Diplomarbeit

Chirale Extrapolation mit dem $1/N_C$ korrigierten NJL-Modell

Dominik Nickel

Oktober 2003

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die subatomaren Kräfte zwischen Quarks und damit auch Hadronen werden im niederenergetischen Bereich von der starken Wechselwirkung dominiert, deren heute allgemein anerkannte Theorie die Quantenchromodynamik (QCD) ist.

Die QCD ist eine $SU(3)$-Eichtheorie, mit Quarks als Fundamentaldarstellungen der Eichgruppe. Der Raum dieser Darstellung wird als Farbraum bezeichnet. Wegen der nichtabelschen Struktur der Eichgruppe wechselwirken die Eichbosonen, die sogenannten Gluonen, mit sich selbst. Man sagt daher, dass auch sie Farbe tragen. In der Natur wurden sechs verschiedene Quarks gefunden ('up', 'down', 'strange', 'charm', 'bottom', 'top'), von denen aber nur die ersten zwei wegen ihrer leichten Masse für die leichtesten Hadronen eine Rolle spielen.

Obwohl sich die QCD auf den ersten Blick wenig von der QED als abelsche Eichtheorie unterscheidet, birgt sie mehr Phänomene und lässt sich wohl daher deutlich schwerer handhaben. So lässt sich die QCD nur bei hohen Energien perturbativ behandeln, da ihre Kopplungskonstante für unendliche Energien verschwindet ('Asymptotische Freiheit'), im niederenergetischen Bereich aber größer als eins ist. In diesem nicht-perturbativem Bereich besitzt die QCD die Eigenschaft des 'Confinements', deren Ursache bis heute noch nicht vollständig geklärt ist. Danach findet man im niederenergetischen Bereich nur farbneutrale Objekte (triviale Darstellungen der Eichgruppe), d.h. die effektiven Freiheitsgrade der QCD sind hier Hadronen. Ein weiteres Phänomen der QCD ist die komplizierte Vakuumstruktur, die mit der spontanen chiralen Symmetriebrechung verbunden ist, auf welche im nächsten Kapitel eingegangen wird.

Um die starke Wechselwirkung bei niedrigen Energien zu beschreiben bietet sich zum einen die Verwendung phänomenologischer Modelle, mit Quarks oder Hadronen als Freiheitsgrade, an. Dies sind Modelle, die bestimmte Eigenschaften mit der QCD teilen und von denen daher erwartet wird, dass sie in Grenzfällen gleiche Resultate liefern. Ein solches Modell ist das Nambu-Jona–Lasino Modell (NJL-Modell), mit dem sich Mesonen und die chirale Symmetriebrechung beschreiben lassen. Mit solchen Modellen lässt sich aber schwer abschätzen, wie verlässlich die Ergebnisse sind. Eine zweite Möglichkeit ist die Verwendung effektiver Theorien, wie z.B. der chiralen Störungstheorie, bei denen die QCD in Ordnungsparametern entwickelt wird. Hier lässt sich zwar der Grenzfall angeben, in dem gleiche Resultate wie in der QCD zu erwarten sind, nicht aber wieweit von ihm abgewichen werden kann ('Konvergenzradius'). Die konzeptionell einfachste, aber aufwendigste Möglichkeit ist das Lösen der QCD auf einem diskreten, endlichen Raumzeitgitter:

Die Gitter-QCD. Mit ihr können Matrixelemente von Operatoren und Grundzustandenergien (damit auch Massen) a priori aus der QCD berechnet werden. Das Hauptproblem hier ist der numerische Aufwand, weshalb Rechnungen nur auf relativ kleinen Gittern mit unphysikalisch großen Massen für 'up'- und 'down'-Quark möglich sind. Für die Extrapolationen zum Kontinuum und zu kleineren Stromquarkmassen (chiraler Limes) bieten sich effektive Theorien an, wobei die Extrapolation zum Kontinuum unproblematischer zu sein scheint. Für die chiralen Extrapolationen wurden zunächst Polynome in den Stromquark- bzw. Pionmassen verwendet.

In den letzten Jahren ist es zur Diskussion gekommen, ob nicht auch bei chiralen Extrapolationen Modelle der QCD mit hadronischen Freiheitsgraden verwendet werden sollten. Die Argumentation basiert auf den immer leichter werdenden Pionen, deren Dynamik bei Extrapolationen mit Polynomen nur indirekt berücksichtigt wird. Zur Beachtung dessen wird üblicherweise ein Polynom durch eine mit Modellen bestimmte Selbstenergie ergänzt, wobei die Regularisierung derart gewählt wird, dass die Selbstenergie für große Pionmassen verschwindet. Auf verwendete Näherungen und Regulatorabhängigkeiten wird dabei in der Regel nicht eingegangen.

Dies ist die Motivation dieser Arbeit: Mit einem phänomenologischen Modell der QCD, dem NJL-Modell, soll versucht werden Ergebnisse für die ρ-Mesonmasse aus Gitter-QCD Rechnungen bei großen Stromquarkmassen zu den experimentell beobachteten Größen zu extrapolieren. Im ersten Kapitel wird dazu das NJL-Modell in einer bestimmten Entwicklung beschrieben und wie sich mit ihm Mesonen konstruieren lassen. Außerdem werden das Vektordominanzmodell, auf das sich das NJL-Modell in einem Grenzfall reduziert, und die chirale Störungstheorie skizziert. Im zweiten Kapitel wird auf das Problem der Masse instabiler Teilchen und Regulatoreffekte bei Extrapolationen eingegangen. In den darauf folgenden beiden Kapiteln wird der Grenzfall verschwindender und unendlicher Stromquarkmassen untersucht und mit den Ergebnissen aus effektiven Theorien verglichen. Abschließend werden die Ergebnisse verschiedener Extrapolationsmethoden dargestellt und diskutiert.

Kapitel 1

Modelle der starken Wechselwirkung

1.1 Das NJL-Modell

1.1.1 Einleitung

Das NJL-Modell wird heute als phänomenologisches Modell der QCD aufgefasst. Dabei geht man davon aus, dass die Wechselwirkungen über gluonischen Freiheitsgrade im nichtperturbativen Bereich 'einfrieren' und so wie in Fermis Theorie des schwachen Zerfalls durch Punktwechselwirkungen ersetzt werden können [1]. Im Gegensatz zu letzterer ist es jedoch keine effektive Theorie, da in keiner Größe, wie der inversen W-Boson Masse, entwickelt wurde. Daher ist auch schwer abzuschätzen, in welchen Bereichen es die QCD gut beschreibt. Historisch wurde es zunächst zur Beschreibung der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung entwickelt [2], geriet nach Entdeckung der QCD in Vergessenheit und erlebte eine Renaissance als Modell der QCD [1, 3, 4].

Die in dieser Arbeit verwendete Lagrangedichte erhält man, wenn man den Wechselwirkungsterm der QCD durch das Quadrat der Farbladungsströme ersetzt und nach Fierz-Transformation nur die farbneutralen Wechselwirkungsterme mit den Quantenzahlen von σ-Meson, Pion, ρ-Meson und a_1-Meson beibehält [1, 5]:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m_0)\psi + g_s\left[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2\right] - g_v\left[(\bar{\psi}\gamma_\mu\vec{\tau}\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2\right]. \quad (1.1)$$

Dabei werden die Kopplungskonstanten g_s und g_v zusätzlich als unabhängig betrachtet und es wird sich im Flavor-Raum auf den Isospin, also u- und d-Quark, beschränkt. An der negativen Energie-Dimension der Kopplungskonstanten ist ersichtlich, dass es sich um eine nichtrenormierbare Theorie handelt.

Aufgrund seiner Konstruktion ist es nicht verwunderlich, dass das NJL-Modell die gleichen (globalen) Symmetrien, wie die QCD besitzt. Deren Lagrangedichte hat im Farbraum und für verschwindende Quarkmassen (chiraler Limes) eine

$$U(2)_L \otimes U(2)_R = SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_V \otimes U(1)_A \quad (1.2)$$

Symmetrie. Die $U(1)_A$-Symmetrie wird in der QCD bei Quantisierung gebrochen (Anomalie) und im NJL-Modell durch den skalaren und pseudoskalaren Wechselwirkungsterm

[1]. Die übrigen Erzeuger der Symmetrie liefern nach dem Noether-Theorem erhaltene Ströme j_a^μ. Falls auch der Grundzustand (Vakuum) unter den Transformationen symmetrisch ist, existiert zu den zugehörigenen Strömen eine erhaltene Quantenzahl, die Ladung $Q_a(t) = \int d^3r\, j_a^0(t,r)$. Andernfalls ist der Grundzustand entartet und die Ladung nicht integrabel [6]. Die Schwingungsmoden zwischen den entarteten Vakua sind masselose Bosonen: Goldstonebosonen, was z.B. über das effektive Potential schnell gezeigt werden kann (Goldstone-Theorem [7]). Man spricht von 'spontaner Symmetriebrechung' auf die Untergruppe der Symmetrie des Grundzustands.

In der Natur findet man eine spontane Symmetriebrechung von

$$SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_V \to SU(2)_V \otimes U(1)_V. \tag{1.3}$$

Die zugehörigen Quantenzahlen sind Baryonenzahl und Isospin (der bei unterschiedlichen Stromquarkmassen nicht erhalten ist). Da die axiale Symmetrie durch den Massenterm der Quarks auch explizit gebrochen wird, sind die Goldstonebosonen nur annähernd masselos und können mit den Pionen identifiziert werden. Ihre Masse ist durch die Gell–Mann-Oakes-Renner Relation (GOR) mit den Quarkmassen verknüpft. Der Ordnungsparameter der spontanen Symmetriebrechung ist das Quarkkondensat $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$.

Das NJL-Modell hat die schöne Eigenschaft, dass mit genügend großer skalarer Kopplungskonstanten die gleiche Symmetrie gebrochen wird und kann daher zur Untersuchung der spontanen Symmetriebrechung verwendet werden. Auch die explizite Symmetriebrechung, die in dieser Arbeit eine große Rolle spielt, führt zu gleichen Relationen wie im Falle der QCD.

Im Gegensatz zur QCD zählt die Dimension des Farbraums $N_C = 3$ allerdings nur identische Kopien von Quarkfeldern, weil die Eichfreiheitsgrade aus dem Modell entfernt wurden. Da N_C später als Entwicklungsparameter verwendet wird, ist zu betonen, dass die Kopplungskonstanten g_s und g_v zur Reproduktion des 'large-N_C' Limes der QCD die Ordnung $1/N_C$ haben müssen [8].

Durch die starke Vereinfachung der Wechselwirkung ist es im NJL-Modell relativ einfach möglich, Hadronen zu beschreiben [1, 3]. Üblicherweise betrachtet man dazu Quarks in Hartree(-Fock)-Näherung und konstruiert aus diesen mittels 'Random Phase Approximation' (RPA) bzw. Lösen von Faddeev Gleichungen Mesonen bzw. Baryonen. Da auf die Piondynamik in dieser Arbeit ein besonderes Augenmerk gelegt wird, sind diese Beschreibungen jedoch nicht ausreichend. Stattdessen werden Selbstenergien und Polarisationsfunktionen bis in zweiter Ordnung in $1/N_C$ entwickelt. Hartreenäherung und RPA entsprechen dann der führenden Ordnung.

Man stößt hier auf ein weiteres grundsätzliches Problem, nämlich das Fehlen des Confinements im NJL-Modell, was sich schon durch Behandlung der Quarks als freies Teilchen in Hartree-Näherung äußert. Für die Beschreibung des ρ-Mesons entgegnet man diesem Problem durch Wahl großer Konstituentenmassen, was zumindest einen unphysikalischen Zerfall in Quarks verhindert.

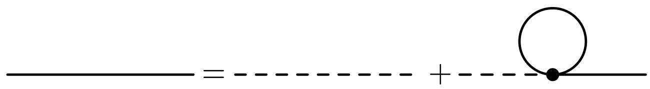


Abbildung 1.1: Dyson-Gleichung für Hartree-Propagatoren (durchgezogene Linien).

1.1.2 Hartree-Näherung

Auf Hartree-Niveau ist die Selbstenergie der Quarks eine impulsunabhängige Konstante, die daher nur zu einer dynamisch generierten Massenverschiebung führt.

Der Quarkpropagator ist in Hartree-Näherung durch die in Abb. 1.1 diagrammatisch dargestellte, selbstkonsistende Dyson-Gleichung gegeben. Hierbei, wie im folgenden, wurde auf die Pfeile für Fermionpropagatoren verzichtet, da in dieser Arbeit immer beide Richtungen, sofern sie zu topologisch unterschiedlichen Diagrammen führen, berücksichtigt werden. Weiterhin ist zu beachten, dass in Abb. 1.1 nur die direkten Terme verwendet werden. Mit Hilfe der in Anhang A.1 angegebenen Feynmanregeln erhält man mit

$$iS(p) \;=\; iS_0(p) + iS(p)\left(-i\Sigma^{(0)}\right) iS_0(p), \tag{1.4}$$

den Quark-Propagator in Hartree-Näherung

$$S^{(0)}(p) \;=\; \frac{1}{\not{p} - m_0 - \Sigma^{(0)} + i\epsilon} =: \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon}, \tag{1.5}$$

mit Konstituentenmasse m und Selbstenergie

$$\begin{aligned} \Sigma^{(0)} &= \sum_M \Gamma_M 2ig_M \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}[\Gamma_M S(p)] \\ &= 2ig_s 4N_C N_f \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Der Index $^{(0)}$ bedeutet dabei, dass es sich um die Hartree-Näherung der indizierten Größe handelt, 'Tr' steht für die Spur über Farb-, Flavor- und Diracindizes, die hier nur für den skalaren Kanal mit $M = \sigma$ in der Selbstenergie nicht verschwindet.

Die Hartreemasse m (der Übersicht halber nicht indiziert) ist somit Lösung der so genannten Gap-Gleichung

$$m \;=\; m_0 + \Sigma^{(0)}. \tag{1.7}$$

Offensichtlich existiert im chiralen Limes, also für $m_0 = 0$, immer die Lösung $m = 0$. Da die Selbstenergie für positive m positiv ist, existiert für genügend grosse Kopplungskonstanten, abhängig von den später diskutierten Regularisierungschemata, zusätzlich eine nichtverschwindende Konstituentenmasse m.

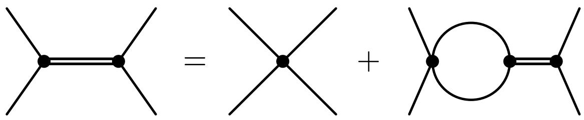


Abbildung 1.2: Bethe-Salpeter Gleichung für Mesonpropagatoren in RPA-Näherung (doppelte Linie). Einfache Linien entsprechen Hartreepropagatoren.

Da das Quarkkondensat

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle = -i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}S(p), \tag{1.8}$$

der Ordnungsparameter der chiralen Symmetriebrechung (hier mit vollem Quarkpropagator), in Hartreenäherung durch

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle^{(0)} = -\frac{m-m_0}{2g_s} \tag{1.9}$$

gegeben ist, ist hier ersichtlich, dass die größere Konstituentenmasse die spontane Symmetriebrechung widerspiegelt.

Mit der Kopplungskonstanten g_s von der Ordnung $O(1/N_C)$ ist die Selbstenergie und Konstituentenmasse auf Hartree-Niveau von der Ordnung $O(1)$. Dies ist der Grund warum die (im NJL-Modell einfachen) Fock-Terme zunächst nicht berücksichtigt wurden: Sie sind von höherer Ordnung in $1/N_C$.

1.1.3 RPA-Näherung

Die übliche Beschreibung von Mesonen im NJL-Modell ist als Resonanz in der Quark-Antiquark Streumatrix. Auf dem so genannten RPA-Niveau ist diese Lösung der in Abb. 1.2 diagrammatisch dargestellten Bethe-Salpeter Gleichung, wobei Austauschterme aufgrund des später im Detail beschriebenen Zählschemas weggelassen werden.

Die Streumatrix erfüllt also die Gleichung

$$T(q) = K + KJ(q)T(q). \tag{1.10}$$

Auf Farb-, Flavor und Diracindizes wurde hier der Übersicht wegen verzichtet. Der Streukern ist durch

$$K = \sum_M K_M = \sum_M 2g_M\Gamma_{\mathrm{M}}\otimes\Gamma_{\mathrm{M}} = \sum_{M,n} 2g_M\Gamma_{\mathrm{M}}^{(\mathrm{n})}\otimes\Gamma_{\mathrm{M}}^{(\mathrm{n})}, \tag{1.11}$$

mit eingeführten Multiindex n für Flavor- und Diracindizes, gegeben (siehe Anhang A.1).

$$J_{bcda}(q) = -i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}S_{bc}^{(0)}(p+\frac{q}{2})S_{da}^{(0)}(p-\frac{q}{2}), \tag{1.12}$$

mit Multiindex a bis d, liefert durch Kontraktion mit den Γ-Matrizen die Polarisationsfunktionen

$$\begin{aligned}\Pi_{MN}^{(m,n)}(q) &= \Gamma^{(\mathrm{m})}_{\mathrm{M,ab}} J_{bcda}(q) \Gamma^{(\mathrm{n})}_{\mathrm{N,cd}} \\ &= -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[\Gamma_M^{(m)} i S^{(0)}(p+\frac{q}{2}) \Gamma_N^{(n)} i S^{(0)}(p-\frac{q}{2})\right]. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Da die meisten Polarisationsfunktionen verschwinden, ist es nun möglich, die T-Matix übersichtlich zu blockdiagonalisieren und damit $T = (1-KJ)^{-1}K$ zu berechnen. Als einzige mischen pseudoskalarer und axialvektorieller Kanal ('π-a_1 mixing'). Da in dieser Arbeit aber nur skalare und pseudoskalare Zwischenzustände betrachtet werden, wird stattdessen Gl. 1.10 in den einzelnen Kanälen gelöst. Dazu wird der Ansatz

$$T_M(q) = -\sum_{m,n} D_M^{(m,n)}(q) \Gamma^{(\mathrm{m})}_{\mathrm{M}} \otimes \Gamma^{(\mathrm{n})}_{\mathrm{M}} \tag{1.14}$$

in

$$T_M(q) = K_M + K_M J(q) T_M(q) \tag{1.15}$$

eingesetzt, woraus sich

$$D_M^{(m,n)}(q) = -2g_M \delta_{mn} + 2g_M \sum_s \Pi_M^{(m,s)} D_M^{(s,m)}(q), \tag{1.16}$$

mit $\Pi_M := \Pi_{MM}$, ergibt. Das Kroneker-δ ist dabei im Diracraum als $g^{\mu\nu}$ zu verstehen.

Mit Hilfe der transversalen und longitudinalen Projektoren

$$T^{\mu\nu}(q) = -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \tag{1.17}$$

$$L^{\mu\nu}(q) = \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \tag{1.18}$$

kann man nun die Polarisationsfunktionen durch

$$\Pi_\pi^{ab}(q) = \Pi_\pi(q) \delta_{ab} \tag{1.19}$$

$$\Pi_\rho^{\mu\nu,ab}(q) = \Pi_\rho(q) T^{\mu\nu}(q) \delta_{ab}. \tag{1.20}$$

ausdrücken. Die Transversalität der vektoriellen Polarisationsfunktion folgt dabei aus der Vektorstromerhaltung. Damit erhält man leicht aus Gl. 1.16

$$D_\sigma(q) = \frac{-2g_s}{1-2g_s\Pi_\sigma(q)}, \tag{1.21}$$

$$D_\pi^{ab}(q) = \frac{-2g_s}{1-2g_s\Pi_\pi(q)} \delta_{ab}, \tag{1.22}$$

$$\begin{aligned} D_\rho^{\mu\nu,ab}(q) &= -(\frac{-2g_v}{1-2g_v\Pi_\rho(q)} T^{\mu\nu} + 2g_v L^{\mu\nu}) \delta_{ab} \\ &=: -\left(D_\rho(q) T^{\mu\nu} + 2g_v L^{\mu\nu}\right) \delta_{ab}. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Da es sich um kollektive Quark-Antiquark Resonanzen handelt, werden die Funktionen D_M als Mesonpropagatoren bezeichnet. Ihr Residuum am Pol ist nicht zwingend eins und kann durch Interpretation der Streumatrix als Mesonaustausch mit dem Quadrat der Meson-Quark Kopplungskonstante g_{Mqq} identifiziert werden, die von den Vertizes in den Propagator gezogen wurde. Masse m_M und Kopplungskonstante g_{Mqq} sind also durch

$$0 = -2g_M D_M^{-1}(q)\big|_{q^2=m_M^2}, \tag{1.24}$$

$$g_{Mqq}^{-2} = \frac{d}{dq^2} D^{-1}(q)\bigg|_{q^2=m_M^2} = \frac{d}{dq^2}\Pi_M(q)\bigg|_{q^2=m_M^2} \tag{1.25}$$

bestimmt.

Dass Pionen im chiralen Limes masselos und damit die Goldstonebosonen der chiralen Symmetriebrechung sind, lässt sich nun unter Verwendung der Gap-Gleichung schnell einsehen. Dazu sei auf die im Anhang A.3 explizit gegebenen RPA-Propagatoren hingewiesen. Mit der Definition der Pionzerfallskonstante als Kopplungskonstante an den Axialstrom auf RPA-Niveau

$$i\delta_{ab} f_\pi^{(0)} q_\mu = -\frac{g_{\pi qq}^{(0)}}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left[i\gamma_\mu\gamma_5\tau^a iS(p+q)i\gamma_5\tau^b iS(p)\right] \tag{1.26}$$

lassen sich außerdem die Gell–Mann-Oakes-Renner Relation (GOR)

$$m_\pi^{(0)2} f_\pi^{(0)2} = -m_0\langle\bar\psi\psi\rangle^{(0)} \tag{1.27}$$

und Goldberger-Treiman Relation

$$f_\pi^{(0)} g_{\pi qq}^{(0)} = m \tag{1.28}$$

zeigen [1, 5]. Größen auf RPA-Niveau werden hier wie solche auf Hartree-Niveau mit $^{(0)}$ indiziert.

Die Ordnung der Funktionen Π_M ist $O(N_C)$, da nur direkte Terme berücksichtigt wurden und es daher eine geschlossene Quarkschleife gibt. Da K von Ordnung $O(1/N_C)$ ist, sind das somit auch T und D_M.

1.1.4 $1/N_C$-Entwicklung

Eine konsistente Entwicklung über das Hartree- und RPA-Niveau hinaus ist die im folgenden beschriebene $1/N_C$-Entwicklung der Quark-Selbstenergie und Meson-Polarisationsfunktionen bis in zweiter Ordnung. Hartree- und RPA-Niveau sind dann die führende Ordnung.

Dazu sei zunächst wiederholt, dass Hartreepropagatoren von Ordnung $O(1)$, Kopplungskonstanten g_M sowie Mesonpropagatoren von Ordnung $O(1/N_C)$ und Quarkschleifen, da immer nur direkte Terme betrachtet werden, von Ordnung $O(N_C)$ sind. Mit den Bezeichnungen

$$
\begin{aligned}
E_Q &\equiv \text{Anzahl der externen Hartreepropagatoren} \\
E_M &\equiv \text{Anzahl der externen Mesonpropagatoren} \\
I_Q &\equiv \text{Anzahl der internen Hartreepropagatoren} \\
I_M &\equiv \text{Anzahl der internen Mesonpropagatoren} \\
V_Q &\equiv \text{Anzahl der Quark} - \text{Quark Vertizes} \\
V_M &\equiv \text{Anzahl der Meson} - \text{Quark Vertizes} \\
L_Q &\equiv \text{Anzahl der Quarkschleifen}
\end{aligned}
$$

ergibt sich durch die Struktur der Vertizes

$$
\begin{aligned}
E_Q + 2E_M &= 4V_Q + 4V_M - 2I_Q - 4I_M, && (1.29) \\
V_M &= E_M + 2I_M && (1.30)
\end{aligned}
$$

und für die Ordnung $O(1/N_C^N)$

$$
N = I_M - L_Q + V_Q. \qquad (1.31)
$$

Das Minuszeichen in Gl. 1.31 ist in der Hinsicht irreführend, als dass es die Vermutung nahelegen könnte, mit Quarkschleifen die Ordnungen beliebig reduzieren zu können. Da Quarkschleifen jedoch immer auch Quark-Quark-Vertizes oder Mesonpropagatoren einführen, wird stattdessen die Ordnung i.A. erhöht. Außerdem ist zu bemerken, dass die relevanten Quarkschleifen immer aus mindestens drei Hartreepropagatoren bestehen, da sie sonst den Quark- oder Mesonpropagatoren entsprechen. Dies liefert im übrigen $L_Q \leq 3I_Q$, woraus

$$
N \geq \frac{1}{4}(E_Q - 2E_M + \frac{2}{3}I_Q) \qquad (1.32)
$$

folgt. Daher sind Hartree-Selbstenergie und RPA-Polaristationsfunktion wirklich die einzigen Beiträge von Ordnung $O(1)$ bzw. $O(N_C)$ und das Zählschema konsistent.

Mit Hilfe des oben erwähnten kann man nun abschätzen wieviele und welche Quarkschleifen in nächster Ordnung auftreten können. Für die Selbstenergie des Quarks ist dabei höchstens eine Quarkschleife mit drei internen Quarks möglich, wenn zwei Enden über ein Meson verbunden werden. In Graphen der Polarisationsfunktion sind maximal zwei Quarkschleifen mit jeweils drei internen Quarks oder eine mit vier internen Quarks möglich.

Die so erhaltenen, sogenannten $1/N_C$-Korrekturen der Selbstenergie des Quarks

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Sigma}(p) &= \Sigma^{(0)} + \delta\Sigma(p) \\
&= \Sigma^{(0)} + \delta\Sigma^{(a)} + \delta\Sigma^{(b)}(p) && (1.33)
\end{aligned}
$$

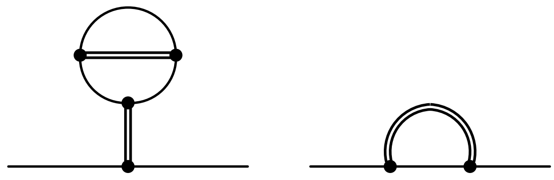


Abbildung 1.3: $1/N_C$-Korrekturterme $\delta\Sigma^{(a)}$ (links) und $\delta\Sigma^{(b)}$ (rechts) der Selbstenergie des Quarks.

sind in Abb. 1.3 diagrammatisch dargestellt, die für die Polarisationfunktionen

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_M(p) &= \Pi_M(p) + \delta\Pi_M(q) \\ &= \Pi_M(p) + \sum_{i=a,b,c,d} \delta\Pi_M^{(i)}(q) \end{aligned} \tag{1.34}$$

entsprechend in Abb. 1.4. Zu ihrer Berechnung ist es zweckmässig die Quarkschleifen mit drei und vier internen Quarkpropagatoren und externen Mesonen, also effektive Meson-Meson Vertizes, als Quarkdrei- und vierecke zu definieren. Das Quarkdreieck, siehe Abb. 1.5, ist dabei

$$\begin{aligned} -i\Gamma_{M_1,M_2,M_3}(q,p) &= -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Big\{ \mathrm{Tr}\left[\Gamma_{M_1} iS(k)\Gamma_{M_2} iS(k-p)\Gamma_{M_3} iS(k+q)\right] \\ &\quad + \mathrm{Tr}\left[\Gamma_{M_1} iS(k-q)\Gamma_{M_3} iS(k+p)\Gamma_{M_2} iS(k)\right] \Big\}, \end{aligned} \tag{1.35}$$

das Quarkviereck

$$\begin{aligned} &-i\Gamma_{M_1,M_2,M_3,M_4}(p_1,p_2,p_3) = \\ &-\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Big\{ \mathrm{Tr}\left[\Gamma_{M_1} iS(k)\Gamma_{M_2} iS(k-p_2)\Gamma_{M_3} iS(k-p_2-p_3)\Gamma_{M_4} iS(k+p_1)\right] \\ &\quad + \mathrm{Tr}\left[\Gamma_{M_1} iS(k-p_1)\Gamma_{M_4} iS(k+p_2+p_3)\Gamma_{M_3} iS(k+p_2)\Gamma_{M_2} iS(k)\right] \Big\}. \end{aligned} \tag{1.36}$$

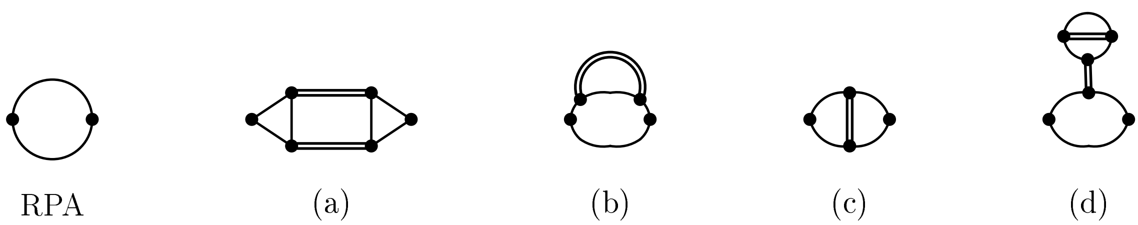


Abbildung 1.4: RPA-Term Π und $1/N_C$-Korrekturterme $\delta\Pi^{(i)}$ der Polarisationsfunktionen.

