt". Einsetzen der Amplituden in die Definitionen von C_P und C_V ergibt zwei gekoppelte Gleichungen

$$
\begin{aligned}
C_P &= -2G(\textstyle\sum_p \frac{1}{L}\frac{4E_p}{\Omega_\nu^2-4E_p^2}\ C_P + 2m\Omega_\nu \sum_p \frac{1}{L}\frac{1}{E_p}\frac{1}{\Omega_\nu^2-4E_p^2}\ C_V) \\
C_V &= -2G(2m\Omega_\nu \textstyle\sum_p \frac{1}{L}\frac{1}{E_p}\frac{1}{\Omega_\nu^2-4E_p^2}\ C_P + 2m^2 \sum_p \frac{1}{L}\frac{1}{E_p}\frac{1}{\Omega_\nu^2-4E_p^2}\ C_V).
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

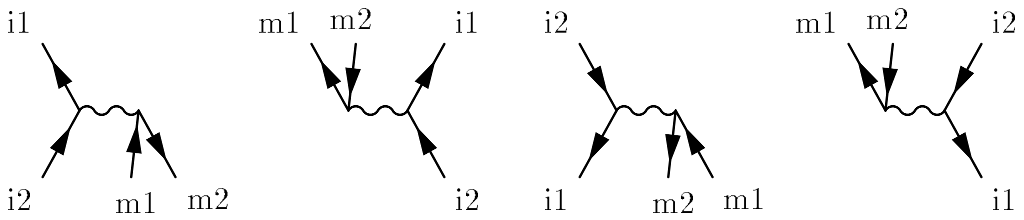


Abbildung 4.1: *Wechselwirkungsanteil der Matrizen (von links nach rechts)* $C^{(2)}_{i,m}$, $\tilde{C}^{(2)}_{i,m}$, $D^{(2)}_{i,m}$ *und* $\tilde{D}^{(2)}_{i,m}$. *Die Graphen, die durch Permutation der Indizes entstehen, sind hier nicht mit aufgeführt.*

Mit Hilfe der Gap-Gleichung (4.22) im chiralen Limes läßt sich zeigen, daß es für $\Omega_\nu = 0$ eine Lösung gibt, mit C_P beliebig und $C_V = 0$. Die Existenz der spuriosen Lösung wäre damit gezeigt. Da zu C_P dann nur die direkten Terme mit der pseudoskalaren Wechselwirkung beitragen, kann man hier auch vom Pion-Kanal sprechen.
C_S mischt nicht mit den beiden anderen, da $\sum_p p = 0$ ist. C_S ist deswegen einfacher zu behandeln. Die zu C_S beitragenden Terme stammen aus dem skalaren Anteil der direkten Terme, deswegen werden wir im Zusammenhang mit C_S vom Sigma-Kanal sprechen. Einsetzen der Amplituden in die Definition von C_S fürt auf:

$$C_S = -2G \sum_p \frac{1}{L} \frac{4p^2}{\Omega_\nu^2 - 4E_p^2} \frac{1}{E_p} C_S. \tag{4.30}$$

Ein Vergleich mit der Gap-Gleichung (4.22) im chiralen Limes zeigt, daß diese Gleichung im Fall $\Omega_\nu = 2m$ für beliebige C_S lösbar ist, womit im Sigma-Kanal die Existenz der Lösung mit $\Omega_\nu = 2m$ gezeigt wäre.

4.3 Das NJL-Modell in 1+1 Dimensionen in SRPA

In diesem und den beiden folgenden Abschnitten werden wir am Beispiel des NJL-Modells in 1+1 Dimensionen die Lösungen der SRPA-Gleichungen (3.9) untersuchen. Zunächst werden wir analytisch zeigen, daß der Symmetrieoperator

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}_5 &= \int dx \bar{\psi}(x,t)\gamma_0\gamma_5\psi(x,t) \\ &= \sum_p \Big\{ \frac{m}{E_p}(B_p^\dagger D_{-p}^\dagger + D_{-p}B_p) + \frac{p}{E_p}(B_p^\dagger B_p - D_p^\dagger D_p) \Big\} \end{aligned} \tag{4.31}$$

eine Lösung mit Energie Null der SRPA-Gleichungen (3.9) im NJL-Modell in 1+1 Dimensionen ist. Dazu betrachten wir zuerst die Matrixelemente. Die Matrixelemente $A^{(2)}$ und $B^{(2)}$ wurden bereits im vorherigen Abschnitt über die RPA berechnet (s. Gl. 4.26). Für die Elemente der Matrizen $C^{(2)}$, $\tilde{C}^{(2)}$, $D^{(2)}$ und $\tilde{D}^{(2)}$ gilt:

$$\begin{aligned} C^{(2)}_{i,m} &= -\frac{2G}{L} \frac{m^2}{\sqrt{E_{i1}E_{m1}E_{i2}E_{m2}}} \sum_{\Gamma=1,i\gamma_5} (\bar{u}(p_{i1})\Gamma u(p_{i2})\bar{v}(p_{m2})\Gamma u(p_{m1}) \\ &\quad - \quad \bar{u}(p_{i1})\Gamma u(p_{m1})\bar{v}(p_{m2})\Gamma u(p_{i2}))\ , \end{aligned}$$

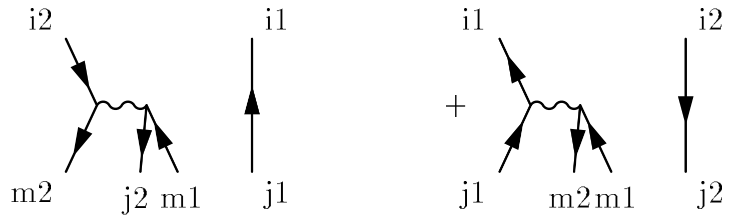


Abbildung 4.2: *Wechselwirkungsanteil der Matrix $A^{(3)}_{i,mj}$, die Graphen, die nur durch Permutation von Indizes entstehen, sind hier weggelassen.*

$$
\begin{aligned}
\tilde{C}^{(2)}_{i,m} &= \frac{2G}{L}\frac{m^2}{\sqrt{E_{i1}E_{m1}E_{i2}E_{m2}}}\sum_{\Gamma=1,i\gamma_5}(\bar{u}(p_{m1})\Gamma v(p_{m2})\bar{u}(p_{i1})\Gamma u(p_{i2}) \\
&\qquad - \quad \bar{u}(p_{i1})\Gamma v(p_{m2})\bar{u}(p_{m1})\Gamma u(p_{i2}))\ , \\
D^{(2)}_{i,m} &= -\frac{2G}{L}\frac{m^2}{\sqrt{E_{i1}E_{m1}E_{i2}E_{m2}}}\sum_{\Gamma=1,i\gamma_5}(\bar{v}(p_{i1})\Gamma v(p_{i2})\bar{v}(p_{m2})\Gamma u(p_{m1}) \\
&\qquad - \quad \bar{v}(p_{m2})\Gamma v(p_{i2})\bar{v}(p_{i1})\Gamma u(p_{m1}))\ , \\
\tilde{D}^{(2)}_{i,m} &= \frac{2G}{L}\frac{m^2}{\sqrt{E_{i1}E_{m1}E_{i2}E_{m2}}}\sum_{\Gamma=1,i\gamma_5}(\bar{u}(p_{m1})\Gamma v(p_{m2})\bar{v}(p_{i1})\Gamma v(p_{i2}) \\
&\qquad - \quad \bar{u}(p_{m1})\Gamma v(p_{i2})\bar{v}(p_{i1})\Gamma v(p_{m2}))\ .
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

Deren Wechselwirkungsanteile sind in Abb. (4.1) graphisch dargestellt. Die geschlängelte Linie muß dabei, wie in Abb. (2.1), auf einen Punkt zusammengezogen werden, und wurde nur zur Veranschaulichung der Wechselwirkung eingeführt.
Für die Elemente der Matrix $A^{(3)}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
A^{(3)}_{i,mj} &= -2G\frac{m^2}{L}\sum_{\Gamma=1,i\gamma_5} \\
&\Big\{\frac{\delta_{i1,j1}}{\sqrt{E_{m1}E_{m2}E_{i2}E_{j2}}}(\bar{v}(p_{m2})\Gamma v(p_{i2})\bar{v}(p_{j2})\Gamma u(p_{m1}) - \bar{v}(p_{j2})\Gamma v(p_{i2})\bar{v}(p_{m2})\Gamma u(p_{m1})) \\
&-\frac{\delta_{i1,m1}}{\sqrt{E_{j1}E_{j2}E_{i2}E_{m2}}}(\bar{v}(p_{m2})\Gamma v(p_{i2})\bar{v}(p_{j2})\Gamma u(p_{j1}) - \bar{v}(p_{j2})\Gamma v(p_{i2})\bar{v}(p_{m2})\Gamma u(p_{j1})) \\
&+\frac{\delta_{i2,j2}}{\sqrt{E_{m1}E_{m2}E_{i1}E_{j1}}}(\bar{u}(p_{i1})\Gamma u(p_{j1})\bar{v}(p_{m2})\Gamma u(p_{m1}) - \bar{u}(p_{i1})\Gamma u(p_{m1})\bar{v}(p_{m2})\Gamma u(p_{j1})) \\
&-\frac{\delta_{i2,m2}}{\sqrt{E_{m1}E_{j2}E_{i1}E_{j1}}}(\bar{u}(p_{i1})\Gamma u(p_{j1})\bar{v}(p_{j2})\Gamma u(p_{m1}) - \bar{u}(p_{i1})\Gamma u(p_{m1})\bar{v}(p_{j2})\Gamma u(p_{j1}))\Big\}\ .
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

Die Wechselwirkungsanteile dieser Matrix sind in Abb. (4.2) graphisch dargestellt.
Für die Elemente der Matrizen $C^{(3)}$ und $\tilde{C}^{(3)}$ gilt:

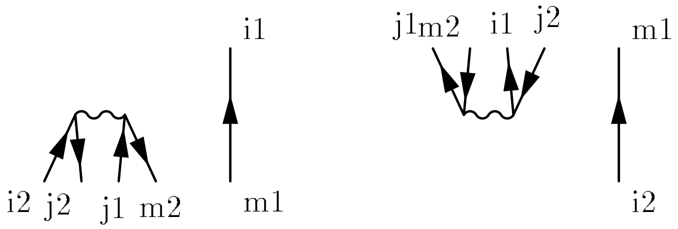


Abbildung 4.3: *Wechselwirkungsanteil der Matrizen (von links nach rechts)* $C^{(3)}_{i,mj}$ *und* $\tilde{C}^{(3)}_{i,mj}$ *ohne die Graphen, die nur durch Permutation der Indizes entstehen.*

$$
\begin{aligned}
C^{(3)}_{i,mj} &= -2G\frac{m^2}{L}\sum_{\Gamma=1,i\gamma_5} \\
&\Big\{ \frac{\delta_{i1,m1}}{\sqrt{E_{j1}E_{j2}E_{i2}E_{m2}}}(\bar{v}(p_{j2})\Gamma u(p_{i2})\bar{v}(p_{m2})\Gamma u(p_{j1}) - \bar{v}(p_{m2})\Gamma u(p_{i2})\bar{v}(p_{j2})\Gamma u(p_{j1})) \\
&-\frac{\delta_{i1,j1}}{\sqrt{E_{m1}E_{j2}E_{i2}E_{m2}}}(\bar{v}(p_{j2})\Gamma u(p_{i2})\bar{v}(p_{m2})\Gamma u(p_{m1}) - \bar{v}(p_{m2})\Gamma u(p_{i2})\bar{v}(p_{j2})\Gamma u(p_{m1}))\Big\}\ , \\
\tilde{C}^{(3)}_{i,mj} &= 2G\frac{m^2}{L}\sum_{\Gamma=1,i\gamma_5} \\
&\Big\{ \frac{\delta_{i2,m1}}{\sqrt{E_{j1}E_{j2}E_{i1}E_{m2}}}(\bar{u}(p_{j1})\Gamma v(p_{m2})\bar{u}(p_{i1})\Gamma v(p_{j2}) - \bar{u}(p_{j1})\Gamma v(p_{j2})\bar{u}(p_{i1})\Gamma v(p_{m2})) \\
&-\frac{\delta_{i2,j1}}{\sqrt{E_{m1}E_{j2}E_{i1}E_{m2}}}(\bar{u}(p_{m1})\Gamma v(p_{m2})\bar{u}(p_{i1})\Gamma v(p_{j2}) - \bar{u}(p_{m1})\Gamma v(p_{j2})\bar{u}(p_{i1})\Gamma v(p_{m2}))\Big\}\ .
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

