Diplomarbeit

Zustandsgleichung dichter Quarkmaterie

Frederik Neumann

Dezember 2002

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die ganz großen, wie die ganz kleinen Dinge haben schon immer eine große Faszination auf mich ausgeübt. Ich war deshalb außerordentlich begeistert meine Diplomarbeit über ein Thema machen zu können, das Fragestellungen aus der Physik der Elementarteilchen mit Fragestellungen aus der Astrophysik miteinander verbindet.
Diese Arbeit untersucht, in welchen Zuständen sich Quarkmaterie bei sehr hohen Dichten befinden kann. Die Quarkdichten, mit denen wir es dabei zu tun haben werden, liegen im Bereich von $n = (1-5)/\mathrm{fm}^{-3}$ [1]. Diese extremen Dichten kommen in der Natur nur in bestimmten stellaren Objekten, den Neutronensternen vor.
Neutronensterne bilden sich aus Sternen mit einer Masse von etwa 8-25 Sonnenmassen, in Folge einer Typ II Supernova. Ein Stern erzeugt die enormen Energiemengen, die er in Form von Strahlung ins All abgibt, durch eine Fülle von Kernfusionsprozessen. Dabei werden leichte in schwerere Atomkerne umgewandelt. Der schwerste Kern, den man mit Hilfe eines exothermen Fusionsprozesses erzeugen kann, ist dabei der Eisenkern, da die Bindungsenergiekurve für Eisen ein Maximum aufweist[1, 2].
Während seines ganzen Lebens befindet sich ein Stern in einem Gleichgewicht zwischen enormen Gravitationskräften einerseits und dem thermischen Druck der Teilchen in seinem Inneren andererseits. Am Ende seines Lebens ist praktisch der gesamte für die Fusionsprozesse relevante Kern des Sterns in Eisen umgewandelt, es steht damit kein „Brennstoff” zur Energiegewinnung mehr zur Verfügung. Die Temperatur und damit der thermische Druck nehmen ab. Das Gleichgewicht, in dem sich der Stern seit Millionen von Jahren befunden hat, wird dadurch gestört, die Gravitationskräfte gewinnen die Oberhand und der Stern kollabiert.
Dieser Kollaps wird erst gestoppt, wenn der mittlere Abstand der Nukleonen innerhalb des Sterns bis auf etwa 1 fm abgenommen hat. Bei diesen kleinen Abständen wird das Nukleon-Nukleon Potential stark abstoßend. Die von außen einfallende Materie trifft dann praktisch auf eine Wand und wird als Schockwelle ins All weggeschleudert. Man spricht bei diesem Szenario von einer Typ II Supernova. Übrig bleibt ein Stern von ungefähr 1.3-1.5 Sonnenmassen, einem Radius von nur 10-12 Kilometern und einer Temperatur von

[1] Zum Vergleich, die Quarkdichte von typischer Kernmaterie liegt bei etwa 0.48 fm^{-3}.

einem MeV oder weniger. Der Kern des Sterns, die vor dem Kollaps noch weitgehend aus Eisen bestanden hat, hat sich durch die extremen Bedingungen in Kernmaterie und Elektronen umgewandelt. Der Neutronenstern besteht nicht mehr aus Atomen, sondern aus Protonen, Neutronen und Elektronen. Die Protonen und Neutronen befinden sich dabei in einem Gleichgewicht, dem β-Gleichgewicht, das wir in Kapitel 6.1 beschreiben werden. Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, was mit der Materie tief im Inneren eines solchen Neutronensterns geschehen kann, wo die Dichte am größten ist. Was geschieht, wenn die Nukleonen sich so immer näher kommen? Können die Nukleonen dann verschmelzen, kann es zur Bildung von Quarkmaterie kommen? Und wenn ja, welche Zustände kann diese Quarkmaterie dann annehmen?

Es bedarf natürlich mehr als nur eine einzige Diplomarbeit, um alle diese Fragen beantworten zu können und wir wollen uns hier deshalb auf die Frage konzentrieren, welchen Einfluss speziell die Farbsupraleitung in dichter Quarkmaterie hat.

Der Begriff der Supraleitung kommt ursprünglich aus der Festkörperphysik, er beschreibt das 1911 von Kammerlingh Onnes entdeckte Phänomen, dass viele Metalle ihren elektrischen Widerstand völlig verlieren, wenn man sie unter eine gewisse, für das jeweilige Metall spezifische, kritische Temperatur T_C abkühlt [3]. Theoretisch konnte die Supraleitung erst viel später von Bardeen, Cooper und Schrieffer im Jahr 1957 erklärt werden [4]. Sie fanden heraus, dass durch das Kristallgitter eine attraktive Wechselwirkung zwischen den Elektronen vermittelt wird und es dadurch zur Bildung eines Quasiteilchens aus zwei Elektronen mit entgegengesetztem Impuls, dem Cooper-Paar, kommt. Charakterisiert wird das Cooper-Paar durch eine Energielücke zum Fermisee, dem so genannten Gap.

Die Bildung von Cooper-Paaren ist nicht auf Elektronen beschränkt, sie ist prinzipiell immer dann möglich, wenn man zwischen zwei Fermionen gleicher Spezies eine attraktive Wechselwirkung findet. Wir interessieren uns im Laufe dieser Arbeit dafür, welchen Einfluss die Bildung von Cooper-Paaren aus Quarks auf dichte Quarkmaterie hat und umgekehrt. Da die Quarks neben der elektromagnetischen Ladung noch Farbladungen tragen, bezeichnet man die Supraleitung, die durch Quark-Cooper-Paare verursacht wird als Farbsupraleitung. Ein umfangreicher Überblick über die Farbsupraleitung wird in Referenz [5] gegeben.

Die Wechselwirkung, welche durch diese Farbladungen verursacht wird, bezeichnet man als starke Wechselwirkung. Sie wird durch den Austausch von Feldquanten, den Gluonen vermittelt, die ihrerseits auch selbst wieder eine Farbladung besitzen und deshalb auch untereinander wechselwirken können. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zur elektromagnetischen Wechselwirkung, bei der die Feldquanten, die Photonen, selbst keine Ladung tragen. Die Rechnungen zu Prozessen der starken Wechselwirkung werden durch die Farbladungen der Gluonen drastisch erschwert. Wir werden deshalb auf ein effektives Modell der starken Wechselwirkung, das Nambu−Jona-Lasinio Modell zurückgreifen, was wir in Kapitel 2.2 einführen werden.

Die Theorie der starken Wechselwirkung ist die Quantenchromodynamik (QCD), wir werden diese in Kapitel 2.1 vorstellen. Symmetrien spielen dabei eine wesentliche Rolle, da

diese auch von unserem Modell realisiert werden müssen.
Bei einem Neutronenstern handelt es sich um ein System mit einer sehr großen Anzahl von Teilchen. Ein solches System kann man am besten mit Hilfe der statistischen Physik beschreiben. Der zentrale Punkt in der statistischen Physik ist immer die Berechnung eines thermodynamischen Potentials. Aus diesem lassen sich alle physikalisch relevanten Größen wie Druck, Temperatur und Dichte berechnen. Den Formalismus zur Berechnung des thermodynamischen Potentials stellen wir in Kapitel 3 vor.
In Kapitel 4 wird dann der Einfluss untersucht, den die Bildung von Quark-Cooper-Paaren auf die Kernmaterie hat und umgekehrt. Die relevanten Größen sind hierbei die Konstituentenmassen der drei Quarks M_u, M_d und M_s, sowie die Gaps Δ_2, Δ_5 und Δ_7, welche jeweils einem der drei möglichen farbsupraleitenden Cooper-Paare aus (u, d)-, (u, s)- und (d, s)-Quarks zugeordnet sind. Das Vorhandensein von Farbsupraleitung entspricht dann einem von Null verschiedenen Gap Δ_i. Wir werden feststellen, dass man nicht für jedes quarkchemische Potential μ und jede Temperatur T von Null verschiedene Gaps und damit Farbsupraleitung erhält. Die Gaps Δ_i sind damit Ordnungsparameter und ermöglichen es, ein Phasendiagramm stark wechselwirkender Materie zu berechnen.
Materie in einem Neutronenstern muss gewisse Bedingungen erfüllen: Sie muss ladungs- und farbneutral sein, außerdem befindet sie sich im β Gleichgewicht. Um diesen Bedingungen gerecht zu werden, untersuchen wir in Kapitel 5 zunächst, wie sich Ladungs- und Teilchen-Dichten im Rahmen des Modells berechnen lassen. Wir stellen dabei fest, dass die in Kapitel 4 berechnete Materie nicht neutral ist und man im allgemeinen von der Vereinfachung eines einheitlichen chemischen Potentials für alle Quarks abrücken muss.
In Kapitel 6.2 untersuchen wir dann schließlich, für welche Werte der chemischen Potentiale man neutrale Phasen erhält. Anschließend konzentrieren wir uns in Kapitel 6.3 auf die Konstruktion gemischter neutraler Phasen. Ein Phasengemisch kann sich immer nur entlang einer Phasengrenze bilden. Die farbsupraleitenden Quarkphasen, die an den von uns konstruierten Gemischen beteiligt sind, müssen dabei nicht für sich genommen, sondern nur als Gemisch neutral sein. Es ist uns dabei gelungen, neun verschiedene gemischte Phasen zu konstuieren, die sich vom Vakuum bis zu einer Baryonen-Dichte von $n = 1.53\text{fm}^{-3}$ erstrecken.
Diese Diplomarbeit baut hauptsächlich auf früheren Arbeiten von M. Buballa und M. Oertel auf. In Referenz [15] wurden zuerst Phasenübergänge in farbsupraleitende Phasen anhand eines Zwei-Flavor-Systems studiert. In einer späteren Arbeit [12] wurde dann ein Phasendiagramm eines Drei-Flavor-Systems in Abhängigkeit vom chemischen Potential der Quarks und der Temperatur berechnet. Da sich die vorliegende Arbeit eng an der Thematik von Referenz [12] orientiert, werden wir die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit in Kapitel 4 vorstellen, um anschließend das Bild von farbsupraleitender Materie zu verfeinern.

Kapitel 2

Quark Modell

2.1 QCD

Man geht zur Zeit davon aus, dass die Wechselwirkungen zwischen den stark wechselwirkenden Bausteinen der Materie, den Quarks, durch die Quantenchromodynamik (QCD) korrekt beschrieben werden können. Die Quarks tragen in dieser Theorie Farbladungen und wechselwirken über den Austausch von Feldquanten, den sogenannten Gluonen. Der Erfolg der QCD liegt vor allem in der exakten Beschreibung von Streuexperimenten bei sehr hohen Energie- und Impulsüberträgen. Bei hohen Energien und Impulsen ist die QCD mit den üblichen störungstheoretischen Verfahren der Quantenfeldtheorie lösbar [6].
Wir werden uns später für einen Energiebereich interessieren für den die QCD nicht störungstheoretisch lösbar ist. Ein nicht störungstheoretischer Zugang ist der hier verwendete Ansatz einer effektiven Theorie. Eine Möglichkeit ein solches Modell aufzustellen ist, dem Modell die gleichen Symmetrien wie der QCD selbst zu Grunde zu legen. Eine Symmetrie ist über das Noethersche Theorem immer mit Erhaltungsgrößen verknüpft, das Modell hat dann also zumindest die gleichen Erhaltungsgrößen wie die QCD selbst. Wir werden deshalb die QCD-Lagrangedichte bezüglich ihrer Symmetrieeigenschaften untersuchen.
Die Lagrangedichte der QCD ist gegeben durch:

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\gamma_\mu D^\mu - m)\psi - \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a. \tag{2.1}$$

Der Feldstärketensor $F_{\mu\nu}^a$ ist definiert als:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \tag{2.2}$$

Dabei ist $A_\mu^a (a = 1, ..., 8)$ das Eichfeld und g die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung, f_{abc} sind die Strukturkonstanten der $SU(3)$-Gruppe. ψ ist ein Quark Feld aus 6 Quark Flavors $\psi = (u, d, s, ...)$ und drei Farben $u = (u_r, u_g, u_b)$, r, g, b steht dabei für „rot“, „grün“ und „blau“. Die Matrix m ist die Matrix der Strommassen der Quarks

$m = diag(m_u^0, m_d^0, m_s^0, ...)$. $D_\mu = (\partial_\mu - ig\lambda_a A_\mu^a)$ steht für die sogenannte kovariante Ableitung, wobei λ_a die Gell-Mann-Matrizen sind.
Eine der großen Schwierigkeiten, bei der Behandlung von Prozessen der starken Wechselwirkung, liegt in der Energieabhängigkeit der Kopplungskonstanten g. Bei großen Impulsen wird die Kopplungskonstane klein und lässt dadurch eine störungstheoretische Behandlung zu. Dies wird als *asymptotische Freiheit* bezeichnet. Bei kleinen Energien, wie sie in dieser Arbeit eine Rolle spielen, wird die Kopplungskonstante jedoch groß und lässt dies nicht mehr zu.

2.1.1 Symmetrien

Die Symmetrien einer Theorie bzw. ihrer Lagrangedichte sind deshalb so wichtig, weil sie über das Noether Theorem mit den Erhaltungsgrößen verknüpft sind.

Noether Theorem

Das Noether Theorem beschreibt den Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen einer Theorie.
Es lautet: „Ist die Lagrangedichte unter einer Symmetrietransformation der Felder symmetrisch, so hat dies immer einen erhaltenen Strom zur Folge!”
Zunächst wollen wir nun das Noethersche Theorem ableiten. Anschließend geben wir die Symmetrien der QCD an und bestimmen die zugeordneten Erhaltungsgrößen.
Wir betrachten eine beliebige Lagrangedichte:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \overline{\psi}, \partial_\mu\psi, \partial_\mu\overline{\psi}). \tag{2.3}$$

Wir variieren die Lagrangedichte nun mit Hilfe der Felder ψ und $\overline{\psi}$. Dabei lassen wir nur solche Transformationen zu, die die Lagrangedichte selbst ungeändert lassen. Eine solche Transformation wird als Symmetrietransformation bezeichnet

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta(\partial_\mu\psi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\overline{\psi}}\delta\overline{\psi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\overline{\psi})}\delta(\partial_\mu\overline{\psi}). \tag{2.4}$$

Für die Felder selbst gelten die Euler-Lagrangegleichungen

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = 0. \tag{2.5}$$

Damit und mit Hilfe der Produktregel kann man die Variation der Lagrangedichte umschreiben zu:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\overline{\psi})}\delta\overline{\psi}). \tag{2.6}$$

Wie bereits erwähnt, wollen wir nur solche Tranformationen betrachten, die die Wirkung ungeändert lassen. Damit gilt $\delta\mathcal{L} = 0$ und man kann den erhaltenen Viererstrom identifizieren

$$j^\mu \propto \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\overline{\psi})}\delta\overline{\psi} \quad ; \quad \partial_\mu j^\mu = 0. \tag{2.7}$$

Wenn die betrachtete Wirkung von mehr als den Feldern ψ und $\overline{\psi}$ abhängt, z.B. von $\psi_1, \psi_2, \overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2$ und die betrachtete Symmetrie auch diese betrifft, so sind für diese Felder entsprechende Terme zu addieren.