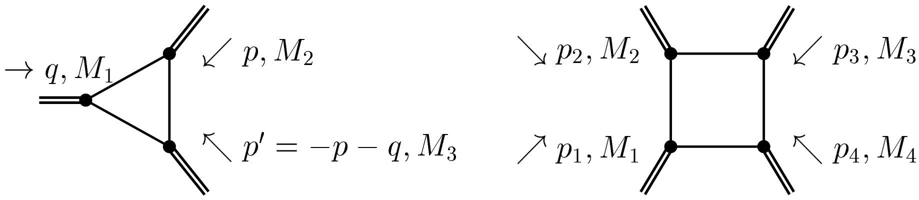


Abbildung 1.5: Quarkdreieck $-i\Gamma_{M_1,M_2,M_3}(q,p)$ (links) und Quarkviereck $-i\Gamma_{M_1,M_2,M_3,M_4}(p_1,p_2,p_3)$ (rechts).

Mit Hilfe dieser Definitionen lassen sich nun die $1/N_C$-Korrekturen ausdrücken. Für die Selbstenergie des Quarks ergibt sich zum einen

$$\delta\Sigma^{(a)} = -\frac{1}{2}D_\sigma(0)\sum_M \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, D_M(p)\,\Gamma_{M,M,\sigma}(p,-p) = D_\sigma(0)\,\Delta\,, \tag{1.37}$$

mit der Konstanten

$$\Delta = \frac{1}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\sum_M(-iD_M(p))(-i\Gamma_{M,M,\sigma}(p,-p)). \tag{1.38}$$

Hier wurde in Gl. 1.37 ein Symmetriefaktor 1/2 eingeführt, da verschiedene Orientierungen der Quarkschleifen zum topologisch gleichen Diagramm führen. Desweiteren wurde schon ausgenutzt, dass $\Gamma_{M,M,M_1}(p,-p) = 0$, falls $M \neq \sigma$. Zum anderen ergibt sich

$$\begin{aligned}\delta\Sigma^{(b)}(k) &= i\sum_M \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, D_M(p)\,\Gamma_M\, S(k-p)\,\Gamma_M \\ &= \delta\Sigma_a^{(b)}(k^2)\not k + \delta\Sigma_b^{(b)}(k^2).\end{aligned} \tag{1.39}$$

Dieser Beitrag zur Selbstenergie ist nicht skalar, sondern besitzt die durch Lorentz-invarianz diktierte Form in der zweiten Zeile. Er führt daher neben einer Renormierung der Masse auch zu einer Wellenfunktionsrenormierung.

Die Auswertung der Diagramme für die $1/N_C$-Korrekturen der Polarisationsfunktionen liefert:

$$\begin{aligned}
\delta\Pi^{(a)}_M(q) &= \frac{i}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\sum_{M_1 M_2}\Gamma_{M,M_1,M_2}(q,p)\,D_{M_1}(p)\,\Gamma_{M,M_1,M_2}(-q,-p)\,D_{M_2}(-p-q)\,,\\
\delta\Pi^{(b)}_M(q) &= -i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\sum_{M_1}\Gamma_{M,M_1,M_1,M}(q,p,-p)\,D_{M_1}(p)\,,\\
\delta\Pi^{(c)}_M(q) &= -\frac{i}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\sum_{M_1}\Gamma_{M,M_1,M,M_1}(q,p,-q)\,D_{M_1}(p)\,,\\
\delta\Pi^{(d)}_M(q) &= \frac{i}{2}\,\Gamma_{M,M,\sigma}(q,-q)\,D_\sigma(0)\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\sum_{M_1}\Gamma_{M_1,M_1,\sigma}(p,-p)\,D_{M_1}(p)\,,\\
&= -i\,\Gamma_{M,M,\sigma}(q,-q)\,D_\sigma(0)\,\Delta\,. \qquad (1.40)
\end{aligned}$$

Für die Funktionen $\Pi^{(c)}_M$ und $\Pi^{(d)}_M$ wurde wieder ein Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$ eingefügt. Die für diese Arbeit relevanten Funktionen sind explizit ausgewertet im Anhang A.4 zusammengestellt.

Die Quarkpropagatoren bzw. Mesonpropagatoren finden sich nun wieder durch Lösen von Dyson- bzw. Bethe-Salpeter Gleichung:

$$\tilde{S}(p) = \frac{1}{\not p - m - \delta\Sigma(p) + i\epsilon}\,, \qquad (1.41)$$

$$\tilde{D}_M(p) = \frac{-2g_M}{1-2g_M\tilde{\Pi}_M(p)}\,. \qquad (1.42)$$

Da die Selbstenergie bzw. das Produkt von Streukern und Polarisationsfunktion nun aber nicht mehr von Ordnung $O(1)$ in $1/N_C$ sind, haben die Propagatoren aufgrund der Aufsummation der Reihen beliebige Ordnung in $1/N_C$. Gleiches gilt daher auch für die Massen, als Pole dieser.

Strenggenommen ist z.B. die $1/N_C$ Korrektur des Quarkpropagators

$$\delta S(p) = S(p)\delta\Sigma(p)S(p). \qquad (1.43)$$

Dies wird aber nur bei der Korrektur des Quarkkondensats

$$\begin{aligned}
\delta\langle\bar\psi\psi\rangle &= -i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\,[\delta S(p)]\\
&= -\Delta\Pi_\sigma(0)D_\sigma(0)+\Delta \qquad (1.44)
\end{aligned}$$

berücksichtigt.

Zu der $1/N_C$-Korrektur seien noch drei Dinge bemerkt: Erstens lässt sich mit ihr ebenfalls die Gell–Mann-Oakes-Renner Relation zeigen, weshalb auch mit ihr die chirale Symmetriebrechung richtig beschrieben wird [5]. Zweitens lässt sich explizit die Transversalität der Polarisationsfunktion des ρ-Mesons zeigen, ein notwendiges Kriterium für die Vektorstromerhaltung [5]. Drittens beziehen sich die Summen in Gl. 1.39 und Gl. 1.40 auf alle Mesonen, in den späteren Rechnungen wird sich aber aus Gründen der Regularisierung auf skalare und pseudoskalare Mesonen beschränkt. Dies lässt sich phänomenologisch durch die relativ kleinen Pionmassen rechtfertigen.

1.1.5 Wahl der Regularisierung

Damit die formalen Beweise für Gell–Mann-Oakes-Renner Relation und Goldberger-Treiman Relation richtig sind, muss für alle Quarkschleifen das gleiche Regularisierungsschema verwendet werden [5]. Allein schon aus rechnerischen Gründen ist dabei ein lorentzinvariantes Schema erstrebenswert. Es wird daher ein Pauli-Villars Schema für die in Anhang A.2 gegebenen Integrale (bis zu quadratisch divergent) verwendet:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k;m) \quad \to \quad \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sum_{j=0}^{2} c_j f(k;\mu_j)\,, \tag{1.45}$$

mit den Regulatormassen μ_j, dem Quark-Abschneideparameter Λ_q und

$$\mu_j^2 = m^2 + j\Lambda_q^2; \qquad c_0 = 1, \quad c_1 = -2, \quad c_2 = 1. \tag{1.46}$$

Mit diesen haben die Mesonpropagatoren zusätzlich das richtige analytische Verhalten [5] bezüglich ihrer Polstruktur (siehe nächstes Kapitel). Wie sich später herausstellt garantiert es auch das richtige Verhalten im Heavy Quark Limit.

Allerdings verschwindet mit dieser Regularisierung die Polarisationsfunktion des ρ-Mesons

$$\Pi_\rho \;=\; -i\frac{4}{3}N_C N_f \left(-2I_1 + (p^2+2m^2)I(p)\right) \tag{1.47}$$

für $p^2 = 0$ nicht, da mit ihr

$$m^2 I(0) \neq I_1. \tag{1.48}$$

Dies erfordert aber die Vektorstromerhaltung, weshalb die Polarisationfunktion 'per Hand' korrigiert wird, womit der ρ-Mesonpropagator die Form

$$D_\rho(p) \;=\; \frac{-2g_v}{1 + 2ig_v\frac{4}{3}N_C N_f\left(-2m^2 I(0) + (p^2+2m^2)I(p)\right)} \tag{1.49}$$

bekommt. Aus Gründen der chiralen Symmetrie muss der a_1-Propagator entsprechend abgeändert werden. Außerdem führt die Ungleichheit in Gl. 1.48 dazu, dass mache Integrale mit den ρ- und a_1-Propagatoren nicht konvergieren [5]. Deshalb muss auf diese als Zwischenzustände verzichtet werden.

Die Mesonschleifen werden $O(3)$-regularisiert:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k;m) \quad \to \quad \int_{|\vec{k}|<\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{(2\pi)} f(k;m), \tag{1.50}$$

mit Meson-Abschneideparameter Λ_M. Dies liefert ebenfalls das richtige Verhalten im Heavy Quark Limit.

Da die korrigerte Polarisationsfunktion des ρ-Mesons $\tilde{\Pi}_\rho(q)$ mit diesen Regularisierungen für $q^2 = 0$ nicht verschwindet, wird dies in Rechnungen durch

$$\tilde{\Pi}_\rho(q) \quad \rightarrow \quad \tilde{\Pi}_\rho(q) - \tilde{\Pi}_\rho(0) \tag{1.51}$$

kompensiert.

1.1.6 Parameter

Das NJL-Modell in $1/N_C$-Näherung besitzt fünf unabhängige Parameter: m_0, g_s, g_v, Λ_q und Λ_M. Diese können an die Größen f_π, m_π und $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ aus dem pionischen Sektor und an Breite und Maximum des elektromagnetischen Pion-Formfaktors angepasst werden, wobei bei letzteren das ρ-Meson eine entscheidende Rolle spielt (Vektordominanz).

Da g_v bei Vernachlässigung von vektoriellen und axialvektoriellen Zwischenzuständen keinen Einfluss auf die Größen des pionischen Sektors besitzt, kann zu festem Λ_M f_π, m_π und $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ bestimmt werden und anschließend g_v. Der Spielraum in $\langle\bar{\psi}\psi\rangle = -2((231 \pm 4 \pm 8 \pm 6)\,\mathrm{MeV})^3$ [9] wird dazu benutzt, eine möglichst große Hartreemasse zu erhalten, damit der unphysikalische Zerfall des ρ-Mesons in Quarks unterdrückt wird. Außerdem wird m_π in RPA-Näherung angepasst, um die Schwelle des ρ-Mesons, das RPA-Pionen als Zwischenzustände besitzt, richtig zu beschreiben.

In [5, 10] wurden folgende Parameter gefunden:

Λ_M/MeV	500.	600.	700.
Λ_q/MeV	800.	820.	852.
m_0/MeV	6.77	6.70	6.54
$g_s\Lambda_q^2$	3.49	3.70	4.16
m/MeV	396.	446.	550.
$m_\pi^{(0)}$/MeV	140.	140.	140.
m_π/MeV	149.6	153.2	158.1
$f_\pi^{(0)}$/MeV	111.1	117.0	1426.0
f_π/MeV	93.0	93.1	93.4
$\langle\bar{\psi}\psi\rangle^{(0)}$/MeV^3	$-2(261.2)^3$	$-2(271.3)^3$	$-2(287.2)^3$
$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$/MeV^3	$-2(244.1)^3$	$-2(249.5)^3$	$-2(261.4)^3$
g_v/g_s	1	1.6	2.4

1.2 Das Vektordominanzmodell

Auch das Vektordominanzmodell ist ein phänomenologisches Modell der starken Wechselwirkung, allerdings mit hadronischen Freiheitsgraden. Es wurde 1960, also kurz vor Postulierung der Quarks, von Sakurai entwickelt [11]. Grundidee ist, dass hier die Isospinsymmetrie lokal ist, die globale Symmetrie also geeicht wird.

In dieser Arbeit wird sich auf den Pionsektor beschränkt. Startpunkt ist deshalb die freie Langrangedichte mit einem pseudoskalaren Piontriplett

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{1}{2}\partial_\mu \pi_a \partial^\mu \pi_a - \frac{1}{2} m_\pi^2 \pi_a \pi_a. \tag{1.52}$$

Dieses ist per Konstruktion invariant unter globalen Isospintransformationen, mit den Pionen in der adjungierten Darstellung der SU(2). Bei Eichung mittels minimaler Substitution erhält man mit kovarianter Ableitung D_μ und Feldstärketensor $F^a_{\mu\nu}$:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\, T_a\, \rho^a_\mu, \tag{1.53}$$

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu \rho^a_\nu - \partial_\nu \rho^a_\mu + g\, \epsilon_{abc}\, \rho^b_\mu \rho^c_\mu, \tag{1.54}$$

die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\pi\rho} = \frac{1}{2} D_\mu \pi_a D^\mu \pi_a - \frac{1}{2} m_\pi^2 \pi_a \pi_a - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}\, m_0^2\, \rho^a_\mu\, \rho^{a\mu}. \tag{1.55}$$

Hier wurde zusätzlich ein Masseterm für die Eichbosonen mit nackter Masse m_0 eingeführt, der strenggenommen die Eichsymmetrie bricht. Da die Eichbosonen wegen der kovarianten Ableitung Vektorbosonen sind ($J^P = 1^-$) und die Quantenzahlen der Isospinsymmetrie tragen, werden sie mit den ρ-Mesonen identifiziert.

Mit Vektordominanz wird nun die Idee bezeichnet, dass die elektromagnetischen Felder nur über das neutrale ρ-Meson an die Hadronen koppeln. In der Regel wird dazu der isovektorielle Strom an das Photonfeld gekoppelt [19]. Mit dieser Annahme lässt sich dann beispielsweise der elektromagnetische Formfaktor beschreiben.

Die Bedeutung des Vektordominanzmodells für diese Arbeit stammt aus der Tatsache, dass sich das ρ-Meson in $1/N_C$-Entwicklung im sogenannten statischen Limes ('static limit') [5] auf das ρ-Meson im Vektordominanzmodell mit einer bis zur Ordnung $O(g^2)$ entwickelten Selbstenergie reduziert. Dabei werden die effektiven Meson-Meson Vertizes der korrigierten Polaristionisfunktion (Quarkdrei- und vierecke) in führender Ordnung in inversen Hartreemassen entwickelt und die intermediären Mesonpropagatoren durch Feynmanpropagatoren ersetzt (siehe auch Abschnitt 3.4). Hierbei wird sich aus phänomenologischen Gründen auf Pionzwischenzustände beschränkt.

Unter Vernachlässigung der durch die nichtabelsche Eichgruppe hervorgerufenen $\rho\rho\rho$- und $\rho\rho\rho\rho$-Kopplungen ist die Selbstenergie des ρ-Mesons in Ordnung $O(g^2)$ durch die in Abb. 1.6 dargestellten Diagramme gegeben. Vernachlässigung der nichtabelschen Terme entspricht den Termen bei separater Eichung der abelschen Untergruppen. Deshalb ist die Selbstenergie ρ-Meson bei einer solchen Entwicklung immer noch transversal.

Mit den im Anhang B.1 gegebenen Feynmanregeln ergibt sich für diese Diagramme

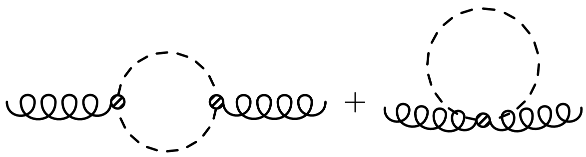


Abbildung 1.6: Selbstenergie des ρ-Mesons in Ordnung $O(g^2)$ bei Vernachlässigung der nichtabelschen Wechselwirkungsterme.

die Selbstenergie

$$\begin{aligned}
-i\Sigma^{\mu\nu,ab}(q) &= \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, g\,\epsilon_{acd}(2k+q)^\mu iG_\pi(k+q)\, g\,\epsilon_{bdc}(2k+q)^\nu iG_\pi(k) \\
&\quad +\frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, 2ig^2(\delta_{ab}\delta_{cd}-\delta_{ac}\delta_{bd})g_{\mu\nu} iG_\pi(k)\delta_{cd} \\
&= g^2\delta_{ab}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{(2k+q)^\mu(2k+q)^\nu}{((k+q)^2-m_\pi^2+i\epsilon)(k^2-m_\pi^2+i\epsilon)} \\
&\quad -2g^2 g^{\mu\nu}\delta_{ab}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m_\pi^2+i\epsilon} \\
&= -i\Sigma(q^2)T^{\mu\nu}(q)\delta_{ab}\,, \qquad (1.56)
\end{aligned}$$

wobei wieder der transversale Projektor $T^{\mu\nu}$ verwendet wurde. Die transversale Komponente erhält man also auch durch Kontraktion

$$\Sigma(q)\delta_{ab} = -\frac{1}{3}g_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu,ab}(q). \qquad (1.57)$$

Den gedressten ρ-Meson Propagator G_ρ liefert nun wieder Aufsummation, d.h. Lösen der Dyson-Gleichung

$$iG_\rho^{\mu\nu,ab} = iG_\rho^{(0)\,\mu\nu,ab} + iG_\rho^{(0)\,\mu\lambda,ac}\left(-i\Sigma^{cd}_{\lambda\kappa}\right)iG_\rho^{\kappa\nu,db}. \qquad (1.58)$$

Durch Aufspalten von

$$G_\rho^{(0)\,\mu\nu,ab} = \left(\frac{1}{q^2-m_0^2+i\epsilon}T^{\mu\nu}(q)+\frac{1}{m_0^2}L^{\mu\nu}(q)\right)\delta_{ab} \qquad (1.59)$$

in transversale und longitudinale Komponente separiert diese wegen der Projektoreigenschaften von $T^{\mu\nu}$ und $L^{\mu\nu}$ und liefert:

$$G_\rho^{\mu\nu,ab} = \left(G_\rho(q)T^{\mu\nu}(q)+\frac{1}{m_0^2}L^{\mu\nu}(q)\right)\delta_{ab}, \qquad (1.60)$$

mit

$$G_\rho(q) = \frac{1}{q^2-m_0^2-\Sigma(q^2)+i\epsilon}. \qquad (1.61)$$

Aufgrund der kleinen Pionmasse ist das ρ-Meson nun instabil und zerfällt in zwei Pionen.

1.3 HBχPT

Die chirale Störungstheorie (χPT) ist eine effektive Theorie der QCD mit dem Impuls als Ordnungsparameter ("low energy expansion").

Effektive Theorien sind Entwicklungen fundamentalerer Theorien in Ordnungsparametern. Dazu werden die resonanten Freiheitsgrade ermittelt und die üblichen aus der Lagrangedichte ausintegriert, was einer Entwicklung dieser in den Ordungsparametern entspricht. Die Ausintegration ist dabei meist symbolisch zu verstehen, stattdessen wird in jeder Ordnung die aus Symmetriegründen maximal mögliche Lagrangedichte gesucht und die endliche Anzahl der Koeffizienten experimentell bestimmt. Mit Hilfe von effektiven Theorien lassen sich so schwer handhabbare Theorien in bestimmten Bereichen durch einfachere Theorien beschreiben, Beispiele sind Fermis Theorie des schwachen Zerfalls, Heavy Quark Effektive Theory und sogar das Standardmodell.

Im folgenden wird skizzenhaft die chirale Störungstheorie (χPT) und die Heavy Baryon Chiral Perturbation Theory (HBχPT) dargestellt. Für Details wird auf [7, 13, 14] verwiesen. Da durch spontane Symmetriebrechung masselose Teilchen existieren, ist der Entwicklungsparameter der Impuls dieser Teilchen bzw. in der HBχPT zusätzlich die inverse Baryonenmasse.

Idee ist, Bausteine zu finden, aus denen die effektive Lagrangedichte zusammengesetzt werden kann. Startpunkt ist die globale Symmetriebrechung einer Gruppe $\mathcal{G}$ auf eine Untergruppe $\mathcal{H}$: $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$. Für die Felder der fundamentalen Theorie (oder eventl. Kombinationen, die eine Darstellung der Symmetriegruppe sind) heißt das, dass die Lagrangedichte $\mathcal{L}_f$ unter

$$\psi(x) \quad \to \quad \psi'(x) = g\psi(x), \quad g \in \mathcal{G} \tag{1.62}$$

invariant ist, während für den Vakuumerwartungswert nur

$$\langle\psi(x)\rangle \quad = \quad h\langle\psi(x)\rangle, \quad h \in \mathcal{H} \tag{1.63}$$

gilt. Wird ein Vakuumerwartungswert $\langle\psi(x)\rangle$ ausgewählt, lässt sich $\psi(x)$ als

$$\psi(x) \quad = \quad \gamma(x)\tilde{\psi}(x), \quad \gamma(x) \in \mathcal{G}/\mathcal{H}, \tag{1.64}$$

mit

$$\tilde{\psi}(x)^\dagger t\langle\psi(x)\rangle \quad = \quad 0, \quad t \in \mathtt{g} - \mathtt{h} \tag{1.65}$$

und Liealgebren $\mathtt{g}$ und $\mathtt{h}$ zu den Gruppen schreiben. Die Elemente der linken Nebenklasse $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ parametrisieren die Goldstonebosonen je nach Darstellung in der Regel nichtlinear. Dagegen fordert man für die Felder $\tilde{\psi}(x)$ unter Symmetrietransformation wegen

$$\psi(x) \quad \to \quad \psi'(x) = g\gamma(x)\tilde{\psi}(x) = \gamma'(x)h(\gamma, g)\tilde{\psi}(x) = \gamma'(x)\tilde{\psi}'(x), \tag{1.66}$$

dass

$$\tilde{\psi}(x) \quad \to \quad \tilde{\psi}'(x) = h(\gamma, g)\tilde{\psi}(x), \quad h(\gamma, g) \in \mathcal{H}. \tag{1.67}$$

$h(\gamma, g)$ ist dabei eine oben implizit definierte Funktion, die sich daraus ergibt, dass jedes Gruppenelement als Produkt aus Nebenklasse und Untergruppe ausgedrückt werden kann.

Lagrangedichten der effektiven Theorie können nun mit Hilfe einer Darstellung der Goldstonebosonen-Felder, $\tilde{\psi}$ bzw. gleich unter $\mathcal{H}$ transformierenden Felder und einer noch zu definierenden kovarianten Ableitung konstruiert werden. Sie sind invariant unter $\mathcal{G}$, wobei die Bosonfelder i.A. nichtlinear transformiert werden. Für die chirale Symmetriebrechung wählt man dazu

$$\gamma(\pi(x)) \;=\; e^{-i\gamma_5 \frac{\pi(x)}{2F}}, \quad \pi(x) \in \mathrm{su}(N_f) \simeq (\mathrm{su}_R(N_f) \otimes \mathrm{su}_L(N_f))\,/\mathrm{su}_V(N_f). \tag{1.68}$$

Mit dieser lässt sich zeigen [7], dass sich

$$u(\pi(x)) \;=\; e^{i\frac{\pi(x)}{2F}} \tag{1.69}$$

mit $\pi(x)$ aus $\gamma(\pi(x))$ unter chiralen Transformationen zu

$$u(\pi) \;\rightarrow\; g_R u(\pi) h(g,\pi)^{-1} = h(g,\pi) u(\pi) g_L^{-1} \tag{1.70}$$

transformiert, woraus für das Quadrat $U(\pi) = u^2(\pi)$

$$U(\pi(x)) \;\rightarrow\; U(\pi'(x)) = g_R U(\pi(x)) g_L^{-1}, \quad (g_R, g_L) \in \mathrm{SU}_R(N_f) \otimes \mathrm{SU}_L(N_f) \tag{1.71}$$

folgt. Mit diesen ergibt sich nun schnell

$$\Gamma^\mu = \frac{1}{2}\left\{u^\dagger \partial_\mu u + u \partial_\mu u^\dagger\right\} \;\rightarrow\; \Gamma'^\mu = \frac{1}{2} h \Gamma^\mu h^{-1} - (\partial_\mu h) h^{-1} \tag{1.72}$$

$$u^\mu = i\left\{u^\dagger \partial_\mu u - u \partial_\mu u^\dagger\right\} \;\rightarrow\; h u^\mu h^{-1}, \tag{1.73}$$

sodass für die auf $\tilde{\psi}$ angewandte kovariante Ableitung

$$D^\mu := \partial^\mu + \Gamma^\mu \;\rightarrow\; h D^\mu h^{-1} \tag{1.74}$$

gilt. Damit lässt sich nun die Lagrangedichte für die Pionen in Ordnung $O(p^2)$:

$$\mathcal{L}_{\pi\pi}^{(2)} \;=\; \frac{F^2}{4} \mathrm{tr}\left(\partial_\mu U \partial^\mu U + \chi U^\dagger + \chi^\dagger U\right) \tag{1.75}$$

und diejenige für die Wechselwirkung mit Nukleonen in Ordnung $O(p)$:

$$\mathcal{L}_{\pi N}^{(1)} \;=\; \bar{\psi}(i\not{D} - m + \frac{g_A}{2} \not{u} \gamma_5)\psi \tag{1.76}$$

unter Vernachlässigung äußerer Vektor- und Axialvektorströme zusammensetzen. χ ist proportional zur Quark-Massenmatrix, die explizite Symmetriebrechung ist so als Kopplung an einen konstanten skalaren äußeren Strom realisiert. Das Nukleonfeld transformiert sich in Fundamentaldarstellung der SU(2), also mit $h(\gamma, g)$. Die Konstanten F, g_A und m entsprechen Pionzerfallskonstante, Axialstromkopplungskonstante und Nukleonmasse im chiralen Limes. Bei Entwicklung in den Feldern $\pi = \pi_a \tau_a$ finden sich Gell–Mann-Oakes-Renner Relation, Goldberger-Treiman Relation, ...

An dieser Stelle muss das Renormierungsschema erwähnt werden. Effektive Theorien sind grundsätzlich nicht renormierbar, da in jeder Ordnung der Entwicklung neue Wechselwirkungsterme höherer Dimension in den Feldern hinzukommen. Idee ist eben, zusätzlich in Parametern zu entwickeln, was die Theorie im weiteren Sinne renormierbar macht. Dazu wird grundsätzlich dimensional regularisiert, da dies das einzige Regularisierungsschema ist, was das Zählschema nicht zerstört und mit einer in jeder Ordnung endlichen Anzahl von Countertermen renormiert. Hier werden nur die später benötigten Counterterme zur Berechung der Selbstenergie des Nukleons in $O(p^3)$ angegeben:

$$\Delta\mathcal{L}^{(3)} = \Delta m \frac{m^2}{F^2}\bar{\psi}\psi + \Delta g_A \frac{m^2}{F^2}\frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5 u_\mu \psi + c_1 \bar{\psi}\psi \,\mathrm{tr}\left(\chi U^\dagger + \chi^\dagger U\right). \tag{1.77}$$

Die ersten dienen zur Renormierung von m und g_A, der letzte liefert den σ-Kommutator.