Eine graphische Veranschaulichung der Wechselwirkungsanteile dieser beiden Matrizen findet sich in Abb. (4.3).
Für die Elemente der Matrizen $D^{(3)}$ und $\tilde{D}^{(3)}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
D^{(3)}_{i,mj} &= 2G\frac{m^2}{L}\sum_{\Gamma=1,i\gamma_5} \\
&\Big\{ \frac{\delta_{i2,m2}}{\sqrt{E_{j1}E_{j2}E_{i1}E_{m1}}}(\bar{v}(p_{j2})\Gamma u(p_{m1})\bar{v}(p_{i1})\Gamma u(p_{j1}) - \bar{v}(p_{j2})\Gamma u(p_{j1})\bar{v}(p_{i1})\Gamma u(p_{m1})) \\
&-\frac{\delta_{i2,j2}}{\sqrt{E_{j1}E_{m2}E_{i1}E_{m1}}}(\bar{v}(p_{m2})\Gamma u(p_{m1})\bar{v}(p_{i1})\Gamma u(p_{j1}) - \bar{v}(p_{m2})\Gamma u(p_{j1})\bar{v}(p_{i1})\Gamma u(p_{m1}))\Big\}\ , \\
\tilde{D}^{(3)}_{i,mj} &= -2G\frac{m^2}{L}\sum_{\Gamma=1,i\gamma_5} \\
&\Big\{ \frac{\delta_{i1,m2}}{\sqrt{E_{j1}E_{j2}E_{i2}E_{m1}}}(\bar{u}(p_{j1})\Gamma v(p_{i2})\bar{u}(p_{m1})\Gamma v(p_{j2}) - \bar{u}(p_{m1})\Gamma v(p_{i2})\bar{u}(p_{j1})\Gamma v(p_{j2})) \\
&-\frac{\delta_{i1,j2}}{\sqrt{E_{m1}E_{m2}E_{i2}E_{j1}}}(\bar{u}(p_{j1})\Gamma v(p_{i2})\bar{u}(p_{m1})\Gamma v(p_{m2}) - \bar{u}(p_{m1})\Gamma v(p_{i2})\bar{u}(p_{j1})\Gamma v(p_{m2}))\Big\}\ .
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

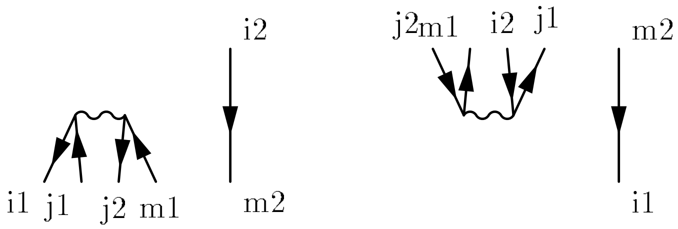


Abbildung 4.4: *Wechselwirkungsanteil der Matrizen (von links nach rechts)* $D^{(3)}_{i,mj}$ *und* $\tilde{D}^{(3)}_{i,mj}$ *ohne die Graphen, die nur durch Permutation der Indizes entstehen.*

In Abb. (4.4) sind diese Matrizen graphisch dargestellt.
Für die Elemente der Matrix $A^{(4)}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
A^{(4)}_{ik,mj} \;=\;& (E_{i1}+E_{i2}+E_{k1}+E_{k2})\,\delta_{i,m}\delta_{k,j} - 2Gm^2 \sum_{\Gamma=1,i\gamma_5} \\
&\Big\{ \frac{\delta_{i2,m2}\delta_{k2,j2}-\delta_{i2,j2}\delta_{k2,m2}}{\sqrt{E_{i1}E_{k1}E_{m1}E_{j1}}}(\bar{u}(p_{i1})\Gamma u(p_{m1})\bar{u}(p_{k1})\Gamma u(p_{j1}) - \bar{u}(p_{k1})\Gamma u(p_{m1})\bar{u}(p_{i1})\Gamma u(p_{j1})) \\
&+\frac{\delta_{i1,m1}\delta_{k1,j1}-\delta_{i1,j1}\delta_{k1,m1}}{\sqrt{E_{i2}E_{k2}E_{m2}E_{j2}}}(\bar{v}(p_{m2})\Gamma v(p_{i2})\bar{v}(p_{j2})\Gamma v(p_{k2}) - \bar{v}(p_{m2})\Gamma v(p_{k2})\bar{v}(p_{j2})\Gamma v(p_{i2})) \\
&+\Big(\frac{\delta_{k1,j1}\delta_{k2,j2}}{\sqrt{E_{m1}E_{m2}E_{i1}E_{i2}}}(\bar{u}(p_{i1})\Gamma v(p_{i2})\bar{v}(p_{m2})\Gamma u(p_{m1}) - \bar{u}(p_{i1})\Gamma u(p_{m1})\bar{v}(p_{m2})\Gamma v(p_{i2})) \\
&\quad -(i1 \leftrightarrow k1) + - \ldots \text{alle möglichen weiteren Permutationen}\Big)\Big\}\;. \qquad (4.36)
\end{aligned}
$$

Zu den Permutationen ist folgendes zu sagen: Man vertauscht dabei jeweils die Indizes $(i1 \leftrightarrow k1)$, $(i2 \leftrightarrow k2)$, $(i \leftrightarrow k)$ (d. h. $i1 \leftrightarrow k1$ und $i2 \leftrightarrow k2$), $(m1 \leftrightarrow j1)$, $(m2 \leftrightarrow j2)$, und $(m \leftrightarrow j)$. Pro Vertauschung ergibt sich ein Minuszeichen. Der Term mit $\delta_{k1,j1}\delta_{k2,m2}$ bekommt so z. B. ein Minuszeichen, da hier eine Vertauschung vorgenommen wurde $(j2 \leftrightarrow m2)$. Es ergeben sich auf diese Art und Weise noch 15 weitere Terme. Die Wechselwirkungsanteile der Matrix $A^{(4)}$ sind in Abb. (4.5) graphisch dargestellt.
In Anhang C findet sich eine explizite Form sämtlicher Matrixelemente. Man stellt fest, daß alle Matrixelemente reell sind. Das, und die Tatsache, daß man sich in das Schwerpunktsystem der ein- bzw. auslaufenden Teilchen setzt, führt dazu, daß sich die SRPA-

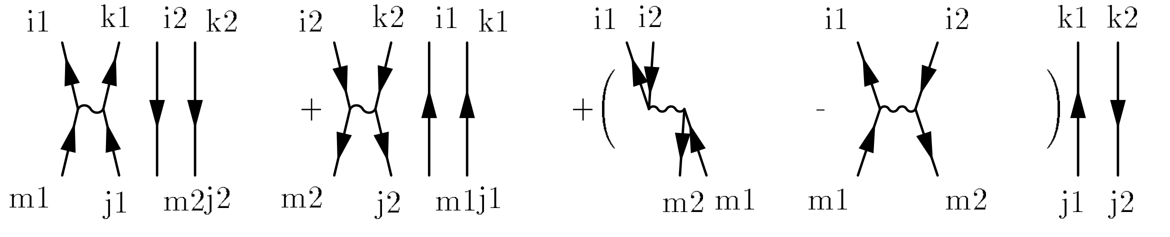


Abbildung 4.5: *Wechselwirkungsanteil der Matrix* $A^{(4)}_{ik,mj}$*, die Graphen, die durch Permutation von Indizes entstehen, fehlen hier.*

Matrix (3.9) etwas vereinfacht:

$$\begin{pmatrix} A^{(2)} & -B^{(2)} & 0 & 0 & A^{(3)} & 0 \\ B^{(2)} & -A^{(2)} & 0 & 0 & 0 & -A^{(3)} \\ C^{(2)} & C^{(2)} & 0 & 0 & C^{(3)} & C^{(3)} \\ D^{(2)} & D^{(2)} & 0 & 0 & D^{(3)} & D^{(3)} \\ A^{(3)T} & 0 & C^{(3)T} & -D^{(3)T} & A^{(4)} & 0 \\ 0 & -A^{(3)^T} & C^{(3)T} & -D^{(3)T} & 0 & -A^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(1)\nu} \\ Y^{(1)\nu} \\ P^{\nu} \\ Q^{\nu} \\ X^{(2)\nu} \\ Y^{(2)\nu} \end{pmatrix} = \Omega_\nu \begin{pmatrix} X^{(1)\nu} \\ Y^{(1)\nu} \\ P^{\nu} \\ Q^{\nu} \\ X^{(2)\nu} \\ Y^{(2)\nu} \end{pmatrix} . \qquad (4.37)$$

Unser Ziel war es, analytisch zu zeigen, daß der Symmetrieoperator Q_5 (s. Gl. 4.31) eine Lösung der SRPA-Gleichungen mit Energie Null ist. Die Komponenten des Vektors sind dabei

$$\begin{aligned} X_i^{(1)} &= \frac{m}{E_i} , \\ Y_i^{(1)} &= -\frac{m}{E_i} , \\ P_i &= \frac{p_i}{E_i} , \\ Q_i &= \frac{p_i}{E_i} , \\ X_i^{(2)} &= 0 , \\ Y_i^{(2)} &= 0 . \end{aligned} \qquad (4.38)$$

Multipliziert man die SRPA-Matrix (s. Gl. 3.9) mit diesem Vektor, dann erhält man folgende Gleichungen, deren rechte Seite verschwinden soll:

$$\begin{aligned} \sum_m (A_{i,m}^{(2)} \frac{m}{E_m} + B_{i,m}^{(2)} \frac{m}{E_m}) &\stackrel{?}{=} 0 , \\ \sum_m (-B_{i,m}^{(2)} \frac{m}{E_m} - A_{i,m}^{(2)} \frac{m}{E_m}) &\stackrel{?}{=} 0 , \\ \sum_m (C_{i,m}^{(2)} \frac{m}{E_m} - C_{i,m}^{(2)} \frac{m}{E_m}) &\stackrel{?}{=} 0 , \\ \sum_m (D_{i,m}^{(2)} \frac{m}{E_m} - D_{i,m}^{(2)} \frac{m}{E_m}) &\stackrel{?}{=} 0 , \\ \sum_m (A_{ik,m}^{(3)} \frac{m}{E_m} + C_{ik,m}^{(3)} \frac{p_m}{E_m} - D_{ik,m}^{(3)} \frac{p_m}{E_m}) &\stackrel{?}{=} 0 , \\ \sum_m (A_{ik,m}^{(3)} \frac{m}{E_m} + C_{ik,m}^{(3)} \frac{p_m}{E_m} - D_{ik,m}^{(3)} \frac{p_m}{E_m}) &\stackrel{?}{=} 0 . \end{aligned}$$

Jede dieser Gleichungen muß für beliebige i und k erfüllt sein. In den ersten beiden stehen die RPA-Gleichungen, für die wir im letzten Abschnitt die Lösungsvektoren zum Eigenwert Null im chiralen Limes gefunden haben. Diese (s. Gl. 4.29) unterscheiden sich von den ersten Komponenten des Vektors (4.38) nur durch den konstanten Faktor m, d. h. die beiden ersten Gleichungen sind im chiralen Limes für beliebige i erfüllt. Bei den beiden nächsten Gleichungen ist das Ergebnis trivialerweise null. Nur die beiden letzten Gleichungen bereiten etwas größere Schwierigkeiten. Wir betrachten die vorletzte Gleichung und setzen die Matrixelemente aus Anhang C ein:

$$\begin{aligned}\sum_m (A^{(3)}_{ik,m}\frac{m}{E_m} + C^{(3)}_{ik,m}\frac{p_m}{E_m} - D^{(3)}_{ik,m}\frac{p_m}{E_m}) = -\frac{G}{\sqrt{E_{i1}z_{i1}E_{i2}z_{i2}E_{k1}z_{k1}E_{k2}z_{k2}}}\Big\{ \\ (p_{k2}z_{i2} - p_{i2}z_{k2})\Big(\frac{1}{E_{k1}}(-z_{i1}(m^2 + mE_{k1} + p^2_{k1}) - p_{i1}p_{k1}E_{k1}) \\ +\frac{1}{E_{i1}}(z_{k1}(m^2 + mE_{i1} + p^2_{i1}) + p_{i1}p_{k1}E_{i1})\Big) \\ +(p_{k1}z_{i1} - p_{i1}z_{k1})\Big(\frac{1}{E_{k2}}(-z_{i2}(m^2 + mE_{k2} + p^2_{k2}) - p_{i2}p_{k2}E_{k2}) \\ +\frac{1}{E_{i2}}(z_{k2}(m^2 + mE_{i2} + p^2_{i2}) + p_{i2}p_{k2}E_{i2})\Big)\Big\}\ , \end{aligned} \tag{4.39}$$

mit $z_k = E_k + m$.
Mit Hilfe der Definition der z sieht man nun, daß man auch hier das gewünschte Ergebnis erhält. Die letzte Gleichung ist identisch mit der vorletzten. Damit hätten wir also gezeigt, daß der Symmetrieoperator im chiralen Limes eine Lösung der SRPA-Gleichungen (3.9) mit Energie $\Omega_\nu = 0$ ist. Ohne die Matrizen $C^{(3)}$ und $D^{(3)}$ wäre Q_5 kein Eigenvektor der SRPA-Matrix, d. h. der Ansatz für die Anregungsoperatoren (3.1) wie man ihn z. B. bei Yannouleas [20] findet, enthält nicht die einfach spuriose Lösung.