Symmetrien der QCD

Im folgenden wollen wir uns auf die Drei-Flavor-QCD beschränken, hier bezieht man nur die drei leichtesten Quarkflavors, also Up-, Down- und Strange-Quarks mit in die Betrachtungen ein.

- **$SU(3)$ Farbe**

  Die QCD-Lagrangedichte ist konstruiert, eine exakte $SU(3)$ Farbsymmetrie zu besitzen, gemeint ist hier eine Transformation der Form:

  $$\psi' = e^{\frac{i}{2}\vec{\alpha}\vec{\lambda}}\psi. \tag{2.8}$$

  Die Matrizen $\vec{\lambda}$ sind dabei die acht Gell-Mann-Matrizen, diese wirken nur im Farbraum. Die zu dieser Symmetrie gehörige Erhaltungsgröße ist die Farbe. Der entsprechende Noether Strom lässt sich nach Gleichung (2.7) ausrechnen und ist gegeben durch:

  $$\vec{J}^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\vec{\lambda}\psi, \tag{2.9}$$

  das heißt, man erhält einen erhaltenen Viererstrom für jede der acht Gell-Mann-Matrizen.

- **$SU_V(3)$ Flavor**

  Die entsprechende Symmetrietransformation ist wieder:

  $$\psi' = e^{\frac{i}{2}\vec{\alpha}\vec{\lambda}}\psi, \tag{2.10}$$

  wobei die Gell-Mann-Matrizen jetzt im Flavor-Raum wirken. Die entsprechenden Erhaltungsgrößen sind Isospin und Strangeness.
  Die $SU_V(3)$ Flavor Symmetrie ist allerdings nur eine approximative Symmetrie, sie wäre nur genau dann exakt, wenn die Massen aller Quarks identisch wären.
  Verglichen mit den typischen Hadronenmassen ist diese Approximation für Up- und Down-Quarks viel eher gerechtfertigt als für das Strange Quark, das immerhin schon eine Masse von $m_s \approx 140$ MeV besitzt. Symmetrien lassen sich immer auch sehr gut

anhand des Teilchenspektrums überprüfen, weil sich diese auch hier immer wiederfinden lassen müssen. Die Massendifferenz von Proton und Neutron, $m_p = 938.27$ MeV, $m_n = 939.56$ MeV, ist beispielsweise viel kleiner als die von Neutron und Λ-Resonanz, $m_\Lambda = 1115.68$ MeV.

- $U_V(1)$ **Baryonenzahl**

  Die zur Baryonenzahlerhaltung gehörige Symmetrietransformation ist:

  $$\psi' = e^{-i\alpha}\psi \tag{2.11}$$

  Der zugeordnete Noetherstrom/Baryonenstrom lässt sich sich wieder nach (2.7) berechnen

  $$j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi. \tag{2.12}$$

  Diese Symmetrie der QCD Lagrangedichte ist exakt. Auch in der Natur ist die Baryonenzahlerhaltung gegeben.

- $SU_A(3)$ **chirale Symmetrie**

  Die der chiralen Symmetrie zugeordnete Transformation ist ähnlich der $SU_V(3)$ Transformation der Flavorsymmetrie,

  $$\psi' = e^{\frac{i}{2}\vec{\alpha}\vec{\lambda}\gamma_5}\psi, \tag{2.13}$$

  sie unterscheidet sich nur durch die γ_5 Matrix im Exponenten, die die Eigenschaft hat die Parität eines Zustands zu ändern. Die chirale Symmetrie ist, wie die mit ihr verwandte $SU_V(3)$ Symmetrie, nur eine approximative Symmetrie.
  Man findet im Teilchenspektrum jedoch keine auch nur näherungsweise entarteten Multipletts mit entgegengesetzten Paritäten. Die Schlussfolgerung ist: Die chirale Symmetrie wird also nicht direkt von der QCD realisiert, sie ist spontan gebrochen. Nach dem Goldstone Theorem [6] gibt es masselose Teilchen, sogenannte Goldstone-Bosonen, sobald eine kontinuierliche Symmetrie spontan gebrochen wird. Die chirale Symmetrie ist jedoch nicht exakt, wodurch die Goldstone-Bosonen in diesem Fall eine Masse bekommen. Die Goldstone-Bosonen der chiralen Symmetrie sind die pseudoskalaren Mesonen, π, K, η. An den Massen dieser Mesonen kann man erkennen, wie stark die explizite Brechung der chiralen Symmetrie ist. Die Pionen sind die Goldstone-Bosonen der $SU_A(2)$-Symmetrie, sie haben eine Masse von $m_\pi \approx 140$ MeV. Dies ist verglichen mit typischen Hadronenmassen von 1 GeV noch relativ wenig, die chirale Symmetrie ist also im Falle der zwei leichten Flavors recht gut erfüllt. Nimmt man jedoch das s-Quark hinzu, geht man also zur $SU_A(3)$ über, so muss man die übrigen Mesonen des Oktetts betrachten. Diese haben eine wesentlich größere Masse von $m_K \approx 500$ MeV und $m_\eta \approx 550$ MeV. Im Falle dreier Flavor ist die chirale Symmetrie damit nur noch schlecht erfüllt.
  Der Noetherstrom der chiralen Symmetrie ist gegeben durch:

  $$\vec{j}^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\vec{\lambda}\psi. \tag{2.14}$$

- $U_A(1)$ **Symmetrie**

  Auch im Falle der $U_A(1)$ Symmetrie handelt es sich um eine approximative Symmetrie, auch sie wird durch den Massenterm der Wirkung explizit gebrochen. Die $U_A(1)$ Symmetrie-Transformation unterscheidet sich von der $U_V(1)$ Symmetrie wieder nur durch eine, die Parität des Zustands ändernde, γ_5 Matrix

  $$\psi' = e^{-\frac{i}{2}\alpha\gamma_5}\psi. \tag{2.15}$$

  Den Noetherstrom muss man auf die gleiche Weise modifizieren

  $$\jmath^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi. \tag{2.16}$$

  Im Teilchenspektrum findet man eine $U_A(1)$ Symmetrie allerdings auch nicht, demnach ist auch diese Symmetrie spontan gebrochen und es müsste ein Goldstone-Boson existieren. Dieses wäre allerdings, wie die Pionen nicht masselos und man würde für ein solches Teilchen auch in etwa die Pionenmasse erwarten. Allerdings blieb auch die Suche nach einem solchen Teilchen erfolglos.
  Das Problem konnte jedoch von 't Hooft gelöst werden. Er fand heraus, dass sich die $U_A(1)$ Symmetrie aufgrund von Instanton-Effekten nicht im Teilchenspektrum wiederfindet. Er ging sogar so weit zu sagen, dass die $U_A(1)$-Symmetrie eigentlich gar keine Symmetrie der QCD ist [7].

Zusammenfassend wollen wir die Symmetrien der QCD noch einmal auflisten, dabei folgen wir der Argumentation von 't Hooft, die die $U_A(1)$-Symmetrie nicht zu den Symmetrien der QCD zählt

$$\mathcal{S}_{QCD} = SU(3)_{Farbe} \otimes SU_V(3) \otimes SU_A(3) \otimes U_V(1). \tag{2.17}$$

2.2 Das Nambu−Jona-Lasinio Modell

Das Nambu−Jona-Lasinio Modell wurde von Nambu und Jona-Lasinio im Jahr 1961 eingeführt [8]. Zu dieser Zeit gab es die QCD noch nicht und ursprünglich war das NJL-Modell dazu gedacht, die effektive Wechselwirkung zwischen Nukleonen zu beschreiben.
Als die QCD dann entwickelt wurde, hatte man das NJL-Modell eigentlich schon verworfen, erkannte dann aber schnell, dass es einige grundlegende Gemeinsamkeiten mit der QCD hat.
Man interpretierte das Modell daher neu, indem man mit seiner Hilfe nicht mehr die Wechselwirkung zwischen Nukleonen, sondern die zwischen Quarks zu beschreiben versuchte. Die Voraussetzung dabei ist, dass man die gluonischen Wechselwirkungen im Limes kleiner Energien mit Hilfe von effektiven Punktwechselwirkungen beschreiben kann.
Die Stärken des NJL-Modells liegen darin, dass es alle im vorigen Kapitel aufgeführten Symmetrien der QCD beinhaltet. Außerdem kann man die Mechanismen, die zur spontanen Symmetriebrechung führen, direkt 'beobachten'.

Die globalen Symmetrien des NJL-Modells sind demnach:

$$\mathcal{S}_{NJL} = SU(3)_{Farbe} \otimes SU_V(3) \otimes SU_A(3) \otimes U_V(1). \tag{2.18}$$

Man folgt in gewisser Weise also auch hier der Argumentation von 't Hooft, bei der die $U_A(1)$-Symmetrie nicht zu den Symmetrien der QCD gerechnet wird.
Wir werden im folgenden zuerst das NJL-Modell für zwei Flavors einführen und es dann auf den für diese Arbeit relevanten Fall von drei Quark Flavors erweitern.

2.2.1 Das NJL-Modell für zwei Flavors

Im Falle zweier Flavors kann der NJL-Lagrangian die ursprünglich von Nambu und Jona-Lasinio vorgeschlagene Form annehmen [8], dabei muss man nur die Nukleonen Felder durch Quarkfelder ersetzen. Die chirale und die Flavor-Symmetrie reduzieren sich dabei auf zwei Dimensionen

$$\mathcal{L}^{(1)} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + G[(\overline{\psi}\psi)^2 + (\overline{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2]. \tag{2.19}$$

Dabei sind die Matrizen $\vec{\tau}$ die Paulimatrizen, die im Flavor-Raum wirken. Die Matrix m ist eine im Flavorraum diagonale Matrix mit den Massen von u- und d-Quark, $m = \mathrm{diag}_f\{m_u, m_d\}$. Die $U_V(1)$ Symmetrie ist exakt. Die $SU_V(2)$-Symmetrie ist exakt, falls die Strommassen von u- und d-Quark gleich sind. Die $SU_A(2)$-Symmetrie ist im chiralen Limes, das heißt im Grenzfall $m \to 0$, exakt. $SU_V(2)$- und $SU_A(2)$-Symmetrie werden also durch die Wechselwirkungsterme nicht gebrochen.
Die $U_A(1)$ Symmetrie wird durch die Wechselwirkungsterme explizit gebrochen.
Am einfachsten kann man die Symmetrieeigenschaften der Lagrangedichte zeigen, indem man infinitesimale Transformationen benutzt. Für eine Transformation, die man mit Hilfe eines beliebigen Operators $\mathcal{O}$ durchführt, bedeutet das:

$$\psi' = e^{i\alpha\mathcal{O}}\psi \approx (I + i\alpha\mathcal{O})\psi, \tag{2.20}$$
$$\overline{\psi}' = \psi^\dagger e^{-i\alpha\mathcal{O}^\dagger}\gamma^0 \approx \psi^\dagger(I - i\alpha\mathcal{O}^\dagger)\gamma^0. \tag{2.21}$$

Dies ist jedoch nicht die einzige Möglichkeit, eine Lagrangedichte mit den in (2.18) geforderten Symmetrien aufzuschreiben. Eine andere Möglichkeit ergibt sich, indem man die Isospinmatrizen in den anderen Term der Wechselwirkung schreibt

$$\mathcal{L}^{(2)} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + G[(\overline{\psi}\vec{\tau}\psi)^2 + (\overline{\psi}i\gamma_5\psi)^2]. \tag{2.22}$$

Was die Symmetrien anbelangt, gelten für diese NJL-Lagrangedichte die selben Aussagen wie für Gleichung (2.19).
Es liegt deshalb der Versuch auf der Hand beide Wechselwirkungen zu kombinieren.
Man muss hierbei jedoch aufpassen, durch die Kombination der beiden Wechselwirkungsterme wird nämlich die $U_A(1)$-Symmetrie der Wechselwirkung wieder hergestellt. Eine

solche Symmetrie ist jedoch nicht erwünscht. Man kann dies aber einfach umgehen, indem man einmal die Addition und einmal die Differenz der beiden Wechselwirkungsterme aus Gleichung (2.19) und (2.22) benutzt und diesen dann verschiedene Kopplungskonstanten zuordnet

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi &+ G[(\overline{\psi}\psi)^2 + (\overline{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2 + (\overline{\psi}\vec{\tau}\psi)^2 + (\overline{\psi}i\gamma_5\psi)^2] \\ &+ K[(\overline{\psi}\psi)^2 + (\overline{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2 - (\overline{\psi}\vec{\tau}\psi)^2 - (\overline{\psi}i\gamma_5\psi)^2]. \qquad (2.23)\end{aligned}$$

Damit die Lagrangedichte, wie erwünscht, nicht $U_A(1)$ symmetrisch ist muss $G \neq K$ sein, der Wechselwirkungsterm mit der Kopplungskonstanten K bricht also die $U_A(1)$-Symmetrie. Diese Lagrangedichte enthält ausschließlich Vier-Punkt-Vertizes, wie wir sie in Abb. 2.1 veranschaulicht haben. Das NJL-Modell enthält das Konzept der spontanen

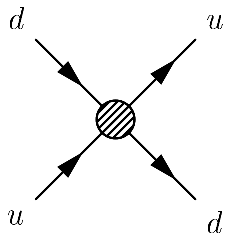

Abbildung 2.1: *Beispiel einer Zwei-Punkt-Wechselwirkung zwischen einem u- und einem d-Quark.*

Symmetriebrechung, der chiralen $SU_A(2)$ Symmetrie. Unter anderem kann man mit Hilfe des 2 Flavor NJL-Modells das Spektrum der Mesonen beschreiben. Auch die Restauration der chiralen Symmetrie bei endlichen Temperaturen und Dichten kann man mit Hilfe dieses Modells untersuchen [9, 10, 11].
Bei allen Erfolgen muss man auch einen gravierenden Nachteil des NJL-Modells erwähnen, es beinhaltet nicht das in der Natur beobachtete Phänomen des Confinement. Innerhalb des Modells sind freie Quarks also möglich.
Den zuletzt aufgestellten Lagrangian (2.23), wollen wir nun im nächsten Kapitel auf ein Modell für drei Quark Flavors erweitern.