Durch das Einführen von Nukleonen ist eine Skala gegeben, die im chiralen Limes nicht verschwindet. Dies führt zu Komplikationen im Zählschema, beispielsweise sind ψ und m von Ordnung $O(1)$, während $(i\not{\partial} - m)\psi$ von Ordnung $O(p)$ ist. Diesem wird durch zusätzliche Entwicklung in $1/m$ entgegnet. Dazu wird eine Foldy-Wouthuysen Transformation durchgeführt:

$$\begin{aligned} N_v(x) &= e^{imv_\mu x^\mu} P_v^+ \psi(x), \\ H_v(x) &= e^{imv_\mu x^\mu} P_v^- \psi(x), \end{aligned} \tag{1.78}$$

mit Vierergeschwindigkeit v^μ $(v^2 = 1)$ und Projektor auf Nukleon (N_v) und Antinukleon (H_v) Zustände

$$P_v^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \not{v}). \tag{1.79}$$

Nach einsetzen in $\mathcal{L}_{\pi N}^{(1)} + \Delta\mathcal{L}^{(3)}$ und Ausintegration der Antinukleonzustände liefert dies die für die Nukleonselbstenergie relevanten Terme:

$$\hat{\mathcal{L}}_{\pi N} = \bar{N}_v \left(iv_\mu D^\mu + g_A S_\mu u^\mu + c_1 \mathrm{tr}\left(\chi U^\dagger + \chi^\dagger U\right)\right) N_v. \tag{1.80}$$

S^μ ist hier der Pauli-Lubanski Spinvektor $\frac{i}{2}\gamma_5\sigma^{\mu\nu}v_\nu$. Zusätzlich müssen nun noch Counterterme durch Kopplung an äußere Ströme eingeführt werden [26]. Für die Selbstenergie des Nukleon sind die Terme

$$\begin{aligned} &\frac{B_{15}}{(4\pi F)^2}\ \bar{N}_v (iv_\mu D^\mu)^3 N_v, \\ &\frac{B_{20}}{(4\pi F)^2}\ \left(\bar{N}_v (iv_\mu D^\mu) N_v \,\mathrm{tr}\left(\chi U^\dagger + \chi^\dagger U\right) + h.c.\right), \end{aligned} \tag{1.81}$$

mit Renormierungsparametern B_{15} und B_{20} bei gewähltem Renormierungspunkt zu beachten.

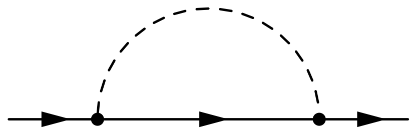


Abbildung 1.7: Einziges Schleifendiagramm für die Selbstenergie des Nukleons in Ordnung $O(p^3)$ (durchgezogen: Nukleon, gestrichelt: Pion).

Als nackter Nukleonpropagator ergibt sich aus Gl. 1.80 so

$$S_v(k) \;=\; S(\omega) \;=\; \frac{i}{v_\mu k^\mu + i\epsilon}, \tag{1.82}$$

wobei k^μ der "off-shell" Impuls des Nukleonimpulses $p^\mu = mv^\mu + k^\mu$ und $\omega = v_\mu k^\mu$ ist.

Die Selbstenergie des Nukleons in Ordnung $O(p^3)$ enthält nun nur das in Abb. 1.7 gezeigte Schleifendiagramm, einen Beitrag aus dem letzten Term in Gl. 1.80 und Counterterme. Mit dem $NN\pi$-Vertex $\frac{g_A}{F} S_\mu q^\mu \tau^a$, wobei q^μ der auslaufende Pionimpuls ist, liefert das Diagramm:

$$\Sigma_{Schleife}(\omega) \;=\; 3i\frac{g_A^2}{F^2}\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d}\frac{i}{v_\kappa (k-l)^\kappa + i\epsilon}\frac{i}{l^2 - m_\pi^2 + i\epsilon} S_\mu l^\mu (-S_\nu l^\nu). \tag{1.83}$$

Insgesamt ist die Selbstenergie in Ordnung $O(p^3)$ also:

$$\Sigma^{(3)}(\omega) \;=\; \Sigma_{Schleife}(\omega) - 4m_\pi^2 c_1 + \frac{m_\pi^2 \omega}{2\pi^2 F^2} B_{20} + \frac{\omega^3}{(4\pi F)^2} B_{15}, \tag{1.84}$$

was den Propagator

$$S^{(3)} \;=\; \frac{i}{\omega - \Sigma^{(3)}(\omega) + i\epsilon} \tag{1.85}$$

liefert. Da der Pol des Propagators nicht zwingend bei $\omega = 0$ liegen muss, wird die Nukleonmasse zu m_N verschoben. Durch Redefintion

$$\begin{aligned} &p^\mu = mv^\mu + k^\mu = m_N v^\mu + (m - m_N)v^\mu + k^\mu = m_N v^\mu + \tilde{k}^\mu, \\ &\tilde{\omega} = \tilde{k}_\mu v^\mu = m - m_N + \omega \end{aligned} \tag{1.86}$$

und Forderung, dass der Pol des Propagators bei $\tilde{\omega} = 0$ liegt, ergibt sich die Massenverschiebung $\Delta m = m_N - m$ als Lösung von

$$\Delta m \;=\; \Sigma(\Delta m). \tag{1.87}$$

Die Bestimmung der Pole eines Propagators führt also auch hier auf eine implizite Gleichung. In [26] wird stattdessen $\Sigma(0)$ als Lösung angegeben, was bestenfalls eine Näherung ist.

Kapitel 2

Massen instabiler Teilchen und Näherungen

2.1 Motivation

Eine Definition der Masse ist nur für freie, stabile Teilchen offensichtlich. In diesem Fall entspricht nach dem Energiesatz der Pol des Propagators der Masse des Teilchens. Für ein gebundenes Teilchen, wie beispielweise einem Quark in der QCD, ist diese Definition nicht zwingend, da keine Aussage über die Trägheit des Teilchen möglich ist. Deshalb verwendet man für diese auch Renormierungschemata, wie das $\overline{\text{MS}}$-Schema, die die Masse nicht über den Pol des Propagators definieren. Für freie zerfallende Teilchen, wie dem ρ-Meson, ist eine Definition der Masse ebenfalls nicht offensichtlich. Zunächst ist es möglich, den Pol $s_m = (m_m + i\Gamma_m)^2$ des Propagators (als Funktion des Impulsquadrats) in der komplexen Ebene zu bestimmen (siehe nächste Abschnitte). Eine Definition für Masse und Breite des Teilchens wird dann durch den Grenzfall $\Gamma_m/m_m \ll 1$ nahegelegt. Für diesen ist der Wirkungsquerschnitt eines Prozesses, in dessen Feynmanamplitude der Propagator in einem s-Kanal auftaucht, in der Nähe der Resonanz proportional zu einer Breit-Wigner Form [16]:

$$\sigma \propto \left| \frac{1}{s - m_m^2 + i m_m \Gamma_m} \right|^2 . \tag{2.1}$$

Hiernach kann man Masse und Breite entweder durch m_m und Γ_m definieren oder durch das Extremum der Spektralfunktion und deren Halbwertsbreite (FWHM), was in diesem Grenzfall identisch ist.

In diesem Kapitel werden beide Massendefinitionen und Näherungen zu diesen für das ρ-Meson im Vektordominanzmodell verglichen. Grund hierfür ist, dass für das $1/N_C$ korrigierte ρ-Meson im NJL-Modell die Masse nur in bestimmten Näherungen berechnet werden kann, sich dieses aber im statischen Limes auf das ρ-Meson des Vektordominanzmodells reduziert. Gleichzeitig wird ein Augenmerk auf die Regulatorabängigkeit und ihr Einfluss bei chiralen Extrapolationen geworfen. Die Näherungen werden auch bei der Diskussion der nichtanalytischen Terme im nächsten Abschnitt eine grosse Rolle spielen.

2.2 Pole von Propagatoren

Propagatoren sind zunächst nur für reelle Impulsquadrate s definiert, trotzdem gibt es Aussagen über die Lage ihrer Pole in der komplexen Ebene. Dies soll im folgenden untersucht werden.

Zunächst stellt sich die Frage nach einer kanonischen Fortsetzung des Propagators in die komplexe s-Ebene. Für das physikalische Riemannblatt verlangt man dazu, dass Schnitte auf der positiven reellen Achse über der Schwelle liegen sollen, insbesondere also der Propagator für $s < 0$ analytisch und reell ist. Eine solche Fortsetzung leistet die Källen-Lehmann Darstellung des Propagators [17]:

$$D_F(s) = \int_0^\infty d\mu^2 \frac{\rho(\mu^2)}{s - \mu^2 + i\epsilon}, \tag{2.2}$$

$$\rho(\mu^2) = \sum_\lambda \delta(\mu^2 - m_\lambda^2) |\langle 0|\Phi(0)|\lambda_0\rangle|^2, \tag{2.3}$$

wobei die Summe einen vollständigen Satz durchläuft und Φ der Feldoperator des betrachteten Teilchens (hier mit Spin 0) ist. Weil die Spektralfunktion $\rho(\mu^2)$ reell ist und ihr Träger in der positiven reellen Achse liegt, werden die geforderten Eigenschaften erfüllt. Bemerkenswert ist, dass zur Herleitung der Källen-Lehmann Darstellung für den Feynman Propagator die Mikrokausalität benötigt wird [17, 18], um

$$\rho(\mu^2) = \sum_\lambda \delta(\mu^2 - m_\lambda^2) |\langle 0|\Phi(0)|\lambda_0\rangle|^2 = \sum_\lambda \delta(\mu^2 - m_\lambda^2) |\langle \lambda_0|\Phi(0)|0\rangle|^2 \tag{2.4}$$

zu zeigen. Das bedeutet (vergleiche mit Dispersionsrelationen), dass der Propagator in der oberen Halbebene dem retardierten Propagator und in der unteren dem avancierten Propagator entspricht. Aus diesem Grund bzw. aus der Konvergenz des Integrals in Gl. 2.2 hat er keine Pole auf dem physikalischen Riemannblatt. Pole liegen demnach auf der positiven reellen Achse, auf der der Propagator als Distribution zu verstehen ist oder in anderen Riemannebenen.

Der Propagator besitzt also aus Kausalitätsgründen keinen Pol auf dem physikalischen Riemannblatt. Ein einfacheres Argument ist, dass der Propagator für $s < 0$ reell ist und daher mit Hilfe des Schwarzschen Spiegelungssatzes $D_F(s^*) = D_F^*(s)$ auf dem physikalischen Riemannblatt gilt. Pole wären also zueinander konjugiert und gleichzeitig Pole in der oberen Halbebene akausal. Somit darf es keine Pole auf dem physikalischen Riemannblatt geben.

Für Feynmanamplituden der Selbstenergie eines Teilchens $\Sigma(s)$ gilt dieses gleichermaßen, sie sind reell für $s < 0$ und in der komplexen Ebene mit Ausnahme der positiven reellen Achse analytisch.

2.3 Masse, Breite und Näherungen

Wie zu Beginn des Kapitels beschrieben gibt es für instabile Teilchen mindestens zwei Möglichkeiten die Masse zu definieren, über die Spektralfunktion und den Pol. Zusätzlich werden nun Näherungen für diese diskutiert, bei denen der Propagator nur für reelle Eingangsimpulse benötigt wird [15]. Sei dazu der inverse Propagator (der transversalen Komponente) durch $f(s)$ gegeben.

Polmasse: Die Polmasse erhält man durch Lösen der Gleichung

$$f(s) = 0. \tag{2.5}$$

Es ist zu beachten, dass der Pol nicht auf dem ersten Riemannblatt liegt, sondern wie sich herausstellt auf dem zweiten. Dazu muss f(s) durch den Schnitt über der Schwelle auf der positiven reelle Achse vom 1. in den 2. Quadranten analytisch fortgesetzt werden.

Masse über Spektralfunktion: Das Extremum der Spektralfunktion

$$\mathrm{Im}(\frac{1}{f}) = \frac{-\mathrm{Im}(f)}{\mathrm{Im}(f)^2 + \mathrm{Re}(f)^2} \tag{2.6}$$

kann durch Lösen der Gleichung

$$0 = \left(\left(\mathrm{Im}(f)^2 + \mathrm{Re}(f)^2\right)\mathrm{Im}(f') - 2\mathrm{Re}(f)\mathrm{Im}(f)\mathrm{Re}(f')\right)_{s=M^2} \tag{2.7}$$

bestimmt werden.

Näherung 1: Sei $M^2 + i\gamma$ die Nullstelle von $f(s)$. In erster Ordnung erhält man bei einer Entwicklung um $s_0 = M^2$

$$0 = f(M^2 + i\gamma) = f(M^2) + f'(M^2)(i\gamma) + O(\gamma^2). \tag{2.8}$$

Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil dieser Gleichung ergibt sich bei Vernachlässigung des quadratischen Terms in γ eine Bestimmungsgleichung für M und ein Ausdruck für γ:

$$0 = \left.(\mathrm{Re}(f)\mathrm{Re}(f') + \mathrm{Im}(f)\mathrm{Im}(f'))\right|_{s=M^2}, \tag{2.9}$$

$$\gamma = -\left.\left(\frac{\mathrm{Im}(f)}{\mathrm{Re}(f')}\right)\right|_{s=M^2}. \tag{2.10}$$

Näherung 2: Ein ähnliches Resultat ergibt sich mit dem Ansatz eine reelle Stelle M^2 zu finden, für die $f(s) = Z_0(s - M^2 + i\gamma) + O((s - M^2)^2)$. Aus Vergleich mit

$$f(s) = f(M^2) + f'(M^2)(s - M^2) + O((s - M^2)^2) \tag{2.11}$$

folgt unter Vernachlässigung des quadratischen Terms

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{Re}\left(\frac{f}{f'}\right)\Big|_{s=M^2} \\ &\propto (\mathrm{Re}(f)\mathrm{Re}(f') + \mathrm{Im}(f)\mathrm{Im}(f'))|_{s=M^2}\,, \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\gamma = \left(\frac{\mathrm{Im}(f)\mathrm{Re}(f') - \mathrm{Re}(f)\mathrm{Im}(f')}{\mathrm{Re}(f')^2 + \mathrm{Im}(f')^2}\right)\Big|_{s=M^2}\,. \tag{2.13}$$

Dies ist eine Näherung für den Pol des Propagators und nicht für das Extremum der Spektralfunktion, da Z_0 i.a. komplex ist.

Näherung 3: Für $\mathrm{Im}(f') = 0$ (dann ist Z_0 reell) fallen obige Bestimmungsgleichungen zusammen. Aufgrund des numerischen Aufwands kann für das ρ-Meson im NJL-Modell die Masse nur unter dieser Annahme bestimmt werden. Für die Polmasse und deren Breite ergibt sich als Näherung

$$0 = (\mathrm{Re}(f))_{s=M^2}\,, \tag{2.14}$$

$$\gamma = \left(\frac{\mathrm{Im}(f)}{\mathrm{Re}(f')}\right)\Big|_{s=M^2}\,. \tag{2.15}$$

Im Falle des $1/N_C$ korrigierten ρ-Mesons ergibt sich aus Gl. 1.24 und Gl. 1.25 speziell:

$$0 = 1 - 2g_v\mathrm{Re}(\tilde{\Pi})\Big|_{s=M^2}\,, \tag{2.16}$$

$$\gamma \approx \left(\frac{\mathrm{Im}(\delta\Pi)}{\mathrm{Re}(\Pi')}\right)\Big|_{s=M^2} \approx g_{\rho qq}^{(0)2}\,\mathrm{Im}(\delta\Pi)\big|_{s=M^2}\,, \tag{2.17}$$

wobei die Kopplungskonstante $g_{\rho qq}^{(0)}$ durch Gl. A.31 gegeben ist.

Näherung 4: Die einfachste Näherung besteht darin die Gleichung $f(s) = 0$ als Fixpunktgleichung $f(s) + s = s$ zu verstehen und einmal mit 'gutem' Startwert zu iterieren. Etwas konkreter für den Fall des ρ-Mesons heisst das,

$$m = \sqrt{m_0^2 + \Sigma(m^2)} \tag{2.18}$$

durch

$$m \approx \sqrt{m_0 + \Sigma(m_0^2)} \approx m_0 + \frac{\Sigma(m_0^2)}{2m_0} \tag{2.19}$$

anzunähern, wofür $\Sigma(m_0^2) \ll m_0^2$ benötigt wird.

Bemerkenswert ist, dass alle Näherung 1-3 für stabile Teilchen exakt sind und dass bei allen strenggenommen $\Gamma \ll m$ vorausgesetzt wird.

2.4 Das ρ-Meson im Vektordominanzmodell

Die verschiedenen Näherungen werden nun für das ρ-Meson im Vektordominanzmodell mit Pauli-Villars und O(3) Regularisierung verglichen und dabei speziell auf die Regulatorabängigkeit eingegegangen. Die O(3) Regularisierung ist von besonderem Interesse, da diese auch für die Mesonschleifen im NJL-Modell verwendet wird.

Die Selbstenergie des ρ-Mesons ist durch Gl. 1.57 gegeben. Mit der gleichen Pauli-Villars Regularisierung, die für die Quarkschleifen verwendet wurde (auf die gesamte Selbstenergie angewandt), erhält man daraus [19]

$$
\begin{aligned}
\Sigma(q^2) &= \sum_{j=0}^{2} c_j\, \Sigma(q^2, \mu_j^2)\,, \\
\Sigma(q^2, \mu_j^2) &= -\frac{g_{\rho\pi\pi}^2 q^2}{24\pi^2}\left(-\ln(\mu_j) + J_{P.V.}(\frac{q^2}{4\mu_j^2})\right)\,, \\
J_{P.V.}(z) &= \begin{cases} \left(\frac{1}{z}-1\right)^{3/2} \arctan\left(\left(\frac{1}{z}-1\right)^{-1/2}\right)\,, & 0 < z < 1 \\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{3/2}\left(\pi i - \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{z}}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{z}}}\right)\right)\,, & z > 1 \end{cases}\,.
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Dabei sind $\mu_j^2 = m_\pi^2 + j\Lambda^2$ die Regulatormassen und $z = 1$ ist die Schwelle für den Zerfall des ρ-Mesons in zwei Pionen bzw. Regulatorteilchen. Weiter ist zu beachten, dass es sich hierbei schon um eine analytische Fortsetzung der Selbstenergie vom 1. in den 2. Quadranten der komplexen Ebene, also auf das zweite Riemannblatt, handelt. Dies ist daran zu erkennen, dass die Selbstenergie auch oberhalb der Schwelle auf der postitiven reellen Achse analytisch ist.

Das Ergebnis für die verschiedenen Definitionen und Näherungen der Masse in Abhängigkeit der Pionmasse ist in Abb. 2.1 dargestellt, das für die Breite in Abb. 2.2. Hierbei wurden nackte Masse $m_0 = 853\,\mathrm{MeV}$, Abschneideparameter $\Lambda = 1000\,\mathrm{MeV}$ und Kopplungskonstante $g_{\rho\pi\pi} = 5.9$ wie in [19] gewählt. Nicht überraschend stellt sich heraus, dass die komplexeren Näherungen präziser sind und sich Polmasse und Extremum der Spektralfunktion auch für verschwindende Pionmasse um weniger als 5 MeV unterscheiden. Noch bessere Übereinstimmung findet man bei der Breite. Die für das NJL-Modell verwendeten Näherung 3 und Näherung 4, die auch für stabile ρ-Mesonen nur eine Näherung ist, liefern dagegen im chiralen Limes Abweichungen von über 10 MeV.

Charakteristisch in allen Fällen ist jedoch, dass sich die Masse durch die Selbstwechselwirkung über Pionen verkleinert und für kleine Pionmassen die Masse zunächst abfällt, bevor sie ansteigt und gegen die nackte Masse konvergiert. Mit Näherung 4 wird jetzt gezeigt, dass beide Effekte vom verwendeten Regularisierungschema verursacht werden.

In guter Näherung ist der Realteil der Selbstenergie für $m_0^2 > 4m_\pi^2$ und große Abschneideparameter durch

$$
\mathrm{Re}\left(\Sigma(m_0^2)\right) = -\frac{g_{\rho\pi\pi}^2 m_0^2}{24\pi^3}\left(-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{m_\pi^2(m_\pi^2+2\Lambda^2)}{(m_\pi^2+\Lambda^2)^2}\right) + \mathrm{Re}\left(J_{P.V.}\left(\frac{m_0^2}{4m_\pi^2}\right)\right)\right) \tag{2.21}
$$

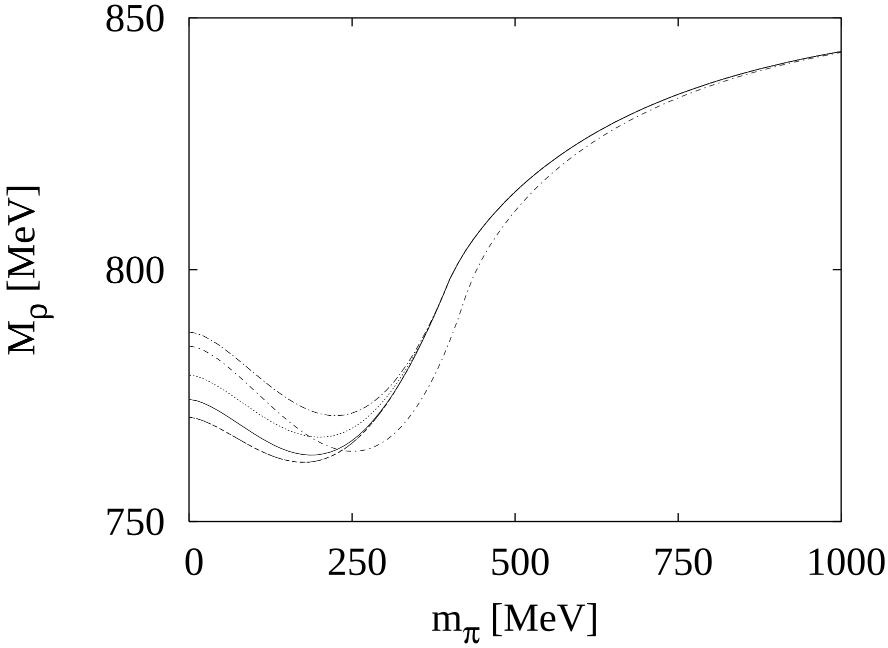


Abbildung 2.1: Massennäherungen für Pauli-Villars Regularisierung. Für kleine Pionmassen von oben nach unten: Näherung 3, Näherung 4, Extremum der Spektralfunktion, Polmasse und Näherungen 1,2.

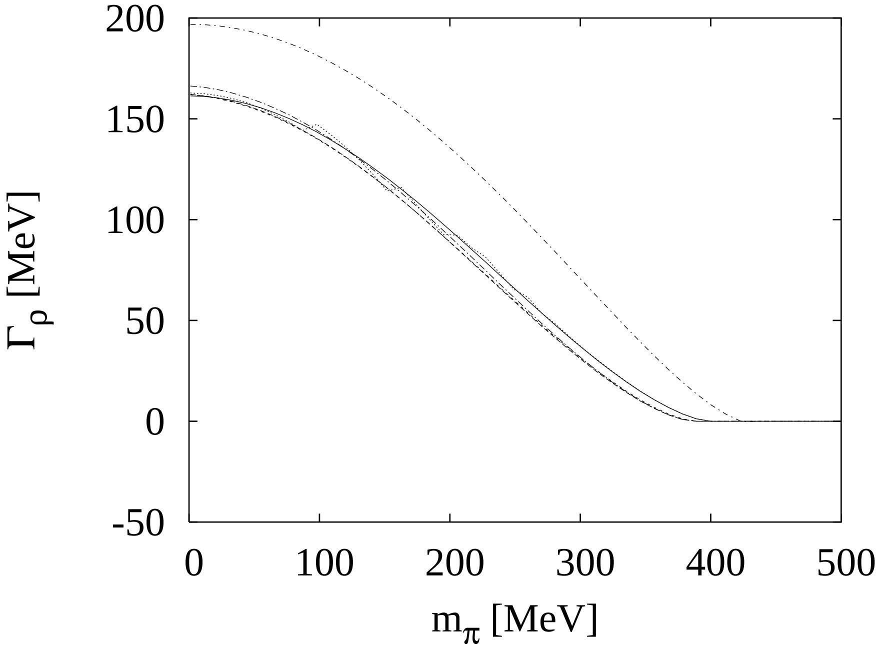


Abbildung 2.2: Breitennäherungen für Pauli-Villars Regularisierung. Oben Näherung 4, unten die übrigen überlagert . Für die FWHM gibt es numerische Instabilitäten.

gegeben, da die Funktionen $J_{P.V.}$ der Regulatormassen keine Rolle spielen sollten, was auch streng gezeigt werden kann. Nun ist

$$f_{P.V.}(m_\pi,\Lambda) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{m_\pi^2(m_\pi^2+2\Lambda^2)}{(m_\pi^2+\Lambda^2)^2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\Lambda^4}{m_\pi^2(m_\pi^2+2\Lambda^2)}\right) \tag{2.22}$$

eine regulatorabhängige, monoton fallende, positive Funktion, während

$$\mathrm{Re}\left(J_{P.V.}(z)\right) = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{3/2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{z}}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{z}}}\right) \tag{2.23}$$

mit $z=\frac{m_0^2}{4m_\pi^2}$ monoton in m_π wächst. Ihre Überlagerung führt zu dem Minimum, welches daher ein Regulatoreffekt ist.

Um zu sehen, dass auch die Massenverschiebung nach unten von der Regularisierung herrührt, kann der Punkt $z=1$, also die Schwelle, betrachtet werden. Hier verschwindet $J_{P.V.}(z)$ und die Verschiebung wird durch die Regulatorfunktion $f_{P.V.}$ erzeugt. Da sie positiv ist, ist die Verschiebung negativ.

Unter Verwendung von O(3) Regularisierung ergeben sich andere Charakteristiken, was die Regulatorabängigkeit weiter unterstreicht. Im Ruhesystem ergibt sich mit ihr die Selbstenergie

$$\begin{aligned}
\Sigma(q^2) &= -\frac{g_{\rho\pi\pi}^2}{3}\int_{reg.}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{4E_\pi^2(k)-q^2+4k^2}{E_\pi(k)(4E_\pi^2(k)-q^2-i\epsilon)}+\frac{4g_{\rho\pi\pi}^2}{3}\int_{reg.}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{E_\pi(k)}\\
&= -\frac{g_{\rho\pi\pi}^2q^2}{24\pi^2}\left(\mathrm{arcsinh}(\frac{\Lambda}{m_\pi})-\frac{4m_\pi^2}{q^2}\frac{\Lambda}{m_\pi}\left(1+\frac{\Lambda^2}{m_\pi^2}\right)^{1/2}+J_{O(3)}\left(\frac{q^2}{4m_\pi^2},\frac{\Lambda}{m_\pi}\right)\right),
\end{aligned} \tag{2.24}$$

wobei $E_\pi(k)=\sqrt{k^2+m_\pi^2}$ die Pionenergie und

$$\begin{aligned}
J_{O(3)}(z,r) &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{3/2}\left(\ln\left(-\frac{2\left((1+\sqrt{1+r^2}\sqrt{z})\sqrt{z-1}-r(z-1)\right)}{(\sqrt{z-1}+r)(r-1)^2\sqrt{z}}\right)\right.\\
&\qquad\left.-\ln\left(-\frac{2\left((1+\sqrt{1+r^2}\sqrt{z})\sqrt{z-1}+r(z-1)\right)}{(\sqrt{z-1}-r)(r-1)^2\sqrt{z}}\right)\right)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

ist. An den Nullstellen der Argumente der Logarithmen in $J_{O(3)}(z,r)$ als Funktion von z ist zu erkennen, dass neben $z=1$ auch $z=1+r^2$ ein Verzweigungspunkt ist. Da der Abschneideparameter überhalb der Schwelle liegen sollte, sollte für instabile Teilchen die Selbstenergie durch $4\Lambda^2+4m_\pi^2-q^2>0$ fortgesetzt werden, was $z<1+r^2$ entspricht. Massen stabiler Teilchen liegen unterhalb der Schwelle, also bei $z<1$. Es werden also die analytischen Fortsetzungen von $J_{O(3)}(z,r)$ durch $(0,1)$ und $(1,1+r^2)$ vom 1. in den 2. Quadranten der komplexen Ebene benötigt. Erstere ist

$$J_{O(3)}^{st}(z,r) = \left(\frac{1}{z}-1\right)^{3/2}\left(\arctan\left(-\frac{\sqrt{1-z}}{r}\right)+\arctan\left(\frac{1+\sqrt{1+r^2}\sqrt{z}}{r\sqrt{1-z}}\right)\right), \tag{2.26}$$

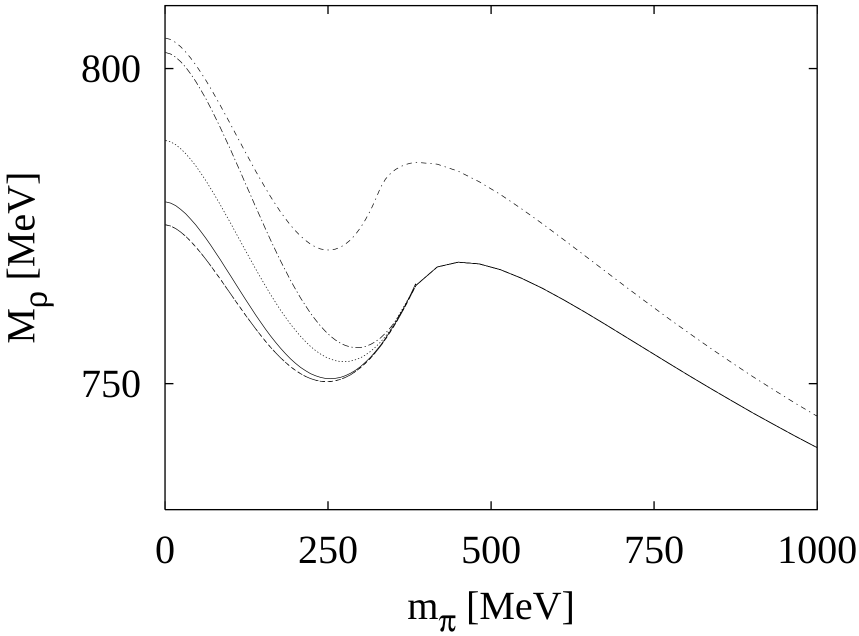


Abbildung 2.3: Massennäherungen für O(3) Regularisierung. Von oben nach unten: Näherung 4, Näherung 3, Extremum der Spektralfunktion, Polmasse und Näherungen 1,2.