4.4 Ergebnisse mit dem eingeschränktem Ansatz

Zum Vergleich betrachten wir zuerst die Ergebnisse mit dem eingeschränkten Ansatz (3.1) für die Anregungsoperatoren. Wir haben gesehen, daß dieser Ansatz keine spuriose Lösung liefert, wir erwarten also im chiralen Limes keine Eigenwerte Null. Die Verteilung der Eigenwerte im chiralen Limes ist für ein Volumen von $L = 9.40$ fm in Abb. (4.6) zu sehen. Folgende Parameterwerte wurden dabei benutzt:

$$\Lambda = 656 \text{ MeV}\ ; \quad G = 1.14\ . \tag{4.40}$$

Da es in 1+1 Dimensionen keine experimentellen Vergleichswerte gibt, wurden diese Parameterwerte relativ willkürlich so gewählt, daß die Quarkmasse m in der gleichen Größenordnung liegt wie in 3+1 Dimensionen. Die resultierenden Quarkmassen sind in Tab. (4.1) zu sehen. Wir werden in diesem und im folgenden Abschnitt für alle Rechnungen die Paramterwerte (4.40) benutzen.
Die Ergebnisse entsprechen im großen und ganzen den Erwartungen: Die Eigenwerte liegen symmetrisch um $\Omega_\nu = 0$, d. h. es gibt jeweils zwei Eigenwerte mit $\pm\Omega_\nu$ (s. [26]), und es gibt keine Eigenwerte bei null. Überraschend ist nur, daß es zwei rein imaginäre Eigenwerte gibt. Ein Vergleich der Eigenwertverteilungen für verschiedene Volumina (s. Abb. 4.7) zeigt, daß der Betrag dieser Eigenwerte mit zunehmendem Volumen abnimmt. Die erste Vermutung wäre nun, daß es sich bei den imaginären Eigenwerten um einen Effekt des endlichen Volumens handelt. In Abb. (4.8) ist der Betrag der imaginären Eigenwerte in Abhängigkeit vom Volumen L zu sehen und das Verhältnis von der Quarkmasse m zum

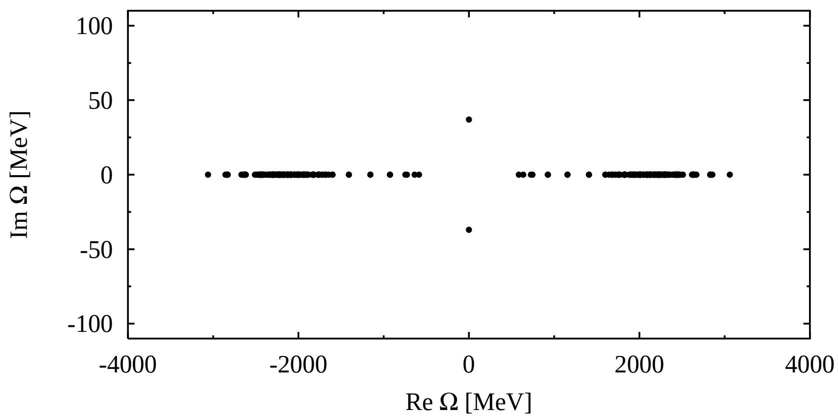


Abbildung 4.6: *Verteilung der Eigenwerte der SRPA-Matrix mit dem eingeschränkten Ansatz (3.1) für die Anregungsoperatoren für ein Volumen $L = 9.40$ fm im chiralen Limes. Es wurden die Parameterwerte aus Gleichung (4.40) benutzt. Mit dem gewählten Cutoff entspricht $L = 9.40$ fm $N_p = 11$.*

Betrag der imaginären Eigenwerte in Abhängigkeit vom Volumen L. Die Punkte entsprechen dabei jeweils Längen, bei denen mit dem gewählten Cutoff neue Impulszustände hinzukommen, d. h. sie entsprechen $N_p = 3, 5, 7, \ldots$ Der Schluß, der Betrag dieser Eigenwerte konvergiere genau wie die Quarkmasse mit zunehmendem Volumen L gegen einen endlichen Wert scheint gerechtfertigt zu sein, da das Verhältnis von Quarkmasse zum Betrag dieser Eigenwerte ab $N_p = 9$ relativ konstant bleibt.
Es zeigt sich, daß der Betrag dieser imaginären Eigenwerte auch mit einer zunehmenden nackten Quarkmasse m_0 abnimmt, und ab einen bestimmten Wert von m_0 werden diese Eigenwerte reell. In Abb. (4.9) ist die Abhängigkeit des Quadrates dieser beiden Eigenwerte von einer nackten Quarkmasse zu sehen. Die Rechnung wurde für ein Volumen von $L = 9.40$ fm durchgeführt, d. h. $N_p = 11$. Das funktionale Verhalten ähnelt dem der Pionlösung in der RPA in drei Dimensionen (s. Abb. 2.3). Das läßt vermuten, bei diesen „imaginären" Eigenwerten handele es sich um die einfach spuriose Lösung, die nach den vorangegangenen Überlegungen mit dem eingeschränkten Ansatz (3.1) für die Anregungsoperatoren im chiralen Limes nicht bei $\Omega_\nu = 0$ liegen darf. Ein weiteres Indiz dafür, daß es sich bei den imaginären Eigenwerten um die einfach spuriose Lösung handelt, wäre,

L [fm]	m_0 [MeV]	m [MeV]	m_0 [MeV]	m [MeV]
1.88	0	540	5	548
5.64	0	413	5	420
9.40	0	388	5	396
13.16	0	378	5	386

Tabelle 4.1: *Quarkmasse m für verschiedene Volumina und $m_0 = 0$ MeV bzw. $m_0 = 5$ MeV, mit den Parameterwerten aus Gleichung (4.40).*

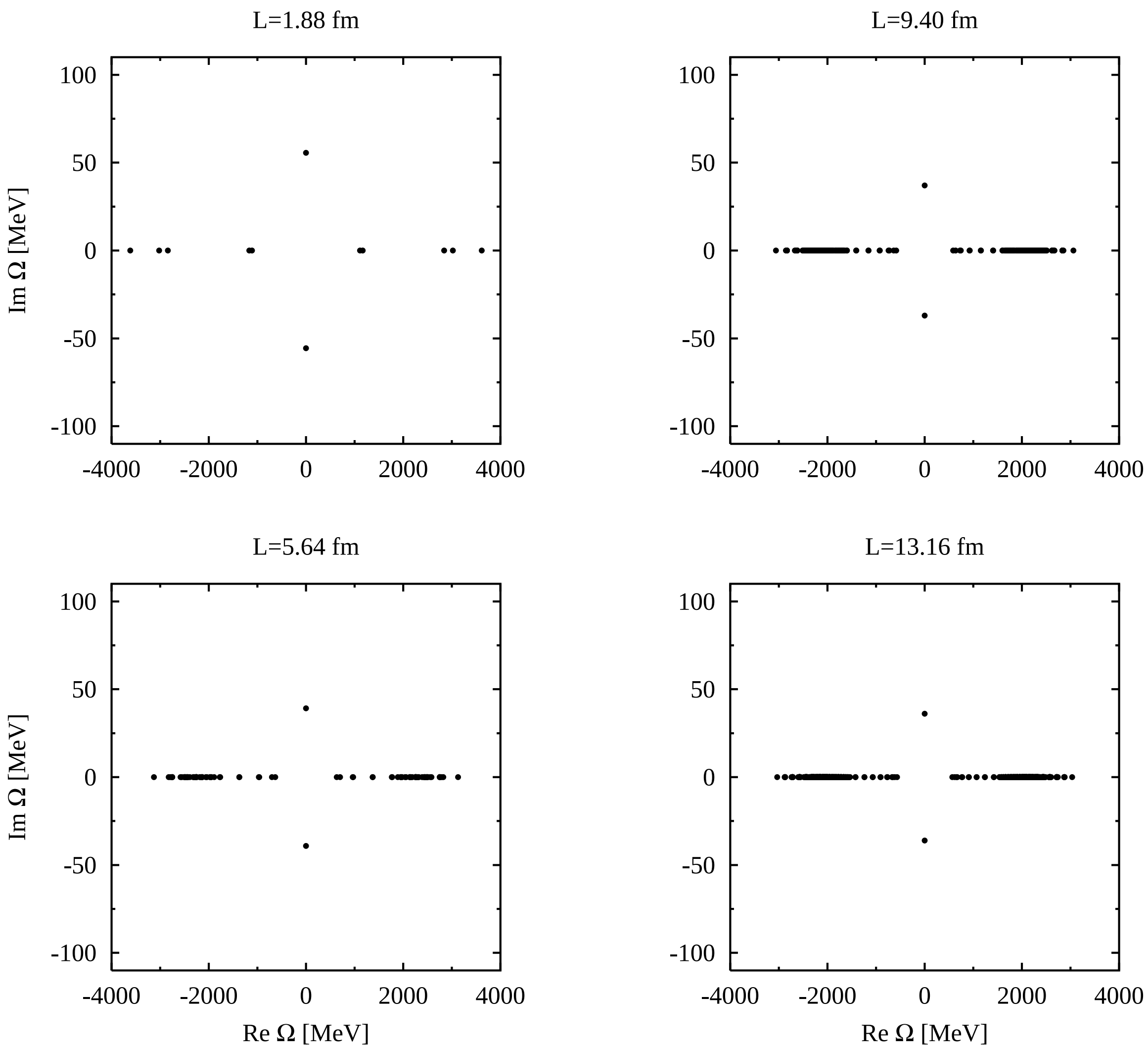


Abbildung 4.7: *Verteilung der Eigenwerte der SRPA-Matrix mit dem eingeschränkten Ansatz (3.1) für die Anregungsoperatoren für verschiedene Volumina im chiralen Limes. Die Parameterwerte aus Gleichung (4.40) wurden benutzt.* $L = 1.88$ *fm entspricht mit dem gewählten Cutoff* $N_p = 3$, $L = 5.64$ *fm entspricht* $N_p = 7$, $L = 9.40$ *fm entspricht* $N_p = 11$ *und* $L = 13.16$ *fm entspricht* $N_p = 15$.