2.2.2 Das NJL-Modell für drei Flavors

Wir werden nun den Zwei-Flavor-Lagrangian, Gleichung (2.23), auf den Drei-Flavor-Fall verallgemeinern. Dazu muss man zunächst einmal von den $SU(2)$-Matrizen (Pauli-Matrizen), zu den entsprechenden $SU(3)$-Matrizen (Gell-Mann-Matrizen), übergehen. Zur Brechung der $U_A(1)$ Symmetrie reicht es jedoch nun nicht mehr aus, an die Wechselwirkungsterme einfach andere Kopplungskonstanten zu schreiben. Allgemein gilt, dass man zur Brechung dieser Symmetrie einen $2N_f$ Punktvertex braucht, wobei N_f die Anzahl der Flavors ist [11]. Damit brauchen wir jetzt einen Sechs-Punkt-Vertex. Nach 't Hooft kann man einen solchen Vertex in Form einer Determinante im Flavor-Raum schreiben.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m) + G\sum_{a=0}^{8}[(\overline{\psi}\tau^a\psi)^2 + (\overline{\psi}i\gamma_5\tau^a\psi)^2] \\
&\quad -K[\det{}_f\overline{\psi}^{T_f}(1+\gamma_5)\psi^{T_f} + \det{}_f\overline{\psi}^{T_f}(1-\gamma_5)\psi^{T_f}] \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

Im ersten Term haben wir dabei hier den Feynman-Slash eingeführt. Für einen beliebigen Viererverktor A^μ ist er definiert als, $A\!\!\!/ := A^\mu\gamma_\mu$. Mit $\det_f$ und T_f ist gemeint, dass die Determinante bzw. die Transposition nur im Flavorraum auszuführen sind.
Die Matrizen τ_i stehen jetzt für die Gell-Mann-Matrizen, dabei ist $\tau_0 = \sqrt{2/3}I$. Der erste Term, der Wechselwirkung des 3 Flavor NJL Modells, ist damit also völlig äquivalent mit Gleichung (2.23) für $G = K$.
Wenn man sich die Flavor Struktur der 't Hooft-Wechselwirkung genauer betrachtet, so erkennt man, dass hier alle drei Flavors mit eingebunden werden, wie in Abb. 2.2 veranschaulicht wird. Man spricht davon, dass die 't Hooft-Wechselwirkung die Flavors der beteiligten Quarks maximal mischt.

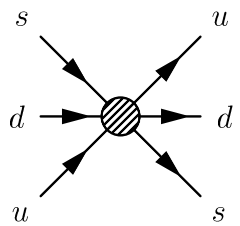

Abbildung 2.2: *Illustration der Flavor Struktur der $U_A(1)$ brechenden Sechs-Punkt 't Hooft-Wechselwirkung.*

Quark-Quark-Wechselwirkung

Bisher haben wir in unserem Modell nur Wechselwirkungen zwischen Quarks und Antiquarks in Betracht gezogen. Ziel dieser Arbeit ist es aber, stark wechselwirkende Materie bei sehr großen Dichten zu untersuchen, wie sie zum Beispiel für Neutronensterne und Schwerionenkollisionen relevant ist. Es können dann auch Wechselwirkungen zwischen Quarks selbst interessant sein.
Bei Dichten, die noch viel größer sind, als die, die in der vorliegenden Arbeit berücksichtigt werden sollen, wird die QCD selbst wieder störungstheoretisch behandelbar. Eine Analyse

des einfachsten Falls einer QCD Wechselwirkung, des Ein-Gluon-Austausches, ergibt hier eine anziehende Wechselwirkung zwischen den Quarks selbst.
Aus der Theorie der elektromagnetischen Supraleitung weiß man jedoch, dass eine beliebig schwache attraktive Wechselwirkung bereits dramatische Veränderungen des Grundzustands der Materie hervorrufen kann. Insbesondere kommt es hier zur Formierung von so genannten Cooper-Paaren, Quasiteilchen, die aus einem Elektronenpaar gebildet werden. Einen ähnlichen Effekt erwartet man nun auch innerhalb stark wechselwirkender Materie. Wir werden nun eine Quark-Quark-Wechselwirkung konstruieren, die wir dann anschließend in unser Modell einbauen werden. Aufgrund des Pauli Prinzips muss die Wechselwirkung zwischen Quarks im Dirac-, Flavor- und Farbraum total antisymmetrisch sein. Die einfachste Möglichkeit, einen solchen Wechselwirkungterm zu konstruieren, ist die jeweils einfachsten total antisymmetrischen Matrizen, der jeweiligen Unterräume zu benutzen. Im Dirac Raum ist das die $C\gamma_5$ Matrix, im Flavor und Farb-Raum sind es die drei total antisymmetrischen Gell-Mann Matrizen $\tau_{2,5,7}$ bzw. $\lambda_{2,5,7}$

$$\mathcal{L}_{qq} = H \sum_{A=2,5,7} \sum_{A'=2,5,7} (\overline{\psi} i\gamma_5 \tau_A \lambda_{A'} C \overline{\psi}^T)(\psi^T C i\gamma_5 \tau_A \lambda_{A'} \psi). \tag{2.25}$$

Diese Wechselwirkung hat eine Kondensation im folgenden Kanal zur Folge:

$$s_{AA'} = \langle \psi^T | C\gamma_5 \tau_A \lambda_{A'} | \psi \rangle, \quad A, A' = 2, 5, 7. \tag{2.26}$$

Der Ein-Gluon-Austausch ist in diesem Kanal ebenfalls attraktiv, er würde damit auch die Bildung eines Kondensats in diesem Kanal zur Folge haben.
Um die Quark-Quark-Wechselwirkung in unser Modell zu integrieren, müssen wir diesen einfach zu unserer bisherigen Lagrangedichte addieren. Die in dieser Arbeit verwendete Lagrangedichte hat damit die Form,

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m) + \mathcal{L}_{q\overline{q}} + \mathcal{L}_{qq}. \tag{2.27}$$

Dabei ist:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{q\overline{q}} &= G \sum_{a=0}^{8} [(\overline{\psi}\tau^a\psi)^2 + (\overline{\psi} i\gamma_5 \tau^a \psi)^2] - K[det_f \overline{\psi}^{T_f}(1+\gamma_5)\psi^{T_f} + det_f \overline{\psi}^{T_f}(1-\gamma_5)\psi^{T_f}] \\
\mathcal{L}_{qq} &= H \sum_{A=2,5,7} \sum_{A'=2,5,7} (\overline{\psi} i\gamma_5 \tau_A \lambda_{A'} C \overline{\psi}^T)(\psi^T C i\gamma_5 \tau_A \lambda_{A'} \psi).
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Im Laufe der Arbeit werden wir aus dieser Lagrangedichte thermodynamische Mittelwerte mit Hilfe einer Mean-Field-Rechnung in Hartree-Näherung bestimmen.

Kapitel 3

Formalismus

In diesem Kapitel sollen die Formalismen, die man zur Berechnung der thermodynamischen Mittelwerte benötigt, präsentiert werden. Wir halten uns dabei immer an das Beispiel, das durch die im vorherigen Kapitel angegebene Lagrangedichte (2.27) gegeben ist.

3.1 Mean-Field-Formalismus

Bei einem System mit einer großen Anzahl von Teilchen ist es nicht mehr praktikabel, alle Wechselwirkungen der Teilchen untereinander vollständig in Betracht zu ziehen. Man beschreibt ein Teilchen eines solchen Systems meist so, als befände es sich in einem Potential, das von allen anderen Teilchen des großen Systems hervorgerufen wird. Bei diesem Potential mittelt man praktisch über die Wechselwirkungen aller dieser anderen Teilchen, man spricht daher auch von einem mittleren Feld oder Mean-Field.
In unserem Fall entspricht ein solches Mean-Field der Linearisierung der Lagrangedichte in der Anwesenheit bestimmter Erwartungswerte.
In dieser Arbeit beschränken wir uns dabei auf drei Quark-Antiquark und drei Quark-Quark-Kondesate (Cooper Paare). Streng genommen muss man auch noch Kondensate in anderen Kanälen berücksichtigen [15]. Man geht jedoch davon aus, dass die Kondensation im Kanal des skalaren Farbtripletts dominiert [16]. Man hat dann die folgenden Kondensate:

$$\phi_a = \langle \overline{a}a \rangle \qquad a = u, d, s, \tag{3.1}$$

$$s_{AA} = \langle \psi^T C \gamma_5 \tau_A \lambda_A \psi \rangle \qquad A = 2, 5, 7. \tag{3.2}$$

τ_A und $\lambda_{A'}$ sind hier wieder jeweils die drei antisymmetrischen Gell-Mann Matrizen des Flavor und Farbraums.
Gemäß der Mean-Field-Näherung entwickelt man die Lagrangedichte, Gleichung (2.27), nun um diese Erwartungswerte

$$\overline{a}a \approx \langle \overline{a}a \rangle + \delta\overline{a}a = \phi_a + \delta\overline{a}a, \tag{3.3}$$

$$\overline{\psi}_T C i\gamma_5\tau_A\lambda_A\psi \approx \langle\overline{\psi}_T C i\gamma_5\tau_A\lambda_A\psi\rangle + \epsilon(\overline{\psi}_T C i\gamma_5\tau_A\lambda_A\psi) = s_{AA} + \epsilon(\overline{\psi}_T C i\gamma_5\tau_A\lambda_A\psi). \quad (3.4)$$

Im folgenden werden Terme von $\mathcal{O}(\delta^2)$ bzw. $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ vernachlässigt. Da wir in dieser Arbeit nur den Einfluss der oben genannten Quark-Antiquark und Quark-Quark Kondensate studieren wollen, setzen wir die Erwartungswerte aller anderen Kondensate auf null. Als Beispiel sei nur das folgende Kondensat erwähnt:

$$\overline{f}i\gamma_5 g \approx \delta(\overline{f}i\gamma_5 g). \quad (3.5)$$

Wir geben an dieser Stelle nur das Ergebnis der Linearisierung an, die entsprechende Rechnung findet sich in Anhang (A.1).

- **Quark-Antiquark-Term**

  Für den Quark-Antiquark-Wechselwirkungsterm erhält man:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{q\overline{q}}^{MF} &= \overline{u}(4G\phi_u + 2K\phi_d\phi_s)u + \overline{d}(4G\phi_d + 2K\phi_u\phi_s)d + \overline{s}(4G\phi_s + 2K\phi_u\phi_d)s \\ &\quad -4K\phi_u\phi_d\phi_s + 2G[\phi_u^2 + \phi_d^2 + \phi_s^2]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

- **Quark-Quark-Term**

  Im Falle des Quark-Quark-Terms der Lagrangedichte erhält man:

$$\mathcal{L}_{qq}^{MF} = \sum_{A=2,5,7}[\frac{1}{2}\overline{\psi}(\Delta_A\gamma_5\tau_A\lambda_A)C\overline{\psi}^T - \frac{1}{2}\psi^T C(\Delta_A^*\gamma_5\tau_A\lambda_A)\psi + \frac{1}{4H}|\Delta_A|^2]. \quad (3.7)$$

  In dieser Gleichung wurden dabei die so genannten Diquark-Gaps Δ_i eingeführt

$$\Delta_A = -2Hs_{AA} \qquad A = 2,5,7. \quad (3.8)$$

Für die gesamte linearisierte Lagrangedichte erhält man damit:

$$\mathcal{L}^{MF} = \overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - M)\psi + \sum_{A=2,5,7}[\frac{1}{2}\overline{\psi}(\Delta_A\gamma_5\tau_A\lambda_A)C\overline{\psi}^T - \frac{1}{2}\psi^T C(\Delta_A^*\gamma_5\tau_A\lambda_A)\psi] + \mathcal{V}. \quad (3.9)$$

In diesem Zusammenhang führt man geeigneterweise effektive Quarkmassen ein, M ist dabei eine Diagonalmatrix aus diesen effektive Massen der Quarks, $M = diag(M_u, M_d, M_s)$. Sie ergeben sich direkt aus dem Dirac-Anteil der Lagrangedichte und der linearisierten Quark-Antiquark-Wechselwirkung

$$M_i = m_i - 4G\phi_i + 2K\phi_j\phi_k \quad (i,j,k) = \text{alle Permutationen von (u,d,s)}. \quad (3.10)$$

Der Term $\mathcal{V}$ bezeichnet dabei die potentielle Energie. Man erhält ihn direkt aus allen Termen der linearisierten Wechselwirkungen, in denen keine Quarkfelder mehr vorkommen

$$\mathcal{V} = -4K\phi_u\phi_d\phi_s + 2G[\phi_u^2 + \phi_d^2 + \phi_s^2] + \frac{1}{4H}[\Delta_2^2 + \Delta_5^2 + \Delta_7^2]. \quad (3.11)$$

Nambu-Gorkov-Formalismus

Mit Hilfe des Nambu-Gorkov-Formalismus kann man die linearisierte Lagrangedichte auf eine sehr kompakte Form bringen.
Hierbei verdoppelt man künstlich die Freiheitsgrade der Felder. Dies wird erreicht, indem man davon ausgeht, dass die ladungskonjugierten Felder ebenfalls unabhängig sind. Man definiert:

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi(x) \\ C\overline{\psi}^T(x) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \overline{q}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overline{\psi}(x), \psi^T(x) C \right) \tag{3.12}$$

Mit Hilfe der Eigenschaften der Ladungskonjugationsmatrix C, siehe Anhang A.2, lassen sich die folgenden Relationen ableiten:

$$\overline{\psi} i \partial\!\!\!/ \psi = -\psi^T C i \overleftarrow{\partial\!\!\!/} C \overline{\psi}^T, \tag{3.13}$$

$$\overline{\psi} \gamma^0 \psi = -\psi^T C \gamma^0 \overline{\psi}^T, \tag{3.14}$$

$$\overline{\psi} \mathcal{O} \psi = \psi^T C \mathcal{O} C \overline{\psi}^T. \tag{3.15}$$

Der Operator $\mathcal{O}$ ist eine im Flavor- und Dirac-Raum diagonale Matrix.
Der Nambu-Gorkov-Formalismus liefert also nun eine Möglichkeit, die linearisierte Lagrangedichte in einer sehr kompakten Form anzugeben

$$\mathcal{L}^{MF} = \overline{q} \begin{pmatrix} i\partial\!\!\!/ - M & \sum_{A=2,5,7} \Delta_A \gamma_5 \tau_A \lambda_A \\ -\sum_{A=2,5,7} \Delta_A^* \gamma_5 \tau_A \lambda_A & -i \overleftarrow{\partial\!\!\!/} - M \end{pmatrix} q + \mathcal{V}. \tag{3.16}$$

Lagrangedichte im Impulsraum

Wie aus dem nächsten Kapitel deutlich wird, benötigen wir die linearisierte Lagrangedichte nicht im Orts-, sondern im Impulsraum. In den Impulsraum gelangt man mit Hilfe einer Fouriertransformation:

$$q(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip^\mu x_\mu} \tilde{q}(p), \tag{3.17}$$

$$\overline{q}(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip^\mu x_\mu} \tilde{\overline{q}}. \tag{3.18}$$

Im Impulsraum kann man die partiellen Ableitungen in (3.16) ausführen und erhält:

$$\mathcal{L} = \tilde{\overline{q}} \begin{pmatrix} p\!\!\!/ - M & \sum_{A=2,5,7} \Delta_A \gamma_5 \tau_A \lambda_A \\ -\sum_{A=2,5,7} \Delta_A^* \gamma_5 \tau_A \lambda_A & p\!\!\!/ - M \end{pmatrix} \tilde{q} + \mathcal{V}. \tag{3.19}$$

Das Potential $\mathcal{V}$ in Gleichung (3.11) bleibt dabei unverändert.