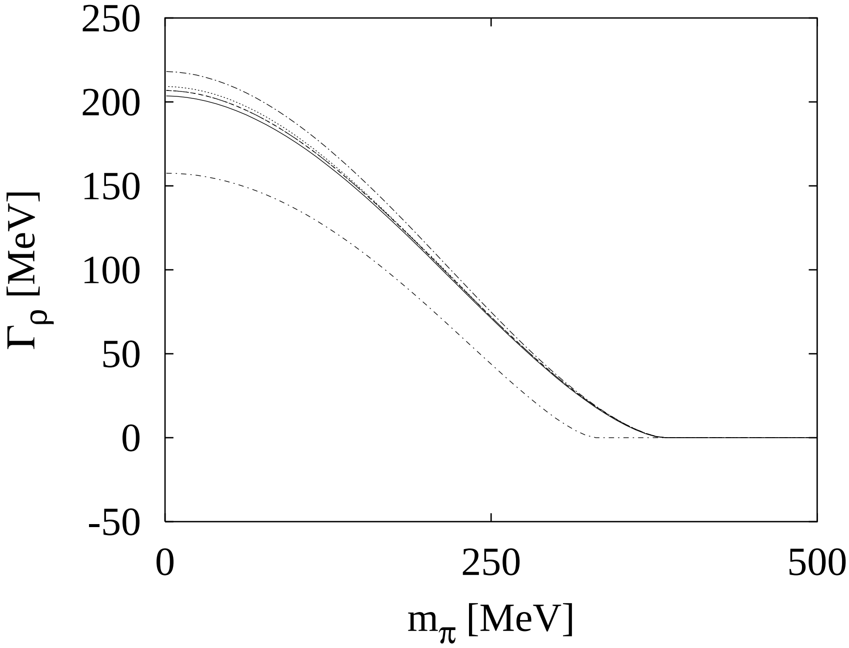


Abbildung 2.4: Breitennäherungen für O(3) Regularisierung. Unten Näherung 4, oben die übrigen überlagert.

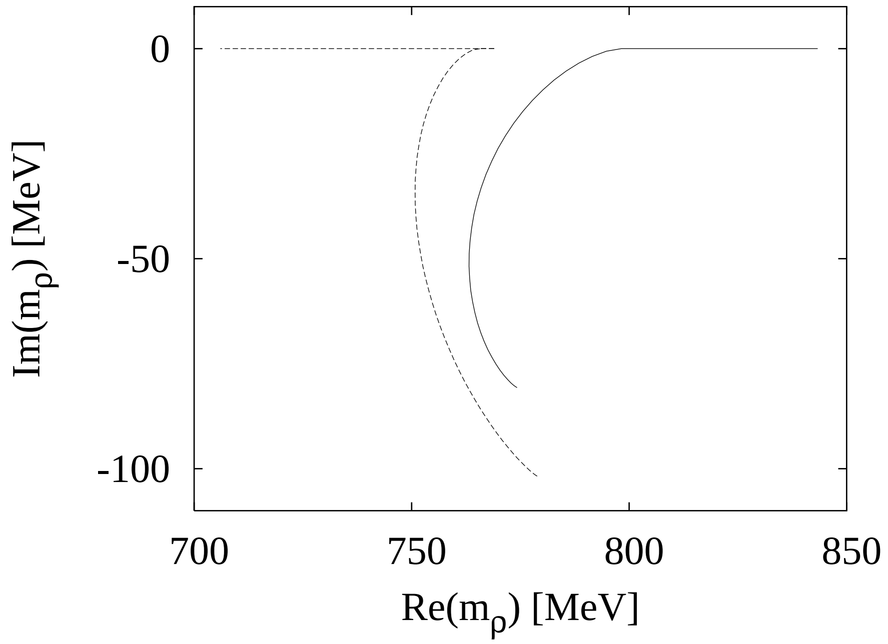


Abbildung 2.5: Verlauf der Pole in der komplexen Ebene für Pauli-Villars (durchgezogen) und O(3) (gestrichelt) regularisierte Selbstenergie bei Variation der Pionmasse.

zweitere

$$
\begin{aligned}
J^{in}_{O(3)}(z,r) &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{3/2} \times \\
&\left(\pi i + \ln\left(\frac{(1+\sqrt{1+r^2}\sqrt{z})\sqrt{z-1}-r(z-1)}{(1+\sqrt{1+r^2}\sqrt{z})\sqrt{z-1}+r(z-1)}\ \frac{r-\sqrt{z-1}}{r+\sqrt{z-1}}\right)\right) . \quad (2.27)
\end{aligned}
$$

Interessanterweise findet man hiermit

$$
\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty} J^{st}_{O(3)}(z,r) &= J_{P.V.}(z)\,, \qquad 0<z<1, \\
\lim_{r\to\infty} J^{in}_{O(3)}(z,r) &= J_{P.V.}(z)\,, \qquad z>1, \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

weshalb Unterschiede zur Pauli-Villars Regularisierung für $m_\pi \ll \Lambda$ hauptsächlich durch die Unterschiede der regulatorabhängigen Funktionen $f_{P.V.}$ und

$$
f_{O(3)}(m_\pi,\Lambda,q^2) = \operatorname{arcsinh}(\frac{\Lambda}{m_\pi}) - \frac{4m_\pi^2}{q^2}\frac{\Lambda}{m_\pi}\left(1+\frac{\Lambda^2}{m_\pi^2}\right)^{1/2} \qquad (2.29)
$$

verursacht werden. Im Gegensatz zur positiven Funktion $f_{P.V.}$ ist $f_{O(3)}$ für $4m_\pi^2 \geq q^2$ negativ, was wegen Näherung 4 an der Schwelle generell die Vermutung nahelegt, dass die

ρ-Mesonmasse nach oben verschoben wird. Da die Funktion $J_{O(3)}$ bzw. ihre analytischen Fortsetzungen für große Abschneideparameter monoton sind, sind lokale Extrema in der Abhängigkeit der ρ-Mesonmasse von der Pionmasse ein Regulatoreffekt.

Die Ergebnisse für Massen und Breiten in verschiedenen Näherungen sind in Abb. 2.3 und Abb. 2.4 zusammengestellt. Als Parametersatz wurde $\Lambda = 600\,\mathrm{MeV}$ entsprechend dem besten Parametersatz für das ρ-Meson im $1/N_C$-korrigierte NJL-Modell [5], $g_{\rho\pi\pi} = 6$ entsprechend dem gebräuchlichen Wert im Vektordominanzmodell und $m_0 = 660\,\mathrm{MeV}$ verwendet. m_0 wurde so gewählt, dass der Pol des Propagators für $m_\pi = 140\,\mathrm{MeV}$ möglichst nahe bei $(770 - 75i)\,\mathrm{MeV}$ liegt. Die Abbildungen enthüllen, dass nur die Breiten, mit Ausnahme von Näherung 4, mit den verschiedenen Näherungen gut beschrieben werden können. Bei den Massen unterscheiden sich sogar die beiden Definitionen für kleine Pionmassen um mehr als 10 MeV und für die Näherungen, die in dieser Arbeit für das NJL-Modell verwendet wurden, gibt es noch größere Abweichungen, was bei der Diskussion der Ergebnisse berücksichtigt werden sollte.

Als Abschluss zeigt Abb. 2.5 den Verlauf der ρ-Mesonmasse in der komplexen Ebene. Die Kurven sind durch die Pionmasse parametrisiert, die Form einer Sichel ist nach obigem ein Regulatoreffekt.

2.5 Das ρ-Meson im NJL-Modell

Zum Abschluss dieses Kapitels sei noch zur Vollständigkeit und zum Vergleich das Ergebnis der Massenverschiebung des ρ-Mesons durch $1/N_C$-Korrektur im NJL-Modell dargestellt (siehe Abb. 2.6). Hier wurde Näherung 4 (siehe Gl. 2.19) mit der Selbstenergie aus Gl. 3.20 und den Parametersätzen aus Abschnitt 1.1.6 verwendet.

Es sind zwei Dinge zu beachten: Erstens wird die Selbstenergie an der RPA-ρ-Mesonmasse ausgewertet, welche sich mit der Stromquark-bzw. Pionmasse ändert. Zweitens ähnelt der Verlauf eher dem mit Pauli-Villars Regularisierung als dem mit O(3)-Regularisierung im Vektordominanzmodell, weil die Selbstenergie aufgrund von Regulatoreffekten für unendlich große Pionmassen nicht verschwindet (siehe Abschnitt 4.4) und dort nach oben verschoben wird.

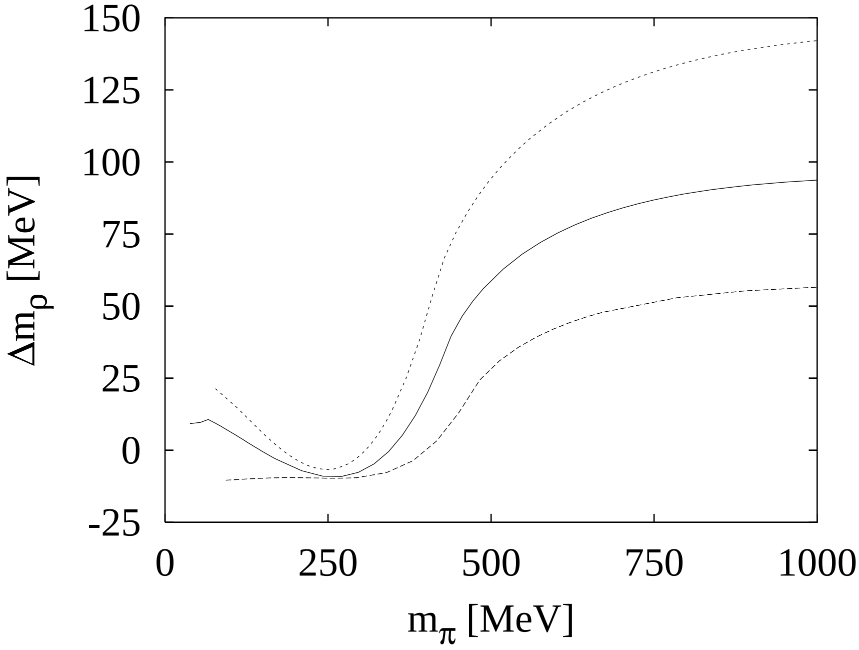


Abbildung 2.6: Massenverschiebung des ρ-Mesons in $1/N_C$-Näherung nach Gl. 2.19 und Gl. 3.20 für die Parametersätze aus Abschnitt 1.1.6: $\Lambda_M = 500\,\mathrm{MeV}$ (lang gestrichelt), $\Lambda_M = 600\,\mathrm{MeV}$ (durchgezogen), $\Lambda_M = 700\,\mathrm{MeV}$ (kurz gestrichelt).

Kapitel 3

Chiraler Limes

3.1 Nichtanalyzität und LNA

Für chirale Extrapolationen ist insbesondere die Abhängigkeit von Observablen für den Limes kleiner Pionmassen von großer Bedeutung. Es ist nicht verwunderlich, dass diese Abängigkeit nicht analytisch ist, da mit der Pionmasse eine Skala gegeben ist, die übertrieben mit einem Infrarot-Abschneideparamter identifiziert werden kann[1]. In diesem Kapitel wird das nichtanalytische Verhalten von Hadronmassen diskutiert. Geeignetestes Werkzeug hierzu ist die chirale Störungstheorie (χPT), da diese, als effektive Feldtheorie der QCD, Amplituden gerade in Pionimpuls und -masse [20, 7], ihrem Ordnungsparameter, entwickelt. Für deren führende nichtanalytische Terme (LNA-Terme) relativ zu den Pionmassen liefert sie daher universelle Ergebnisse. Speziell für Massen ist eine solche Entwicklung nicht möglich, da diese als Lösung einer impliziten Gleichung mit einer Amplitude gegeben sind. Stattdessen werden üblicherweise die LNA-Terme der Selbstenergie bei der nackten Teilchenmasse bestimmt. Dass diese jedoch wenig über das quantitative Verhalten im chiralen Limes aussagen und ihr Konvergenzradius, wenn überhaupt, sehr klein ist, wird am Ende dieses Kapitels dargestellt. LNA-Terme dienen daher eher zur Klassifikation und sind keine Entwicklung in der Pionmasse. In diesem Kapitel werden LNA-Terme einer Amplitude A mit $LNA(A)$ bezeichnet, die Ordnung ergibt sich aus dem Kontext.

Als erste stellten Li und Pagels [21] heraus, dass Observable in chiralen Modellen mit einer expliziten chiralen Symmetriebrechung nichtanalytisch von dem Brechungsparameter abhängen. Dies wurde von Langacker und Pagels genauer untersucht [22, 23]. Eine systematische Methode für Hadronmassen wurde von Gasser und Zepeda [24] entwickelt. Sie untersuchten Nichtanalyzitäten in Ableitungen nach dem expliziten Brechungsparameter der chiralen Symmetrie. Die oben angeführte implizite Abhängigkeit ist in ihrer Untersuchung in σ-Kommutatoren versteckt. Der Brechungsparameter ist in ihrem Fall proportional zu den Stromquarkmassen. Aufgrund des Goldstone Theorems ist aber auch die Pionmasse ein Maß für die explizite Brechung der chiralen $SU(2)$ Symmetrie, deren

[1] z.B. können in QED Infrarot-Divergenzen durch endliche Photonmassen regularisiert werden.

Zusammenhang zur Stromquarkmasse in erster Ordnung durch die Gell-Mann–Oakes–Renner Relation gegeben ist.

3.2 Nichtanalytische Terme in Feynmandiagrammen

In Feynmandiagrammen ist sehr schön der Ursprung der nichtanalytischen Terme und ihre Unabhängigkeit vom Ultraviolettverhalten, insbesondere dem Regularisierungsschema, erkennbar. Es wird sich hier auf Einschleifendiagramme beschränkt, da nur diese in dieser Arbeit relevant sind.

Einschleifendiagrammen entsprechen im Impulsraum Integrale über meromorphe Funktionen (Produkte aus Propagatoren und Vertizes). Die Energieintegration kann immer mit Hilfe des Residuensatzes durchgeführt werden: Sie setzt Zwischenzustände auf die Massenschale.

Für eine Feynmanamplitude A erhält man daher ein Integral der Form:

$$A = \int d^3p\ f(p, E_i(p), g_j) = \int d^3p\ F(p), \tag{3.1}$$

mit Teilchenenergien $E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2}$ und Parametern g_j, wie Massenquadrate, Kopplungskonstanten und externe Impulse. Die Funktion f ist bis auf Stellen, die physikalischen Schwellen entsprechen, analytisch. Der Ursprung der nichtanalytischen Abhängigkeiten liegt an der Nichtanalyzität der Funktion $E(p) = \sqrt{p^2 + m^2}$ für verschwindende Teilchenmassen und -impulse. Für $|p| > a > 0$ ist $E(p)$ analytisch in den Massen und somit auch

$$\int_{|p|>a} d^3p\ f(p, E_i(p), g_j). \tag{3.2}$$

Dies gilt auch, wenn der Integrand Pole besitzt, physikalisch also Schwellen aufgehen, da Cauchyscher Hauptwert und Residuum an der Schwelle ebenfalls analytisch sind. Nichtanalytische Terme stammen also aus dem Integral

$$\int_{|p|<a} d^3p\ f(p, E_i(p), g_j). \tag{3.3}$$

Dieses Integral ist unabhängig vom Regularisierungsschema, weshalb LNA-Terme nicht vom Abschneideparameter abhängen können. Da das Argument wiederholt werden kann, sind LNA-Terme auch unabängig von dem eingeführten Parameter a.

Das obige Vorgehen ähnelt der 'Asymptotic Expansion' [25], mit der in Feynmandiagrammen weiche und harte Moden getrennt werden.

Gehen im chiralen Limes keine Schwellen auf, lässt sich $f(p, E_i(p), g_j)$ in E_π und p Laurent entwickeln. Nichtanalytische Terme stammen dann aus Ausdrücken der Form

$$\int_0^a dp\ \frac{p^n}{E_\pi(p)^m} \quad , n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{Z} \tag{3.4}$$

und haben, da a-unabhängig, die Ordnung $(n - m + 1)$ in m_π. Dies ist z.B. im Fall des ρ-Mesons möglich.

Für den Fall, dass im chiralen Limes Schwellen aufgehen ist dies nicht mehr möglich. Entweder wertet man hier die entstehenden Ausdrücke direkt aus oder man entwickelt in Inversen der übrigen dimensionsbehafteten Größen. Die Ordnung ergibt sich dann aus dimensionaler Analyse des Gesamtausdrucks. Ein solches Vorgehen ist im Fall der linearen σ-Modells möglich.

3.3 $1/N_C$ korrigiertes Quark und lineares σ-Modell

Nun sollen die LNA-Terme für das $1/N_c$ korrigierte NJL-Quark berechnet werden. Wie in der Einleitung des Abschnitts erläutert, ist es dabei nicht möglich das tatsächliche Verhalten der Masse von der Pionmasse zu untersuchen, sondern nur das einer Näherung. Es wird jedoch augenscheinlich, dass auch im NJL-Modell die LNA-Terme nur über den Verlauf des Pionpropagatorpols mit der Stromquarkmasse zusammenhängen und es ergeben sich die gleichen Terme wie im linearen σ-Modell, auf das es sich im statischen Limes reduziert.

Die Masse des $1/N_C$ korrigierten Konstituentenquarks m ist nach Gl. 1.41 Lösung der Gleichung

$$m = m_H + \delta\Sigma(\not p = m), \tag{3.5}$$

wobei m_H die Hartreemasse und $\delta\Sigma$ aus Gl. 1.33 der Korrekturterm zur Selbstenergie für das Quark in der $1/N_C$ Entwicklung ist[2]. Entwickelt man diese Gleichung um die Hartreemasse und vernachlässigt quadratische Terme in $(m - m_H)$ ergibt sich

$$m \approx m_H + \delta\Sigma(\not p = m_H) = m_H + \delta\Sigma^{(a)}(\not p = m_H) + \delta\Sigma^{(b)}, \tag{3.6}$$

was nun auf LNA-Terme untersucht wird. Da diese von Pionzwischenzuständen herrühren,

[2]In Gl. 3.5 ist $\not p$ durch m zu ersetzen, was durch Lorentztransformation ins Ruhesystem einzusehen ist.

sind folgende Größen zu untersuchen:

$$
\begin{aligned}
\delta_\pi \Sigma^{(a)}(\not p = m_H) &= -3i \int_{reg.} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_0 D_\pi(p)}{(m_H - p_0)^2 - \vec{p}^2 - m_H^2 + i\epsilon} \\
&= \frac{3g_{\pi qq}^2}{8\pi^2 m_H} \int_0^\Lambda dp \ \frac{p^2}{E_\pi(p)} \frac{1}{1 - \frac{m_\pi^2}{2m_H E_\pi(p)}} \\
&\quad +3 \int_{reg.} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{(m_H + E_q(p)) D_\pi(m_H + E_q(p), \vec{p})}{2E_q(q)} \,, \qquad (3.7) \\
\delta_\pi \Sigma^{(b)} &= D_\sigma(0) \Delta_\pi \\
&= \frac{-2g_s}{\frac{m_0}{m_H} - 4ig_s N m_H^2 I(0)} N m_H \int_{reg.} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} D_\pi(p)(3I(0) - 3p^2 K(p)) \\
&= -\frac{3g_{\pi qq}^2}{8\pi^2 m_H} \int_0^\Lambda dp \ \frac{p^2}{E_\pi(p)} * (1 + O(m_0) + O(m_\pi^2)) \,, \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

mit $E_\pi(p) = \sqrt{p^2 + m_\pi^2}$ und $E_q(p) = \sqrt{p^2 + m_H^2}$. Hier wurde die p_0-Integration mit Hilfe des Residuensatzes durchgeführt. In Gl. 3.7 wurde der Pfad in der unteren komplexen Ebene geschlossen. Vorteil hiervon ist, dass der zweite Summand analytisch in m_0 ist und der Pol des Pionpropagators wegen $(m_H + E_q(p))^2 - \vec{p}^2 > 2m_H^2$ keine Rolle spielt. Es wird deutlich, dass die LNA-Terme durch den Verlauf des Pionpropagatorpols und nur indirekt von m_0 bestimmt werden. Es ergibt sich

$$
LNA(m) = LNA\left(\frac{3g_{\pi qq}^2}{8\pi^2 m_H} \int_0^\Lambda dp \ \frac{p^2}{E_\pi(p)} \left(\frac{1}{1 - \frac{m_\pi^2}{2m_H E_\pi(p)}} - 1\right) * (1 + O(m_0) + O(m_\pi^2))\right). \qquad (3.9)
$$

Da die LNA-Terme vom Abschneideparameter unabhängig sind, kann der Integrand nun in $1/m_H$ entwickelt werden, was zu folgenden führenden nichtanalytischen Termen führt:

$$
\begin{aligned}
LNA(m) &= LNA\left(\frac{3g_{\pi qq}^2 m_\pi^2}{16\pi^2 m_H^2} \int_0^\Lambda dp \ \frac{p^2}{E_\pi^2(p)}\right) \\
&= -\frac{3g_{\pi qq}^2}{32\pi m_H^2} m_\pi^3. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

Bei Austausch von Pion-Quark Kopplungskonstante mit Pion-Nukleon Kopplungskonstante und Hartreemasse mit Nukleonmasse, ergibt sich der gleiche Term wie in chiraler Störungstheorie. Mit Hilfe der Goldberger-Treiman Relation ($g_A M_N = g_{\pi NN} f_\pi$) hat dieser die bekannte Form [24, 26, 27]

$$
LNA(M_N) = -\frac{3g_A^2}{32\pi f_\pi^2} m_\pi^3. \qquad (3.11)
$$

3.4 $1/N_C$ ρ-Meson und Vektordominanzmodell

Um nun die führenden nichtanalytischen Terme für das $1/N_C$ korrigierte ρ-Meson zu bestimmen, benötigt man zunächst die korrigierte Polarisationsfunktion, die nach Gl. 1.34 durch

$$\delta\Pi_\rho(q) = \sum_{k=a,b,c,d} \delta\Pi_\rho^{(k)}(q) \tag{3.12}$$

gegeben ist. Nach obigem ergeben sich die LNA-Terme von Diagrammen mit einem intermediären Pion explizit, sofern ihre Schwelle nicht im chiralen Limes aufgeht, durch Entwicklung des übrigen Integranden (d.h. Pionpropagator ausgenommen) in den Pionimpulsen p_0 und $\vec{p}$. Bei Diagrammen mit zwei intermediären Pionen ist ein ähnliches Vorgehen möglich. Zu beachten ist, dass beide Pionen einen Beitrag liefern. Ist der Graph symmetrisch in den Pionen, bedeutet dies, einen Propagator mitzuentwickeln und den Beitrag des Graphen zu verdoppeln. Für die pionischen Anteile der Polarisationsfunktionen bedeutet dies:

$$\begin{aligned}
\delta_\pi^{LNA}\Pi_\rho^{(a)\,ab}(q) &= -\frac{i}{3}\,\Gamma^{\mu\,acd}_{\rho,\pi,\pi}(q,0)\,\Gamma^{bcd}_{\mu\,\rho,\pi,\pi}(-q,0)\,D_\pi(q)\int_{reg.}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\tilde{D}_\pi(p) \\
&= -\frac{2i}{3}\,N^2\,\delta_{ab}\,q^2\,I(q)^2\,D_\pi(q)\int_{reg.}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\tilde{D}_\pi(p) \\
&= \frac{4}{3}\,N\,\delta_{ab}\,I(q)\int_{reg.}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\tilde{D}_\pi(p)\times(1+O(m_0)) \qquad (3.13) \\
\delta_\pi^{LNA}\Pi_\rho^{(b)\,ab}(q) &= \frac{i}{3}\,\Gamma^{accb}_{\rho,\pi,\pi,\rho}(q,0,0)\int_{reg.}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\tilde{D}_\pi(p) \\
&= -2N\,\delta_{ab}\left(I(0)+I(q)-(q^2+2m^2)K(q)\right)\int_{reg.}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\tilde{D}_\pi(p) \qquad (3.14) \\
\delta_\pi^{LNA}\Pi_\rho^{(c)\,ab}(q) &= \frac{i}{6}\,\Gamma^{acbc}_{\rho,\pi,\rho,\pi}(q,0,-q)\int_{reg.}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\tilde{D}_\pi(p) \\
&= -\frac{4N}{3}\,\delta_{ab}\,I(q)\int_{reg.}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\tilde{D}_\pi(p) \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\delta_\pi^{LNA}\Pi_\rho^{(d)\,ab}(q) &= \frac{i}{3}\,\Gamma^{ab}_{\rho,\rho,\sigma}(q,-q)\,D_\sigma(0)\,\Delta_\pi \\
&= -\frac{i}{6}\,\Gamma^{ab}_{\rho,\rho,\sigma}(q,-q)\,\Gamma^{cc}_{\pi,\pi,\sigma}(0,0)\,D_\sigma(0)\int_{reg.}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\tilde{D}_\pi(p) \\
&= -4i\,N^2\,m_H^2\delta_{ab}I(0)\,\big(I(q)-I(0)+(q^2+2m^2)K(q)\big)\;D_\sigma(0)\times \\
&\quad\times\int_{reg.}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\tilde{D}_\pi(p) \\
&= 8\,N\,\delta_{ab}\frac{m^2}{q^2-4m^2}\frac{I(0)}{I(q)}\big(I(q)-I(0)+(q^2+2m^2)K(q)\big)\times \\
&\quad\times\int_{reg.}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\tilde{D}_\pi(p)\times(1+O(m_0)). \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

Hierbei ist noch zu beachten, dass die Integranden für die p_0-Integration konvergieren, der einzelne Pionpropagator im NJL-Modell aber nicht. Da nur der Polverlauf für die LNA-Terme von Interesse ist, kann letzterer jedoch hier durch

$$
\tilde{D}_\pi(p) = \frac{g^2_{\pi qq}}{p^2-m_\pi^2+i\epsilon} \qquad (3.17)
$$

ersetzt werden (siehe Gl. 1.25). Mit

$$
LNA\left(\int_{reg.}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\tilde{D}_\pi(p)\right) = \frac{1}{4\pi^2NI(0)}m_\pi^2\ln(m_\pi) \qquad (3.18)
$$

erhält man daraus sofort den führenden nichtanalytischen Term der korrigierten Polarisationsfunktion, der hier aber nicht explizit angegeben werden soll. Für die Selbstenergie erhält man aus Vergleich mit

$$
1-2g_M\tilde{\Pi}_M(q) = 1-2g_M(\Pi_M+\delta\Pi_M(q)) = -2g_M g^{(0)-2}_{Mqq}(q^2-m_M^{(0)2}+g^{(0)2}_{Mqq}\delta\Pi_M(q)) \qquad (3.19)
$$

den Ausdruck

$$
\Sigma_M(q) = -g^{(0)2}_{Mqq}\delta\Pi_M(q) \qquad (3.20)
$$

und für die Masse des korrigierten Mesons nach Gl. 2.19

$$
m_M = \sqrt{m_M^{(0)2}+\Sigma_M(m_M)} \approx \sqrt{m_M^{(0)2}+\Sigma_M(m_M^{(0)})} \approx m_M^{(0)} + \frac{\Sigma_M(m_M^{(0)})}{2m_M^{(0)}}. \qquad (3.21)
$$

Wie bereits mehrfach betont, ist nicht davon auszugehen, dass die LNA-Terme dieser Näherung tatsächlich quantitativ die Abhängigkeit der ρ-Mesonmasse von der Pionmasse beschreiben.