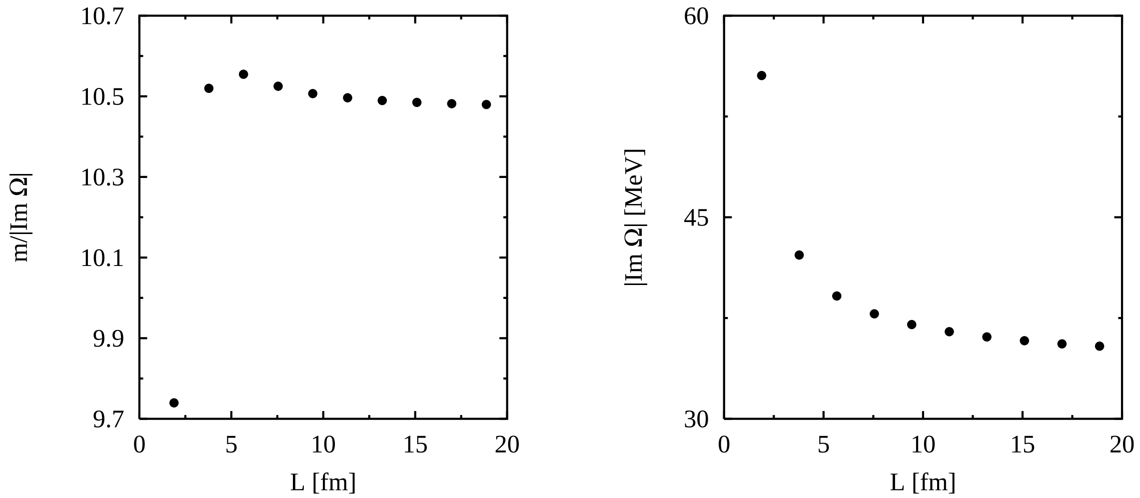


Abbildung 4.8: *Auf dem linken Bild ist das Verhältnis der Quarkmasse m zum Betrag der imaginären Eigenwerte im chiralen Limes in Abhängigkeit vom Volumen L zu sehen, auf dem rechten Bild der Betrag der beiden imaginären Eigenwerte im chiralen Limes in Abhängigkeit vom Volumen L mit dem eingeschränkten Ansatz (3.1) für die Anregungsoperatoren. Die Parameterwerte sind die gleichen wie in Abb. (4.6), d. h. die Werte aus Gleichung (4.40). Die Punkte entsprechen dabei jeweils $N_p = 3, 5, 7, 9, \ldots$.*

wenn sie einen Beitrag zur Response-Funktion im Pion-Kanal lieferten.
Um die Response-Funktionen berechnen zu können, benötigen wir den Pion-Operator

$$\pi(0) = \int dx\, N_\pi \bar{\psi}(x,0) i\gamma_5 \psi(x,0) = iN_\pi \sum_p (B_p^\dagger D_{-p}^\dagger - D_{-p} B_p) \tag{4.41}$$

und den Sigmaoperator

$$\sigma(0) = \int dx\, N_\sigma \bar{\psi}(x,0)\psi(x,0) = N_\sigma \sum_p \big(\frac{m}{E_p}(B_p^\dagger B_p + D^\dagger D_p) - \frac{p}{E_p}(B_p^\dagger D_{-p}^\dagger + D_{-p} B_p)\big). \tag{4.42}$$

N_π und N_σ sind wie in Abschnitt 2.4 dimensionslose Normierungskonstanten. Die Response-Funktionen bestimmen wir aus der Spektraldarstellung (2.58). Für das Pion ergibt sich

$$R(E) = (N_\pi)^2 \sum_\nu \Big| \sum_p \frac{1}{L} (X^\nu(p) - Y^\nu(p)) \Big|^2 \Big(\frac{1}{E - \Omega_\nu + i\epsilon} - \frac{1}{E + \Omega_\nu - i\epsilon} \Big) , \tag{4.43}$$

für das Sigma

$$R(E) = (N_\sigma)^2 \sum_\nu \Big| \sum_p \frac{1}{L} \frac{p}{E_p} (X^\nu(p) + Y^\nu(p)) \Big|^2 \Big(\frac{1}{E - \Omega_\nu + i\epsilon} - \frac{1}{E + \Omega_\nu - i\epsilon} \Big) . \tag{4.44}$$

Es stellt sich heraus, daß ein Teil der Eigenvektoren nicht normierbar ist (s. Gl. 3.13), weil die Y-Amplituden betragsmäßig größer als die X-Amplituden sind. Deswegen werden

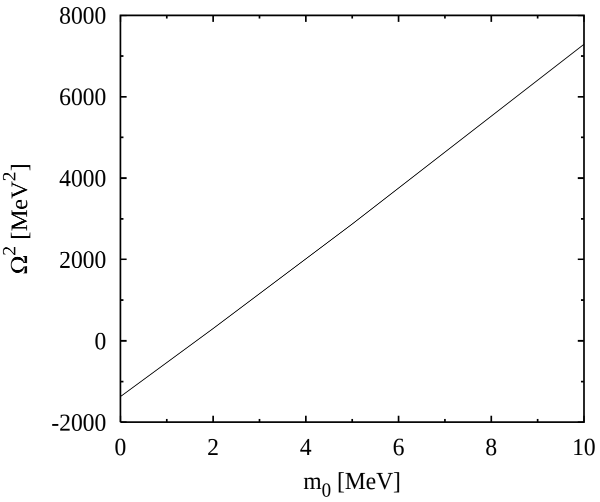


Abbildung 4.9: *Das Quadrat der „imaginären" Eigenwerte in Abhängigkeit von einer nackten Quarkmasse m_0 mit dem eingeschränkten Ansatz (3.1) für die Anregungsoperatoren. Hier wurde $L = 9.40$ fm, d. h. $N_p = 11$, benutzt und die Parameterwerte aus Gleichung (4.40).*

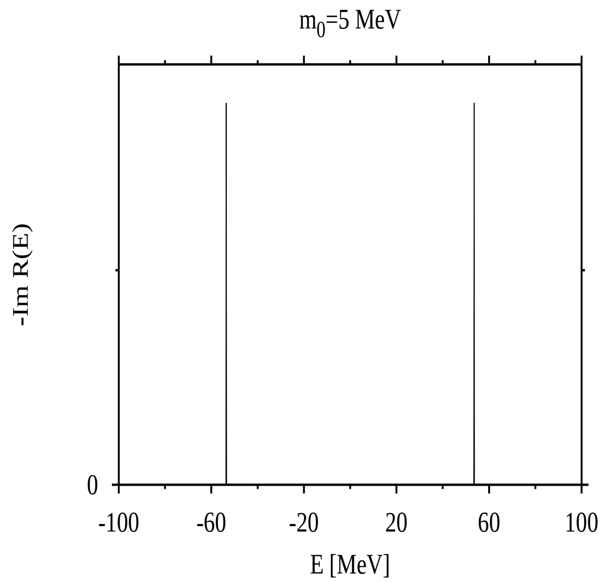


Abbildung 4.10: *Der Imaginärteil der Response-Funktion im Pion-Kanal (mit nicht normierten Eigenvektoren), multipliziert mit (-1), mit dem eingeschränkten Ansatz (3.1) für die Anregungsoperatoren in willkürlichen Einheiten für $m_0 = 5$ MeV im Bereich um $E = 0$. Die Parameterwerte aus Gleichung (4.40) mit $L = 9.40$ fm, d. h. $N_p = 11$, wurden benutzt.*

wir darauf verzichten, die vollständigen Response-Funktionen zu zeigen. Betrachtet man die Response-Funktion für das Pion (Gl. 4.43) einmal genauer, dann sieht man, daß die beiden „imaginären" Eigenwerte nichts zur Response-Funktion beitragen können, solange sie imaginär sind. Die beiden Eigenwerte sind nämlich komplex konjugiert zueinander, die zugehörigen Eigenvektoren auch, so daß sich die Beiträge gegenseitig aufheben. Bei $m_0 = 5$ MeV sind die „imaginären" Eigenwerte schon reell (s. Abb. 4.9), deswegen sollte man hier einen Beitrag der „imaginären" Eigenwerte zur Response-Funktion des Pions beobachten können. Der Bereich um $E = 0$ MeV der Response-Funktion ist in Abb. (4.10) zu sehen für ein Volumen von $L = 9.40$ fm, d. h. $N_p = 11$, sowie eine nackte Masse von $m_0 = 5$ MeV. Man sieht an den Maxima bei etwa ± 55 MeV, daß in der Tat diese „imaginären" Eigenwerte einen Beitrag zur Response-Funktion des Pions leisten. Da die zugehörigen Eigenvektoren nicht normierbar sind, läßt sich über den Wert der Maxima keine Aussage treffen. In der Response-Funktion im Sigma-Kanal fehlen diese Maxima, d. h. die „imaginären" Eigenwerte tragen nicht zur Reponse-Funktion im Sigma-Kanal bei. Falls es sich hier bei den imaginären Eigenwerten also um die einfach spuriose Lösung handelt, würde man erwarten, daß die imaginären Eigenwerte verschwinden, sobald man die Rechnungen mit dem erweiterten Ansatz (3.2) für die Anregungsoperatoren durchführt. An dieser Stelle sollte bemerkt werden, daß eine Modifikation der Gap-Gleichung wohl ebenfalls den gewünschten Effekt hätte: Man erhielte mit dem Ansatz (3.1) die masselosen Goldstone-Bosonen.

4.5 Ergebnisse mit dem erweiterten Ansatz

Wir werden sehen, daß wir zwar die Existenz der einfach spuriosen Lösung durch unseren Ansatz (3.2) sichergestellt haben, es aber trotzdem noch einige Probleme gibt. Die numerische Diagonalisierung der SRPA-Matrix (4.37) zeigt einige erwartete Ergebnisse und einige überraschende Ergebnisse, deren Interpretation noch weiterer Untersuchungen bedarf.

Die Verteilung der Eigenwerte im chiralen Limes mit dem erweiterten Ansatz (3.2) für die Anregungsoperatoren ist in Abb. (4.11) für die gleichen Volumina und Parameterwerte wie in den Rechnungen mit dem eingeschränkten Ansatz zu sehen. Man bemerkt, daß auch hier die Eigenwerte symmetrisch um $\Omega_\nu = 0$ liegen. Auch Eigenwerte bei null erhält man, im Gegensatz zu den Rechnungen mit dem eingeschränkten Ansatz (3.1) für die Anregungsoperatoren. Man erhält allerdings mehr Eigenwerte bei null als erwartet. Da wir nur ein masseloses Teilchen, das „Pion", haben, erwarten wir zwei Eigenwerte Null. Es gibt jedoch jeweils $2N_p$ reelle Eigenwerte bei null. N_p dieser Eigenvektoren zum Eigenwert Null sieht man anhand der Symmetrieeigenschaften der Matrix, diese enthalten nur die Amplituden P^ν und Q^ν. Sie tragen also nichts zur Response-Funktion bei und sind somit physikalisch irrelevant. Diese Lösungen sind nicht normierbar, da in der Normierungsbedingung (3.13) nur die Amplituden X und Y auftauchen. Man hat also unphysikalische, nicht normierbare Lösungen, die man durch die Hinzunahme von Teilchen-Teilchen- und Antiteilchen-Antiteilchen-Anregungen erhält. Wie wir in Abschnitt 4.3 gesehen haben, braucht man diese aber wegen der einfach spuriosen Lösung. Zu den restlichen Eigenvektoren zum Eigenwert Null läßt sich nur sagen, daß der Vektor (4.38), der zum Symme-