3.2 Thermodynamisches Potential

In dieser Arbeit beschreiben wir stark wechselwirkende Materie im thermodynamischen Gleichgewicht. In einem relativistischen System, bei dem Teilchen erzeugt und vernichtet werden können, ist es dabei am einfachsten, das großkanonische Ensemble zu benutzen. In diesem Formalismus kann das betrachtete System sowohl Energie als auch Teilchen mit einem Wärme bzw. Teilchenbad austauschen.
In der statistischen Physik besteht das Ziel immer in der Berechnung eines Thermodynamischen Potentials. Aus diesem Potential lassen sich dann alle anderen physikalischen Größen bestimmen.
Das großkanonische Potential J, berechnet man mit:

$$J = J(T, V, \{\mu_i\}) = -T\ln Z. \tag{3.20}$$

Dabei ist Z die großkanonische Zustandssumme:

$$Z = \mathrm{Tr}\left(e^{-\frac{1}{T}(\mathcal{H}-\sum_i \mu_i \mathcal{N}_i)}\right). \tag{3.21}$$

Das Potential J, kann man auch mit der Hilfe einer Legendre Transformation aus der inneren Energie E des Systems bestimmen

$$J = E - TS - \sum_i \mu_i N_i. \tag{3.22}$$

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns jedoch nicht mit endlichen Systemen, wir verwenden deshalb ein Potential pro Volumeneinheit, dieses bezeichnen wir mit Ω

$$\Omega(T, \{\mu_i\}) = \frac{1}{V} J(T, V, \{\mu_i\}). \tag{3.23}$$

Wie schon erwähnt, erhält man alle interessanten physikalischen Größen direkt aus dem Thermodynamischen Potential

$$P = -\Omega, \tag{3.24}$$

$$s = -\frac{\partial \Omega}{\partial T}, \tag{3.25}$$

$$n_i = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_i}. \tag{3.26}$$

Dabei ist P der Druck, $s = \frac{S}{V}$ die Entropiedichte und n_i die zum chemischen Potential μ_i gehörigende Teilchendichte des Systems.

3.2.1 Thermodynamisches Potential der Quarks

Zur Berechnung des Thermodynamischen Potentials im großkanonischen Ensemble verwenden wir den Matsubara-Formalismus. Den Quarks wird dann ein chemisches Potential

μ_f^c zugeordnet, das im allgemeinen für alle Quark-Flavors und Farben verschieden sein kann.
Für die Berechnung des Thermodynamischen Potentials benötigen wir dann außerdem die effektive Lagrangedichte, die das chemische Potential mit einbezieht

$$\mathcal{L}^{MF}_{effektiv} = \mathcal{L}^{MF} + \psi^\dagger \hat{\mu} \psi. \tag{3.27}$$

Dabei ist $\hat{\mu} = diag_{f,c}\{\mu_u^r, \mu_u^g, \mu_u^b, \mu_d^r, \mu_d^g, \mu_d^b, \mu_s^r, \mu_s^g, \mu_s^b\}$ eine Diagonalmatrix der chemischen Potentiale der Quarks. Im Nambu-Gorkov-Formalismus nimmt damit die effektive Lagrangedichte die folgende Form an:

$$\mathcal{L}^{MF}_{effektiv} = \overline{\tilde{q}} \begin{pmatrix} \not{p} - M + \hat{\mu}\gamma^0 & \sum_{A=2,5,7} \Delta_A \gamma_5 \tau_A \lambda_A \\ -\sum_{A=2,5,7} \Delta_A^* \gamma_5 \tau_A \lambda_A & \not{p} - M - \hat{\mu}\gamma^0 \end{pmatrix} \tilde{q} + \mathcal{V}. \tag{3.28}$$

An dieser Stelle kann man den Fermionen-Propagator $S(p)$ einführen. Er ist gegeben durch:

$$\mathcal{L}^{MF}_{effektiv} = \overline{\psi}(p) S^{-1}(p) \psi(p) + \mathcal{V}. \tag{3.29}$$

Damit haben wir alles bereitgestellt, um das Thermodynamische Potential zu berechnen [14]. Es gilt:

$$\Omega(T, \mu) = -T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\, \ln \left(\frac{1}{T} S^{-1}(i\omega_n, \vec{p}) \right) + \mathcal{V}. \tag{3.30}$$

Der Fermionenpropagator muss also an der Stelle, $p = (i\omega_n, \vec{p})$, ausgewertet werden. Dabei sind die $\omega_n = (2n-1)\pi T$ die fermionischen Matsubara-Frequenzen.
Die Schwierigkeit besteht nun darin, den Ausdruck Tr $\ln(\frac{1}{T} S^{-1})$ zu berechnen.
Im Flavorraum, dem Farbraum und den beiden Nambu-Gorkov-Komponenten ergibt sich für S^{-1} eine 18×18 Matrix. Man benutzt nun die Identität:

$$\mathrm{Tr}\, \ln A = \ln \det A. \tag{3.31}$$

Damit erhält man:

$$\mathrm{Tr}\, \ln\, (\frac{1}{T} S^{-1}) = \ln \det S^{-1} - 72 \ln T. \tag{3.32}$$

Der Faktor 72 stammt daher, dass man neben den 18 Dimensionen des Flavor-Farb-Raums noch die 4 Dimensionen des Dirac-Raums berücksichtigen muss.
S^{-1} enthält sehr viele Nulleinträge. Mit Hilfe von Zeilen und Spaltenvertauschungen kann man die Determinante schreiben als:

$$\begin{aligned} \det S^{-1} &= \det \mathcal{M}_{(u,g),(d,r)} \cdot \det \mathcal{M}_{(u,b),(s,r)} \cdot \det \mathcal{M}_{(d,r),(u,g)} \cdot \det \mathcal{M}_{(d,b),(s,g)} \\ &\quad \cdot \det \mathcal{M}_{(s,r),(u,b)} \cdot \det \mathcal{M}_{(s,g),(d,b)} \cdot \det \mathcal{M}_{uds}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Die Indizes geben hierbei lediglich an, welche Quarks in diesen Matrizen eine Rolle spielen. In der ersten sind das zum Beispiel die grünen Up-Quarks und die roten Down-Quarks.

Die Matrizen $\mathcal{M}_{(a,b),(c,d)}$ sind im Flavor- Farb- Nambu-Gorkov-Raum 2×2 Matrizen und von ihrer Struktur identisch:

$$\mathcal{M}_{(a,b),(c,d)} = \begin{pmatrix} \not{p}^{+}_{a,b} - M_a & \Delta_{ac}\gamma_5 \\ -\Delta^{*}_{ac}\gamma_5 & \not{p}^{-}_{c,d} - M_d \end{pmatrix}. \tag{3.34}$$

Dabei haben wir die Definition, $\not{p}^{\pm}_{a,b} = \not{p} \pm \mu^b_a$, verwendet. Mit welchen Δ's es wir zu tun haben, hängt davon ab welche Quarks in der Matrix gepaart werden. Das bedeutet

$$\Delta_{ac} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta_2 \text{ für } a, c \in u, d \\ \Delta_5 \text{ für } a, c \in u, s \\ \Delta_7 \text{ für } a, c \in d, s \end{array} \right\}. \tag{3.35}$$

Der verbleibende Beitrag zum Thermodynamischen Potential Ω hat die folgende 6×6 Struktur:

$$\mathcal{M}_{uds} = \begin{pmatrix} \not{p}^{+}_{u,r} - M_u & 0 & 0 & 0 & -\Delta_2\gamma_5 & -\Delta_5\gamma_5 \\ 0 & \not{p}^{+}_{d,g} - M_d & 0 & -\Delta_2\gamma_5 & 0 & -\Delta_7\gamma_5 \\ 0 & 0 & \not{p}^{+}_{s,b} - M_s & -\Delta_5\gamma_5 & -\Delta_7\gamma_5 & 0 \\ 0 & \Delta^{*}_2 & \Delta^{*}_5\gamma_5 & \not{p}_{u,r} - M_u & 0 & 0 \\ \Delta^{*}_2\gamma_5 & 0 & \Delta^{*}_7\gamma_5 & 0 & \not{p}^{-}_{d,g} - M_d & 0 \\ \Delta^{*}_5\gamma_5 & \Delta^{*}_7\gamma_5 & 0 & 0 & 0 & \not{p}^{-}_{s,b} - M_s \end{pmatrix}. \tag{3.36}$$

In dieser Matrix werden also rote u-Quarks, grüne d-Quarks und blaue s-Quarks miteinander gepaart.
Man kann diese Ausdrücke noch weiter vereinfachen, für die 2×2 Blockmatrizen erhält man:

$$\det \mathcal{M}_{(a,b),(c,d)} = \left[x^{+}_{ab}x^{-}_{cd} - 2|\Delta_{ac}|^2 y_{(a,b),(c,d)} + |\Delta_{ac}|^4\right]^2. \tag{3.37}$$

Wir haben dabei die folgenden Abkürzungen benutzt:

$$x^{\pm}_{ab} = (i\omega_n \pm \mu_{a,b})^2 - \vec{p}^2 - M_a^2 \tag{3.38}$$
$$y_{(a,b),(c,d)} = -\omega_n^2 + i\omega_n(\mu_{a,b} - \mu_{c,d}) - \mu_{a,b}\mu_{c,d} - \vec{p}^2 - M_a M_b, \tag{3.39}$$

Die 6×6 Blockmatrix $\mathcal{M}_{uds}$ kann man nicht ohne weiteres auf eine kompakte Form bringen. Man erhält einen sehr unhandlichen Ausdruck, den man jedoch dadurch in den Griff bekommen kann, dass man ihn nach Potenzen der Δ_i's sortiert

$$\det \mathcal{M}_{uds} = \left[\sum_{k,l,m} C_{klm}|\Delta_2|^k|\Delta_5|^l|\Delta_7|^m\right]^2. \tag{3.40}$$

Die Koeffizienten C_{klm} sind dabei zum Teil sehr komplizierte Ausdrücke, auf deren Darstellung wir hier verzichten wollen.

Damit haben wir das Thermodynamische Potential der Quarks für den Fall unterschiedlicher chemischer Potentiale für alle Quarks berechnet. Dies ist der allgemeinste Fall, den wir im Laufe dieser Arbeit betrachten wollen:

$$
\begin{aligned}
\Omega(T,\mu) \quad = \quad & -T\sum_{-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\Big[\ \ln\ \sum_{k,l,m} C_{klm}|\Delta_2|^k|\Delta_5|^l|\Delta_7|^m \\
& + \ln\ \left[x^+_{ug}x^-_{dr} - 2|\Delta_2|^2 y_{(ug),(dr)} + |\Delta_2|^4\right] + \ \ln\ \left[x^+_{dr}x^-_{ug} - 2|\Delta_2|^2 y_{(dr),(ug)} + |\Delta_2|^4\right] \\
& + \ln\ \left[x^+_{ub}x^-_{sr} - 2|\Delta_5|^2 y_{(ub),(sr)} + |\Delta_5|^4\right] + \ \ln\ \left[x^+_{sr}x^-_{ub} - 2|\Delta_5|^2 y_{(sr),(ub)} + |\Delta_5|^4\right] \\
& + \ln\ \left[x^+_{db}x^-_{sg} - 2|\Delta_7|^2 y_{(db),(sg)} + |\Delta_7|^4\right] + \ \ln\ \left[x^+_{sg}x^-_{db} - 2|\Delta_2|^2 y_{(sg),(db)} + |\Delta_7|^4\right]\Big] \\
& + \mathcal{V}. \qquad (3.41)
\end{aligned}
$$

3.2.2 Gap-Gleichungen

In dieser Form hängt der Wert des Thermodynamischen Potentials noch vom Wert der Kondensate ab. In der Thermodynamik lassen sich jedoch alle relevanten physikalischen Größen direkt aus dem entsprechenden Thermodynamischen Potential bestimmen.
Im thermodynamischen Gleichgewicht nimmt das Potential Ω immer ein Minimum an. Somit können die Kondensate bestimmt werden, indem man das Thermodynamische Potential bezüglich der Kondensate minimiert

$$
\Omega(\{\phi_f,\Delta_i\}) = \text{minimal} \rightarrow \{\phi_f\,\Delta_i\}. \qquad (3.42)
$$

Die notwendige Bedingung dafür ist:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Omega}{\partial\phi_f} \quad &= \quad 0 \qquad (3.43) \\
\frac{\partial\Omega}{\partial\Delta_i} = \frac{\partial\Omega}{\partial\Delta_i^*} \quad &= \quad 0. \qquad (3.44)
\end{aligned}
$$

Auf diese Weise erhält man für die Quark-Antiquark-Kondensate:

$$
\phi_i = -T\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial M_i}\frac{1}{2}\ \text{Tr}\ \ln\ \left(\frac{1}{T}S^{-1}(i\omega_n,\vec{p})\right) + \frac{K}{G}\phi_j\phi_k. \qquad (3.45)
$$

Die Berechnung der Ableitung führt zu Ausdrücken, die sich zwar im Prinzip leicht berechnen lassen, bei denen es sich aber um sehr lange Ausdrücke handelt. Auf die Darstellung dieser Ausdrücke soll daher an dieser Stelle verzichtet werden.
Wichtig an diesen Gleichungen ist, dass sie nicht so einfach sind, wie sie auf den ersten Blick erscheinen. Die Quark-Antiquark-Kondensate sind nämlich über Gleichung (3.10) mit den Konstituentenmassen der Quarks M_i verknüpft. Die Gleichungen sind also nicht voneinander unabhängig und müssen daher selbstkonsistent gelöst werden.
Auf die gleiche Art kann man Gap-Gleichungen für die Diquarkkondensate ableiten

$$
\Delta_i = 4HT\Delta_i\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial|\Delta_i|^2}\frac{1}{2}\ \text{Tr}\ \ln\ \left(\frac{1}{T}S^{-1}(i\omega_n,\vec{p})\right). \qquad (3.46)
$$

Diese Gleichungen werden unabhängig voneinander durch $\Delta_i = 0$ gelöst. Für alle nichttrivialen Lösungen sind die Gleichungen jedoch untereinander und mit den Gleichungen für die Quark-Antiquark-Kondensate (3.45) gekoppelt. Die Gleichungen (3.45) und (3.46) müssen daher gleichzeitig gelöst werden.
Im allgemeinen kann man mehrere Lösungen finden. Diese entsprechen Minima, Maxima und Sattelpunkten des Thermodynamischen Potentials bezüglich der Kondensate ϕ_f und Δ_i. Interessant sind nur die Lösungen, die den Minima entsprechen. Die stabile Lösung entspricht dem globalen Minimum von Ω.