Da nichtanalytische Abhängigkeit von der Pionmasse ein Infraroteffekt ist und Integranden von Feynmanamplituden insbesondere in den Pionimpulsen entwickelt werden, liegt ein Vergleich zum statischen Limes [5] nahe. Bei diesem werden Quarkdrei- und vierecke in führender Ordnung in den Mesonimpulsen entwickelt und die Propagatoren derart vereinfacht, dass Pionen Goldstonebosonen bleiben und Propagatoren die Form eines Feynmanpropagators bekommen. Außerdem werden nur Pionen als Zwischenzustände berücksichtigt. Die Vereinfachung der Propagatoren führt zu Relationen zwischen den Quark- und Pionmassen sowie den Kopplungskonstanten, sie ist jedoch nicht zwingend und zu restriktiv, um quantitative Aussagen treffen zu können. Stattdessen könnten die Mesonpropagatoren auch durch

$$D_M(p) = \frac{g_M^2(p)}{p^2 - m_M^2 + i\epsilon} \tag{3.22}$$

ersetzt werden und die Kopplungsfunktion $g(p)$ entwickelt werden. Dies ähnelt dem Vorgehen bei der Untersuchung der LNA-Terme, nur dass bei letzteren nicht in den Eingangsimpulsen entwickelt wird.

Hier sei noch bemerkt, dass der statische Limes einer Entwicklung von Diagrammen in Inversen der Konstituentenmasse entspricht, wobei die Massen der Mesonen, die in einer solchen Entwicklung unendlich groß wären (siehe Abschnitt 4.3), festgehalten werden. Dies ist durch Dimensionsbetrachtung bzw. direkt an den jeweiligen Funktionen (von Regulatoren abgesehen) ersichtlich.

Mit dieser Entwicklung, also im statischen Limes, erhält man aus Gl. 3.13 - 3.18 für den LNA-Term der Selbstenergie:

$$LNA(\Sigma_\rho^{ab}(q)) = \frac{g_{\rho qq}^{(0)2}}{\pi^2}\, \delta_{ab}\, m_\pi^2\, \ln(m_\pi) \times (1 + O(\frac{1}{m})). \tag{3.23}$$

Wohingegen gleiches ohne Entwicklung in $\frac{1}{m}$ z.B. für den Parametersatz mit $\Lambda_M = 600\,\mathrm{MeV}$ aus Abschnitt 1.1.6 bei der RPA ρ-Mesonmasse

$$LNA(\Sigma_\rho^{ab}(m_\rho)) = -1,23 \times \frac{g_{\rho qq}^{(0)2}}{\pi^2}\, \delta_{ab}\, m_\pi^2\, \ln(m_\pi) \tag{3.24}$$

liefert, was zeigt, dass sich die LNA-Terme im statischen Limes deutlich anders verhalten als im NJL-Modell.

Trotzdem soll nun auf die LNA-Terme im statischen Limes, also im Vektordominanzmodell, eingegangen werden, da zu schweren Mesonen in der Literatur widersprüchliche Aussagen existieren. Die Selbstenergie im Vektordominanzmodell ist durch

$$\Sigma_\rho^{ab}(q) = \frac{i g_{\rho\pi\pi}^2}{3}(4I_1 + (q^2 - 4m^2)I(q)) \tag{3.25}$$

gegeben. Die LNA-Terme von I_1 und $I(q)$ sind

$$\begin{aligned} LNA(I_1) &= -\frac{i}{8\pi^2}\, m^2\, \ln(m) && (3.26)\\ LNA(I(q)) &= -\frac{i}{4\pi^2 q^2}\, m^2\, \ln(m) - \frac{i}{4\pi^2 q^4}\, m^4\, \ln(m), && (3.27)\end{aligned}$$

wobei der Integrand von $I(q)$ in $1/q^2$ entwickelt wurde, was

$$LNA(\Sigma_\rho(q)) = \frac{g^2_{\rho\pi\pi}}{4\pi^2}\, m^2 \,\ln(m) - \frac{g^2_{\rho\pi\pi}}{4\pi^2 q^2}\, m^4 \,\ln(m) \tag{3.28}$$

liefert. Wie schon in [5] sieht man, dass im statischen Limes $g_{\rho\pi\pi} = 2g_{\rho qq}$ gelten muss. Wichtiger jedoch ist die Feststellung, dass man hier einen führenden Term der Ordnung $m^2 \ln(m)$ bekommt und der nächste erst von Ordnung $m^4 \ln(m)$ ist. In [28] wurden hingegen kein Term der niedrigsten Ordnung gefunden (was nach einem Rechenfehler aussieht) und ein Term der Ordnung m^3 über einen $\rho \to \pi\omega$ Graphen eingeführt. Eine gewisse Willkür ist also unverkennbar. Weiterhin wurde in [24] festgestellt, dass für die Masse eines schweren (stabilen) Mesons

$$M_B^2 = (M_B^0)^2 + \sigma_B \left(1 - \frac{3}{32\pi^2 f_\pi^2}\sigma_\pi \ln\frac{\sigma_\pi}{\Lambda^2}\right) \tag{3.29}$$

gilt, wobei $\sigma_M = \langle M|m_u\bar{u}u + m_d\bar{d}d|M\rangle$ der Sigmakommutator des jeweiligen Mesons, M_B die gedresste und M_B^0 die nackte Masse ist. Berechnet man das Matrixelement des Sigmakommutators in einem chiralen Modell unter der Näherung

$$\sigma_M = \langle M|\mathcal{L}_{\chi SB}|M\rangle, \tag{3.30}$$

mit dem die chirale Symmetrie brechenden Term $\mathcal{L}_{\chi SB}$ (im einfachsten Fall proportional zum σ-Meson), sind weitere LNA-Terme in den Sigmakommutatoren denkbar. Durch das Produkt $\sigma_B\sigma_\pi \ln\frac{\sigma_\pi}{\Lambda^2}$ würden LNA-Terme und regularisierungsabhängige analytische Terme sogar mischen.

3.5 LNA-Terme und Fits

Chirale Extrapolationen von Gitter-QCD Daten mit Hilfe von hadronischen Modellen werden unter anderem durch die führenden nichtanalytischen Terme motiviert [27, 28]. Dabei wird argumentiert, dass die Koeffizienten der Terme universell sind und tatsächlich eine Entwicklung der Hadronmasse in der Pionmasse beschreiben, was in den Fits berücksichtigt werden muss.

Im folgenden soll dargestellt werden, dass durch die implizite Abhängigkeit der Massen von der Selbstenergie die LNA-Terme der Massennäherungen nur bei bestimmten Regularisierungsverfahren die Abhängigkeit der Massen von der Pionmasse wiedergeben. In diesen Fällen ist der Konvergenzradius jedoch kleiner als die physikalische Pionmasse und das Regularisierungsverfahren für chirale Extrapolationen ungeeignet. Da das Nukleon ein stabiles Teilchen ist und die LNA-Terme in chiraler Störungstheorie für diese bekannt sind [26, 29], wird sich auf dieses beschränkt.

Wie in Abschnitt 1.3 argumentiert, ist die Massenverschiebung des Nukleons $\Delta m(m_\pi)$ durch $\Delta M(m_\pi) = \Sigma(\Delta M(m_\pi), m_\pi)$ gegeben. In der Literatur [26] wird dagegen oft

$\Delta M(m_\pi) = \Sigma(0, m_\pi)$ gesetzt, was bestenfalls als Näherung zu verstehen ist (wie in Gl. 3.6) und im übrigen den LNA-Term aus Gl. 3.11 liefert.

Die Selbstenergie des Nukleons in HBχPT in Ordnung $O(p^3)$ (siehe Gl. 1.84) ist in dimensionaler Regularisierung durch

$$\begin{aligned}\Sigma(\omega, m_\pi) &= \frac{3g_A^2}{4f_\pi^2}\left(2L\omega(2\omega^2 - 3m_\pi^2) + \frac{\omega}{8\pi^2}(2\omega^2 - 3m_\pi^2)\ln\frac{m_\pi}{\lambda} + \frac{\omega}{8\pi^2}(m_\pi^2 - \omega^2)\right. \\ &- \left.\frac{1}{4\pi^2}(m_\pi^2 - \omega^2)^{3/2}\arccos\frac{-\omega}{m_\pi}\right) - 4m_\pi^2 c_1 \qquad (3.31)\end{aligned}$$

gegeben [26]. Hierbei ist λ die in der Regularisierung eingeführte Abschneideskala und

$$L = \frac{\lambda^{d-4}}{16\pi^2}\left(\frac{1}{d-4} + \frac{1}{2}(\gamma_E - 1 - \ln 4\pi)\right). \qquad (3.32)$$

Die Selbstenergie wird in diesem Schema mit Hilfe von eingeführten Countertermen renormiert. Da die renormierten Koeffizienten jedoch nicht im Experiment bestimmt wurden und im folgenden keine quantitative Aussage gemacht werden soll, werden diese in dieser Arbeit für den benutzten Renormierungspunkt zu Null gesetzt. Dies entspricht L in Gl. 3.31 Null zu setzen.

Dimensionale Regularisierung hat nun die seltsame Eigenheit, dass die Selbstenergie für verschwindende Pionmassen ebenfalls verschwindet[3]: $\Sigma(\omega, 0) = 0$. Dies bedeutet, dass masselose Pionen die nackte Masse nicht verschieben. Weiterhin divergiert die Selbstenergie mit wachsender Pionmasse, was auch physikalisch nicht zu erwarten ist. In Bezug auf die LNA-Terme sind diese Eigenschaften in dem Sinne vorteilhaft, als dass das Verhalten für genügend kleine Pionmassen tatsächlich durch die in $\Sigma(\omega, 0)$ bestimmten LNA-Terme beschrieben wird:

$$\Delta m(m_\pi) = \Sigma(0, m_\pi) + O((\Delta m)^2). \qquad (3.33)$$

Es ist nun interessant zu untersuchen, bis zu welcher Pionmasse die LNA-Terme den Verlauf der Massenverschiebung beschreiben. Dazu kann man die Kurve

$$f_{\Delta M}(m_\pi) = a\, m_\pi^2 + b\, m_\pi^3 \qquad (3.34)$$

in den Parametern a und b an die Ergebnisse der Massenverschiebung anfitten. Für die physikalischen Werte [26] von $g_A = 1.26$, $f_\pi = 92.4\,\mathrm{MeV}$ und einem experimentell ermittelten Wert von $c_1 = -0,00087\,\mathrm{MeV}^{-1}$ bei einem Renormierungspunkt von $\lambda = 600\,\mathrm{MeV}$ ergibt sich für das Verhältnis des Parameters b zu dem erwarteten LNA-Koeffizienten b_{LNA} aus Gl. 3.11 bei einem Fit im Intervall $[0, m_{\pi,fit}]$ das in Abb. (3.1) dargestellte Ergebnis. In Abb. (3.2) sind zur Übersicht zusätzlich die Massenverschiebung in Abhängigkeit der Pionmasse, die Näherung $\Delta M(m_\pi) \approx \Sigma(0, m_\pi)$ und zwei Fits dargestellt.

[3]Eigentlich ist dieser Effekt bei Renormierung erwünscht, da hier die Massenverschiebung sowieso in Counterterme abgespalten wird. Dass das Integral des Schleifenintegrals aber mit dimensionaler Regularisierung im chiralen Limes verschwindet, ist eine Eigenschaft des Regularisierungsschemas.

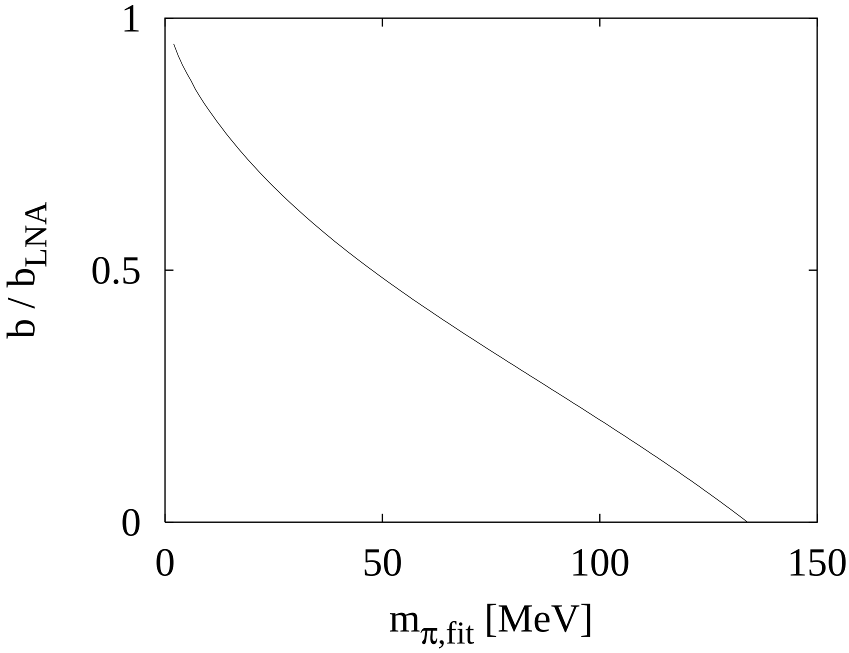


Abbildung 3.1: Verhältnis des Fitparameters b zum LNA-Koeffizienten b_{LNA} bei dimensionaler Regularisierung für das Fitintervall $[0, m_{\pi,fit}]$.

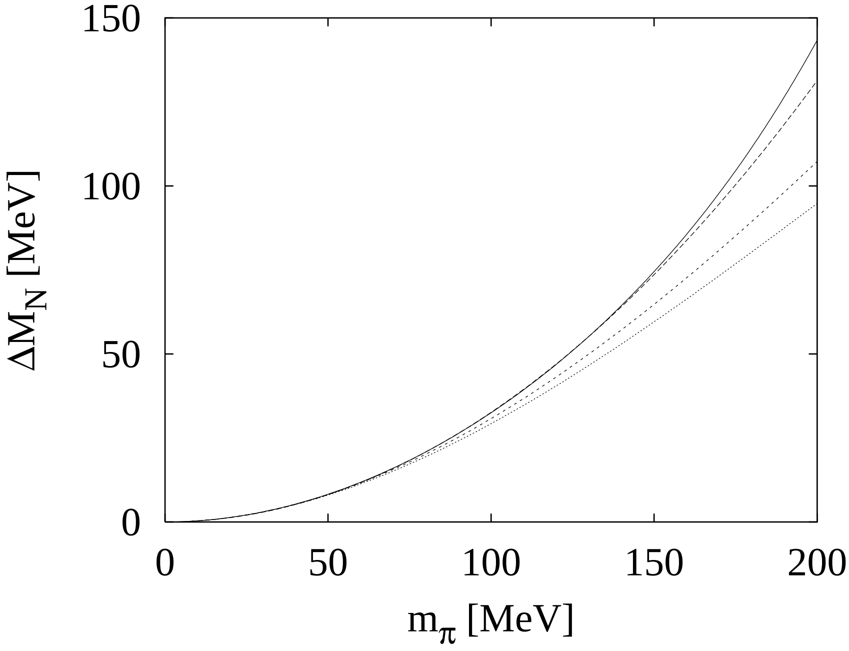


Abbildung 3.2: Die Kurven von oben nach unten: Massenverschiebung des Nukleons, Fit im Intervall $[0, 140\,\mathrm{MeV}]$, Fit im Intervall $[0, 20\,\mathrm{MeV}]$ und die Näherung $\Delta M(m_\pi) \approx \Sigma(0, m_\pi)$. Alle für den Fall dimensionaler Regularisierung.

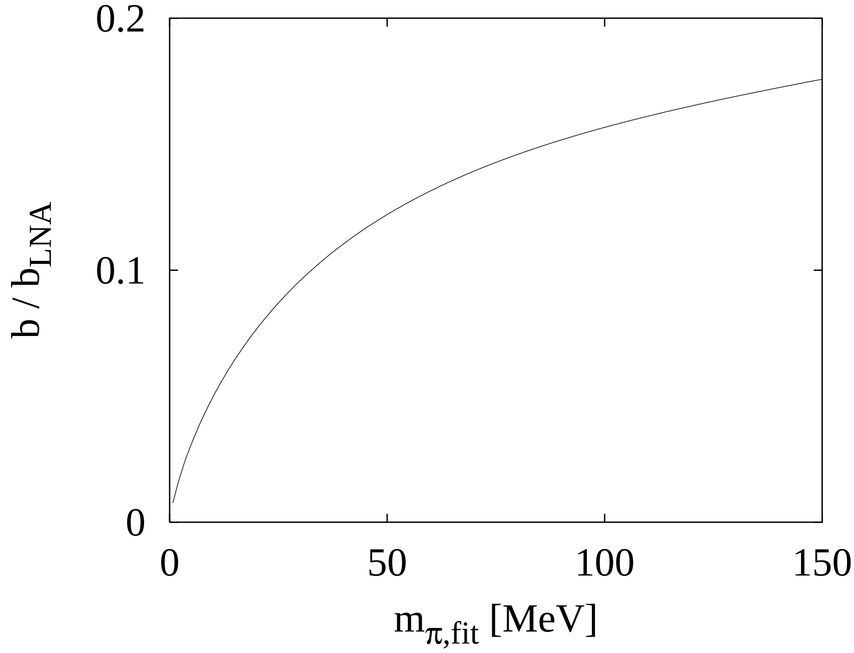


Abbildung 3.3: Verhältnis des Fitparameters b zum LNA-Koeffizienten b_{LNA} bei O(3)-Regularisierung für das Fitintervall $[0, m_{\pi,fit}]$.

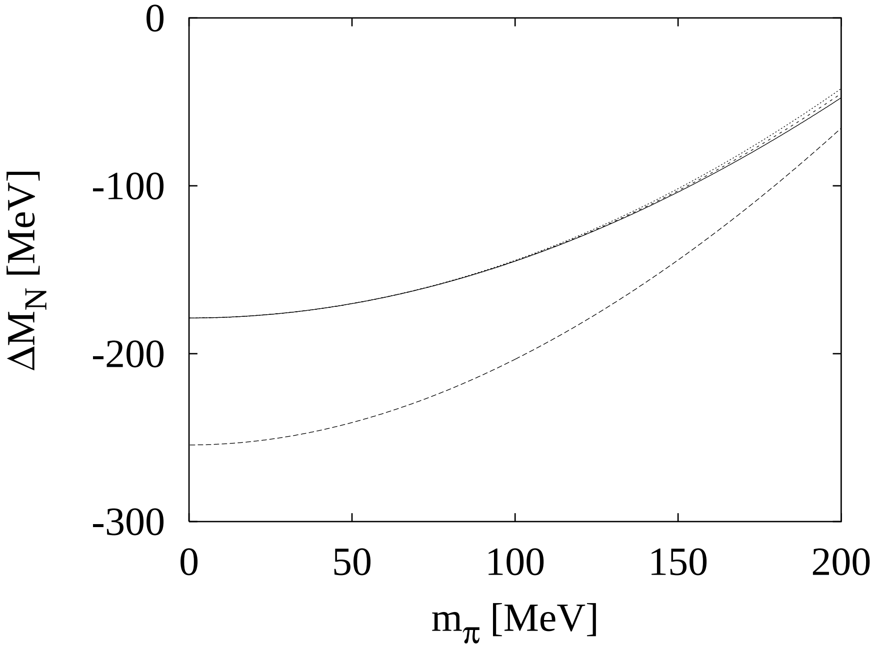


Abbildung 3.4: Obere Kurven: Massenverschiebung des Nukleons und zwei Fits in den Intervallen $[0, 20\,\mathrm{MeV}]$ und $[0, 140\,\mathrm{MeV}]$. Untere Kurve: Näherung $\Delta M(m_\pi) \approx \Sigma(0, m_\pi)$. Alle für den Fall einer O(3)-Regularisierung.

Es ist klar zu erkennen, dass die LNA-Terme, wenn überhaupt, nur für sehr kleine Pionmassen Aussagen über den Verlauf der Massenverschiebung machen und insbesondere beim physikalischen Wert der Pionmasse unbedeutend sind.

Da in chiralen Extrapolationen und speziell in dieser Arbeit O(3)-Regularisierungen verwendet werden, soll obiges mit diesem Regularisierungsschema wiederholt werden. Die wesentliche Beobachtung hier ist, dass im chiralen Limes nackte und gedresste Masse unterschiedlich sind und die LNA-Terme auch im Grenzfall verschwindender Massen keine Aussagefähigkeit mehr besitzen. Die Selbstenergie des Nukleons (siehe Gl. 1.84) ist mit dieser Regularisierung in seinem Ruhesystem durch

$$\Sigma(\omega, m_\pi) \quad = \quad -\frac{3g_A^2}{16\pi^2 f_\pi^2} \int_0^\Lambda dl \frac{l^4}{E_\pi(E_\pi - \omega)} - 4m_\pi^2 c_1 \tag{3.35}$$

mit $E_\pi = \sqrt{l^2 + m_\pi^2}$ gegeben. Da im chiralen Limes die Masse verschoben ist, wird die Fitform

$$f_{\Delta M}(m_\pi) = c + a\, m_\pi^2 + b\, m_\pi^3 \tag{3.36}$$

gewählt. Unter Verwendung der gleichen Parameter wie im Fall dimensionaler Regularisierung und $\Lambda = 600\,\mathrm{MeV}$ erhält man das in Abb. 3.3 und Abb. 3.4 dargestellte Ergebnis. Hier ist klar erkennbar, dass die LNA-Terme nichts über den Verlauf der Massenverschiebung aussagen.

Kapitel 4

Grenzfall schwerer Quarks

4.1 Massen im Grenzfall schwerer Quarks

Neben den Eigenschaften des chiralen Limes sollten chirale Extrapolationen auch die Eigenschaften der QCD für gro{sse Stromquarkmassen, dem "Heavy Quark Limit", beschreiben. Dieser lässt sich ähnlich wie der chirale Limes beliebig genau durch eine effektive Feldtheorie modellieren, der 'Heavy Quark Effective Theory', wobei als Ordnungsparameter in Inversen der Stromquarkmassen entwickelt wird.

Als ein Ergebnis dieser sollten Hadronmassen im Heavy Quark Limit gegen die Summe der Stromquarkmassen der Quarks, aus denen sie bestehen, laufen. Dies wird von Daten der Gitter-QCD untermauert.

Wie dies bei Extrapolationen mit hadronischen Modellen berücksichtigt wird, wird in Abschnitt 5.3 beschrieben.

4.2 Hartree-Quarkmasse

Die Hartree-Quarkmasse ist durch die Gap-Gleichung 1.7 bzw. A.21 gegeben. Da es sich um eine implizite Gleichung handelt, ist es günstiger die Abhängigkeit der Stromquarkmasse von der Hartreemasse zu untersuchen. Mit der in dieser Arbeit verwendeten Pauli-Villars Regularisierung erhält man:

$$\begin{aligned} m_0 &= m - \Sigma_H(m, \Lambda_q) \\ &= m - \frac{3g_s\Lambda_q^4}{\pi^2 m} + O(\frac{1}{m^2}), \end{aligned} \tag{4.1}$$

wobei die Selbstenergie, deren zweites Argument der Abschneideparameter ist, in Inversen der Hartreemasse entwickelt wurde. Hieraus folgt

$$m = m_0 + \frac{3g_s\Lambda_q^4}{\pi^2 m_0} + O(\frac{1}{m_0^2}). \tag{4.2}$$

Für große Stromquarkmassen ist die Hartreemasse also proportional zur dieser. Abweichungen sind spätestens ab $m_0 < \frac{3g_s\Lambda_q^4}{\pi^2 m_0}$, bzw. mit üblichen Parametersätzen $m_0 < \sqrt{\frac{3g_s\Lambda_q^2}{\pi^2}}\Lambda_q \approx \Lambda_q$, zu erwarten.

Die Hartreemasse läuft also gegen die Stromquarkmasse, was im Bilde von Konstituentenquarks zu erwarten ist. Für den Parametersatz mit $\Lambda_M = 600\,\mathrm{MeV}$ aus Abschnitt 1.1.6 ist der Verlauf der Hartreemasse als Funktion der Stromquarkmasse in Abb. 4.1 gegeben.

4.3 RPA-Mesonmassen

Aussagen über die Massen von RPA-Pion und RPA-ρ-Meson sind schwieriger, da die jeweiligen Bestimmungsgleichungen von den Kopplungskonstanten g_s bzw. g_v abhängen. Im folgenden wird gezeigt, dass diese, sofern positiv d.h. die Wechselwirkung attraktiv, den Heavy Quark Limes der Mesonmassen nicht beeinflussen.

Die Pionmasse ist Lösung der Gleichung (siehe Gl. A.30)

$$0 = \frac{m_0}{m} + 4ig_sN_CN_fm_\pi^2 I(m_\pi) =: f_\pi(m_\pi). \tag{4.3}$$

Für Pauli-Villars regularisierte Integrale gilt

$$\begin{aligned} f_\pi(0) &= \frac{m_0}{m}, &(4.4)\\ f_\pi(2m-\epsilon) &= \frac{m_0}{m} + \frac{g_sN_CN_fm\Lambda_q}{\pi}(\sqrt{2}-4)\,. &(4.5)\end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz existiert damit für genügend große Hartreemassen eine Lösung von Gl. 4.3 im Intervall $(0, 2m)$. Um zu sehen, dass die Nullstelle gegen die zweifache Hartreemasse konvergiert, genügt es zu zeigen, dass die Funktion $p^2I(p)$ für große Quarkmassen und einem konstanten Verhältnis $\frac{p^2}{4m^2} \in (0,1)$ gegen 0 läuft. Dann ist der Grenzwert der Funktion f_π im Intervall $(0, 2m)$ ungleich Null und die Masse muss bei der zweifachen Hartreemasse liegen.

Zunächst gilt

$$\begin{aligned} I(p) &= \int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{q^2-m^2+i\epsilon}\,\frac{1}{(q-p)^2-m^2+i\epsilon}\\ &= \int\frac{d^4x}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{x^2-1+i\epsilon}\,\frac{1}{(x-\frac{p}{m})^2-1+i\epsilon}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Mit der für Quarkschleifen verwendeten Pauli-Villars Regularisierung führt dies zu

$$I(p) = \int\frac{d^4x}{(2\pi)^4}\,\sum_j c_j\,\frac{1}{x^2-1+j\frac{\Lambda_q^2}{m^2}+i\epsilon}\,\frac{1}{(x-\frac{p}{m})^2-1+j\frac{\Lambda_q^2}{m^2}+i\epsilon}. \tag{4.7}$$

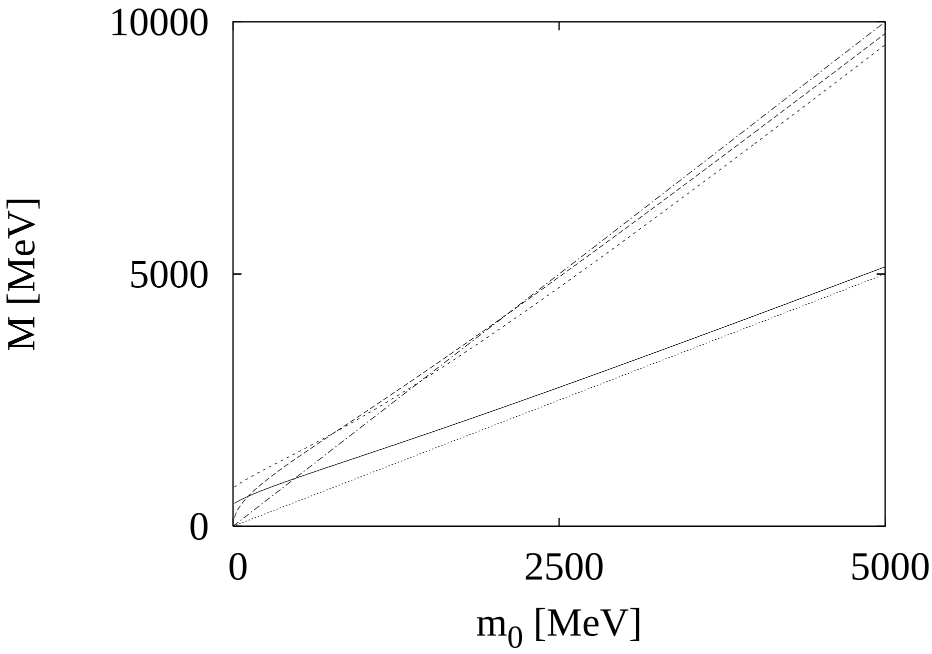


Abbildung 4.1: Hartreemasse (durchgezogen), RPA-Pionmasse (lang gestrichelt), RPA ρ-Mesonmasse (kurz gestrichelt) und Funktionen f(x)=x (gepunktet) und f(x)=2x (gepunkt-strichelt) in Abhängigkeit von der Stromquarkmasse für den in Abschnitt 1.1.6 gegebenen Parametersatz ($\Lambda_M = 600\,\mathrm{MeV}$).