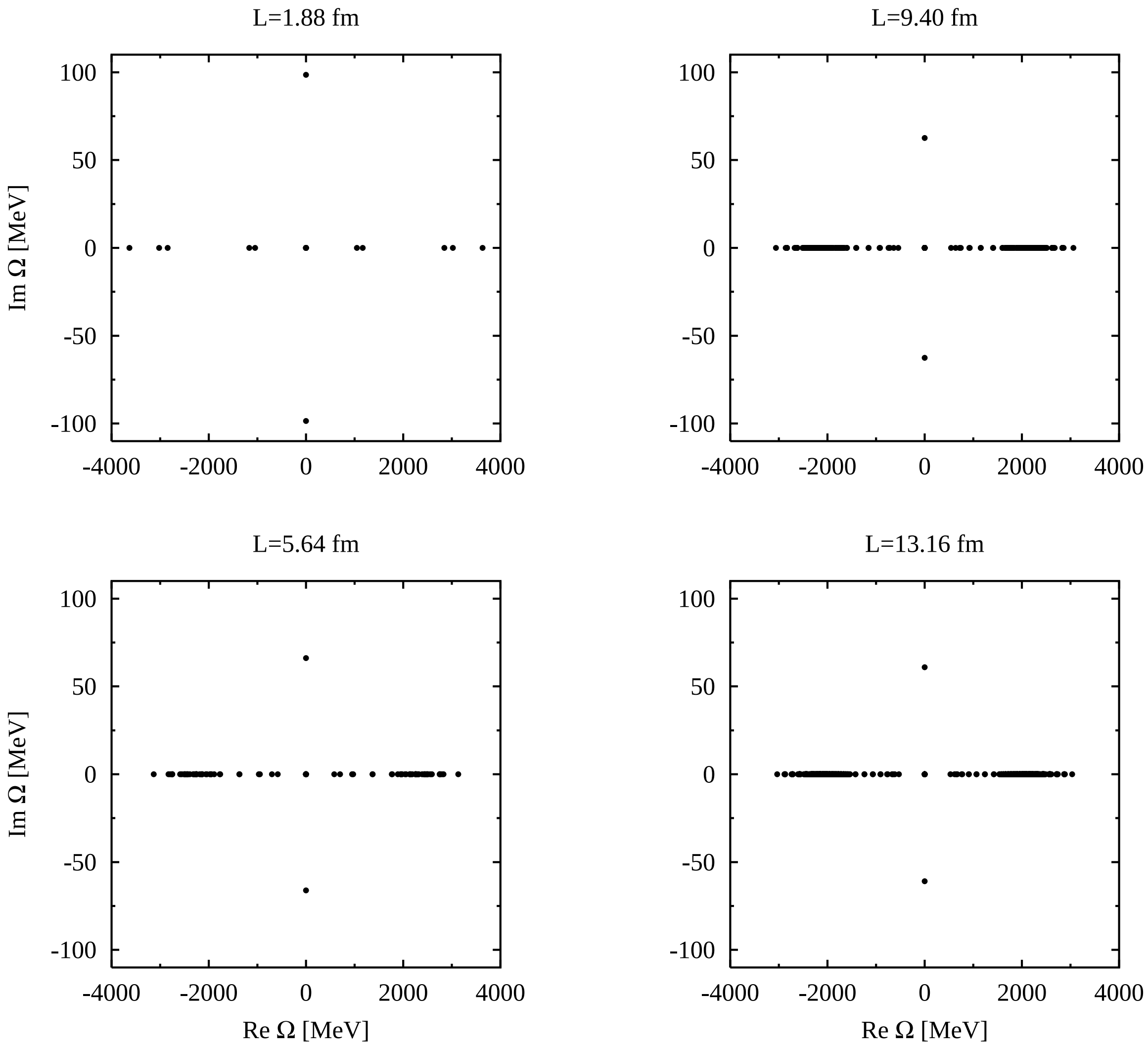


Abbildung 4.11: *Verteilung der Eigenwerte der SRPA-Matrix im chiralen Limes mit dem erweiterten Ansatz (3.2) für die Anregungsoperatoren für die gleichen Volumina und Parameterwerte wie in Abb. (4.6)*

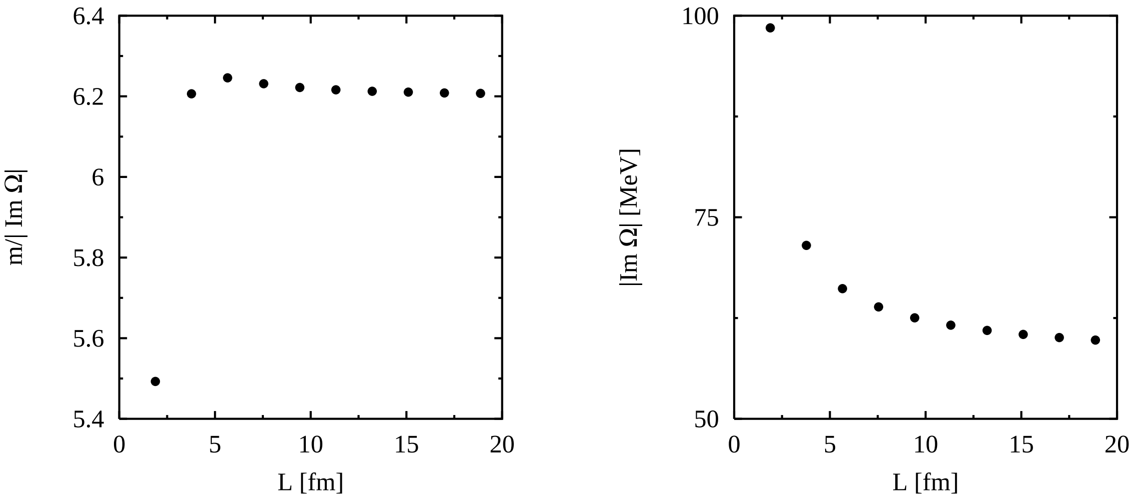


Abbildung 4.12: *Auf dem linken Bild ist das Verhältnis der Quarkmasse m zum Betrag der beiden imaginären Eigenwerte im chiralen Limes in Abhängigkeit vom Volumen L zu sehen, auf dem rechten Bild der Betrag der beiden imaginären Eigenwerte im chiralen Limes in Abhängigkeit vom Volumen L. Die Parameterwerte sind die gleichen wie in Abb. (4.6). Die Punkte entsprechen dabei jeweils $N_p = 3, 5, 7, 9, \ldots$.*

trieoperator gehört, im Raum der Eigenvektoren zu den restlichen N_p Eigenwerten Null liegt.
Überraschend sind auch die zwei rein imaginären Eigenwerte. Mit der einfach spuriosen Lösung können sie nichts zu tun haben, da wir deren Existenz bereits gezeigt haben. Wie man sieht, nimmt deren Betrag mit zunehmendem Volumen ab. In Abb. (4.12) ist der Betrag der imaginären Eigenwerte in Abhängigkeit vom Volumen L zu sehen und das Verhältnis der Quarkmasse m zum Betrag der beiden imaginären Eigenwerte in Abhängigkeit vom Volumen L. Die Punkte entsprechen dabei jeweils Längen, bei denen mit dem gewählten Cutoff (Gl. 4.40) neue Impulszustände hinzukommen, d. h. sie entsprechen $N_p = 3, 5, 7, \ldots$ Auch hier scheint es so zu sein, als konvergiere der Betrag der imaginären Eigenwerte mit zunehmendem Volumen L gegen einen endlichen Wert.
In Abb. (4.13) sind die Eigenwertverteilungen für eine nackte Masse m_0 von 5 MeV zu sehen. Es fällt auf, daß die beiden imaginären Eigenwerte, die man im chiralen Limes hatte, nur noch für $L = 1.88$ fm vorhanden sind. Es zeigt sich, daß diese beiden Eigenwerte genau wie die „imaginären" Eigenwerte, die man mit dem eingeschränkten Ansatz (3.1) für die Anregungsoperatoren erhält, mit zunehmender nackter Masse m_0 auf die reelle Achse zuwandern, und ab einer bestimmten nackten Masse m_0 reell werden, die je kleiner ist, je größer das Volumen ist. So ist es auch zu erklären, daß für $L = 1.88$ fm der Betrag der imaginären Eigenwerte zwar abgenommen hat, jedoch die reelle Achse noch nicht erreicht hat. Das ist der gleiche Effekt, den wir schon im chiralen Limes beobachtet haben, dort nimmt der Betrag der imaginären Eigenwerte mit zunehmenden Volumen ab. In Abb. (4.14) ist die Abhängigkeit des Quadrates dieser „imagnären" Eigenwerte von der nackten Masse m_0 gezeichnet für ein Volumen von $L = 9.40$ fm, d. h. $N_p = 11$. Das funktionale Verhalten ähnelt dem der Pionlösung in der RPA in drei Dimensionen

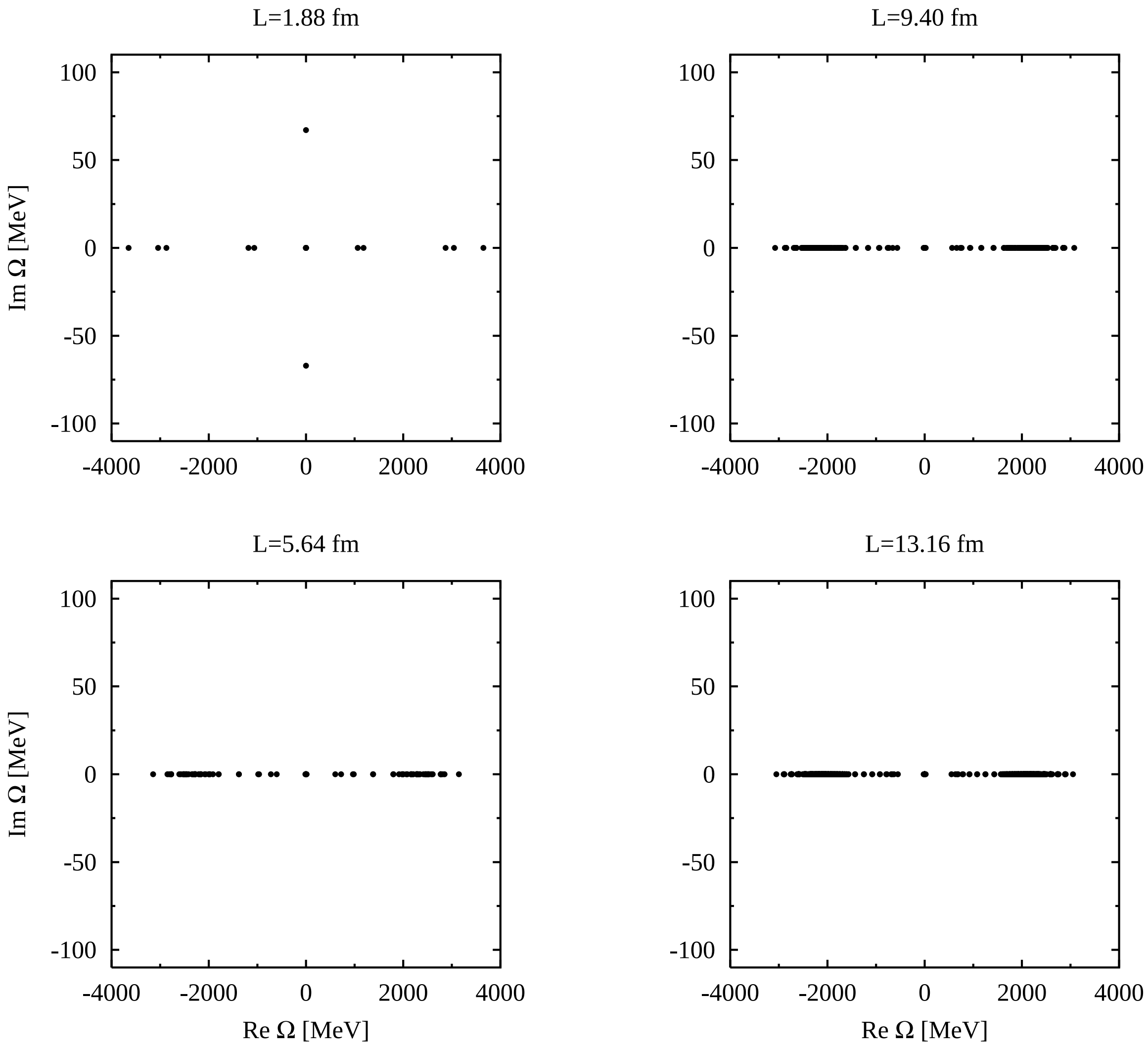


Abbildung 4.13: *Verteilung der Eigenwerte der SRPA-Matrix mit dem erweiterten Ansatz (3.2) für die Anregungsoperatoren für eine nackte Quarkmasse m_0 von 5 MeV. Die Volumina und Parameterwerte sind die gleichen wie in Abb. (4.6).*