3.2.3 Thermodynamisches Potential der Leptonen

In dieser Arbeit soll stark wechselwirkende Materie bei hohen Dichten beschrieben werden, wie sie z.B. im Inneren von Neutronensternen zu finden ist. Diese Objekte bestehen jedoch nicht allein aus Quarks. Zur Gewährleistung der Ladungsneutralität sind hier vielmehr zusätzlich noch Leptonen notwendig. Im folgenden ziehen wir nur die beiden leichtesten Leptonen, die Elektronen und Myonen in Betracht. Das dritte Lepton, das τ, ist mit einer Masse von $m_\tau = 1777$ MeV zu schwer, um angeregt werden zu können.
Um ein System beschreiben zu können, das auch diese Teilchen enthält, müssen wir das zugehörige Thermodynamische Potential berechnen. Bei der Berechnung des Thermodynamischen Potentials geht man am einfachsten von der Besetzungszahldichte für Fermionen aus:

$$n_{\vec{p}} = 2\frac{1}{e^{\frac{1}{T}(\epsilon_{\vec{p}}-\mu)}+1}. \tag{3.47}$$

Der Faktor zwei in dieser Gleichung kommt daher, dass Elektronen und Myonen zwei Spinrichtungen aufweisen können. $\epsilon_{\vec{p}}$ ist die vom Impuls abhängige Energie des Fermions. Die Teilchenzahldichte erhält man durch Integration über den gesamten Impulsraum

$$n_{e/\mu} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} n_{\vec{p}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2}{e^{\frac{1}{T}(\epsilon_{\vec{p}}-\mu)}+1}. \tag{3.48}$$

Dies genügt bereits, um das Großkanonische Potential Ω zu berechnen, da es direkt mit der Teilchenzahldichte verknüpft ist

$$n_{e/\mu} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu_{e/\mu}}. \tag{3.49}$$

Den jeweiligen Beitrag für das Potential erhält man demnach aus einer partiellen Integration

$$\Omega = -\int n_e \partial\mu_e - \int n_\mu \partial\mu_\mu + \Omega_0. \tag{3.50}$$

Dabei ist Ω_0 eine Konstante, die auf Null gesetzt werden kann.

Der Grenzfall $T \to 0$

Verglichen mit den Energieskalen, auf denen sich die Physik abspielt, mit der wir uns in dieser Arbeit befassen, sind die Temperaturen von Neutronensternen sehr klein. Der Grenzfall $T \to 0$ wird in diesem Zusammenhang daher wichtig werden.
In diesem Fall wird die Besetzungszahldichte zu einer Θ Funktion

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{T}(\epsilon_{\vec{p}}-\mu)}+1} = \Theta(\mu - |\vec{p}|). \tag{3.51}$$

Wir wollen die Elektronen sowie die Myonen als ein Gas freier Teilchen beschreiben. Die Energien $\epsilon_{\vec{p}}$ sind dann durch die Energie-Impuls-Beziehung freier Teilchen gegeben:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\vec{p},e} &= \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_e^2} \approx |\vec{p}|, & (3.52)\\ \epsilon_{\vec{p},\mu} &= \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_\mu^2}. & (3.53) \end{aligned}$$

Die Masse des Elektrons von $m_e = 511keV$ wird im folgenden vernachlässigt. Mit dieser Vereinfachung erhält man für Dichten und Thermodynamische Potentiale der Elektronen und Myonen:

$$\begin{aligned} n_e &= \frac{1}{3\pi^2}\mu_e^3, & (3.54)\\ n_\mu &= \frac{1}{3\pi^2}(\mu_\mu^2 - m_\mu^2)^{\frac{3}{2}}, & (3.55)\\ \Omega_e &= -\frac{1}{12\pi^2}\mu_e^4, & (3.56)\\ \Omega_\mu &= \frac{1}{12\pi^2}[\mu_\mu(\mu_\mu^2 - m_\mu^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3m_\mu^2\mu_\mu}{2}(\mu_\mu^2 - m_\mu^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}m_\mu^4 \arccos(\frac{\mu_\mu}{m_\mu})]. & (3.57) \end{aligned}$$

Die Myonen können dabei nur dann angeregt werden, wenn das chemische Potential größer als ihre Ruhemasse ist.

Kapitel 4

Phasendiagramm für ein einheitliches quarkchemisches Potential

In seiner vollen Allgemeinheit ist die Berechnung eines Phasendiagramms für das System aus drei Quark Flavors mit unabhängigen chemischen Potentialen für alle Quark Flavors und Farben ein alles andere als triviales Problem. Berücksichtigt man noch die Temperatur T, so müsste man in diesem Fall ein Phasendiagramm in 9+1 Dimensionen ausrechnen und darstellen.
In diesem Kapitel interessiert uns insbesondere der Einfluss der 6-Punkt-'t Hooft-Wechselwirkung, da diese in der Arbeit, auf der diese Diplomarbeit aufbaut, keine Berücksichtigung gefunden hat [12]. Für eine solche Untersuchung ist es nicht notwendig, dass alle neun quarkchemischen Potentiale voneinander unabhängig und verschieden sind. Zusätzlich muss man feststellen, dass es nicht viele physikalische Probleme gibt, in denen alle neun μ_i voneinander unabhängig sind. Wir wollen uns in diesem Kapitel daher auf den Grenzfall eines einheitlichen quarkchemischen Potentials für alle Quarks beschränken.
Im Grenzfall eines einheitlichen quarkchemischen Potentials ergeben sich eine ganze Reihe von Vereinfachungen. Da die Isospinsymmetrie nur dadurch gebrochen wird, dass man u- und d-Quarks unterschiedliche chemische Potentiale zuordnet, ist sie in diesem Grenzfall vorhanden. Für die Kondensate gilt dann:

$$\phi_u = \phi_s, \tag{4.1}$$
$$\Delta_5 = \Delta_7. \tag{4.2}$$

Da sich die Konstituentenmassen der Quarks direkt aus Gleichung (3.10) ergeben, gilt damit auch $M_u = M_s$.
Für die Berechnung des Thermodynamsichen Potentials (3.30) ist die Berechnung von $\ln\det S^{-1}(p)$ entscheidend. Für den Grenzfall eines einheitlichen quarkchemischen Potentials vereinfacht sich Gleichung (3.33), die wir hierfür im vorangegangenen Kapitel

abgeleitet haben, sehr stark

$$\begin{aligned} \det S^{-1} &= \det \mathcal{M}_{u,u} \cdot \det \mathcal{M}_{u,s} \cdot \det \mathcal{M}_{u,u} \cdot \det \mathcal{M}_{u,s} \\ &\cdot \det \mathcal{M}_{s,u} \cdot \det \mathcal{M}_{s,u} \cdot \det \mathcal{M}_{uus}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Diese Determinanten gilt es nun zu berechnen. Die 't Hooft-Wechselwirkung hat auf diesen Anteil des Thermodynamischen Potentials keinen Einfluss. Die folgende Rechnung gilt für eine Lagrangedichte mit und ohne diesen Wechselwirkungsanteil. Zunächst wollen wir uns dabei um die Berechnung der einfacheren 2×2 Matrizen $\mathcal{M}_{a,c}$ kümmern. Die Form lässt sich dabei wiederum aus der allgemeinen Form des letzten Kapitels, Gleichung (3.34) ableiten:

$$\mathcal{M}_{a,c} = \begin{pmatrix} \not{p}^{+} - M_a & \Delta\gamma_5 \\ -\Delta^*\gamma_5 & \not{p}^{-} - M_c \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Dabei ist nun $\not{p}^{\pm} = \not{p} \pm \mu\gamma^0$. Auf die explizite Berechnung der Determinante dieser Matrix soll hier verzichtet werden, da man aus der entsprechenden Rechnung keinerlei neue Erkenntnisse gewinnt. Wir geben daher direkt das Ergebnis an:

$$\frac{1}{2} \ln \det \mathcal{M}_{a,c} = \left[x_a^+ x_c^- - 2|\Delta_{ac}|^2 y_{ac} + |\Delta_{ac}|^4\right]. \tag{4.5}$$

Welche Diquarkgaps Δ_i relevant sind, hängt wieder davon ab, welche Quarks in der entsprechenden Matrix $\mathcal{M}_{a,b}$ gepaart werden

$$\Delta_{ab} = \begin{cases} \Delta_2 \text{ für } a, b \in u, u \\ \Delta_5 \text{ für } a, b \in u, s. \end{cases} \tag{4.6}$$

Dabei wurden die folgenden Abkürzungen eingeführt:

$$x_{ab}^{\pm} = (i\omega_n \pm \mu)^2 - \vec{p}^2 - M_a M_b, \tag{4.7}$$

$$y_{ac} = -\omega_n^2 - \mu^2 - \vec{p}^2 - M_a M_c. \tag{4.8}$$

Die Struktur der Matrix $\mathcal{M}_{uus}$ im Flavor-Farb-Raum vereinfacht sich in diesem Fall zu:

$$\mathcal{M}_{uus} = \begin{pmatrix} \not{p}^{+} - M_u & 0 & 0 & 0 & -\Delta_2\gamma_5 & -\Delta_5\gamma_5 \\ 0 & \not{p}^{+} - M_u & 0 & -\Delta_2\gamma 5 & 0 & -\Delta_5\gamma_5 \\ 0 & 0 & \not{p}^{+} - M_s & -\Delta_5\gamma_5 & -\Delta_5\gamma_5 & 0 \\ 0 & \Delta_2^* & \Delta_5^*\gamma 5 & \not{p}^{+} - M_u & 0 & 0 \\ \Delta_2^*\gamma_5 & 0 & \Delta_5^*\gamma_5 & 0 & \not{p}^{+} - M_u & 0 \\ \Delta_5^*\gamma_5 & \Delta_5^*\gamma_5 & 0 & 0 & 0 & \not{p}^{+} - M_s \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Auch im Falle der 6×6 Matrix verzichten wir auf die Berechnung und geben direkt das Ergebnis der langen Rechnung an

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \det \mathcal{M}_{uus} &= \ln\left[x_u^+ x_u^- - 2|\Delta_2|^2 y_{uu} + |\Delta_2|^4\right] \\ &+ \ln\left[x_u^+ x_u^- x_s^+ x_s^- - 2|\Delta_2|^2 x_s^+ x_s^- y_{uu} - 4|\Delta_5|^2 (x_u^+ x_s^- + x_s^+ x_u^-) y_{us}\right. \\ &\quad + |\Delta_2|^4 x_s^+ x_s^- + 4|\Delta_2|^2 |\Delta_5|^2 (x_s^+ x_{us}^- + x_{us}^- x_s^-) \\ &\quad + 4|\Delta_5|^4 (x_u^+ x_s^- + x_s^+ x_u^- + 4y_{us}^2) \\ &\quad \left. - 8|\Delta_2|^2 |\Delta_5|^4 y_{ss} - 32|\Delta_5|^6 y_{us} + 16|\Delta_5|^8\right]. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Insgesamt erhält man dann für den gesuchten Ausdruck [12]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\ \mathrm{Tr}\ \ln S^{-1}(i\omega_n,\vec{p}) \\
&\quad = \ 3\ \ln\Big(\frac{1}{T^4}[x_u^+x_u^- - 2|\Delta_2|^2 y_{uu} + |\Delta_2|^4]\Big) \\
&\quad + \ 2\ \ln\Big(\frac{1}{T^4}[x_u^+x_s^- - 2|\Delta_5|^2 y_{us} + |\Delta_5|^4]\Big) + 2\ \ln\Big(\frac{1}{T^4}[x_s^+x_u^- - 2|\Delta_5|^2 y_{us} + |\Delta_5|^4]\Big) \\
&\quad + \ \ln\Big(\frac{1}{T^8}[x_u^+x_u^-x_s^+x_s^- - 2|\Delta_2|^2 x_s^+x_s^- y_{uu} - 4|\Delta_5|^2(x_u^+x_s^- + x_s^+x_u^-)y_{us} \\
&\qquad + |\Delta_2|^4 x_s^+x_s^- + 4|\Delta_2|^2|\Delta_5|^2(x_s^+x_{us}^- + x_{us}^-x_s^-) \\
&\qquad + 4|\Delta_5|^4(x_u^+x_s^- + x_s^+x_u^- + 4y_{us}^2) \\
&\qquad - 8|\Delta_2|^2|\Delta_5|^4 y_{ss} - 32|\Delta_5|^6 y_{us} + 16|\Delta_5|^8\Big).
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Matsubara Summe

Das Thermodynamische Potential ist durch Gleichung (3.11) gegeben. Wir müssen von obigem Ausdruck also die Summe über alle Matsubara-Frequenzen bilden. Dies kann man jedoch nur für den ersten der Ausdrücke analytisch tun. Mit Hilfe einer Dispersionsrelation kann man den ersten Term umformen

$$x_u^+x_u^- - 2|\Delta_2|^2 y_{uu} + |\Delta_2|^4 = (\omega_n^2 + E_u^{-2})(\omega_n^2 + E_u^{+2}). \tag{4.12}$$

Dabei ist:

$$E_u^{\pm} = \sqrt{(\sqrt{\vec{p}^2 + M_u^2} \pm \mu)^2 + |\Delta_2|^2}. \tag{4.13}$$

Zur Ausführung der Matsubara-Summe benutzt man nun Gleichung (B.8) aus Anhang B

$$\sum_n \ \ln\frac{1}{T^2}(\omega_n^2 + Z^2) = \frac{2}{T}\Big[\frac{1}{2}|Z| + T\ \ln\ (1 + e^{-|Z|/T)}\Big]. \tag{4.14}$$