Der Grenzwert $m \to \infty$ für festes $\frac{p}{m}$ entspricht also $\Lambda_q \to 0$ ohne Nebenbedingungen und ist für $I(p)$ offensichtlich 0. Entwickelt man das regularisierte Integral in $\frac{\Lambda_q^2}{m^2}$ erhält man

$$\begin{aligned} I(p) &= \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \sum_j c_j\, j \left(\frac{-1}{(x^2-1+i\epsilon)^2} \frac{1}{(x-\frac{p}{m})^2-1+i\epsilon} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{x^2-1+i\epsilon} \frac{-1}{\left((x-\frac{p}{m})^2-1+i\epsilon\right)^2} \right) + O(\frac{\Lambda_q^4}{m^4}). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Die einzelnen Integranden sind integrabel, da weiterhin für ein logarithmisch divergentes Integral ein Regularisierungschema für quadratisch divergente Integrale verwendet wurde (zwei Regulatormassen) gilt $\sum_j c_j\, j = 0$, folglich $I(p) = O(\frac{\Lambda_q^4}{m^4})$ und damit

$$\lim_{m\to\infty} f_\pi(2mx) = \lim_{m\to\infty} \frac{m_0}{m} = 1, \qquad x \in (0,1). \tag{4.9}$$

Die Pionmasse läuft also wegen des starken Regularisierungsschemas gegen die zweifache Hartreemasse, was den Erwartungen des Heavy Quark Limit entspricht.

Für das RPA-ρ-Meson kann man analog vorgehen. Seine Masse ist durch

$$0 = 1 + \frac{8}{3} g_v N_C N_f \left(-2m^2 iI(0) + (m_\rho^2 + 2m^2) iI(m_\rho)\right) =: f_\rho(m_\rho) \tag{4.10}$$

definiert. Man erhält hieraus mit Pauli-Villars Regularisierung

$$f_\rho(0) = 1\,, \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} f_\rho(2m-\epsilon) &= 1 + \frac{2g_v N_C N_f \Lambda_q m}{\pi} \left(-\frac{m}{6\pi\Lambda_q} \ln\left(1 - \frac{\Lambda_q^4}{\left(m^2+\Lambda_q^2\right)^2}\right) + \sqrt{2} - 2 \right) \\ &= 1 + \frac{2g_v N_C N_f \Lambda_q m}{2\pi} (\sqrt{2}-2) + O(\frac{1}{m})\,. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Ist die Hartreemasse groß genug, hat f_ρ wegen des Mittelwertsatzes sicher eine Nullstelle im Intervall $(0, 2m)$, die Masse des RPA-ρ-Mesons. Wie oben kann man zeigen, dass

$$\lim_{m\to\infty} f_\rho(2mx) = 1, \qquad x \in (0,1)\,, \tag{4.13}$$

weshalb auch die RPA-ρ-Mesonmasse gegen die zweifache Hartreemasse läuft.

Eine graphische Darstellung der Massen abhängig von der Stromquarkmasse ist Abb. 4.1. Obiges wird hier bestätigt.

4.4 $1/N_C$ Korrekturen

Im Hinblick auf Extrapolationen haben O(3)-regularisierte Selbstenergien in hadronischen Modellen, wie z.B. Vektordominanzmodell, die positive Eigenschaft, im Heavy Quark Limit zu verschwinden. Dies ist in den jeweiligen Fällen leicht einzusehen, da die Energieintegration mit Hilfe des Residuensatzes berechenbar ist und der verbliebene Integrand für die Impulsintegration punktweise und damit gleichmäßig (kompaktes Gebiet) im Limes schwerer Pionmassen verschwindet.

Da die RPA-Propagatoren im Unendlichen nicht verschwinden, sondern aufgrund der Punktwechselwirkung gegen eine Konstante laufen, verschwinden im Heavy Quark Limit nicht alle Anteile der $1/N_C$ Korrekturen. Jedoch folgt mit

$$
\begin{aligned}
I(0) &= \frac{i\Lambda_q^4}{16\pi^2 m^4} + o(\frac{1}{m^4}) && (4.14)\\
I(2m-\epsilon) &= \frac{-i\Lambda_q^4}{48\pi^2 m^4} + o(\frac{1}{m^4}) && (4.15)\\
K(2m-\epsilon) &= \frac{i\Lambda_q^4}{80\pi^2 m^6} + o(\frac{1}{m^6}) && (4.16)
\end{aligned}
$$

und der Untersuchung der Konstanten Δ (siehe Gl. 1.38 bzw. A.32), dass die Tadpoleterme $\delta\Sigma^{(a)}$ und $\delta\Pi_\rho^{(d)}$ verschwinden. Desweiteren kann man wie im hadronischen Modell sehen, dass $\delta\Pi_\rho^{(a)}$ gegen Null konvergiert (statt des Mesonpropagators verschwindet hier die Kopplungskonstante, siehe Gl. A.33). Da, wie numerisch in [5] gezeigt, der Anteil von $\delta\Pi_\rho^{(c)}$ gegen $\delta\Pi_\rho^{(b)}$ verbachlässigbar ist, werden nun nur $\delta\Pi_\rho^{(b)}$ und $\delta\Sigma^{(b)}$ untersucht.

Die Korrektur zur Selbstenergie des Quarks $\delta\Sigma^{(b)}$ ist nach Gl. 1.39 durch die Funktionen $\delta\Sigma_a^{(b)}$ und $\delta\Sigma_b^{(b)}$ bestimmt. Da die Mesonpropagatoren an der Hartreemasse im Heavy Quark Limit gegen $-2g_M$ laufen und der übrige Integrand ungerade in $(p_0 - q_0)$ ist, verschwindet auch $\delta\Sigma_a^{(b)}$ im Heavy Quark Limit. Für $\delta\Sigma_b^{(b)}$ mit $p^2 = m^2$ und O(3)-Regularisierung ergibt sich dagegen

$$
\begin{aligned}
\delta\Sigma_b^{(b)}(m^2) &= im \int_{reg.} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \, \frac{D_\sigma(q) - 3D_\pi(q)}{(p-q)^2 - m^2 + i\epsilon}\\
&= \frac{m}{2} \int_{reg.} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \, \frac{1}{E_q(q)} \, \big(D_\sigma(q) - 3D_\pi(q)\big)\big|_{q_0 = m - E_q(q)} + O(\frac{1}{m})\\
&= \frac{g_s}{\pi^2} \int_0^{\Lambda_M} dq \, \frac{q^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{m^2}}} + O(\frac{1}{m})\\
&= \frac{g_s \Lambda_M^3}{3\pi^2} + O(\frac{1}{m}). && (4.17)
\end{aligned}
$$

Hier wurde ausgenutzt, dass das Residuum des Quarkpropagators, im Vergleich zu dem der Mesonpropagatoren, der führenden Ordnung entspricht und die Mesonpropagatoren an der Hartreemasse gegen $-2g_M$ laufen. Für das korrigierte Quark entspricht das einer konstanter Massenverschiebung

$$
\delta m_\infty = \lim_{m\to\infty} \delta m \approx \lim_{m\to\infty} \delta\Sigma(m) = \frac{g_s \Lambda_M^3}{3\pi^2}, \tag{4.18}
$$

was für den Parametersatz $\Lambda_M = 600\,\mathrm{MeV}$ aus Abschnitt 1.1.6 einen Wert von $\delta m_\infty \approx 40\,\mathrm{MeV}$ liefert und somit sehr gut mit den numerischen Ergebnissen übereinstimmt (siehe Abb. 4.2, Abb. 4.3).

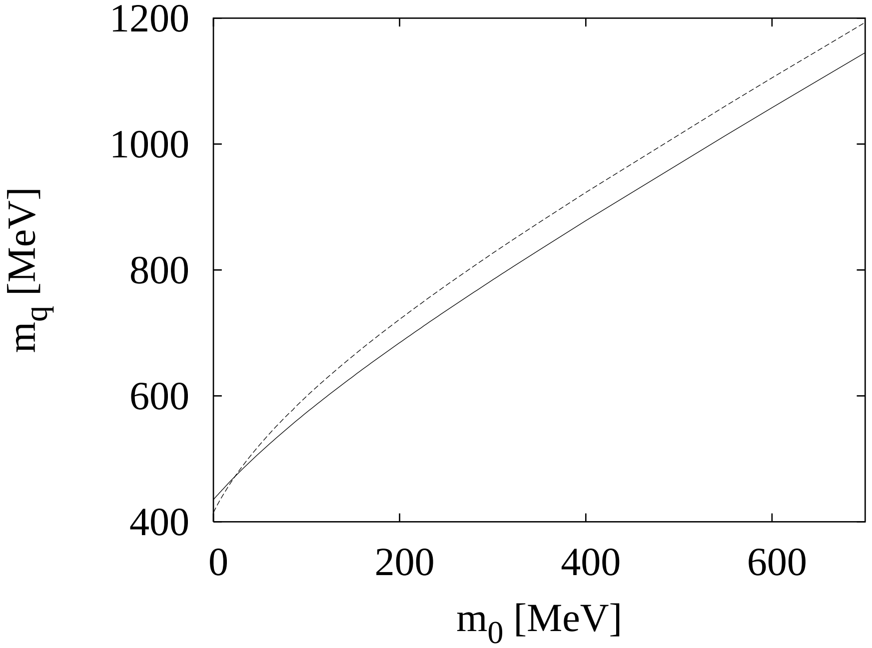


Abbildung 4.2: Hartreemasse (durchgezogen) und korrigierte Masse (gestrichelt) für den Parametersatz $\Lambda_M = 600\,\text{MeV}$ aus Abschnitt 1.1.6. Die Massenverschiebung ist bei $m_0 = 700\,\text{MeV}$ etwa $48\,\text{MeV}$.

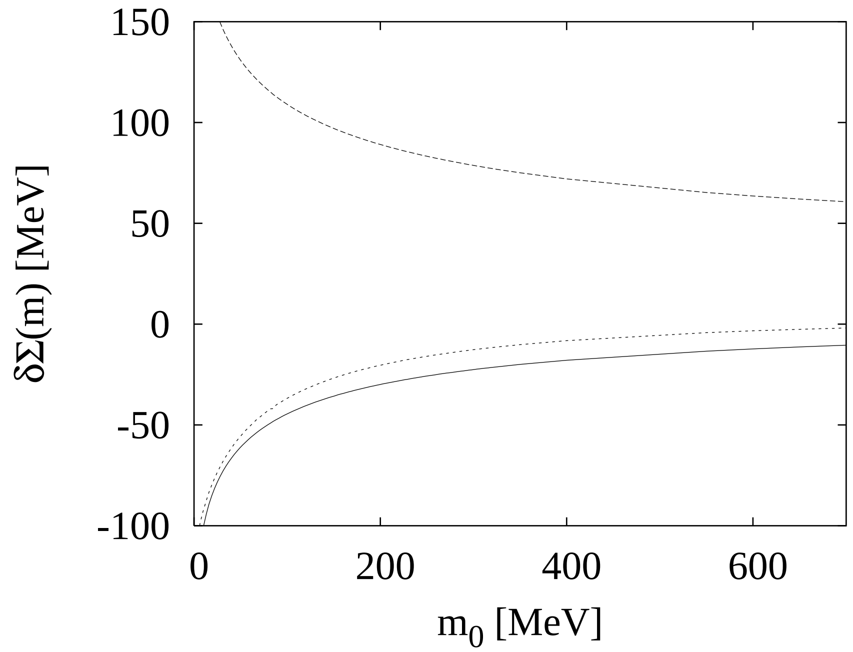


Abbildung 4.3: Anteile zur Selbstenergie: $\delta\Sigma^{(a)}(m)$ (kurz gestrichelt), $m * \delta\Sigma_a^{(b)}(m^2)$ (durchgezogen) und $\delta\Sigma_b^{(b)}(m^2)$ (gestrichelt) für Parametersatz $\Lambda_M = 600\,\text{MeV}$ aus Abschnitt 1.1.6.

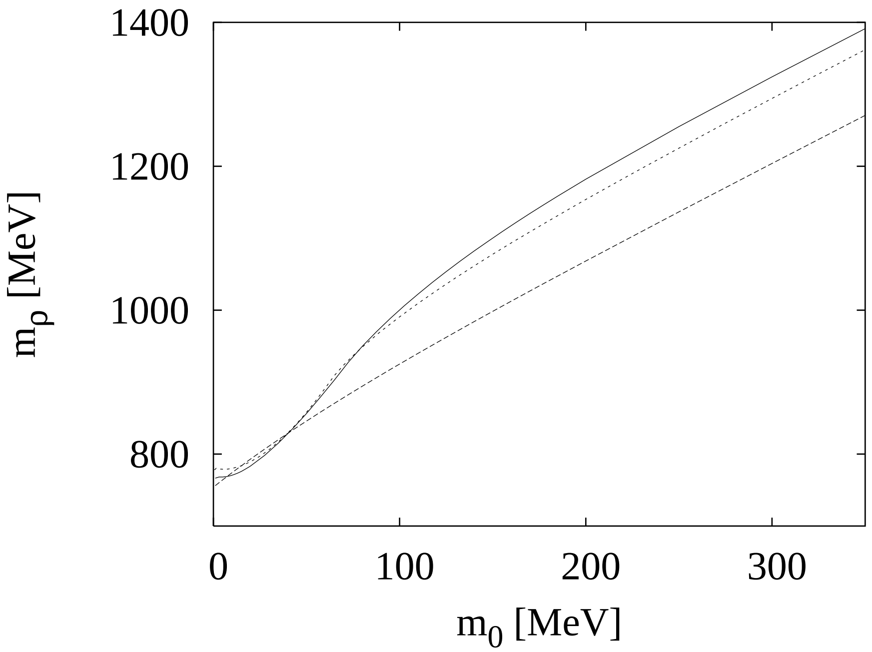


Abbildung 4.4: RPA-ρ-Mesonmasse (gestrichelt), korrigierte Masse (durchgezogen) und Näherung 4 aus Abschnitt 2.3 für korrigierte Masse (kurz gestrichelt). Alle für den Parametersatz $\Lambda_M = 600\,\mathrm{MeV}$ aus Abschnitt 1.1.6.

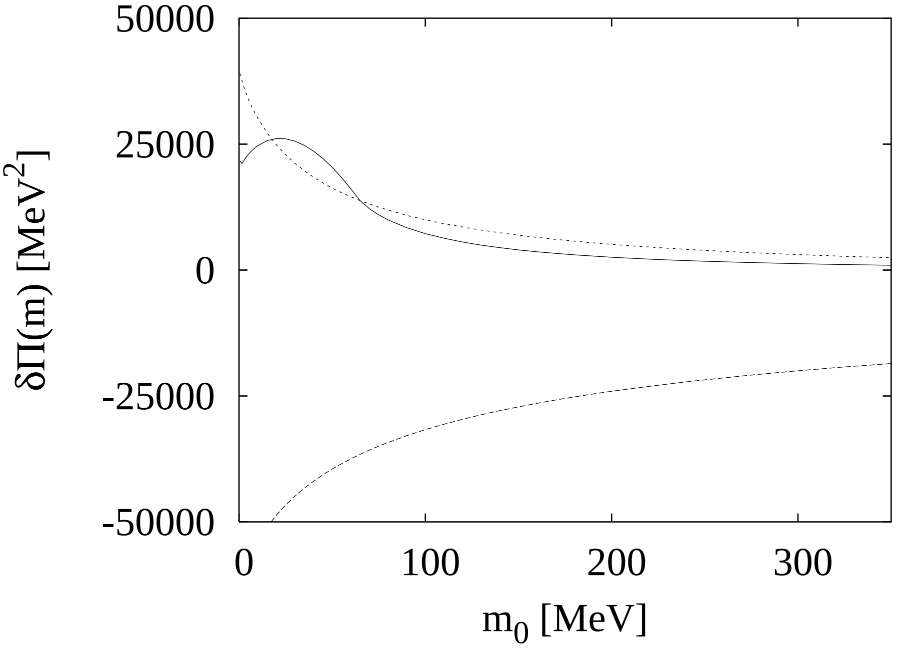


Abbildung 4.5: Korrekturen zu den Polarisationsfunktionen an der RPA-ρ-Mesonmasse: $\delta\Pi^{(a)}(m)$ (durchgezogen), $\delta\Pi^{(b+c)}(m)$ (gestrichelt) und $\delta\Pi^{(d)}(m)$ (kurz gestrichelt) für Parametersatz $\Lambda_M = 600\,\mathrm{MeV}$ aus Abschnitt 1.1.6.

Für das korrigierte ρ-Meson ergibt sich auch eine konstante Massenverschiebung, die auf interessante Weise mit der des Quarks zusammenhängt. Zunächst lässt sich $\delta\Pi_M^{(b)}(q)$ für $q^2 = 4m^2$ schreiben als

$$\begin{aligned}\delta\Pi_M^{(b)}(q) &= -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Big(\mathrm{Tr}\left[\Gamma_M iS(k)\delta\Sigma^{(b)}(k)iS(k)\Gamma_M iS(k+q)\right] \\ &\qquad + \mathrm{Tr}\left[\Gamma_M iS(k-q)\Gamma_M iS(k)\delta\Sigma^{(b)}(k)iS(k)\right]\Big)\,, \end{aligned} \tag{4.19}$$

so dass für den Heavy Quark Limes

$$\begin{aligned}\delta\Pi_M^{(b)}(q) &\to -\delta m_\infty \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\mathrm{Tr}\left[\Gamma_M iS(k)iS(k)\Gamma_M iS(k+q)\right]\right. \\ &\qquad \left. + \mathrm{Tr}\left[\Gamma_M iS(k-q)\Gamma_M iS(k)iS(k)\right]\right) \\ &= \delta m_\infty \left(-i\Gamma_{M,M,\sigma}(q,-q)\right) \\ &= \delta m_\infty \frac{\partial \Pi_M^{(b)}(q)}{\partial m} \end{aligned} \tag{4.20}$$

folgt. Für den Nenner des korrigierten ρ-Mesons gilt danach

$$1 - 2g_v\tilde{\Pi}_\rho = 1 - 2g_v(\Pi_\rho + \delta\Pi_\rho^{(b)}) \to 1 - 2g_v(\Pi_\rho + m_\infty \frac{\partial \Pi_\rho}{\partial m}) \tag{4.21}$$

und die Masse des ρ-Mesons läuft, da der letzte Term der Gleichung eine Entwicklung ist, gegen $2\,(m + m_\infty)$, was ebenfalls durch die numerischen Ergebnisse bestätigt wird (siehe Abb. 4.4, Abb. 4.5). Es ist hier zu erkennen, dass die Massenverschiebung zwischen RPA-Lösung und $1/N_C$ Korrektur schon bei kleinen Stromquarkmassen etwa gegen das doppelte der Verschiebung des Quarks läuft ($\approx 2 \times 42\,\mathrm{MeV}$): Für eine Stromquarkmasse von $350\,\mathrm{MeV}$ etwa $120\,\mathrm{MeV}$ bzw. für Näherung 4 aus Abschnitt 2.3 etwa $92\,\mathrm{MeV}$.

Zusammengefasst verhalten sich die Massen wie für den Heavy Quark Limes erwartet: Das Verhältnis von Mesonmasse und Stromquarkmasse läuft gegen zwei und das ρ-Meson ist die Summe zweier Konstituentenquarks.

Kapitel 5

Extrapolationen

5.1 Gitter-QCD und Motivation

In Gitter-QCD werden Erwartungswerte der QCD auf einem diskreten, endlichen Raumzeitgitter mit Hilfe von Monte-Carlo Simulationen für Pfadintegrale berechnet [30]. Sie ist damit ein ultimatives Werkzeug in den nichtperturbativen Bereich vorzustoßen, also Größen, die von der langreichweitigen Dynamik bestimmt werden (Massen, Radien, Momente, ...), zu analysieren. Im Blickpunkt dieser Arbeit steht die Hadronenspektroskopie mit leichten dynamischen Quarks [31, 32, 33].

Bei dieser stößt die Gitter-QCD vor allem aus numerischen, aber auch aus konzeptionellen Gründen an die Grenzen ihrer Leistungsfähigkeit. Zum einen muss der Gitterabstand a deutlich kleiner als 0.5 fm sein, damit die diskretisierten Ableitungen in der Wirkung eine gute Näherung sind und weil der Gitterabstand einen Ultraviolett-Abschneideparameter darstellt, der im perturbativen Bereich liegen sollte (Wirkungen werden aus diesem Grund auch mit Hilfe von Renormierungsgruppen korrigiert). Da der numerische Aufwand nach [30] von der Ordnung $\left(\frac{L}{a}\right)^4 \frac{1}{a} \frac{1}{m_\pi a}$, mit Gitterlänge L ist, wächst dieser enorm. Großen Einfluss auf die Numerik hat auch die verwendete Wirkung. So werden u.a Wirkungen verwendet, die die Vakuumpolarisation der Quarks und damit auch die Piondynamik vernachlässigen ("quenched approximation") [34]. Sie erlauben die Wahl großer Gitter (momentan bis $64^3 \times 112$) und bieten die Möglichkeit Effekte zu untersuchen, die von der Endlichkeit des Gitters herrühren. Für (Extrapolationen von) Hadronmassen liefern sie jedoch Abweichungen von 10% zu den experimentellen Werten, was zeigt, dass für diese Wirkungen mit dynamischen Quarks verwendet werden müssen. Diese erlauben momentan Gitter der Größe $20^3 \times 48$ [31]. Aus numerischen Gründen lassen sich weiterhin Simulationen nur für relativ große Stromquark- bzw. Pionmassen durchführen, was Extrapolationen notwendig macht und diese Arbeit motiviert. Speziell für das ρ-Meson ergibt sich zusätzlich das Problem, dass es für $\frac{m_\pi}{m_\rho} < \frac{1}{2}$ stark zerfällt. Da mit Gittersimulationen nur Energien von Grundzuständen bestimmt werden können [30], kann in diesem Fall die Masse des ρ-Mesons nicht mehr berechnet werden.

Im Hinblick auf chirale Extrapolationen für das ρ-Meson ist auch die übliche Bestimmung des Gitterabstands a bemerkenswert [31, 32, 33, 34]. In der QCD sind die einzigen fundamentalen dimensionsbehafteten Größen die Stromquarkmassen (in der Gitter-QCD durch den “hopping parameter” parametrisiert), in deren Einheit auch die Massen der zusammengesetzten Teilchen gemessen werden. Da in Gitter-QCD Rechnungen $a = 1$ ist (Gitter-Einheiten), ist der Gitterabstand a die Proportionalitätskonstante zwischen Gitter-Einheit und physikalischer Einheit. Diese wird durch chirale Extrapolation der ρ-Mesonmasse mittels eines polynomischen Fits zum experimentellen Wert des Verhältnis $\frac{m_\rho}{m_\pi}$ bestimmt. Strenggenommen müssten schon hier die im folgenden beschriebenen Extrapolationen verwendet werden.

Zum Abschluss dieses Abschnitts sei noch erwähnt, dass neben den Hadronmassen gewöhnlich auch die Stromquarkmassen im $\overline{\mathrm{MS}}$-Schema bestimmt werden. Für diese ergibt sich $m_{ud}(2\mathrm{GeV}) = 3.2\,\mathrm{MeV}$, die sich daher schon aufgrund der GOR-Relation nicht mit des Stromquarkmassen des NJL-Modells vergleichen lassen.

5.2 J-Parameter

Der J-Parameter ist durch

$$J = m_\rho \left.\frac{dm_\rho}{dm_\pi^2}\right|_{\frac{m_\rho}{m_\pi}=1.8} \tag{5.1}$$

definiert. Das Verhältnis der Massen ist das von Kaon und K^*-Meson, die in Gitter-QCD wie Pion und ρ-Meson nur als skalares Meson und Vektormeson bei anderer Stromquarkmasse betrachtet werden. Unter der Annahme, dass sich Hadronmassen in dem betrachteten Bereich etwa linear im Quadrat der Pionmasse verhalten, lässt sich dieser mit dem Experiment in Verbindung bringen [42]:

$$\begin{aligned} J &\approx m_{K^*}\frac{m_{K^*}-m_\rho}{m_K^2-m_\pi^2} \\ &= 0.48(2). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Weil J eine dimensionslose Grö{sse ist und damit unabhängig von den Extrapolationen, die bei der Bestimmung des Gitterabstands benötigt werden, ist er eine geeignete Gitter-QCD Observable. Zusätzlich stellt sich heraus, dass er sehr sensitiv auf die Vakuumpolarisation der Quarks und damit auf die Piondynamik ist, da er in “quenched approximation” etwa 20% zu klein ist [34], was in [31] systematisch untersucht wird.

Bei den folgenden Approximationen wird der J-Parameter generell überschätzt, also entgegen dem Trend der Vernachlässigung der Piondynamik (die nur in $1/N_C$-Korrektur enthalten ist). Einzige Ausnahme ist der quadratisch Fit, was daran liegen könnte, dass bei der Bestimmung des J-Parameters aus den experimentellen Daten im Prinzip gerade dieser benutzt wurde.

5.3 Chirale Extrapolationen mit hadronischen Modellen

Bei chiralen Extrapolationen mit hadronischen Modellen wird mit letzteren versucht, eine Brücke von Gitter-QCD-Daten zu physikalischen Parametern, d.h. Stromquark- bzw. Pionmassen, zu schlagen [27, 28, 35, 36]. In gewisser Weise handelt es sich also um eine Verknüpfung von Heavy Quark Limit und chiralem Limes. Die Daten liegen dabei in einem Bereich, in dem die Massen schwerer Hadronen bereits linear von der Stromquarkmasse abhängen, für die Goldstonebosonen aber noch die GOR gilt ($m_\pi \approx 0.8$GeV [37]). Dies wird durch Ergebnisse in "quenched approximation" klar belegt [34], während mit dynamischen Quarks zu kleineren Goldstonebosonmassen hin bereits Abweichungen durch die Piondynamik beobachtbar sind [31, 32, 33]: Die χPT wird zur bestimmenden Dynamik. Um nun Massen zu extrapolieren, werden daher Ansätze der Form

$$M_B(m_\pi) = \alpha + \beta m_\pi^2 + \Sigma_B(\alpha + \beta m_\pi^2, \Lambda) \tag{5.3}$$

$$M_M(m_\pi) = \alpha + \beta m_\pi^2 + \frac{\Sigma_M(\alpha + \beta m_\pi^2, \Lambda)}{2(\alpha + \beta m_\pi^2)} \tag{5.4}$$

für Baryonen bzw. Mesonen gemacht, wobei die Selbstenergien Σ_i, deren erstes Argument die nackte Masse und deren zweites Argument der Abschneideparameter ist, durch chirale Störungstheorie bestimmt werden. In α, β und dem Abschneideparameter Λ wird gefittet. Dies entspricht Näherung 4 aus Abschnitt 2.3. Es wird behauptet, dass bei diesem Vorgehen das richtige chirale Verhalten implementiert wird. Schwerstes Gewicht sind hierbei die LNA-Terme, da sich diese bis zu einer Gößenordnung von den Ergebnissen einfacher polynomischer Fits unterscheiden. Dass dies aber eher an der verwendeten Näherung liegt, wurde in Abschnitt 3.5 gezeigt. Das Problem der LNA-Terme liegt auch an der irreführenden Literatur [38, 39], die bei der Massebestimmung nicht auf das Problem der Näherungen eingeht und gelegentlich behauptet, sie sei exakt [26].