(s. Abb. 2.3) und dem der „imaginären" Eigenwerte, die man mit dem eingeschränkten Ansatz (3.1) für die Anregungsoperatoren erhält (s. Abb. 4.9). Das legt die Vermutung nahe, daß es sich bei diesen Lösungen um Lösungen handelt, die eigentlich, wenn man alles richtig macht, im chiralen Limes spurios sind. Es wäre möglich, daß diese „imaginären" Eigenwerte etwas mit der doppelten spuriosen Lösung zu tun haben, denn mit unserem Ansatz (3.2) haben wir zwar die Existenz der einfach spuriosen Lösung gesichert, aber nicht die der doppelt spuriosen Lösung.
Die restlichen Eigenwerte sind rein reell. Auch bei einer endlichen nackten Masse m_0 gibt es immer $2N_p$ Eigenwerte Null. Der Vektor (4.38), der zum Symmetrieoperator gehört, liegt allerdings nur im chiralen Limes im Raum der Eigenvektoren zum Eigenwert Null. Bei der Diskussion der Eigenwertverteilung im chiralen Limes wurde schon erwähnt, daß N_p der Eigenwerte Null schon alleine aus der Symmetrie der Matrix folgen, unabhängig von einer nackten Masse m_0. Wir werden sehen, daß von den restlichen N_p Eigenwerten Null ein Beitrag zur Response-Funktion des Pions geleistet wird.
Sowohl im chiralen Limes als auch mit einer endlichen Masse existieren Eigenvektoren zum Eigenwert Null, deren Normierung nicht möglich ist, weil es sich herausstellt, daß die Amplituden X und Y entweder beide verschwinden oder betragsgleich sind. Das führt zu einer unendlichen Norm (s. Gl. 3.13). Deshalb werden wir auch hier darauf verzichten die Response-Funktionen vollständig zu zeigen. Wir werden nur den Teil der Response-Funktion (s. Gl. 4.43) um $E = 0$ im Pion-Kanal (mit nicht normierten Eigenvektoren) zeigen für $m_0 = 5$ MeV (s. Abb. 4.15). Aus dem gleichen Grund wie bei den Rechnungen mit dem eingschränkten Ansatz (3.1) für die Anregungsoperatoren (s. vorherigen Abschnitt) können die „imaginären" Eigenwerte erst für Werte der nackten Masse m_0 etwas zur Response-Funktion beitragen, bei denen die Eigenwerte reell sind. Bei $m_0 = 5$ MeV ist das der Fall. Den Beitrag der „imaginären" Eigenwerte sieht man deutlich an den Maxima bei etwa ± 20 MeV. Über die Werte der Response-Funktion an den Maxima kann man aufgrund der nicht normierten Eigenvektoren keine Aussage machen. Genau wie in den Rechnungen mit dem eingeschränkten Ansatz (3.1) für die Anregungsoperatoren tragen die „imaginären" Eigenwerte nichts zur Response-Funktion im Sigma-Kanal bei.
Die doppelt spuriose Lösung sind zwei nichtwechselwirkende Pionen. Naiv würde man erwarten, daß die Zwei-Pion-Zustände nicht mit den Ein-Pion-Zuständen mischen. Im Gegensatz zu 3+1 Dimensionen ist in 1+1 Dimensionen ein Zerfall eines Pions in zwei Pionen aber nicht verboten, die Tatsache, daß die „imaginären" Eigenwerte zur Response-Funktion im Pion-Kanal beitragen, widerlegt also nicht unsere Vermutung, daß die „imaginären" Eigenwerte etwas mit der doppelt spuriosen Lösung zu tun haben. Eine Rechnung, die auch die Existenz der doppelt spuriosen Lösung sicherstellt böte eine Möglichkeit, diese Vermutung zu überprüfen und evtl. die „imaginären" Eigenwerte zu interpretieren. Dazu müßte man allerdings unseren Ansatz (3.2) auch im Raum der Zweiteilchenoperatoren noch erweitern. Das soll aber nicht mehr im Rahmen dieser Arbeit geschehen.

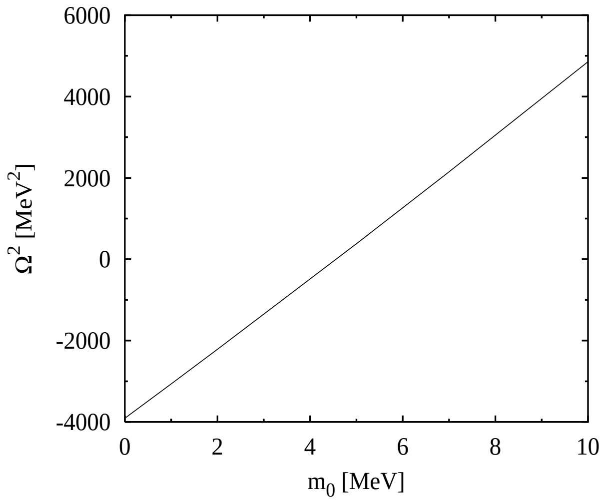


Abbildung 4.14: *Das Quadrat der „imaginären" Eigenwerte in Abhängigkeit von einer nackten Quarkmasse* m_0 *mit dem erweiterten Ansatz (3.2) für die Anregungsoperatoren. Hier wurde* $L = 9.40$ *fm, d. h.* $N_p = 11$*, und es wurden die gleichen Paramaterwerte wie in Abb. (4.6) benutzt.*

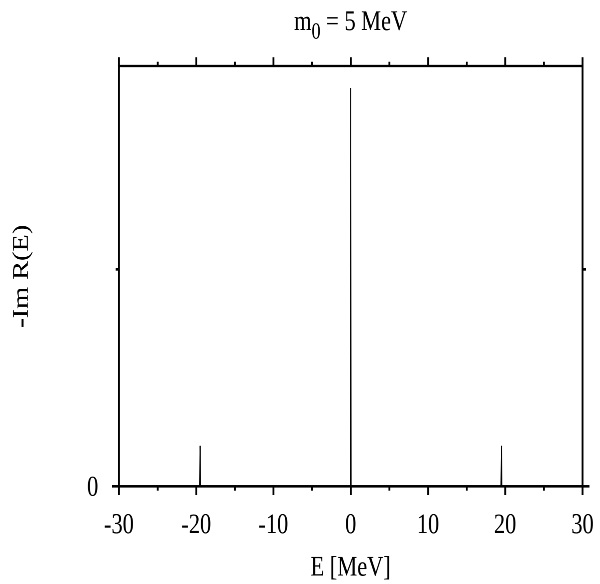


Abbildung 4.15: *Der Imaginärteil der Response-Funktion im Pion-Kanal, multipliziert mit (-1), mit dem erweiterten Ansatz (3.2) für die Anregungsoperatoren in willkürlichen Einheiten für* $m_0 = 5$ *MeV im Bereich um* $E = 0$ *mit* $L = 9.40$ *fm, d. h.* $N_p = 11$*. Die Parameterwerte sind die gleichen wie in Abb. (4.6). Über die Werte der Maxima läßt sich keine Aussage treffen, da die Eigenvektoren nicht normierbar sind.*

Zusammenfassung

Unsere Zielsetzung war, eine Erweiterung der Random Phase Approximation zu finden, die die Symmetrie in der richtigen Form erhält. Als Beispiel wählten wir das NJL-Modell. Dort ist die chirale Symmetrie im HF-Grundzustand gebrochen (im Kontinuum erst ab einer bestimmten Größe für die Kopplungskonstante), d. h. eine konsistente Erweiterung der RPA muß die erforderliche Anzahl von Goldstone-Bosonen liefern.
Zuerst behandelten wir das NJL-Modell in RPA in der Quasi-Boson-Approximation. Wie erwartet erfüllt diese Näherung die Forderungen nach der Existenz der Goldstone-Bosonen, d. h. einer spuriosen Lösung. Wie wir gesehen haben, genügen im RPA-Ansatz für die Anregungsoperatoren Teilchen-Antiteilchen-Anregungen, um die Existenz der spuriosen Lösung sicherzustellen. Wir machten dabei zwei Näherungen: Die RPA-Näherung, die den Ansatz für die Anregungsoperatoren auf den Raum der Einteilchenoperatoren einschränkt, und die Quasi-Boson-Approximation, die in den zu lösenden Bewegungsgleichungen den HF-Grundzustand annimmt. Es gibt nun prinzipiell zwei Möglichkeiten, diese Näherungen zu verbessern: Zum einen kann man den Ansatz für die Anregungsoperatoren auf den Raum der Zweiteilchenoperatoren ausdehnen, zum anderen kann man versuchen, den Grundzustand abzuändern und nicht mehr in der Quasi-Boson-Approximation zu arbeiten. Wir haben uns in dieser Arbeit mit einer Erweiterung des Ansatzes für die Anregungsoperatoren auf Zweiteilchenoperatoren beschäftigt. Der in der Literatur ([20, 21]) übliche Ansatz für die Anregungsoperatoren in der Second RPA, der im Raum der Einteilchenoperatoren auch nur Teilchen-Antiteilchen-Anregungen enthält (s. Gl. 3.1), liefert keine spuriose Lösung. Deswegen weiteten den Ansatz im Raum der Einteilchenoperatoren auf Teilchen-Teilchen- und Antiteilchen-Antiteilchen-Anregungen aus und konnten damit die Existenz der spuriosen Lösung sicherstellen. Die Quasi-Boson-Approximation konnten wir dabei nicht in ihrer ursprünglichen Form beibehalten, sondern wir mußten ein anderes Verfahren finden, damit die Lösung der Bewegungsgleichungen eindeutig bestimmte Anregungsenergien liefert. Wir berechneten dazu die Matrixelemente in den Bewegungsgleichungen erst bei endlicher Temperatur, konnten dann auf beiden Seiten der Gleichungen jeweils gleiche Faktoren herausdividieren, und bildeten dann den Limes $T \to 0$.
Da Rechnungen für das NJL-Modell in SRPA praktisch unmöglich sind, wählten wir das NJL-Modell in einer Raumdimension als Beispiel für unsere Form der SRPA. Die Ergebnisse deuten darauf hin, daß man unseren Ansatz für die Anregungsoperatoren (3.2) im Raum der Zweiteilchenoperatoren noch erweitern muß, wenn man auch die nichtwechselwirkenden Goldstone-Bosonen mit Energie Null erhalten möchte, d. h. die doppelt spuriose Lösung. Es war auch nicht zu erwarten, daß wir die doppelt spuriose Lösung erhalten, da das Quadrat des Symmetrieoperators nicht im Raum der Anregungsoperatoren liegt,

den wir als Ansatz für die SRPA gewählt haben. Diese doppelt spuriose Lösung und die Interpretation der „imaginären" Eigenwerte bedarf noch einer weiteren Untersuchung, für die die Erweiterung auf den vollen Raum nötig ist. Auch ein Vergleich der Ergebnisse in der RPA- bzw. der SRPA-Näherung mit der exakten Lösung steht noch aus.