Die Ausführung der Matsubara Summe über die anderen Terme in (4.11) ist weitaus komplizierter. Kombiniert man den ersten mit dem zweiten Logarithmus, erhält man ein Polynom 4. Grades in ω_n^2. Auch das Argument des letzten Logarithmus ist ein solches Polynom 4. Grades. Die entsprechenden Dispersionsrelationen werden dann über ein Nullstellenproblem dieser Polynome definiert. Im Prinzip kann man die Dispersionsrelationen zwar auf diese Weise bestimmen, da für Polynome 4. Grades noch analytische Lösungen existieren und anschließend die Matsubara-Summe mit Hilfe von Gleichung (4.14) ausführen. Die entsprechenden Lösungsformeln für Polynome 4. Grades sind allerdings sehr unhandlich, so dass wir uns einer numerischen Methode bedienen, um die Matsubara-Summen auszurechnen.
Um eine Matsubara-Summe numerisch zu berechnen, muss man zunächst die divergenten Anteile der Summe loswerden. Dies erreichen wir mit einem Trick, der darin besteht,

zunächst einen Ausdruck zu addieren, von dem wir die Matsubara-Summe analytisch mit Gleichung (4.14) berechnen können. Anschließend subtrahieren wir den gleichen Ausdruck wieder numerisch.
Wir wollen dies am Beispiel des zweiten und des dritten Logarithmus in Gleichung (4.11) genauer erläutern

$$\begin{aligned}
\sum_n \Bigg(\ln & \Big(\frac{1}{T^4}[x_u^+ x_s^- - 2|\Delta_5|^2 y_{us} + |\Delta_5|^4]\Big) + \ln \Big(\frac{1}{T^4}[x_s^+ x_u^- - 2|\Delta_5|^2 y_{us} + |\Delta_5|^4]\Big)\Bigg) \\
= & \sum_n \Bigg(\ln \frac{1}{T^8}\Big(z_u z_s - 4|\Delta_5|^2 v y_{us} + 2|\Delta_5|^4 (v + 2y_{us}^2) - 4|\Delta_5|^6 y_{us} + |\Delta_5|^8\Big) \\
& + \ln (z_u z_s) - \ln (z_u z_s)\Bigg) \\
= & \sum_n \Big(\ln \frac{z_u z_s - 4|\Delta_5|^2 v y_{us} + 2|\Delta_5|^4 (v + 2y_{us}^2) - 4|\Delta_5|^6 y_{us} + |\Delta_5|^8}{z_u z_s}\Big) \\
& + \sum_n \big(\ln \frac{1}{T^4} x_u^+ x_u^-\big) + \sum_n \big(\ln \frac{1}{T^4} x_s^+ x_s^-\big).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Dabei haben wir von weiteren Abkürzungen Gebrauch gemacht

$$z_u = x_u^+ x_u^-, \tag{4.16}$$

$$v = \frac{1}{2}(x_u^+ x_s^- + x_s^+ x_u^-). \tag{4.17}$$

Das Argument des ersten Logarithmus in Gleichung (4.15) geht für $n \to \infty$ gegen eins und läßt sich deshalb ohne Schwierigkeiten numerisch auswerten. Die Matsubara-Summe von $\frac{1}{T^4} x_f^+ x_f^-$ kann man analytisch bestimmen:

$$\sum_n \ln \frac{1}{T^4} x_f^+ x_f^- = \sum_n \Big(\ln \frac{1}{T^2}(\omega_n^2 + Z_f^+) + \sum_n \Big(\ln \frac{1}{T^2}(\omega_n^2 + Z_f^-)\Big). \tag{4.18}$$

In dieser Gleichung ist $Z_f^\pm = \sqrt{\vec{p}^2 + M_f^2} \pm \mu_f$. Benutzt man Gleichung (4.14) kann man die Matsubarasumme analytisch auswerten

$$\sum_n \ln \frac{1}{T^4} x_f^+ x_f^- = \frac{2}{T}\Big[\frac{1}{2}(Z_f^+ + Z_f^-) + T \ln (1 + e^{-Z_f^+/T}) + T \ln (1 + e^{-Z_f^-/T})\Big]. \tag{4.19}$$

4.1 Ohne 't Hooft Wechselwirkung

In diesem Kapitel sollen die Ergebnisse für eine Lagrangedichte ohne die 't Hooft Wechselwirkung vorgestellt werden, da alle folgenden Rechnungen und Überlegungen hierauf aufbauen. Um den Fall ohne 't Hooft Wechselwirkung zu erhalten, muss man einfach den

Wert für die entsprechende Kopplungskonstante K auf Null setzen.
Die Gleichung für die Konstituentenquarkmassen (3.10) vereinfacht sich dann zu:

$$M_f = m_f - 4G\phi_f. \tag{4.20}$$

Das Potential (3.11) wird in diesem Grenzfall zu:

$$\mathcal{V} = 2G[2\phi_u^2 + \phi_s^2] + \frac{1}{4H}[\Delta_2^2 + 2\Delta_5^2]. \tag{4.21}$$

Bei beiden Gleichungen ist dabei zu beachten, dass man im Grenzfall eines einheitlichen chemischen Potentials für alle drei Quarks $\phi_u = \phi_d$ und $\Delta_5 = \Delta_7$ setzen kann.
Konstituentenquarkmassen sowie Potential benötigen wir, um die Gap-Gleichungen aufzustellen, die wir für die Minimierung des Thermodynamischen Potentials selbstkonsistent lösen müssen.
Die Gap-Gleichungen ergeben sich immer aus den notwendigen Bedingungen (3.43) für ein Minimum des Thermodynamischen Potentials (3.11). In diesem Fall ergibt sich dann für die Quark-Antiquark-Kondensate:

$$\phi_u = \phi_d = -\frac{1}{2}T\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial M_u}\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln\left(\frac{1}{T}S^{-1}(i\omega_n,\vec{p})\right), \tag{4.22}$$

$$\phi_s = -T\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial M_s}\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln\left(\frac{1}{T}S^{-1}(i\omega_n,\vec{p})\right). \tag{4.23}$$

An den Gap-Gleichungen für die Quark-Quark-Kondensate, die die Farb-Supraleitung beschreiben, ändert sich durch das Weglassen der 't Hooft-Wechselwirkung nichts und man muss nur beachten, dass jetzt $\Delta_5 = \Delta_7$ ist:

$$\Delta_2 = 4HT\Delta_2\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial|\Delta_2|^2}\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln\left(\frac{1}{T}S^{-1}(i\omega_n,\vec{p})\right), \tag{4.24}$$

$$\Delta_5 = \Delta_7 = 2HT\Delta_2\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial|\Delta_5|^2}\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln\left(\frac{1}{T}S^{-1}(i\omega_n,\vec{p})\right). \tag{4.25}$$

Kopplungskonstanten

Im nächsten Schritt müssen wir die Werte für die Kopplungskonstanten und Parameter festlegen. Die Parameter unseres Modells sind: die Kopplungskonstanten G, K, H; die Strommassen der Quarks m_u und m_d sowie der Cut-Off Λ.
Als Ausgangspunkt benutzen wir den Parametersatz aus Referenz [17]. Die Autoren haben hier ein NJL-Modell ohne Quark-Quark-Wechselwirkung benutzt und die Parameter durch einen Fit an die Mesonenmassen, $m_\pi = 135.0$ MeV, $m_K = 497.7$ MeV, $m_{\eta'} = 957.8$ MeV, sowie die Pionzerfallskonstante $f_\pi = 92.4$ MeV bestimmt. Die Autoren kommen so zu den folgenden Parameterwerten: $m_u = 5.5$ MeV, $m_s = 140.7$ MeV, $\Lambda = 602.3$ MeV,

$G\Lambda^2 = 1.835$ und $K\Lambda^5 = 12.36$.
Ziel dieses Kapitels ist es, den Einfluss der 't Hooft Wechselwirkung zu untersuchen. Zu diesem Zweck variieren wir die Kopplungskonstante K und passen anschließend die Werte für G und m_s so an, dass wir im Vakuum immer die selben Konstituentenquarkmassen erhalten wie in Referenz [17]. Auf diese Weise haben wir vier Parametersätze erzeugt, K haben wir dabei von $K\Lambda^5 = 0$ bis $K\Lambda^5 = 20$ variiert.
Der Wert für die Kopplungskonstante H, durch den die Konstituentenquarkmassen im Vakuum nicht verändert werden, bleibt damit zunächst weiter unbestimmt. Wir legen den Wert für H nun über den Ein-Gluon-Austausch fest, mit dessen Hilfe wir die Form unserer Wechselwirkung bereits teilweise motiviert haben. Die Lagrangedichte des Ein-Gluon-Austauschs ist gegeben durch:

$$\mathcal{L} = -g \sum_{a=1}^{8} (\overline{\psi}\gamma^\mu \lambda_a \psi)^2. \tag{4.26}$$

Mit Hilfe einer Fierz Transformation kann man dann die Kopplungskonstanten g,G und H miteinander in Relation bringen:

$$G = \frac{8}{9}g, \qquad H = \frac{2}{3}g, \tag{4.27}$$

$$H = \frac{3}{4}G. \tag{4.28}$$

Den Wert für H erzeugen wir auf diese Weise aus dem Parametersatz, den wir für $K\Lambda^5 = 0$ auf die oben beschriebene Weise erhalten haben. Für alle anderen Parametersätze behalten wir diesen Wert bei, da wir uns ja im speziellen für den Einfluss der 't Hooft-Wechselwirkung interessieren. Wir erhalten auf diese Weise vier Parametersätze, die in Tabelle 4.1 aufgeführt sind.

Die soeben beschriebene Methode, die Parameter der Theorie festzulegen, ist nicht

$G\Lambda^2$	$H\Lambda^2$	$K\Lambda^5$	m_u [MeV]	m_s [MeV]	Λ
2.319	1.73925	0.0	5.5	112.0	602.3
2.123	1.73925	5.0	5.5	123.6	602.3
1.835	1.73925	12.36	5.5	140.7	602.3
1.536	1.73925	20.0	5.5	158.5	602.3

Tabelle 4.1: *Paramtersätze für verschiedene Werte von $K\Lambda^5$.*

zwingend. Es gibt andere Möglichkeiten die Parameter zu extrahieren. Die numerischen Ergebnisse, die wir im folgenden vorstellen wollen, werden dadurch jedoch nur geringfügig verändert [12].

Ergebnisse

Wir beginnen mit den Ergebnissen für die Konstituentenquarkmassen und die Diquarkgaps bei $T = 0$, die in Abb. 4.1 dargestellt sind. Man kann hier deutlich drei Phasen unterscheiden, die durch Phasenübergänge erster Ordnung voneinander getrennt sind.
Bis zu einem chemischen Potential von $\mu = 346.9$ MeV verschwinden die Diquarkgaps Δ_2, Δ_5 und die Konstituentenquarkmassen bleiben auf den Werten, die sie auch im Vakuum annehmen: $M_u = 367.65$ MeV, $M_s = 549.56$ MeV. Auch die Dichten von u- und s-Quarks verschwinden in dieser Phase. Dies muss auch so sein, da eine endliche Quarkdichte sofort zur Ausbildung einer Cooper-Instabilität und damit zur Bildung eines Diquark-Kondensates führen würde. In dieser Phase gibt es also keine Farbsupraleitung und die chirale Symmetrie ist weiterhin spontan gebrochen. Auch wenn es in unserem Modell keine Hadronen gibt, wollen wir diese Phase als die hadronische oder normale Phase bezeichnen.
Danach nimmt zuerst der Wert für Δ_2, der eine Paarung zwischen u- und d-Quarks beschreibt, einen nichtverschwindenden Wert an und das System wird zu einem Zwei-Flavor-Farb-Supraleiter. Die Phase wird deshalb als 2SC-Phase bezeichnet. Gleichzeitig springt die u-Quarkmasse auf einen Wert von ungefähr $M_u = 50$ MeV. Die s-Quarkmasse behält jedoch den Wert bei, den sie auch im Vakuum hatte. Auch die Dichte der s-Quarks ist weiterhin Null.
Bei einem chemische Potential von $\mu = 500.8$ MeV findet ein zweiter Phasenübergang erster Ordnung statt, bei dem jetzt auch das zweite Diquarkkondensat Δ_5 einen endlichen Wert annimmt. Gleichzeitig springt die Konstituentenmasse der s-Quarks zu einem Wert von ungefähr $M_s = 200$ MeV. Bei dieser dritten Phase sprechen wir von der Color-Flavor-Locked- oder CFL-Phase.
Würde unserem Modell eine exakte $SU(3)$ Symmetrie zu Grunde liegen, wäre die CFL-Phase die einzige Farb-Supraleitende Phase. In ihr wären dann alle Massen und Diquarkkondensate gleich groß. Bemerkenswert ist, dass die Werte für die Quarkkondensate Δ_2 und Δ_5 auch hier ähnliche Werte annehmen, obwohl das System weit davon entfernt ist, eine exakte $SU(3)$ Symmetrie zu besitzen.