Ein weiteres Problem sind die verwendeten Regularisierungsschemata. Damit Gl. 5.3 und 5.4 sinnvoll sind, sollten die Selbstenergien für große Goldstonebosonmassen verschwinden. Dies ist aber nicht in allen Regularisierungsschemata gegeben und speziell nicht bei dimensionaler Regularisierung (siehe Abschnitt 3.5). Es ist daher zur Diskussion gekommen [36], ob O(3) ähnliche Regularisierungsschemata mit Formfaktoren nicht generell geeigneter sind, weil mit ihnen die Form der Pionquelle berücksichtigt werden kann und die Fitparameter weniger stark vom Fitintervall abhängen. Nicht überraschend sind die Unterschiede zwischen den O(3) ähnlichen Regularisierungsschemata klein ($< 1\%$), was unbegreiflicher Weise als Argument gedeutet wird, die richtige Physik zu beschreiben. Dem wird entgegnet [40], dass in jedem Regularisierungsschema die Form der Quellen berücksichtigt wird. Gleichzeitig wird gezeigt, dass die divergenten Anteile der Selbstenergie in die Kopplungskonstanten einbezogen werden können, sie werden also renormiert.

Ein unbeachteter Punkt ist weiterhin die Regulatorabängigkeit. Wie in Abschnitt 2.4 festgestellt wurde, ist diese im Vektordominanzmodell von beachtlicher Größe (bis 30 MeV also 5% bei kleinen Pionmassen). Es stellt sich auch die Frage, inwieweit die Regulatoren

Polynom	c_0/MeV	c_1/MeV^2	c_2/MeV^3	c_3/MeV^4	c_4/MeV^5	χ^2	m_ρ	J
$c_0 + c_2 m_\pi^2 + c_4 m_\pi^4$	777.9	-	6.74 10^{-4}	-	-9.38 10^{-11}	0.082	791.1	0.6
$c_0 + c_2 m_\pi^2 + c_3 m_\pi^3$	751.7	-	8.64 10^{-4}	-2.57 10^{-7}	-	0.021	767.9	0.63
$c_0 + c_2 m_\pi^2$	868.0	-	4.65 10^{-4}	-	-	6.3	877.1	0.47
$c_0 + c_1 m_\pi$	446.1	0.921	-	-	-	0.5	575.1	0.83
$c_0 + c_1 m_\pi + c_2 m_\pi^2$	533.2	0.728	9.83 10^{-5}	-	-	0.026	637.1	0.75

Tabelle 5.1: Ergebnisse von polynomischen Fits an Gitter-QCD-Daten [31]. Die Masse m_ρ ist das Ergebnis bei physikalischer Pionmasse $m_\pi = 140\,\mathrm{MeV}$ in MeV.

von den Parametern des Modells unabhängig sind. Schließlich verbindet man mit ihnen ursprünglich Skalen, wie die Ausdehnung von Objekten, die mit den Modellparametern variieren.

Trotz alledem wird in [36] behauptet: “Thus the chiral extrapolation problem has been solved.”

5.4 Chirale Extrapolationen mit Polynomen für das ρ-Meson

In diesem Abschnitt werden Gitter-QCD-Daten mit Hilfe von Polynomen zu physikalischen Parametern extrapoliert. Im Blickpunkt stehen die üblicherweise verwendeten Formen [31, 32]

$$m_\rho(m_\pi) = \alpha + \beta m_\pi^2 + \gamma m_\pi^4, \tag{5.5}$$
$$m_\rho(m_\pi) = \alpha + \beta m_\pi^2 + \gamma m_\pi^3. \tag{5.6}$$

Erstere ist eine analytische Entwicklung in der Stromquarkmasse (Nichtanalyzitäten werden nicht beachtet), zweitere durch χPT motiviert. Zusätzlich werden noch weitere Formen mit linearen Termen gezeigt, die aufgrund der positiven Steigung zu kleine Massen im chiralen Limes liefern.

Es werden hier und im folgenden die Daten aus [31] benutzt, welche momentan die beste Statistik haben. Dadurch bleibt der Datenpunkt aus [33] für $\frac{m_\pi}{m_\rho} \approx 0.4$ unberücksichtigt, auf den in [28] speziell eingegangen wird. Grund ist, dass schon in [33] auf große Unsicherheiten hingewiesen wird und in späteren Rechnungen nicht mehr darauf eingegangen wurde.

Es sei nochmals bemerkt, dass der Gitterabstand gerade mit dem Fit aus Gl. 5.6 bestimmt wird. Die Übereinstimmung bei physikalischen Parametern ist also nicht zufällig. Der Unterschied der Ergebnisse aus Gl. 5.5 und Gl. 5.6 kann als Unsicherheit der Extrapolation interpretiert werden.

Zu den Fehlern sei bemerkt, dass hier und im folgenden der Fehler im Gitterabstand als unabängig betrachtet wurde, obwohl sich dieser wegen der Extrapolation aus den Fehler

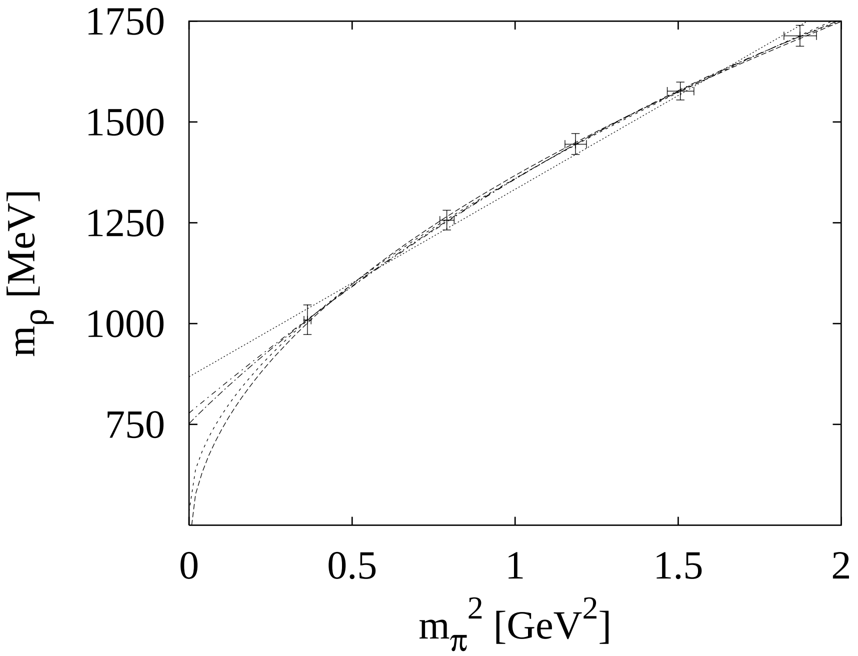


Abbildung 5.1: Fits an Gitter-QCD-Daten [31]. Die Kurven lassen sich über die Parameter c_0 bzw. m_ρ in Tabelle 5.1 bei kleinen Pionmassen den Polynomen zuordnen.

der Massenpunkte ergibt (systematischer Fehler). Dies führt zu den kleinen χ^2-Werten.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 5.1 und Abb. 5.1 zusammengestellt.

5.5 Extrapolationen mit dem NJL-Modell für das ρ-Meson

Da das NJL-Modell ein phänomenologisches Modell der QCD ist, das die Eigenschaften des Heavy Quark Limit und des chiralen Limes für Mesonen richtig beschreibt und in $1/N_C$-Entwicklung auch Pionen beinhaltet, werden nun mit diesem chirale Extrapolationen der ρ-Mesonmasse durchgeführt. Einfachster Ansatz ist, das ρ-Meson als Summe zweier Konstituentenquarks zu beschreiben. Danach wird das ρ-Meson auf RPA-Niveau und in $1/N_C$-Näherung diskutiert. In allen Fällen wird die Pionmasse aus Gründen, die in Abschnitt 1.1.6 diskutiert wurden, auf RPA-Niveau berechnet. Wie oben werden die Daten aus [31] verwendet.

5.5.1 ρ-Meson als Summe zweier Hartreequarks

Auf Hartree-Niveau besitzt das NJL-Modell drei freie Parameter: g_s, Λ_q und m_0, wobei letzterer bei chiralen Extrapolationen variiert wird. Entweder werden g_s und Λ_q als freie

χ^2	$g_s\Lambda_q^2$	Λ_q/MeV	$2m(m_\pi = 140\text{MeV})$/MeV	$\langle\bar{\psi}\psi\rangle/\text{MeV}^3$	J
12.9	3.18	705	586	-2(223.5)^3	0.85
17.4	3.71	493	562	-2(164.0)^3	0.83
171.	3.52	771	773	-2(252.1)^3	0.84

Tabelle 5.2: Parametersätze und J-Parameter zu Abb. 5.3: Bester Fit unter den Nebenbedingungen des Pionsektors, bester Fit durch den letzten Gitter-QCD-Datenpunkt und bester Fit der etwa durch die physikalische ρ-Masse läuft

Fitparameter betrachtet oder es wird zusätzlich versucht den Pionsektor richtig zu beschreiben, d.h. für Pionmasse $m_\pi = 140\,\text{MeV}$ die Nebenbedingung $f_\pi = 92.4\,\text{MeV}$ [41] und $-(\langle\bar{\psi}\psi\rangle/2)^{1/3} \in (210\,\text{MeV}, 250\,\text{MeV})$ [9] zu erfüllen. Die Nebenbedingung schränken g_s und Λ_q auf eine endliche Kurve in der $(\Lambda_q, g_s\Lambda_q^2)$-Ebene ein (siehe Abb. 5.2), die durch g_s parameterisert werden kann.

Wird nun das χ^2 eines Fits für Parametersätze (g_s, Λ_q) bestimmt, ergibt sich für alle $\chi^2 > 10$. Obwohl dabei der beste Fit dem Pionsektor relativ nahe kommt (siehe Abb. 5.2), wird das ρ-Meson durch diese Modellierung schlecht beschrieben. Die Ursache liegt daran, dass mit g_s und Λ_q die Steigung und Abzisse der Kurven $m(m_\pi)$ nicht unabhängig variiert werden kann. Dies soll mit den übrigen Kurven in Abb. 5.2 verdeutlicht werden. Hier beschreibt die untere Kurve die Parametersätze, für die die doppelte Hartreemasse durch den schwersten verwendeten Gitter-QCD-Datenpunkt läuft, während die obere Kurve diejenigen umfasst, für die an diesem Punkt $2\frac{dm}{dm_\pi} \approx 0.92$ gilt. Der Wert 0.92 wurde dabei den vier besten polynomischen Fits entnommen, für die am letzten Datenpunkt $\frac{dm_\rho}{dm_\pi} \in (0.85, 1)$ ist. Zwischen diesen Kurven liegt diejenige, für die die doppelte Hartreemasse bei physikalischer Pionmasse der ρ-Mesonmasse entspricht. Sie liegt au{sserhalb des Gebiets für das $\chi^2 < 20$ ist.

Eine den Daten entsprechende Steigung findet sich also nur für große Werte g_s und Λ_q, da für diese aber auch die absoluten Werte der Masse groß sind (umso größer Kopplung und Abschneideparameter, umso größer die Masse), ist eine Extrapolation unmöglich. Außerdem ist so klar, dass die besten Fits zu steil sind und zu kleine ρ-Mesonmassen für physikalische Pionmassen liefern. Aus diesem Grund sind auch die J-Parameter (siehe Tabelle 5.2) zu groß.

Abb. 5.3 zeigt zur Übersicht drei Kurven: Den besten Fit unter den Nebenbedingungen des Pionsektors, den besten Fit durch den letzten Gitter-QCD-Datenpunkt und den besten Fit der durch die physikalischen ρ-Mesonmasse läuft. Die zugehörigen Parameter sind in Tabelle 5.2 gegeben.

Bei Wiederholung des obigen unter Verwendung einer O(3)-Regularisierung fand sich qualitativ das gleiche Ergebnis.

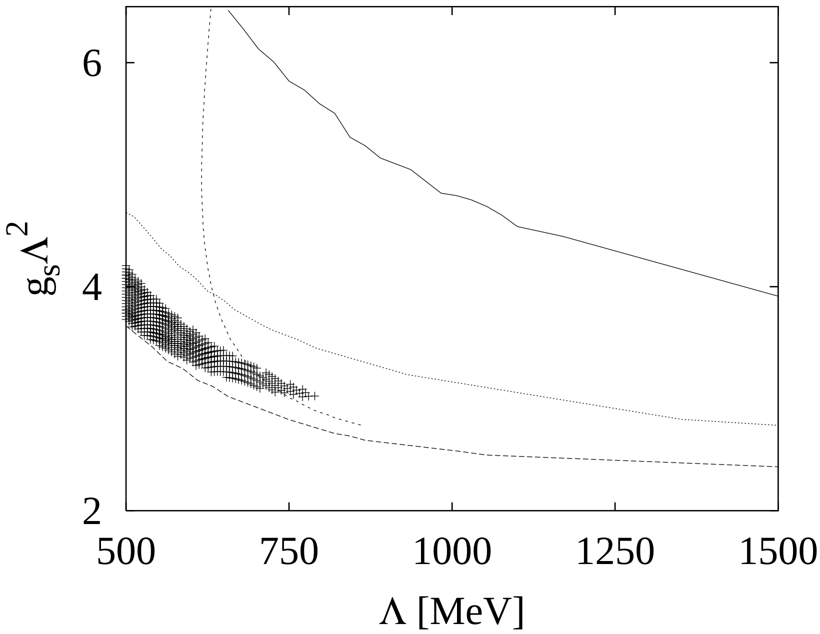


Abbildung 5.2: $(\Lambda_q, g_s\Lambda_q^2)$-Ebene für Summe zweier Hartreequarks: Parameter für die $\chi^2 <$ 20 (gekreuztes Gebiet), richtiger Pionsektor (kurz gestrichelt), Steigung der doppelten Hartreemasse 0.92 (durchgezogen), doppelte Hartreemasse durch Daten-Endpunkt (lang gestrichelt), doppelte Hartreemasse durch physikalische ρ-Masse (gepunktet).

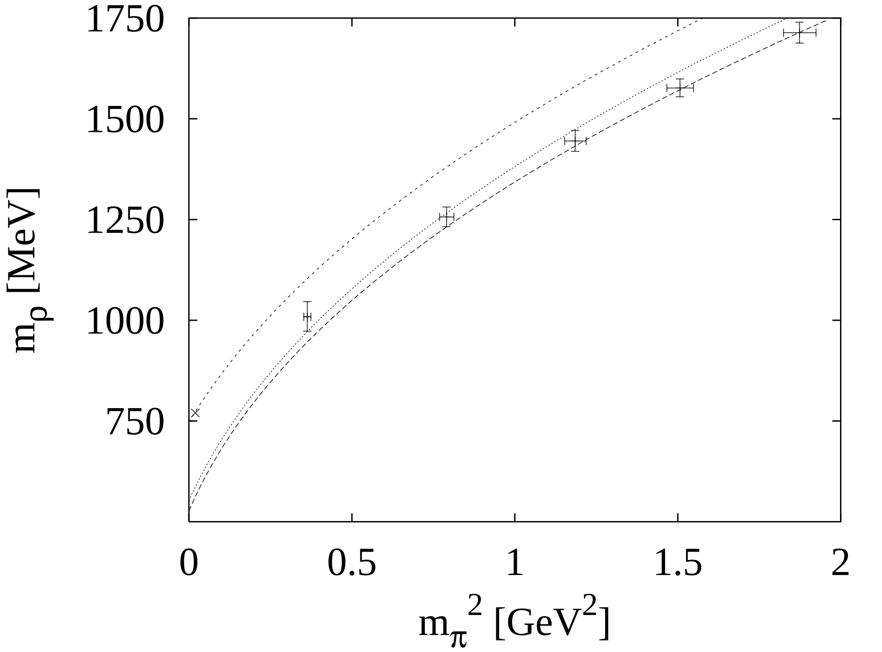


Abbildung 5.3: Beste Extrapolationen für Summe zweier Hartreequarks mit richtigem Pionsektor (gepunktet), durch Daten-Endpunkt (lang gestrichelt) und physikalischer ρ-Masse (kurz gestrichelt).

χ^2	$g_s\Lambda_q^2$	Λ_q/MeV	g_v/g_s	$m_\rho(m_\pi = 140\text{MeV})$/MeV	$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$/MeV^3	J
5.04	3.82	639	0.597	741	-2(213.2)^3	0.68
7.13	3.97	632	0.528	770	-2(212.1)^3	0.68
7.99	3.75	642	0.635	780	-2(213.9)^3	0.67

Tabelle 5.3: Parametersätze und J-Parameter für RPA-Näherung zu minimalen χ^2, minimalen χ^2 bei $m_\rho(m_\pi = 140\,\text{MeV}) = 770\,\text{MeV}$ und maximaler ρ-Mesonmasse bei physikalischer Pionmasse und $\chi^2 < 8$.

5.5.2 ρ-Meson als Summe zweier $1/N_C$ korrigierten Quarks

Die Hartreenäherung ist der Grenzfall der $1/N_C$-Entwicklung für verschwindenden Meson-Abschneideparameter. Es ist leicht einzusehen, dass ein endlicher Meson-Abschneideparameter die Fiteigenschaften nur verschlechtert: Zum einen sollte das korrigierte Konstituentenquark im chiralen Limes leichter als die Hartreenäherung sein, da es sonst in Pion und Hartreequark zerfallen könnte. Zum anderern ist es nach Abschnitt 4.4 im Heavy Quark Limit um $\frac{g_s\Lambda_M^3}{3\pi^2}$ schwerer als das Hartreequark. Daher ist die Masse des korrigierten Konstituentenquarks noch stärker ansteigend, was schon in Hartreenäherung ein Problem war.

Um dies in einem Fall zu demonstrieren wird $\Lambda_M = 600\,\text{MeV}$ gewählt. Da ein Fit für die $1/N_C$-Korrektur aus numerischen Gründen sehr aufwendig ist, werden die besten Parameter des Fits von $2(m+\frac{g_s\Lambda_M^3}{3\pi^2})$, dem Heavy Quark Limit mit Hartreemasse m, an die Gitter-QCD-Daten unter richtiger Beschreibung des Pionsektors verwendet. Diese ergeben sich als $\Lambda_q = 800\,\text{MeV}$ und $g_s\Lambda_q^2 = 2.9$. Bemerkenswert ist, dass dies der äußerste Punkt der Kurve des Pionsektors in der $(\Lambda_q, g_s\Lambda_q^2)$-Ebene ist, d.h. dem größtmöglichen Wert für Λ_q entspricht (siehe Abb. 5.2). Die zugehörigen Kurven sind in Abb. 5.4 zusammengestellt. Das χ^2 dieser Extrapolation liegt bei 36, die extrapolierte ρ-Mesonmasse bei 439 MeV und der J-Parameter ist 2.1.

5.5.3 ρ-Meson auf RPA-Niveau

Auf RPA-Niveau erhält man für das ρ-Meson neben Λ_q und g_s einen weiteren Anpassungsparameter: Die Vektorkopplungskonstante g_v. Es ist daher anstrebenswert den Pionsektor, also f_π und $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ bei $m_\pi = 140\,\text{MeV}$, richtig zu beschreiben. Dies führt dazu, dass Λ_q unter dieser Nebenbedingung wie oben beschrieben eine Funktion von g_s ist.

Weiterhin ist zu beachten, dass g_v nach Gl. 4.12 eine Mindestgröße haben muss, um eine Masse unterhalb der Quarkschwelle zu haben. Da die Hartreemasse mit der Stromquarkmasse steigt, ergibt sich als Nebenbedingung, dass das ρ-Meson im chiralen Limes stabil bleiben muss. Diese Bedingung ist zwingend, da sich numerisch herausstellt, dass es aufgrund von Schwelleneffekte keine Nullstellen im Realteil des Inversen ρ-Mesonpropagator überhalb der Schwelle gibt.

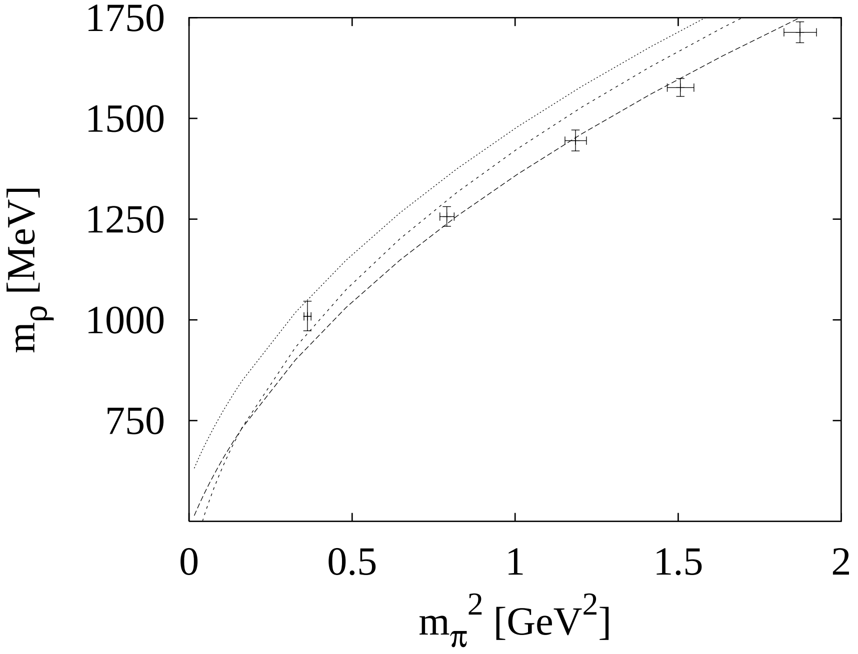


Abbildung 5.4: Masse zweier $1/N_C$-korrigierter Konstituentenquarks (kurz gestrichelt), zweier Hartree-Konstituentenquarks (lang gestrichelt) und Verschiebung der doppelten Hartreemasse um $2\frac{g_s\Lambda_M^3}{3\pi^2}$ (gepunktet) für den im Text gegebenen Parametersatz.

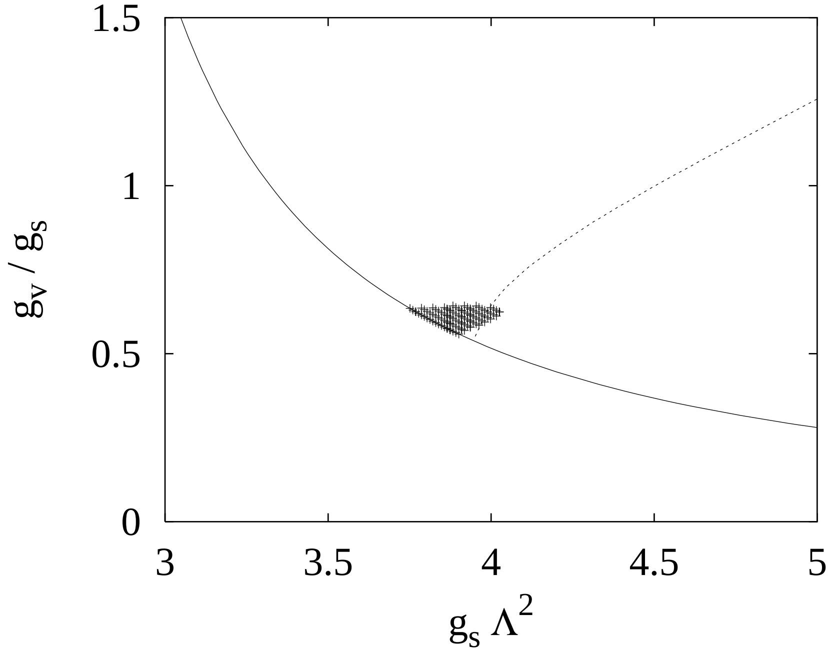


Abbildung 5.5: RPA-Näherung: Minimale Vektorkopplungskonstante g_v bei richtiger Beschreibung des Pionsektors (durchgezogen), Parametersätze für die $m_\rho(m_\pi = 140\,\mathrm{MeV}) = 770\,\mathrm{MeV}$ (gestrichelt) und das Gebiet, in dem $\chi^2 < 8$ bei Fits an Gitter-QCD-Daten.

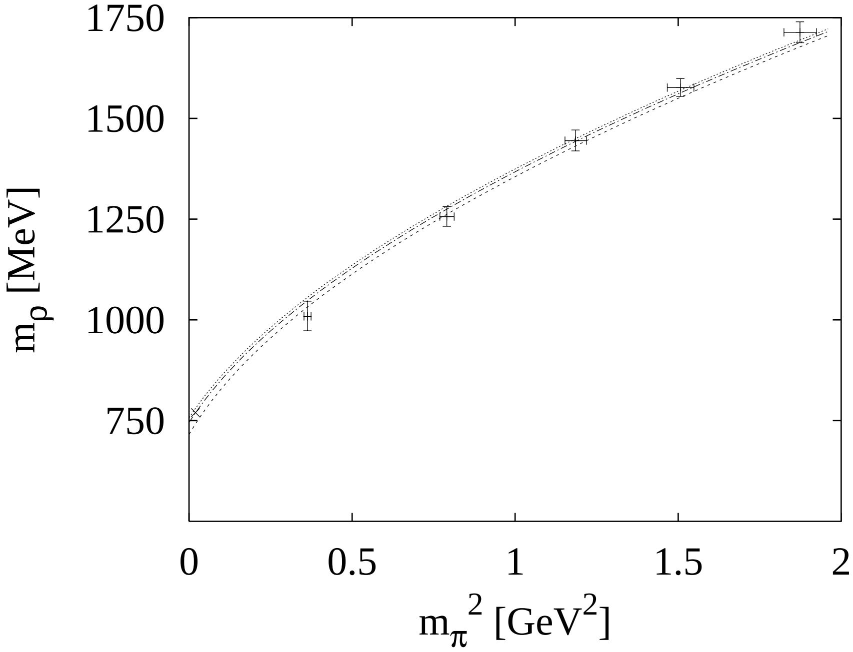


Abbildung 5.6: Kurven zu den in Tabelle 5.3 angegebenen Parametern. Kurven und Parametersätze lassen sich durch die Ordnung der ρ-Mesonmasse bei kleinen Pionmassen miteinander identifizieren.

Abb. 5.5 zeigt die Kurve der minimalen Vektorkopplungskonstanten g_v in Abhängigkeit von g_s. Zusätzlich ist das Gebiet dargestellt, für das bei Fits an die Gitter-QCD-Daten $\chi^2 < 8$ gilt. Die zweite Kurve entspricht den Parametersätzen für die $m_\rho(m_\pi = 140\,\mathrm{MeV}) = 770\,\mathrm{MeV}$ gilt. Sie läuft durch das beschriebene Gebiet.

In Abb. 5.6 finden sich die Extrapolation mit drei Parametersätzen: Den mit minimalen χ^2, den mit minimalen χ^2 für $m_\rho(m_\pi = 140\,\mathrm{MeV}) = 770\,\mathrm{MeV}$ und schließlich zur Übersicht denjenigen mit maximaler ρ-Mesonmasse bei physikalischer Pionmasse und gleichzeitig $\chi^2 < 8$. Die zugehörigen Parameter sind in Tabelle 5.3 zusammengestellt. Wieder ist die Abweichung des J-Parameters vom experimentellen Wert relativ groß ($\approx 40\%$).

Zusammenfassend ist festzustellen, dass das RPA-ρ-Meson die Masse bis auf etwa 30 MeV genau extrapoliert, was erstaunlich gut ist, da auf RPA-Niveau die Piondynamik und damit auch speziell der Zerfall des ρ-Mesons nicht beschrieben werden.

5.5.4 ρ-Meson in $1/N_C$-Näherung

Wie bereits erwähnt, ist die RPA der Grenzfall der $1/N_C$-Entwicklung für verschwindenden Meson-Abschneideparameter. Da auf RPA-Niveau bereits gute Fits gefunden wurden und die $1/N_C$-Näherung numerisch sehr aufwendig ist (Berechnung einer Masse benötigt bei vorhandener Rechnerkapazität 8 Stunden), ist eine systematische Untersuchung unmöglich. Stattdessen wurden mit den in Abschnitt 1.1.6 angegebenen Parametern Extrapolationen berechnet. Entscheidendes Argument für dieses Vorgehen ist, dass so Parametersätze, die neben der Masse des ρ-Mesons auch dessen Breite bei physikalischer Pionmasse richtig beschreiben, auf ihre Anwendbarkeit für chirale Extrapolationen überprüft werden. Das Ergebnis ist in Abb. 5.7 dargestellt.