Anhang A

Spinoren

A.1 Spinoren in 3+1 Dimensionen

Unsere Konvention für die Spinoren in 3+1 Dimensionen lautet

$$u(\vec{p},s) = \sqrt{\frac{E_p+m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E_p+m}\chi_s \end{pmatrix}; \quad v(\vec{p},s) = \sqrt{\frac{E_p+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E_p+m}\chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix}, \tag{A.1}$$

$\vec{\sigma}$ sind dabei die drei üblichen Pauli-Matrizen, χ_s sind Eigenvektoren zu $\vec{\sigma}^2$ und zu σ_3 zum Eigenwert $s = \pm 1$. Die Spinoren sind wie folgt normiert:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\vec{p},s)u(\vec{p},s') &= \delta_{s,s'} \ , \\ \bar{v}(\vec{p},s)v(\vec{p},s') &= -\delta_{s,s'} \ . \end{aligned} \tag{A.2}$$

Für Produkte von Spinoren zu unterschiedlichen Impulsen gilt

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\vec{p}_1,s_1)u(\vec{p}_2,s_2) &= \sqrt{\frac{z_1z_2}{4m^2}}\Big\{\delta_{s_1,s_2}(1-\frac{\vec{p}_1\vec{p}_2}{z_1z_2}) - \frac{i}{z_1z_2}(\vec{p}_1\times\vec{p}_2)^k S^k_{s_1,s_2}\Big\} \ , \\
\bar{u}(\vec{p}_1,s_1)\gamma_5 u(\vec{p}_2,s_2) &= \sqrt{\frac{z_1z_2}{4m^2}}\Big\{\frac{1}{z_1z_2}(\vec{p}_2z_1-\vec{p}_1z_2)^k S^k_{s_1,s_2}\Big\} \ , \\
\bar{u}(\vec{p}_1,s_1)\gamma_0 u(\vec{p}_2,s_2) &= \sqrt{\frac{z_1z_2}{4m^2}}\Big\{\delta_{s_1,s_2}(1+\frac{\vec{p}_1\vec{p}_2}{z_1z_2}) + \frac{i}{z_1z_2}(\vec{p}_1\times\vec{p}_2)^k S^k_{s_1,s_2}\Big\} \ , \\
\bar{u}(\vec{p}_1,s_1)\gamma_i u(\vec{p}_2,s_2) &= \sqrt{\frac{z_1z_2}{4m^2}}\Big\{\frac{i\varepsilon_{ijk}}{z_1z_2}(\vec{p}_2z_1-\vec{p}_1z_2)^j S^k_{s_1,s_2}\Big\} \ , \\
\bar{u}(\vec{p}_1,s_1)v(\vec{p}_2,s_2) &= \sqrt{\frac{z_1z_2}{4m^2}}\Big\{\frac{1}{z_1z_2}(\vec{p}_2z_1-\vec{p}_1z_2)^k S^k_{s_1,s_2}\Big\} \ , \\
\bar{u}(\vec{p}_1,s_1)\gamma_5 v(\vec{p}_2,s_2) &= \sqrt{\frac{z_1z_2}{4m^2}}\Big\{\delta_{s_1,s_2}(1-\frac{\vec{p}_1\vec{p}_2}{z_1z_2}) - \frac{i}{z_1z_2}(\vec{p}_1\times\vec{p}_2)^k S^k_{s_1,s_2}\Big\} \ , \\
\bar{u}(\vec{p}_1,s_1)\gamma_0 v(\vec{p}_2,s_2) &= \sqrt{\frac{z_1z_2}{4m^2}}\Big\{\frac{1}{z_1z_2}(\vec{p}_1z_2+\vec{p}_2z_1)^k S^k_{s_1,s_2}\Big\} \ , \\
\bar{u}(\vec{p}_1,s_1)\gamma^i v(\vec{p}_2,s_2) &= \sqrt{\frac{z_1z_2}{4m^2}}\Big\{S^i_{s_1,s_2}(1-\frac{\vec{p}_1\vec{p}_2}{z_1z_2}) + \frac{1}{z_1z_2}(\vec{p}_1)^i(\vec{p}_2)^k S^k_{s_1,s_2}\Big\} \ ,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\bar{v}(\vec{p}_1, s_1)v(\vec{p}_2, s_2) &= -\sqrt{\frac{z_1 z_2}{4m^2}}\Big\{\delta_{s_1,s_2}(1 - \frac{\vec{p}_1\vec{p}_2}{z_1 z_2}) - \frac{i}{z_1 z_2}(\vec{p}_1 \times \vec{p}_2)^k S^k_{s_1,s_2}\Big\} \;, \\
\bar{v}(\vec{p}_1, s_1)\gamma_5 v(\vec{p}_2, s_2) &= \sqrt{\frac{z_1 z_2}{4m^2}}\Big\{\frac{1}{z_1 z_2}(\vec{p}_1 z_2 - \vec{p}_2 z_1)^k S^k_{s_1,s_2}\Big\} \;, \\
\bar{v}(\vec{p}_1, s_1)\gamma_0 v(\vec{p}_2, s_2) &= \sqrt{\frac{z_1 z_2}{4m^2}}\Big\{\delta_{s_1,s_2}(1 + \frac{\vec{p}_1\vec{p}_2}{z_1 z_2}) + \frac{i}{z_1 z_2}(\vec{p}_1 \times \vec{p}_2)^k S^k_{s_1,s_2}\Big\} \;, \\
\bar{v}(\vec{p}_1, s_1)\gamma^i v(\vec{p}_2, s_2) &= \sqrt{\frac{z_1 z_2}{4m^2}}\Big\{ - \frac{i\varepsilon_{ijk}}{z_1 z_2}(\vec{p}_2 z_1 - \vec{p}_1 z_2)^j S^k_{s_1,s_2}\Big\} \;.
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

Dabei wurde zur Abkürzung $z = E_p + m$ eingeführt, die Definition für $\vec{S}$ findet sich in Gl. (2.42).

A.2 Spinoren in 1+1 Dimensionen

Unsere Konvention für die Spinoren für ein Teilchen der Masse m lautet in 1+1 Dimensionen (s. Gl. 4.7):

$$
u(p) = \sqrt{\frac{\omega_p + m}{2m_0}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p}{\omega_p + m_0} \end{pmatrix}, \quad v(p) = \sqrt{\frac{\omega_p + m_0}{2m_0}} \begin{pmatrix} \frac{p}{\omega_p + m_0} \\ 1 \end{pmatrix} \;. \tag{A.4}
$$

Diese Spinoren erfüllen die Relationen

$$
\bar{u}(p)u(p) = 1 \;; \quad \bar{v}(p)v(p) = -1 \;.
$$

Für Produkte von Spinoren zu unterschiedlichen Impulsen gilt:

$$
\begin{aligned}
\bar{u}(p_1)u(p_2) &= \frac{1}{2m\sqrt{z_1 z_2}}(z_1 z_2 - p_1 p_2) \;, \\
\bar{u}(p_1)\gamma_5 u(p_2) &= \frac{-1}{2m\sqrt{z_1 z_2}}(p_1 z_2 - p_2 z_1) \;, \\
\bar{u}(p_1)v(p_2) &= \frac{-1}{2m\sqrt{z_1 z_2}}(p_1 z_2 - p_2 z_1) \;, \\
\bar{u}(p_1)\gamma_5 v(p_2) &= \frac{1}{2m\sqrt{z_1 z_2}}(z_1 z_2 - p_1 p_2) \;, \\
\bar{v}(p_1)v(p_2) &= \frac{-1}{2m\sqrt{z_1 z_2}}(z_1 z_2 - p_1 p_2) \;, \\
\bar{v}(p_1)\gamma_5 v(p_2) &= \frac{1}{2m\sqrt{z_1 z_2}}(p_1 z_2 - p_2 z_1) \;,
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

mit $z_1 = E_1 + m$.

Anhang B

Numerische Lösung der RPA-Gleichungen

B.1 Allgemeines Verfahren zur Reduzierung der Dimension der RPA-Matrix für reelle Matrizen A und B

Die numerische Lösung der RPA-Gleichungen

$$\begin{pmatrix} A^{(2)} & -B^{(2)} \\ B^{(2)*} & -A^{(2)*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix} = \Omega_\nu \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix} \tag{B.1}$$

läßt sich vereinfachen, falls die Matrizen A und B reell sind, indem man die Dimension der zu diagonalisierenden Matrix auf die Hälfte reduziert (s. [26]). Dazu definiert man zwei neue Vektoren

$$W^\nu = i\sqrt{\frac{\Omega_\nu}{2}}(X^\nu + Y^\nu); \quad Z^\nu = \sqrt{\frac{1}{2\Omega_\nu}}(X^\nu - Y^\nu). \tag{B.2}$$

Aus Gl. (B.1) erhält man damit

$$\begin{aligned} i(A+B)Z^\nu &= W^\nu, \\ -i(A-B)W^\nu &= \Omega_\nu^2 Z^\nu. \end{aligned} \tag{B.3}$$

Setzt man die erste der beiden Gleichungen in die zweite ein, dann ergibt sich folgendes:

$$(A-B)(A+B)Z^\nu = \Omega_\nu^2 Z^\nu. \tag{B.4}$$

Man geht nun davon aus, daß die Matrizen $A+B$ und $A-B$ positiv definit sind. Das ist der Fall, wenn die Lösungen der RPA stabil sind. Dann kann man die Wurzeln von $A+B$ suchen, d. h. eine Matrix T finden, so daß

$$A + B = T^T T \tag{B.5}$$

gilt. Zusammen mit Gl. (B.4) ergibt sich dann ein reelles symmetrisches Eigenwertproblem

$$T(A-B)T^T R^\nu = \Omega_\nu^2 R^\nu, \tag{B.6}$$

mit $R^\nu = TZ^\nu$.
Die Amplituden X^ν und Y^ν ergeben sich dann aus den R^ν:

$$\begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\Omega_\nu}}(T^T R^\nu \pm \Omega_\nu T^{-1} R^\nu) \ . \tag{B.7}$$

Auf diese Weise hat man also die Lösung der Gl. (B.1) auf die Diagonalisierung zweier Matrizen der halben Dimension vereinfacht. In unserem Fall hat entweder $A+B$ (im Sigma-Kanal) oder $A-B$ (im Pion-Kanal) eine besonders einfache diagonale Struktur, deswegen liegt es nahe, das obige Verfahren für den Pion-Kanal noch etwas zu modifizieren. Hier liegt es nahe nicht die Wurzel von $A+B$ zu suchen, sondern die von $A-B$, da diese Matrix bereits diagonal ist. Man setzt dann

$$A-B = TT^T. \tag{B.8}$$

Zusammen mit Gl. (B.4) erhält man auch hier ein reelles symmetrisches Eigenwertproblem

$$T^T(A+B)TR^\nu = \Omega_\nu^2 R^\nu, \tag{B.9}$$

mit $R^\nu = T^{-1}Z^\nu$.
Die Amplituden X^ν und Y^ν ergeben sich hier aus

$$\begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\Omega_\nu}{2}}(\Omega_\nu (TT^T)^{-1} TR^\nu \pm TR^\nu) \ . \tag{B.10}$$

B.2 Reduzierung der Dimension der RPA-Matrix durch Ausnutzen der Entartung

Die Matrix T aus dem vorherigen Abschnitt hat in unserem Fall immer die Form

$$T_{mn} = \sqrt{2E_m}\delta_{mn}, \tag{B.11}$$

d. h. diese Matrix ist symmetrisch ($T^T = T$). Die zu diagonalisierende Matrix (sei hier mit M bezeichnet) (s. Gl. (B.6) bzw. Gl. (B.9)) ist nur eine Funktion der Impulsbeträge, d. h. stark entartet. Sie hat in beiden Fällen die Struktur

$$M_{mn} = 4E_n^2\delta_{mn} + C_{mn}(|\vec{p}_m|, |\vec{p}_n|), \tag{B.12}$$

wobei die C_{mn} eine bzgl. $\vec{p}_m$ und $\vec{p}_n$ symmetrische Funktion der Impulsbeträge sind. Die Entartung kann man ausnutzen, um die Dimension der Matrix weiter zu reduzieren. Wir werden dazu ein einfaches Beispiel betrachten, ein zweidimensionales Problem mit drei möglichen Impulszuständen 0, p und $-p$ in jeder Raumrichtung. Es gibt zwar neun verschiedene Impulse, d. h. die Matrix M ist eine 9×9 Matrix, aber nur drei verschiedene Impulsbeträge: 0,p und $\sqrt{2}p$. Die Matrix M hat nun folgende Form:

$$M = \left(\begin{array}{c|cccc|cccc} B_{00} & C_{01} & C_{01} & C_{01} & C_{01} & C_{02} & C_{02} & C_{02} & C_{02} \\ \hline C_{01} & B_{11} & C_{11} & C_{11} & C_{11} & C_{12} & C_{12} & C_{12} & C_{12} \\ C_{01} & C_{11} & B_{11} & C_{11} & C_{11} & C_{12} & C_{12} & C_{12} & C_{12} \\ C_{01} & C_{11} & C_{11} & B_{11} & C_{11} & C_{12} & C_{12} & C_{12} & C_{12} \\ C_{01} & C_{11} & C_{11} & C_{11} & B_{11} & C_{12} & C_{12} & C_{12} & C_{12} \\ \hline C_{02} & C_{12} & C_{12} & C_{12} & C_{12} & B_{22} & C_{22} & C_{22} & C_{22} \\ C_{02} & C_{12} & C_{12} & C_{12} & C_{12} & C_{22} & B_{22} & C_{22} & C_{22} \\ C_{02} & C_{12} & C_{12} & C_{12} & C_{12} & C_{22} & C_{22} & B_{22} & C_{22} \\ C_{02} & C_{12} & C_{12} & C_{12} & C_{12} & C_{22} & C_{22} & C_{22} & B_{22} \end{array} \right), \tag{B.13}$$

mit $B_{ii} = 4E_i^2 + C_{ii}$.
Der Index 0 bezieht sich hier auf Impulsbetrag 0, der Index 1 auf Impulsbetrag p und der Index 2 auf Impulsbetrag $\sqrt{2}p$. Diese Matrix hat drei Eigenwerte $4E_1^2$ und drei Eigenwerte $4E_2^2$. Durch eine Basistransformation kann man das Problem nun auf ein 3×3 Problem

$$\begin{pmatrix} 4E_0^2 + C_{00} & 2C_{01} & 2C_{02} \\ 2C_{01} & 4E_1^2 + 4C_{11} & 4C_{12} \\ 2C_{02} & 4C_{12} & 4E_2^2 + 4C_{22} \end{pmatrix} \tag{B.14}$$

mit Eigenwerten $\lambda_{1...3}$ und Eigenvektoren $\vec{x}_{1...3}$ reduzieren. Wie erhält man hieraus die Eigenvektoren des vollständigen 9×9 Problems? Eigenvektoren zum Eigenwert $4E_1^2$ sind z. B.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{B.15}$$