Bei großen chemischen Potentialen kommen wir in den Bereich des Cut-Offs Λ, mit dem wir die divergenten Integrale regularisiert haben. Die Tatsache, dass wir in diesem Bereich somit an die Grenzen unseres Modells stoßen, ist der Grund für die Relation $\Delta_2 > \Delta_5$ und das Kleinerwerden der Gaps insgesamt in diesem Bereich.
Wir kommen nun zu den Eigenschaften des Systems für nicht verschwindende Temperaturen. Wiederholt man die Rechnung, die zu Fig. 4.1 geführt hat für endliche Temperaturen, so ist man in der Lage ein Phasendiagramm in Abhängigkeit von T und μ zu erzeugen. Dieses ist in Fig. 4.2 dargestellt. Bis zu Temperaturen von $T \approx 50$ MeV findet man in etwa das gleiche Verhalten der Diquarks und Konstituentenmassen wie bei $T = 0$. Bei sehr hohen Temperaturen erkennt man eine weitere Phase, die dadurch charakterisiert wird, dass hier nur das Quark-Antiquark-Kondensat ϕ_s einen deutlich von Null verschiedenen Wert annimmt. Mit größer werdendem chemischen Potential nimmt jedoch auch dieses Kondensat kontinuierlich ab, bis es bei großen chemischen Potentialen ganz verschwin-

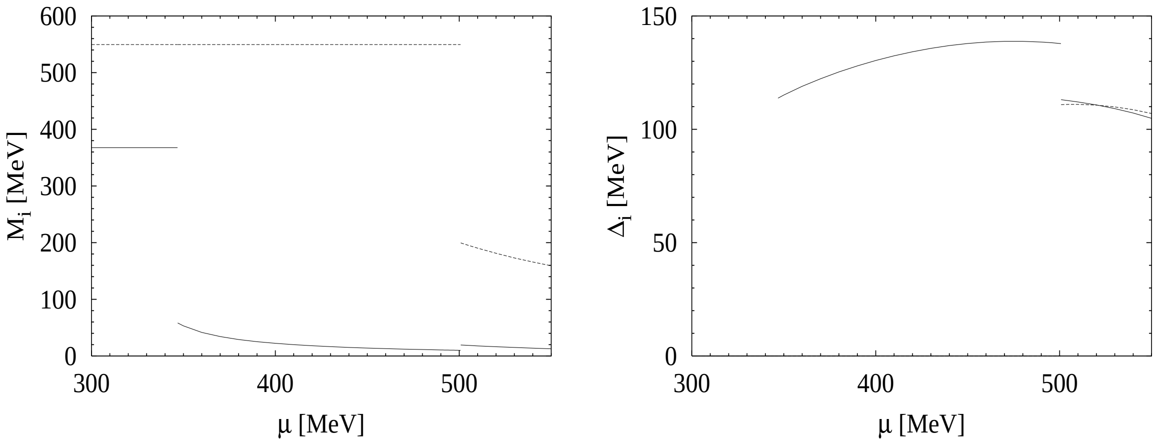

Abbildung 4.1: *Konstituentenmassen und Diquarkgaps bei $T = 0$ in Abhängigkeit vom chemischen Potential μ. Links: Konstituentenmassen M_u (durchgezogene Linie) und M_s(gepunktete Linie). Rechts: Diquarkgaps Δ_2(durchgezogene Linie) und Δ_5(gepunktete Linie).*

det. In diesem Bereich sind dann die Konstituentenquarkmassen mit den Strommassen identisch. Diese Phase wird aufgrund ihrer Symmetrien als Quark-Gluon-Plasma bezeichnen, wenngleich in unserem Modell keine Gluonen vorkommen. Die chirale Symmetrie ist hier restauriert, d. h. die Konstituentenmassen der Quarks sind gleich ihren Strommassen, Farbsupraleitung tritt nicht auf. Der Tripelpunkt zwischen hadronischer Phase, 2SC-Phase und dem QGP liegt bei $\mu = 333.8$ MeV, $T = 58.0$ MeV.
Wir wollen nun auf die Veränderungen eingehen, welche die Phasengrenzen selbst mit zunehmender Temperatur erfahren. Der Phasenübergang zwischen hadronischer Phase und 2SC-Phase wird bei großen Temperaturen natürlich zu einem Phasenübergang zwischen hadronischer Phase und QGP. Das bedeutet, dass sich am Phasenübergang nur der Wert für ϕ_u diskontinuierlich verändert, der Wert für Δ_2 bleibt bei Null. Erhöht man die Temperatur weiter, so wird dieser Phasenübergang zu einem „Smooth Crossover". Demnach endet die Phasenübergangslinie erster Ordnung in einem Endpunkt zweiter Ordnung. Diesen haben wir bestimmt, er liegt bei $\mu = 326.9$ MeV, $T = 66.0$ MeV.
Es ist anzumerken, dass man diesen Endpunkt auch mit Hilfe von Gitter-Rechnungen bestimmen kann. Durch die Gitter-Rechnungen kann unser Ergebnis jedoch nicht bestätigt werden. In Referenz [13] wird z. B. ein Endpunkt von $\mu = 242 \pm 12$ MeV, $T = 160 \pm 3.5$ MeV angegeben. Man sollte die Diskrepanz zu unserer Rechnung, im Rahmen des NJL-Modells jedoch nicht zu ernst nehmen. Das NJL-Modell enthält weder Hadronen noch Gluonen und ist deshalb eigentlich nicht geeignet, einen Phasenübergang zwischen hadronischer Phase und dem QGP zu beschreiben.
Als nächstes betrachten wir den Phasenübergang zwischen 2SC- und CFL-Phase. Diese Linie spaltet sich bei $\mu = 505.0$ MeV, $T = 55.0$ MeV auf. Die linke Linie beschreibt

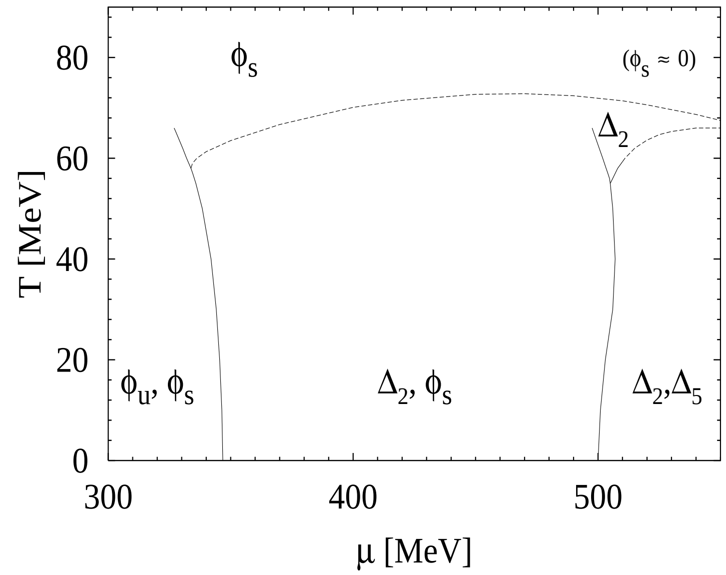

Abbildung 4.2: *Phasendiagramm für $K = 0$ in Abhängigkeit von T und μ. Durchgezogene Linien stehen dabei für Phasenübergänge erster Ordnung, gestrichelte Linien bezeichnen Phasenübergänge zweiter Ordnung.*

dabei nun nicht mehr einen Phasenübergang in die CFL-Phase, sondern in eine Phase in der nur noch das Diquarkkondensat Δ_2 einen nichtverschwindenden Wert hat. An dieser Phasengrenze springt somit nur ϕ_s auf einen sehr kleinen Wert. Kommt man zu höheren Temperaturen, so wird auch dieser Phasenübergang zu einem ,,Smooth Crossover". Damit endet die Linie also auch hier in einem Punkt zweiter Ordnung, dieser liegt bei $\mu = 497.6$ MeV, $T = 66.0$ MeV. Dieser im Prinzip neuen Phase mit Δ_2 als einzigem Kondensat wollen wir jedoch keinen neuen Namen geben und ordnen sie der 2SC-Phase zu.
Die rechte Linie beschreibt dann den Übergang zur CFL-Phase, ab hier nimmt dann das Δ_5-Diquark-Kondensat einen endlichen Wert an. Der Phasenübergang ist dabei zunächst erster Ordnung, geht dann aber ab $\mu = 510.0$ MeV, $T = 59.3$ MeV in einen Phasenübergang zweiter Ordnung über.
Als letztes haben wir nun noch die Linie zu betrachten, die einen Übergang von der 2SC-Phase zum QGP beschreibt. Dieser Phasenübergang zweiter Ordnung beschreibt ein Zusammenbrechen der Farbsupraleitung und kann mit Hilfe der BCS-Theorie erklärt werden. Diese sagt ein Zusammenbrechen der Supraleitung bei einer kritischen Temperatur T_c voraus:

$$T_c = 0.57\Delta_2(T = 0). \tag{4.29}$$

Diese Vorhersage ist in sehr guter Übereinstimmung mit unseren numerischen Resultaten. Am Beispiel von $\mu = 420$ MeV ist dieser Phasenübergang in Abb. 4.3 gezeigt.

Mit Hilfe von Gleichung (4.29) läßt sich auch erklären, warum der Phasenübergang von der CFL- zur 2SC-Phase ab $\mu = 510.0$ MeV, $T = 59.3$ MeV zu einem Übergang zweiter Ordnung wird. Es liegt einfach daran, dass das Δ_5-Kondensat bei $T = 0$ einen kleineren Wert als das Δ_2-Kondensat hat. Somit muss die Δ_5-Supraleitung bei einer Erhöhung der Temperatur zuerst zusammenbrechen.

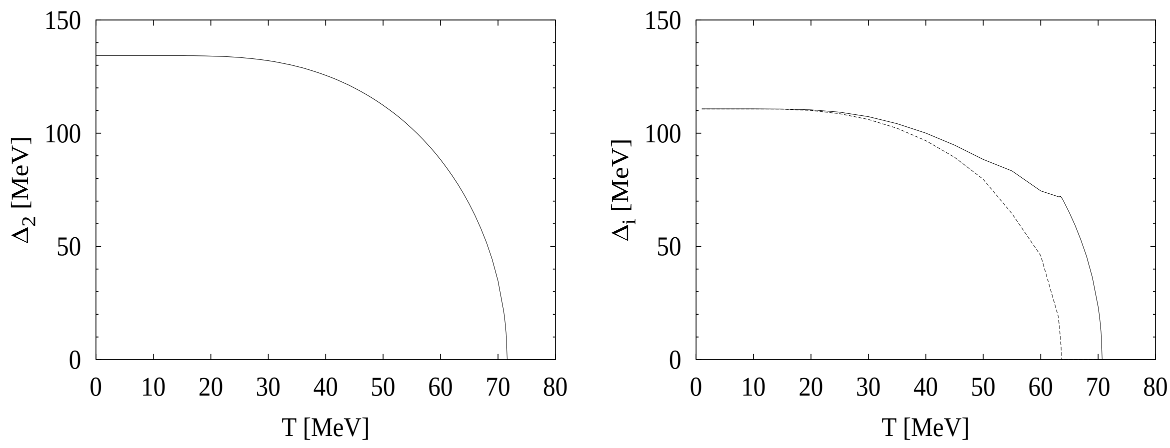

Abbildung 4.3: *Phasenübergänge zweiter Ordnung. Links: Phasenübergang von der 2SC-Phase zum QGP bei $\mu = 420$ MeV. Gezeigt ist hier der entscheidende Ordnungsparameter Δ_2 in Abhängigkeit von der Temperatur. Rechts: Diquarkgaps Δ_2 (durchgezogene Linie) und Δ_5 (gestrichelte Linie) bei $\mu = 520$ MeV in Abhängigkeit von der Temperatur. Man erkennt deutlich, dass beide Phasenübergänge von zweiter Ordnung sind.*

Die Phasenübergänge zweiter Ordnung von der CFL- zur 2SC-Phase und von dort weiter zum QGP sind in Abb. 4.3 für ein chemisches Potential von $\mu = 520$ MeV veranschaulicht.

4.2 Einfluß der 't Hooft-Wechselwirkung

In diesem Abschnitt werden wir nun eine 't Hooft-Wechselwirkung einführen und den Effekt untersuchen, der dadurch verursacht wird. Dazu berechnen wir das Phasendiagramm für verschiedene Werte der 't Hooft-Kopplungskonstanten K.
Den Wert für det S^{-1} im Grenzfall eines einheitlichen chemischen Potentials, den wir für die Berechnung des Thermodynamischen Potentials (3.30) benötigen, haben wir schon zu Beginn des Kapitels in Gleichung (4.11) ausgerechnet. Damit müssen wir uns noch Gedanken darüber machen, wie der entsprechenden Grenzfälle für das Potential $\mathcal{V}$, die Konstituentenmassen M_u und M_s aussehen und die Gap-Gleichungen aussehen, wenn eine 't Hooft Wechselwirkung vorhanden ist.

Dafür müssen wir bei den allgemeinen Gleichungen, die wir dafür in den Kapiteln 3.1 und 3.2.2 hergeleitet haben nur wieder $\phi_u = \phi_d$ und $\Delta_5 = \Delta_7$ setzen. Die Gleichungen für die Konstituentenquarkmassen (3.10) werden in dem hier betrachteten Grenzfall dann zu:

$$\begin{aligned} M_u &= M_d = m_u - 4G\phi_u + 2K\phi_u\phi_s, && (4.30)\\ M_s &= -4G\phi_s + 2K\phi_u^2. && (4.31) \end{aligned}$$

Das Potential, allgemein durch Gleichung (3.11) gegeben, verändert sich zu:

$$\mathcal{V} = -4K\phi_u^2\phi_s + 2G[2\phi_u^2 + \phi_s^2] + \frac{1}{4H}[\Delta_2^2 + 2\Delta_5^2]. \tag{4.32}$$

Diese Beziehungen benötigen wir wieder zur Berechnung der Gap-Gleichungen, die man aus den Bedingungen (3.43) für die Minimierung des Thermodynamischen Potentials (3.30) erhält.
Zuerst schauen wir uns wieder die Gleichungen an, die man für die Quark-Antiquark-Kondensate erhält

$$\begin{aligned} \phi_u &= -T\frac{2G - K\phi_s}{4G - 4K\phi_s}\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial M_u}\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln\left(\frac{1}{T}S^{-1}(i\omega_n,\vec{p})\right), && (4.33)\\ \phi_s &= -T\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial M_s}\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln\left(\frac{1}{T}S^{-1}(i\omega_n,\vec{p})\right) + \frac{K}{G}\phi_u^2. && (4.34) \end{aligned}$$

Die Gap-Gleichungen für die Diquarkkondensate bleiben durch das Einführen der 't Hooft-Wechselwirkung unverändert, man kann sie also aus dem vorangegangenen Kapitel übernehmen

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= 4HT\Delta_2\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial|\Delta_2|^2}\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln\left(\frac{1}{T}S^{-1}(i\omega_n,\vec{p})\right), && (4.35)\\ \Delta_5 &= 2HT\Delta_2\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial|\Delta_5|^2}\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln\left(\frac{1}{T}S^{-1}(i\omega_n,\vec{p})\right). && (4.36) \end{aligned}$$

Die Parameter für unser Modell haben wir bereits im letzten Abschnitt spezifiziert und in Tabelle 4.1 angegeben.

Ergebnisse

Wir werden unsere Diskussion wieder mit dem Verhalten der Konstituentenmassen und der Diquarkgaps bei $T = 0$ beginnen. Am deutlichsten erkennt man den Einfluß der 't Hooft-Wechselwirkung, wenn man die Ergebnisse für den Parametersatz mit dem größten K betrachtet, welche in Abb. 4.4 gezeigt werden.