Für die Extrapolationen mit den Parametersätzen zu $\Lambda_M = 500\,\mathrm{MeV}$, $\Lambda_M = 600\,\mathrm{MeV}$ und $\Lambda_M = 700\,\mathrm{MeV}$ ergibt sich respektive ein χ^2 von 19.4, 44. und 79.9 und ein J-Parameter von 0.7, 0.7 und 0.76. Dabei musste für $\Lambda_M = 500\mathrm{MeV}$ aus numerischen Gründen Näherung 4 aus Abschnitt 2.3 verwendet werden. Für die anderen wurde Näherung 3 benutzt. Die Größe des J-Parameter entspricht dem auf RPA-Niveau. Überraschender Weise scheint die Pionmasse an seinem Punkt also schon so groß zu sein, dass sie keinen Einfluss auf diesen hat.

Anscheinend sind zur Extrapolation kleine Mesonabschneideparameter geeigneter. Da sich mit Ihnen aber auch die Breite verkleinert, ist eine Extrapolation zu physikalischer Breite und Masse unmöglich. Das NJL-Modell ist also nicht in der Lage, sowohl Pionsektor und ρ-Meson bei experimentellen Werten, als auch Heavy Quark Limit gleichzeitig präzise zu beschreiben. Dies wäre aber auch verblüffend.

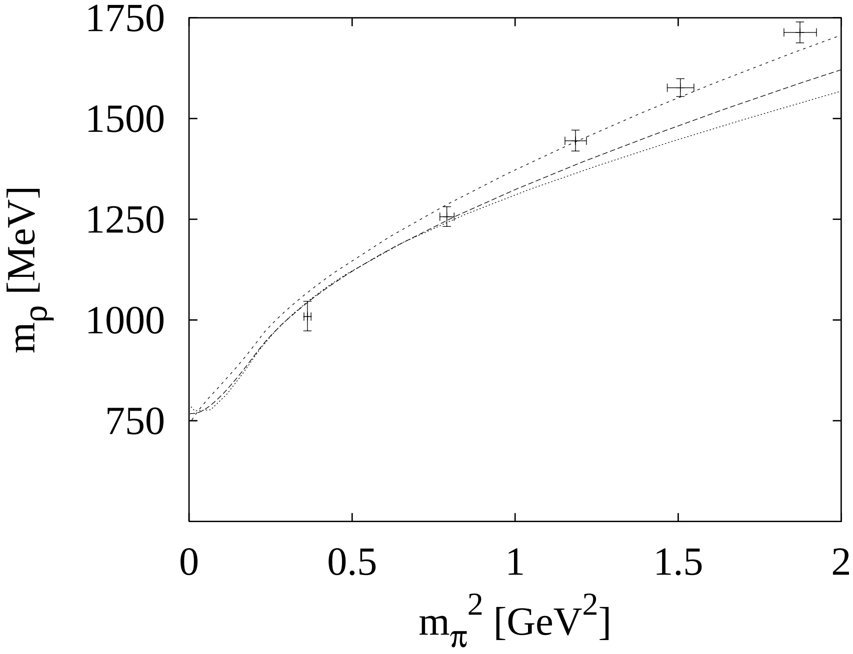


Abbildung 5.7: Extrapolationen mit $1/N_C$ korrigierter ρ-Mesonmasse für Parametersätze aus Abschnitt 1.1.6: $\Lambda_M = 500\,\mathrm{MeV}$ (kurz gestrichelt), $\Lambda_M = 600\,\mathrm{MeV}$ (lang gestrichelt) und $\Lambda_M = 700\,\mathrm{MeV}$ (gepunktet).

Zusammenfassung und Fazit

Ziel dieser Arbeit war die Extrapolation von Gitter-QCD Daten der ρ-Mesonmasse zu physikalischen Parametern mit einem phänomenologischen Quarkmodell, dem NJL-Modell. Motivation hierfür war die Tatsache, dass sich mit dem NJL-Modell die spontane Symmetriebrechung (inbesondere das Verschwinden der Pionmasse) beschreiben lässt und in der sogenannten $1/N_C$-Entwicklung Pionen als Zwischenzustände auftreten, die im chiralen Limes die Dynamik bestimmen sollten.

In Extrapolationen mit hadronischen Modellen wurde als Maß für die Berücksichtigung der Piondynamik die von der Regularisierung unabhängigen LNA-Terme in den Vordergrund gestellt. In dieser Arbeit wurde gezeigt, dass diese nichts über den quantitativen Verlauf aussagen, da sie nur in einer Näherung bestimmt werden. Sie sind aber gleichermaßen im NJL-Modell enthalten, da sie nur durch das Verschwinden der Pionmasse diktiert werden, liefern jedoch für die Masse des ρ-Mesons nur im sogenannten 'static limit' das gleiche Ergebnis wie chirale Modelle.

Im Grenzfall schwerer Quarkmassen wurde gezeigt, dass Pion und ρ-Meson in RPA und $1/N_C$-Näherung wie erwartet die Masse zweier Konstituentenquarks besitzen. Streng-genommen liegt dies aber am Regularisierungsschema, was sich schon daran zeigt, dass der Abschneideparameter in diesem Grenzfall deutlich kleiner als die Massen ist. Es stellte sich heraus das bei Extrapolationen mit dem NJL-Modell die Steigung und der absolute Wert der ρ-Mesonmasse nicht beliebig variiert werden konnten, wohingegen diese bei den üblichen Extrapolationen mit hadronischen Modellen freie Parameter sind.

Mit Hilfe des Vektordominanzmodells, auf dessen Einschleifenentwicklung sich das ρ-Meson in $1/N_C$-Näherung reduziert, wurden die bei Extrapolation mit hadronischen Modellen und die in dieser Arbeit verwendeten Näherungen für Massen diskutiert. Es stellte sich heraus, dass sowohl der Fehler durch Näherungen als auch die Regulatoreffekte im chiralen Limes größer als 10 MeV sind. Ersteres ließe sich korrigieren, letzteres fällt in die Diskussion der verwendeten Regularisierung (bzw. evtl. Renormierung), auf die in Abschnitt 5.4 eingegangen wurde.

Zusätzlich wurde festgestellt, dass zur Bestimmung des Gitterabstands in Gitter-QCD Rechnungen bereits extrapoliert werden muss. Hierzu werden in der Regel Polynome verwendet, die mit chiraler Störungstheorie motiviert werden oder analytisch im Quadrat der Pionmasse sind. Ein anspruchsvolles Verfahren, von dem behauptet wird die Physik richtig zu beschreiben, sollte aber schon diese Aufgabe übernehmen. Für das ρ-Meson ist den bisherigen Gitter-QCD Rechnungen weiterhin eine natürliche Grenze gesetzt, da diese nur Massen stabiler Teilchen berechnen können und das ρ-Meson, sobald energetisch möglich, in zwei Pionen zerfällt. Hierzu ist anzumerken, das Gitter-QCD Rechnungen in 'quenched approximation' die Vermutung nahelegen, dass Extrapolationen mittels chiraler Modelle erst ab Pionmassen kleiner als 300 MeV sinnvoll sind [43], für das ρ-Meson wären sie danach generell nicht möglich.

Zusammengefasst lässt sich also sagen, dass das NJL-Modell in $1/N_C$-Näherung zwar formale Aspekte im chiralen Limes und im Grenzfall schwerer Quarkmassen richtig beschreibt, für chirale Extrapolationen aber ungeeignet ist. Hauptgrund ist, dass sich die Steigung der ρ-Mesonmasse nicht beliebig variieren lässt, was sich im J-Parameter widerspiegelt. Extrapolationen mit hadronischen Modellen bergen jedoch auch Probleme wie die Regulatoreffekte, die sie grundsätzlich in Frage stellen. Auch ist ihre übliche Motivation über die Koeffizienten der nichtanalytischen Terme fraglich und es sind weitere Gitter-QCD Ergebnisse notwendig, um genauere Ergebnisse zu erzielen. Daher sind die momentan üblichen Extrapolationen mittels Polynomen wahrscheinlich am vernünftigsten.

Anhang A

Anhang zum NJL-Modell

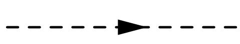
A.1 Feynman Regeln

Im folgenden sind die Feynmanregeln für Quarks und Mesonen im NJL-Modell zusammengestellt. Hierbei ist $g_M = g_s$ für $M = \sigma$, π und $g_M = g_v$ für $M = \rho$, a_1. Weiter ist

$$\Gamma_\sigma = 1\,, \quad \Gamma_\pi^a = i\gamma_5\tau^a\,, \quad \Gamma_\pi^{\mu,a} = \gamma^\mu\tau^a\,, \quad \Gamma_\pi^{\mu,a} = \gamma^\mu\gamma_5\tau^a \tag{A.1}$$

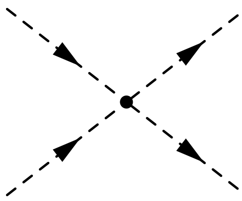
wofür Multiindizes verwendet werden. Für die explizite Form der Meson Propagatoren wird auf Abschnitt A.3 verwiesen.

Nackter Quarkpropagator:



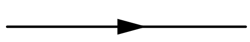
$$S_0(p) = \frac{1}{\not p - m_0 + i\epsilon} \tag{A.2}$$

Quark-Quark Vertex:



$$K_M = 2ig_M\Gamma_M^{(n)} \otimes \Gamma_M^{(n)} \tag{A.3}$$

Hartreepropagator:

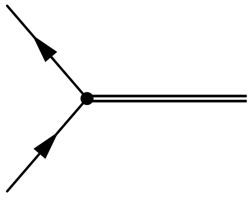


$$S(p) = \frac{1}{\not p - m + i\epsilon} \tag{A.4}$$

Mesonpropagator:

$$D^{(m,n)}(p) \tag{A.5}$$

Meson-Quark Vertex:



$$-i\Gamma_M^{(m)} \tag{A.6}$$

Das Vorzeichen im Meson-Quark Vertex ist irrelevant, da er bei Graphen ohne externe Quarks nur in gerader Anzahl auftaucht. Weiter sollte auf das Minuszeichen für geschlossene Quarkschleifen geachtet werden.

A.2 Elementare Integrale

Es ist möglich die Berechung der in der $1/N_C$-Entwicklung auftretenden Diagramme auf die folgenden Integrale zu reduzieren:

$$I_1 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} , \tag{A.7}$$

$$I(p) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)((k+p)^2 - m^2 + i\epsilon)} , \tag{A.8}$$

$$K(p) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2((k+p)^2 - m^2 + i\epsilon)} , \tag{A.9}$$

$$M(p_1,p_2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)(k_1^2 - m^2 + i\epsilon)(k_2^2 - m^2 + i\epsilon)} , \tag{A.10}$$

$$L(p_1,p_2,p_3) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)(k_1^2 - m^2 + i\epsilon)(k_2^2 - m^2 + i\epsilon)(k_3^2 - m^2 + i\epsilon)} , \tag{A.11}$$

$$p_1^\mu M_1(p_1,p_2) + p_2^\mu M_1(p_2,p_1) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)(k_1^2 - m^2 + i\epsilon)(k_2^2 - m^2 + i\epsilon)}, \tag{A.12}$$

$$M_1(p_1,p_2) = \frac{p_1{\cdot}p_2\ I(p_1) - p_2^2\ I(p_2) + (p_2^2 - p_1{\cdot}p_2)\ I(p_1 - p_2) + p_2^2\ (p_1^2 - p_1{\cdot}p_2)\ M(p_1,p_2)}{2\ ((p_1{\cdot}p_2)^2\ -\ p_1^2 p_2^2)} . \tag{A.13}$$

Die Integrale A.7 bis A.12 werden, wie im Text beschrieben, Pauli-Villars regularisiert, also die Substitution

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k;m) \quad\rightarrow\quad \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sum_{j=0}^{2} c_j f(k;\mu_j) , \tag{A.14}$$

mit

$$\mu_j^2 = m^2 + j\Lambda_q^2; \qquad c_0 = 1, \quad c_1 = -2, \quad c_2 = 1 \tag{A.15}$$

durchgeführt.

Für die Integrale I_1, $I(p)$ und $K(p)$ liefert dies mit

$$x_{j1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4\mu_j^2}{p^2}} \tag{A.16}$$

folgende analytische Ausdrücke:

$$I_1 = \frac{-i}{16\pi^2} \sum_j c_j \, \mu_j^2 \ln(\mu_j^2) \tag{A.17}$$

$$I(p) = \frac{-i}{16\pi^2} \sum_j c_j \left(x_{j1} \ln(x_{j1}) + x_{j2} \ln(-x_{j2}) + x_{j1} \ln(-p^2 x_{j1}) + x_{j2} \ln(p^2 x_{j2}) \right) \tag{A.18}$$

$$I(p=0) = \frac{-i}{16\pi^2} \sum_j c_j \, \ln(\mu_j^2) \tag{A.19}$$

$$K(p) = \frac{-i}{16\pi^2} \sum_j c_j \frac{1}{2p^2(x_{j1} - x_{j2})} \Big(-\ln(x_{j1}) - \ln(-x_{j1}) + \ln(x_{j2}) + \ln(-x_{j2}) \Big). \tag{A.20}$$

A.3 Gap-Gleichung und RPA Propagatoren

Mit Hilfe der oben definierten Integrale lässt sich die Gap-Gleichung schreiben als

$$m = m_0 + 2ig_s N_C N_f m I_1. \tag{A.21}$$

Die Polarisationsfunktionen der einzelnen Mesonen ergeben sich zu

$$\Pi_\sigma(p) = 2iN_C N_f (2I_1 - (p^2 - 4m^2) I(p)), \tag{A.22}$$

$$\Pi_\pi(p) = 2iN_C N_f (2I_1 - p^2 I(p)), \tag{A.23}$$

$$\Pi_\rho(p) = \frac{4}{3} i N_C N_f \left(2m^2 I(0) - (p^2 + 2m^2) \, I(p)\right), \tag{A.24}$$

$$\Pi_{a_1}(p) = \frac{4}{3} i N_C N_f \left(2m^2 I(0) - (p^2 - 4m^2) \, I(p)\right), \tag{A.25}$$

wobei, wie in Abschnitt 1.1.5 beschrieben, in den Polarisationsfunktionen von ρ- und a_1-Meson I_1 durch $m^2 I(0)$ ersetzt wurde. Die Propagatoren, bzw. ihre transversale Komponente, sind also:

$$D_\sigma(p) = \frac{-2g_s}{1 - 2ig_s \; 2N_C N_f \; (2I_1 - (p^2 - 4m^2) \; I(p))}, \tag{A.26}$$

$$D_\pi(p) = \frac{-2g_s}{1 - 2ig_s \; 2N_C N_f \; (2I_1 - p^2 \; I(p))}, \tag{A.27}$$

$$D_\rho(p) = \frac{-2g_v}{1 - 2ig_v \; \frac{4}{3} N_C N_f \; (2m^2 \; I(0) - (p^2 + 2m^2) \; I(p))}, \tag{A.28}$$

$$D_{a_1}(p) = \frac{-2g_v}{1 - 2ig_v \; \frac{4}{3} N_C N_f \; (2m^2 \; I(0) - (p^2 - 4m^2) \; I(p))}. \tag{A.29}$$

Mit Hilfe der Gap-Gleichung ist der Pionpropagator auch

$$D_\pi(p) \;=\; \frac{-2g_s}{\frac{m_0}{m} + 2ig_s\; 2N_C N_f\; p^2\; I(p)}, \tag{A.30}$$

woran sofort ersichtlich ist, dass das Pion im chiralen Limes masselos ist. Die Kopplungskonstante $g^{(0)}_{\rho qq}$ ist

$$g^{(0)2}_{\rho qq} \;=\; -\frac{4}{3} i N_C N_f \left(I(p) + \frac{1}{2}(1 + \frac{2m^2}{p^2})(I(0) - I(p) - p^2 K(p)) \right)\bigg|_{p^2 = m^{(0)2}_\rho}. \tag{A.31}$$

A.4 $1/N_C$-Näherung und Effektive Meson-Meson Vertizes

Die Konstante Δ, die für die Korrekturterme $\delta\Sigma^{(a)}$, $\delta\Pi^{(d)}$ und $\delta\langle\bar\psi\psi\rangle$ von Bedeutung ist, ist mit obigen Definitionen:

$$\begin{aligned}\Delta \;&=\; \frac{1}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \sum_M (-iD_M(p))(-i\Gamma_{M,M,\sigma}(p,-p)) \\ &= 4N_C N_f\; m \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Big\{\; D_\sigma(p)\; (2\; I(p) + I(0) - (p^2 - 4m^2)\; K(p)) \\ &\qquad + D_\pi(p)\; (\; 3I(0) \;-\; 3p^2\; K(p)\;)\Big\},\end{aligned} \tag{A.32}$$

wobei vektorielle und axialvektorielle Zwischenzustände vernachlässigt wurden.

Die für diese Arbeit benötigten nicht verschwindenden Quarkdreiecke $\Gamma_{M_1,M_2,M_3}(q,p)$ sind:

$$\begin{aligned}-i\Gamma^{\mu\lambda,ab}_{\rho,\rho,\sigma}(q,p) \;&=\; \delta_{ab} h(q,p)\Big\{ g^{\mu\lambda} - \frac{p^2\, q^\mu q^\lambda + q^2\, p^\mu p^\lambda \;-\; p\cdot q\,(p^\mu q^\lambda + q^\mu p^\lambda)}{p^2 q^2 \;-\; (p\cdot q)^2} \Big\}, \\ h(q,p) \;&=\; imN\Big\{ I(q) + I(p) - 2I(p') + (4m^2 - 2p\cdot q - p'^2) M(p,-q) \Big\}, \\ -i\Gamma^{\mu,abc}_{\pi,\pi,\rho}(q,p) \;&=\; \epsilon_{abc}\Big\{ q^\mu f(q,p) - p^\mu f(p,q) \Big\}, \\ f(q,p) \;&=\; N\Big\{ - I(q) + p^2 M(p,-q) + 2p\cdot q M_1(q,-p) \Big\},\end{aligned} \tag{A.33}$$

mit $p' = -p - q$ und $N = 4N_C N_f$. Der Grenzwert $q \to -p$ der ersten Funktion ist dabei

$$-i\Gamma^{\mu\lambda,ab}_{\rho,\rho,\sigma}(-p,p) \;=\; \delta_{ab} \frac{-4iNm}{3} T^{\mu\lambda} \Big\{ I(p) - I(0) + (p^2 + 2m^2) K(p) \Big\}. \tag{A.34}$$

Die relevanten Quarkvierecke $\Gamma_{M_1,M_2,M_3,M_4}(p_1,p_2,p_3)$ sind

$$
\begin{aligned}
-i\Gamma^{ab}_{\rho,\sigma,\rho,\sigma}(q,p,-q) &= -2\delta_{ab}N\Big\{I(p+q)+I(p-q)+2I(q)-p\cdot q(M(p,-q)-M(p,q)) \\
&\quad +(4m^2-2p^2)(M(p,q)+M(p,-q)) \\
&\quad +m^2(8m^2-6p^2+4q^2+\frac{p^4-(p\cdot q)^2}{m^2})L(p,-q,p-q)\Big\}, \\
-i\Gamma^{ab}_{\rho,\sigma,\sigma,\rho}(q,p,-q) &= -2\delta_{ab}N\Big\{-I(p+q)-I(0)+(p^2-4m^2)K(p) \\
&\quad +(q^2+2m^2)K(q)+(4m^2-2p\cdot q)M(p,-q) \\
&\quad +m^2(8m^2-2p^2+4q^2-\frac{p^2q^2}{m^2})L(p,-q,0)\Big\}, \\
-i\Gamma^{abcd}_{\rho,\pi,\rho,\pi}(q,p,-q) &= 2N\kappa_{abcd}\Big\{-I(p+q)-I(p-q)-2I(q) \\
&\quad +2p^2(M(p,q)+M(p,-q))+p\cdot q(M(p,-q)-M(p,q)) \\
&\quad +(2m^2p^2-p^4+(p\cdot q)^2)L(p,-q,p-q)\Big\}, \\
-i\Gamma^{abcd}_{\rho,\pi,\pi,\rho}(q,p,-q) &= 2N\kappa_{abcd}\Big\{I(p+q)+I(0)-p^2K(p)-(q^2+2m^2)K(q) \\
&\quad +2p\cdot qM(p,-q)+p^2(2m^2+q^2)L(p,-q,0)\Big\}, \qquad \text{(A.35)}
\end{aligned}
$$

wobei $\Gamma_{\rho,M,M,\rho}(q,p,-q)=g_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}_{\rho,M,M,\rho}(q,p,-q)$, $\Gamma_{\rho,M,\rho,M}(q,p,-p)=g_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}_{\rho,M,\rho,M}(q,p,-p)$ und $\kappa_{abcd}=\delta_{ab}\delta_{cd}+\delta_{ad}\delta_{bc}-\delta_{ac}\delta_{bd}$.

Anhang B

Anhang zum Vektordominanzmodell

B.1 Feynman Regeln

Als Feynmanregeln für das Vektordominanzmodell erhält man u.a.:

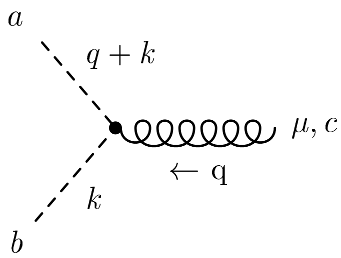
Pionpropagator:

$$G_\pi(p) = \frac{1}{p^2 - m_\pi^2 + i\epsilon} \tag{B.1}$$

ρ-Meson Propagator (nackt):

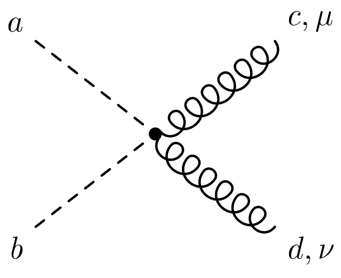
$$G_\rho^{(0)\,\mu\nu}(p) = \frac{-g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m_0^2}}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \tag{B.2}$$

$\rho\pi\pi$-Vertex:



$$g\,\epsilon_{abc}(2k + q)^\mu \tag{B.3}$$

$\rho\rho\pi\pi$-Vertex:



$$2ig^2\left(\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ac}\delta_{bd}\right) g^{\mu\nu} \tag{B.4}$$

Literaturverzeichnis

[1] U. Vogl und W. Weise, Prog. Part. Nucl. Phys. 27, 195 (1991).

[2] Y. Nambu und G. Jona-Lasino, Phys. Rev. 122, 345 (1961); 124, 246 (1961).

[3] T. Hatsuda und T. Kunihiro, Phys. Rep. 247, 221 (1994).

[4] S.P. Klevansky, Rev. Mod. Phys. 64, 3 (1992).

[5] M. Oertel, *Investigation of meson loop effects in the Nambu–Jona-Lasino model*, Doktorarbeit, TU Darmstadt 2000.

[6] T. Kugo, *Eichtheorie*, Springer-Verlag, Berlin 1997.

[7] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, vol.2, Cambridge University Press, Cambridge 1996.

[8] V. Dmitrašinović, H.-J. Schulze, R. Teden und R.H. Lemmer, Ann. Phys (NY) 238, 332 (1995).

[9] L. Giusti, F. Rapuano, M. Talevi und A. Vladikas, Nucl. Phys. B538 (1999) 249-277, hep-lat/9807014.

[10] M. Oertel, M. Buballa und J. Wambach, Nucl. Phys. A 676, 247 (2000).

[11] J.J. Sakurai, Ann. Phys. 11, 1 (1960).

[12] M. Urban, *Vektormesonen in dichter und heißer Materie*, Doktorarbeit, TU Darmstadt 2001.

[13] G. Ecker, Prog. Part. Nucl. Phys. 35, 1 (1995).

[14] B.R. Holstein, lectures delivered at National Summer School in Nuclear Physics, 1995.

[15] V. Bernard *et al.*, Phys. Lett. B409 (1997) 483-490, hep-ph/9705438.

[16] M.E. Peskin und D.V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*, Assison-Wesley Puplishing Company, 1995.

[17] J.D. Bjorken und S.D. Drell, *Relativistische Quantenfeldtheorie*, BI Hochschultaschenbücher 101, Mannheim 1967.

[18] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, vol.1, Cambridge University Press, Cambridge 1996.

[19] M. Urban, *Impulsabhängigkeit des ρ-Meson-Propagators in kalter Kernmaterie*, Diplomarbeit, TU Darmstadt 1997.

[20] V. Koch, preprint nucl-th/9512029.

[21] L.-F. Li und H. Pagels, Phys. Rev. D5, 1509 (1972).

[22] P. Langacker und H. Pagels, Phys. Rev. D8, 4595 (1973).

[23] H. Pagels, Phys. Rep. 16, 221 (1975).

[24] J. Gasser und A. Zepeda, Nucl. Phys. B 174, 445 (1980).

[25] A. Hoang, Vorlesung X. Heidelberger Graduiertentage, Heidelberg 2003.

[26] V. Bernard, N. Kaiser und Ulf-G. Meißner, Int. J. Mod. Phys. E4, 193 (1995), hep-ph/9501384.

[27] D.B. Leinweber, A.W. Thomas, K. Tsushima und S.V. Wright, Phys. Rev. D61, 074502 (2000), hep-lat/9906027.

[28] D.B. Leinweber, A.W. Thomas, K. Tsushima und S.V. Wright, Phys. Rev. D64, 094502 (2001), hep-lat/0104013.

[29] E. Jenkins, Nucl. Phys. B368, 190 (1992).

[30] G.L Lepage, *Lattice QCD for Novices*, Vorlesungsskript.

[31] S. Aoki *et al.* (JLQCD Collaboration), hep-lat/0212039.

[32] A. Ali Khan *et al.* (CP-PACS Collaboration), Phys. Rev. D65, 054505 (2002).

[33] S. Aoki *et al.* (CP-PACS Collaboration), Phys. Rev. D60, 114508 (1999), hep-lat/9902018.

[34] S. Aoki *et al.* (CP-PACS Collaboration), Phys. Rev. D67, 034503 (2003), hep-lat/0206009.

[35] A.W. Thomas, nucl-th/0111001.

[36] R.D. Young, D.B. Leinweber und A.W. Thomas, Prog. Part. Nucl. Phys. 50, 399 (2003), hep-lat/0212031.

[37] Gespräch mit F. Karsch.

[38] E. Jenkins, A.V. Manohar und M.B. Wise, Phys. Rev. Lett. 75, 2272 (1995), hep-ph/9506356.

[39] T. Becher und H. Leutwyler, Eur. Phys. J. C9, 643 (1999), hep-ph/9901384.

[40] V. Bernard, T.R. Hemmert und Ulf-G. Meißner, hep-ph/0307115.

[41] B.R. Holstein, Phys. Lett. B244, 83 (1990).

[42] P. Lacock und C. Michael, Phys. Rev. D52, 5213 (1995), hep-lat/9506009.

[43] S.J. Dong *et al.*, hep-lat/0304005.

Danksagung

Mein erster Dank gilt Herrn Prof. Dr. J. Wambach. Zum einen für die Gelegenheit diese interessante Arbeit zu schreiben und für sein fortgesetztes Interesse. Zum anderen weil er meine Teilnahme an mehreren Schulen förderte.

Ganz besonders möchte ich mich bei Herrn Dr. Michael Buballa bedanken. Als mein Betreuer war er jederzeit bereit Fragen zu beantworten und komplizierte Zusammenhänge so klar wie möglich zu erklären.

Ein besonderer Dank gebührt auch Frau Dr. Micaela Oertel, die mir ihre Programme zur Verfügung stellte und sich die Zeit nahm, alle offenen Fragen zu klären.

Allen Mitgliedern der NHQ-Gruppe danke ich für die angenehme Atmosphäre und ständige Hilfsbereitschaft, insbesondere Carsten Isselhorst, Thomas Roth und Heiko Hergert beim Lösen diverser Computer-Probleme.

Nicht zuletzt möchte ich meinen Eltern Marga und Hartmut für die moralische und finanzielle Unterstützung während meines Studiums danken.

An dieser Stelle möchte ich mich auch für die Förderung meines Studiums durch die Studienstiftung des deutschen Volkes bedanken.