Die Eigenvektoren zum Eigenwert $4E_2^2$ haben die gleiche Struktur. Insgesamt bilden diese Eigenvektoren einen Teil der Basis des neundimensionalen Lösungsraumes, als Basisergänzung kann man auf den hier gewählten Eigenvektoren orthogonal stehende Vektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{B.16}$$

wählen. Die Eigenvektoren zu den Eigenwerten aus dem reduzierten 3×3 Problem ergeben sich dann als Linearkombination dieser drei Basisergänzungsvektoren. Für den Eigenvektor $\vec{y}_i$ zum Eigenwert λ_i gilt:

$$\vec{y}_i = (\vec{x}_i)_1\vec{e}_1 + (\vec{x}_i)_2\vec{e}_2 + (\vec{x}_i)_3\vec{e}_3. \tag{B.17}$$

Das allgemeine $n \times n$ Problem läßt sich also unter Ausnutzung der Entartung stark reduzieren. Die Matrix M hat dann jeweils $(n_k - 1)$-fache Eigenwerte $4E_k^2$ bei n_k-facher Entartung. Durch eine Basistransformation läßt sich die Matrix dann teildiagonalisieren. Man braucht dann nur noch das Problem

$$\begin{pmatrix} 4E_1^2 + n_1 b_{11} & \sqrt{n_1 n_2} b_{12} & \sqrt{n_1 n_3} b_{13} & \cdots \\ \sqrt{n_2 n_1} b_{21} & 4E_2^2 + n_2 b_{22} & \sqrt{n_2 n_3} b_{23} & \cdots \\ \sqrt{n_3 n_1} b_{31} & \sqrt{n_1 n_3} b_{13} & 4E_3^2 + n_3 b_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{B.18}$$

im nichtentarteten Unterraum zu lösen, und erhält so die verschobenen Eigenwerte. Die unverschobenen Eigenwerte liefern keinen Beitrag zur Response-Funktion, die verschobenen liefern die n_k-fache Stärke.

Anhang C

Matrixelemente für die SRPA

Die explizite Form der Matrixelemente für die SRPA-Gleichungen (3.9) im NJL-Modell in 1+1 Dimensionen lautet:

$$
\begin{aligned}
A^{(2)}_{i,m} &= 2E_i\delta_{m,i} - \frac{2G}{L}\Big\{\frac{p_{m1}p_{i1}}{E_mE_i} + \frac{m^2}{E_mE_i} + 1\Big\}\delta_{p_{i1},-p_{i2}}\delta_{p_{m1},-p_{m2}} \ , \\
B^{(2)}_{i,m} &= -\frac{2G}{L}\Big\{-\frac{p_{m1}p_{i1}}{E_mE_i} - \frac{m^2}{E_mE_i} + 1\Big\}\delta_{p_{i1},-p_{i2}}\delta_{p_{m1},-p_{m2}} \ , \\
C^{(2)}_{i,m} &= -\frac{2G}{LE_iE_m}m(p_{i1}-p_{m1})\delta_{p_{i1},p_{i2}}\delta_{p_{m1},p_{m2}} \ , \\
D^{(2)}_{i,m} &= \frac{2G}{LE_iE_m}m(p_{i1}-p_{m1})\delta_{p_{i1},p_{i2}}\delta_{p_{m1},p_{m2}} \ , \\
A^{(3)}_{i,mj} &= -\frac{G}{L}\Big\{\frac{\delta_{i1,j1}}{\sqrt{E_{m1}z_{m1}E_{m2}z_{m2}E_{j2}z_{j2}E_{i2}z_{i2}}}(p_{m1}p_{i2}-z_{m1}z_{i2})(p_{j2}z_{m2}-p_{m2}z_{j2}) \\
&\qquad -(m1\leftrightarrow j1) \\
&\qquad +\frac{\delta_{i2,j2}}{\sqrt{E_{m1}z_{m1}E_{m2}z_{m2}E_{j1}z_{j1}E_{i1}z_{i1}}}(p_{m2}p_{i1}-z_{i1}z_{m2})(p_{m1}z_{j1}-p_{j1}z_{m1}) \\
&\qquad -(m2\leftrightarrow j2)\Big\}\delta_{i1,-i2} \ , \\
C^{(3)}_{i,mj} &= -\frac{G}{L}\Big\{\frac{\delta_{i1,m1}}{\sqrt{E_{m2}z_{m2}E_{j2}z_{j2}E_{i2}z_{i2}E_{j1}z_{j1}}}(z_{j2}p_{m2}-z_{m2}p_{j2})(z_{i2}p_{j1}-p_{i2}z_{j1}) \\
&\qquad -(m1\leftrightarrow j1)\Big\}\delta_{i1,i2} \ , \\
D^{(3)}_{i,mj} &= -\frac{G}{L}\Big\{\frac{\delta_{i2,m2}}{\sqrt{E_{m1}z_{m1}E_{j2}z_{j2}E_{i1}z_{i1}E_{j1}z_{j1}}}(z_{j1}p_{m1}-p_{j1}z_{m1})(z_{i2}p_{j2}-z_{j2}p_{i2}) \\
&\qquad -(m2\leftrightarrow j2)\Big\}\delta_{i1,i2} \ , \\
A^{(4)}_{ik,mj} &= (E_{i1}+E_{i2}+E_{k1}+E_{k2})\ \delta_{i,m}\delta_{k,j} \\
&\quad -\frac{G}{L}\Big\{\frac{\delta_{i2,m2}\delta_{k2,j2}-\delta_{i2,j2}\delta_{k2,m2}}{\sqrt{E_{i1}z_{i1}E_{k1}z_{k1}E_{m1}z_{m1}E_{j1}z_{j1}}}(p_{j1}z_{m1}-p_{m1}z_{j1})(p_{i1}z_{k1}-p_{k1}z_{i1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta_{i1,m1}\delta_{k1,j1}-\delta_{i1,j1}\delta_{k1,m1}}{\sqrt{E_{i2}z_{i2}E_{k2}z_{k2}E_{m2}z_{m2}E_{j2}z_{j2}}}(p_{j2}z_{m2}-p_{m2}z_{j2})(p_{i2}z_{k2}-p_{k2}z_{i2})\\
+\Big(&-\frac{\delta_{k,j}}{\sqrt{E_{i2}z_{i2}E_{i1}z_{i1}E_{m2}z_{m2}E_{m1}z_{m1}}}(p_{m1}p_{i2}z_{i1}z_{m2}+p_{m2}p_{i1}z_{m1}z_{i2}\\
&\quad -z_{m1}z_{m2}z_{i1}z_{i2}-p_{m1}p_{m2}p_{i1}p_{i2})\\
&+-+\ldots\text{alle möglichen Permutationen}\Big)\Big\}\ ,
\end{aligned}
\tag{C.1}
$$

mit $z_j = E_j + m$.

Literaturverzeichnis

[1] J. Gasser, H. Leutwyler, Ann. Phys. (N. Y.) **158**, 142 (1984)

[2] J. Goldstone, Nuovo Cimento **19**, 154 (1961)

[3] J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg, Phys. Rev. **127**, 965 (1962)

[4] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, V. F. Keisskopf, Phys. Rev. **D 9**, 3471 (1974)

[5] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, Phys. Rev. **D 10**, 2599 (1974)

[6] T. DeGrand, R. L. Jaffe, K. Johnson, J. Kiskis, Phys. Rev. **D 12**, 2060 (1975)

[7] A. Chodos, C. B. Thorn, Phys. Rev. **D 12**, 2733 (1975)

[8] G. E. Brown, M. Rho, Phys. Lett. **B 82**, 177 (1979)

[9] G. A. Miller, A. W. Thomas, S. Théberge, Phys. Lett. **B 91**, 192 (1980)

[10] R. Machleidt, K. Holinde, Ch. Elster, Phys. Rep. **149**, 1 (1987)

[11] R. Vin Mau, *The Paris NN Potential, in Mesons and Nuclei, Vol. I* (Hrsg. M. Rho, D. Wilkinson), Amsterdam (1979)

[12] Z. Aouissat, G. Chanfray, P. Schuck, J. Wambach, Nucl. Phys. **A 603**, 458 (1996)

[13] E. R. Marshalek, Nucl. Phys. **A 224**, 221 (1974)

[14] Y. Nambu, G. Jona-Lasinio Phys. Rev. **122**, 345 (1961); Phys. Rev. **124**, 246 (1961)

[15] U. Vogl, W. Weise, Progr. Part. and Nucl. Phys. **27** (1991)

[16] S. P. Klevansky, Rev. Mod. Phys. **64**, 3 (1992)

[17] E. Quack, S. P. Klevansky, Phys. Rev. **C 49**, 3283 (1994)

[18] V. Dmitrašinovič, H.-J. Schulze, R. Tegen, R. H. Lemmer, Ann. Phys. **238**, 332 (1995)

[19] P. P. Domitrovich, D. Bückers, H. Müther, Phys. Rev. **C 48**, 413 (1993)

[20] C. Yannouleas, Phys. Rev. **C 35**, 1159 (1987)

[21] S. Drożdż, S. Nishizaki, J. Speth, J. Wambach, Phys. Rep. **197**,1 (1990)

[22] C. Itzhykson, J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York (1985)

[23] J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **106**, 162 (1957)

[24] N. N. Bogoliubov, Sov. Phys.-JETP, **7**, 41 (1958); J. G. Valatin, Nuovo Cimento, **7**, 843 (1958)

[25] D. J. Rowe, *Nuclear Collective Motion*, Methuen and Co. Ltd., London (1970)

[26] P. Ring, P.Schuck, *The Nuclear Many-Body-Problem*, Springer, Berlin (1980)

[27] Ta-Pei Cheng, Ling-Fong Li, *Gauge theory of elementary particle physics*, Oxford University Press, New York (1984)

[28] H. M. Sommermann, Ann. Phys. (N. Y.) **151**, 163 (1983)

[29] J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistische Quantenfeldtheorie*, BI Hochschultaschenbuch 101 (1967)

[30] A. L. Fetter, J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, McGraw-Hill, New York (1971)

[31] S. Adachi, E. Lipparini, Nucl. Phys. **A 489**, 445 (1988)

[32] K. Johnson, Nuovo Cimento **9**, 990 (1961)

[33] S. Coleman Phys. Rev. **D 11** 2088 (1975)

Danksagung

Zuerst möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. J. Wambach für die Anregung zu dieser Arbeit und sein ständiges Interesse bedanken.

Allen Mitgliedern der NHC-Gruppe danke ich für die angenehme Atmosphäre und ihre ständige Diskussionsbereitschaft. Mein besonderer Dank gilt dabei Herrn Dr. M. Buballa für die Betreuung dieser Arbeit. Er war jederzeit bereit, auftretende Fragen zu beantworten und Probleme zu diskutieren.

Herrn Prof. P. Schuck bin ich für kritische Diskussionen und fruchtbare Anregungen zu Dank verpflichtet.

An dieser Stelle möchte ich mich auch für die Förderung meines Studiums durch die Studienstiftung des deutschen Volkes bedanken.