Qualitativ ergibt sich also das gleiche Bild wie vor der Einführung der 't Hooft-

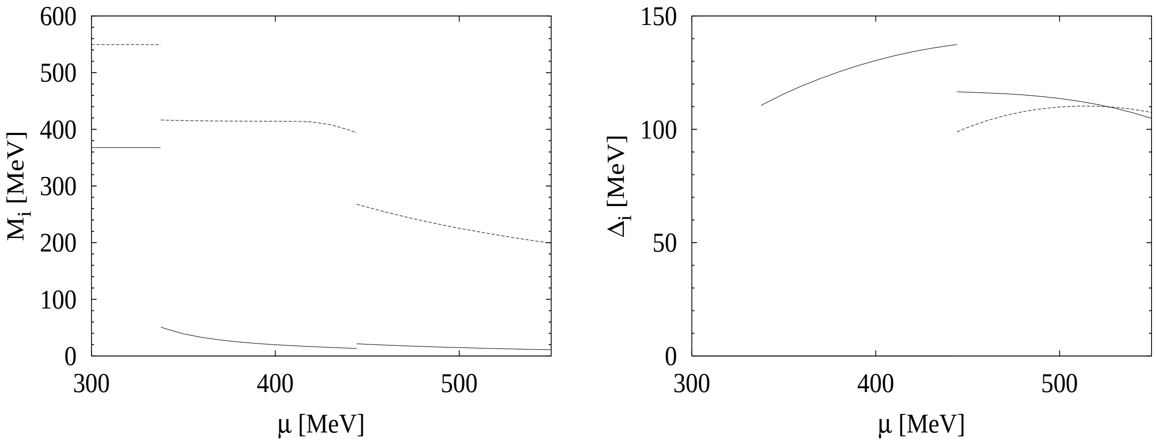

Abbildung 4.4: *Konstituentenmassen und Diquarkgaps bei $T = 0$ in Abhängigkeit vom chemischen Potential μ, für eine 't Hooft Kopplungsstärke von $K\Lambda^5 = 20$. Links: Konstituentenmassen M_u (durchgezogene Linie) und M_s(gepunktete Linie). Rechts: Diquarkgaps Δ_2(durchgezogene Linie) und Δ_5(gepunktete Linie).*

Wechselwirkung 4.1. So kann man wieder deutlich drei Phasen unterscheiden, die durch Phasenübergänge erster Ordnung voneinander getrennt werden.
Bei genauerer Betrachtung sind jedoch deutliche Unterschiede zu erkennen. Der Phasenübergang von der hadronischen zur 2SC-Phase findet jetzt bei $\mu = 337.7$ MeV, der von der 2SC- zur CFL-Phase bei $\mu = 444.2$ MeV, statt. Vor allem der Phasenübergang von der 2SC zur CFL-Phase verschiebt sich also zu deutlich geringeren chemischen Potentialen.
Zu erkennen ist auch, dass die s-Quarkmasse in der 2SC-Phase nicht mehr auf ihrem Vakuumswert verweilt, sondern, vor allem am Ende der Phase, deutlich abnimmt. Dieser Effekt hat seine Ursache darin, dass jetzt die Konstituentenmassen eines Quarkflavors nach Gleichung (3.10), auch von dem Quark-Antiquark-Kondensat des anderen Quarkflavors abhängen. Dies ist auch der Grund dafür, weshalb sich die CFL Phasengrenze zu kleineren chemischen Potentialen verschiebt. Die Eigenschaft der 't Hooft-Wechselwirkung die Flavors zu mischen kommt hier zum Tragen.
Bei den Diquarkgaps erkennt man in Abb. 4.4, dass der Unterschied in den Werten für Δ_2 und Δ_5 jetzt wesentlich größer ist als für $K = 0$ in Abb. 4.1. An dieser Stelle ist $\Delta_2 > \Delta_5$ deutlich zu erkennen.
Wir kommen nun wieder zu den Resultaten für $T \neq 0$. Dazu betrachten wir die Phasendiagramme für alle in Tabelle 4.1 angegebenen Parametersätze in Fig. 4.5. Der größte Unterschied zum Phasendiagramm für $K = 0$ in Abb. 4.2 ist, dass sich die Phasengrenze zwischen 2SC- und CFL-Phase jetzt nicht mehr aufspaltet. Bei größer werdendem K wird diese Phasengrenze zu deutlich kleineren chemischen Potentialen verschoben. Der Übergang von der 2SC- zur CFL-Phase findet dann statt, bevor der

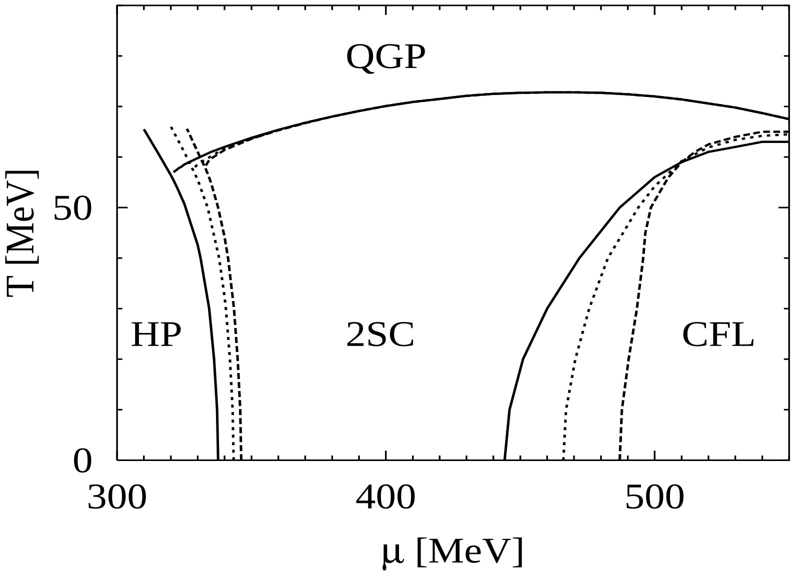

Abbildung 4.5: *Phasendiagramme für verschieden Werte von* $K\Lambda^5$*;* $K\Lambda^5 = 5$*(gestrichelte Linie),* $K\Lambda^5 = 12.36$*(gepunktete Linie),* $K\Lambda^5 = 20$*(durchgezogene Linie).*

chirale Phasenübergang des s-Quarks stattfinden kann. Es kommt daher zu keiner Aufspaltung der Phasengrenze mehr. Auch für $K \neq 0$ ist der Phasenübergang zunächst von erster Ordnung, wird dann aber ab μ_{c_2}, T_{c_2} zu einem Übergang von zweiter Ordnung. Die kritischen Punkte sind in Tab.4.2 aufgeführt.
Auch die Phasengrenze zwischen hadronischer und 2SC-Phase verschiebt sich zu niedrigeren μ's, der Effekt ist jedoch nicht so groß wie bei der 2SC-CFL Grenze. Wieder endet auch hier der Phasenübergang erster Ordnung bei μ_{c_1}, T_{c_1} in einem Endpunkt zweiter Ordnung, den wir für die einzelnen Werte von K jeweils bestimmt und ebenfalls in Tabelle 4.2 eingetragen haben.
Das Zusammenbrechen der Farb-Supraleitung bei einer kritischen Temperatur T_c und der Phasenübergang zweiter Ordnung in eine nicht supraleitende Phase lassen sich auch hier wieder sehr gut mit Hilfe der BCS Relation $T_C = 0.57\Delta$ beschreiben.
Die Temperaturabhängigkeit der Gaps ist beispielhaft für $K = 20$ und ein chemischen Potential von $\mu = 420$ MeV und $\mu = 520$ MeV in Abb. 4.6 gezeigt. Man erkennt deutlich, dass es sich jeweils um Phasenübergänge zweiter Ordnung handelt. Die Graphen sind dabei denen, die wir für ein NJL-Modell ohne 't Hooft-Wechselwirkung gezeigt haben, sehr ähnlich. Der einzige Unterschied besteht darin, dass der Abstand zwischen CFL-Phase, in der beide Diquarkkondensate ungleich Null sind, und dem QGP, in dem beide Diquarkkondensate verschwinden, größer geworden ist.

$K\Lambda^5$	μ_{c_1}, T_{c_1} [MeV]	μ_{c_2}, T_{c_2} [MeV]
0	326.9, 66.0	497.6 , 66.0
5	325.0, 66.7	509.0, 58.6
12.36	317.0, 69.1	503.0, 56.0
20	310.0, 65.5	494.0, 53.4

Tabelle 4.2: *Kritische Punkte für die verschiedenen Parametersätze. Bei* μ_{c_1}, T_{c_1} *befindet sich der Punkt an dem der Phasenübergang zwischen hadronischer Phase und dem QGP endet. Bei* μ_{c_2}, T_{c_2} *geht der Phasenübergang zwischen CFL- und 2SC-Phasen von erster zu zweiter Ordnung über.*

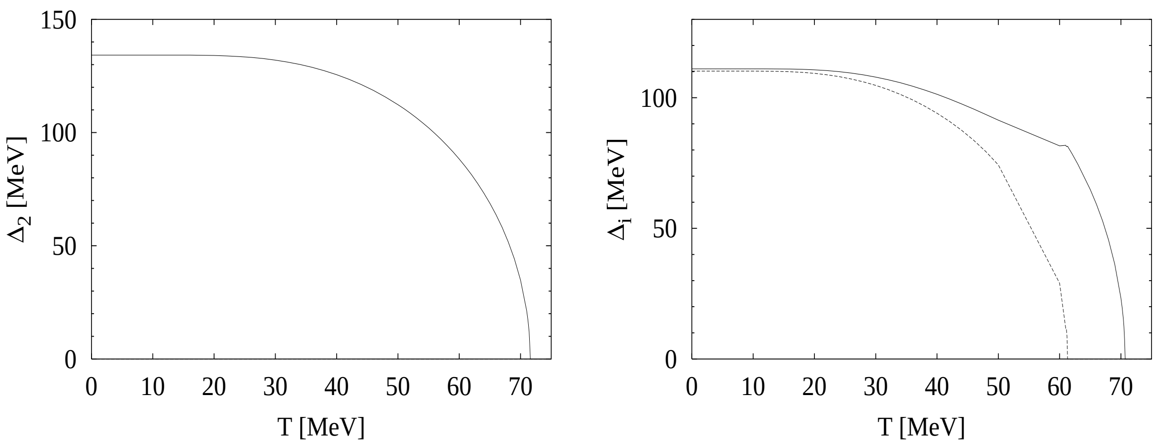

Abbildung 4.6: *Phasenübergänge zweiter Ordnung. Links: Phasenübergang von der 2SC-Phase zum QGP bei* $\mu = 420$ *MeV. Gezeigt ist hier der entscheidende Ordnungsparameter* Δ_2 *in Abhängigkeit von der Temperatur. Rechts: Diquarkgaps* Δ_2 *(durchgezogene Linie) und* Δ_5 *(gestrichelte Linie) bei* $\mu = 520$ *MeV in Abhängigkeit von der Temperatur.*

Kapitel 5

Neutrale Materie

Im vorangegangenen Kapitel haben wir die Existenz von farb-supraleitender Materie im Rahmen eines Drei-Flavor-NJL-Modells nachgewiesen. Wir haben dabei ein Phasendiagramm in Abhängigkeit von der Temperatur T und dem chemischen Potential μ ausgerechnet. Wie wir sehen werden, sind die Dichten, die man dieser Materie zuordnen kann von einer Größenordnung, wie sie für Neutronensterne relevant sein können.
Ein makroskopisches Objekt wie ein Neutronenstern muss jedoch elektrisch neutral und farbladungsneutral sein. Es ist daher sehr wichtig Bedingungen einzuführen, die die Neutralität der Materie gewährleisten. Es ist zu untersuchen, welche Konsequenzen diese Bedingungen nach sich ziehen.
Wenn wir uns speziell mit der Relevanz der Farbsupraleitung für Neutronensterne beschäftigen wollen, ergibt sich allerdings auch eine wesentliche Vereinfachung. Sind die Neutronensterne älter als einige Minuten, so kann man davon ausgehen, dass sie sich auf Temperaturen abgekühlt haben, die verglichen mit den hier relevanten Anregungen, vernachlässigbar klein sind. In den folgenden Rechnungen werden wir daher immer $T = 0$ setzen.
Diese Überlegung ist auch der Grund dafür, weshalb wir den $T = 0$-Fall in den letzten Kapiteln immer mit besonderer Sorgfalt behandelt haben.

5.1 Dichten und Neutralitätsbedingung

Die Neutralitätsbedingungen für die elektrische Neutralität und die Farbneutralität formuliert man mit Hilfe von Teilchendichten. Wir betrachten dabei zunächst ein System aus drei Quark-Flavors und Elektronen. Die Dichte eines Quarks des Flavors f und der Farbe c bezeichnen wir mit $n_{f,c}$, die Elektronendichte mit n_e. Man kann dann Farb- und Flavorladungen einführen

$$n_f = \sum_c n_{f,c}, \tag{5.1}$$

$$n_c = \sum_f n_{f,c}. \tag{5.2}$$

Die Neutralitätsbedingungen lassen sich relativ einfach formulieren. Damit Ladungsneutralität gewährleistet ist, muss die dazugehörige Ladungsdichte verschwinden.
Für die elektrischen bzw. Farbladungsdichten muss man zwei Bedingungen erfüllen

$$\frac{2}{3}n_u - \frac{1}{3}n_d - \frac{1}{3}n_s - n_e = 0, \tag{5.3}$$

für die elektrische Neutralität und

$$n_r = n_g = n_b \tag{5.4}$$

für die Farbneutralität.
Die Dichten selbst kann man mit Hilfe des Thermodynamischen Potentials Ω bestimmen. Die entsprechende Bedingung dafür haben wir bereits in Kapitel 3 mit Gleichung (3.24) bereitgestellt

$$n_i = -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu_i}. \tag{5.5}$$

Damit ist aber klar, dass wir zur Berechnung der Dichten das Thermodynamische Potential in Abhängigkeit von allen quarkchemischen Potentialen $\mu_{f,c}$ und dem chemischen Potential der Elektronen μ_e benötigen. Der Grenzfall eines einheitlichen chemischen Potentials für alle Quarks , wie wir ihn im vorangegangenen Kapitel behandelt haben, reicht damit nicht mehr aus, weil sich hieraus nur die Gesamtteilchendichte n extrahieren läßt. Wir müssen jetzt vielmehr ein Thermodynamisches Potential benutzen, in dem alle quarkchemischen Potentiale zunächst unterschiedlich sind, wie wir es in Kapitel 3.2.1 abgeleitet haben. Nachdem wir die Ableitungen zur Bestimmung der Dichten gebildet haben, können wir dann wieder beliebige Grenzfälle betrachten.

5.2 Neutrale CFL-Phase

In diesem Abschnitt werden wir uns speziell mit den Folgen der Neutralitätsbedingungen für die CFL-Phase beschäftigen. Insbesondere werden wir dabei eine frühere Behauptung [18] untersuchen, nach der in der CFL-Phase grundsätzlich die Dichten aller Quark-Flavors und Farben gleich sind, unabhängig davon welche chemischen Potentiale man vorgibt. Wäre dies der Fall, so sind die Neutralitätsbedingungen (5.3) und (5.4) automatisch erfüllt, sobald die Elektronendichte verschwindet, $n_e = 0$. Diese Behauptung kommt jedoch von allgemeinen Überlegungen, die auf der Basis eines 2-Flavor-Systems gemacht

wurden. Anhand eines konkreten Modells wurde diese Behauptung vor dieser Arbeit noch nicht überprüft.
Zur Überprüfung dieser Behauptung verwenden wir zunächst das einfache Modell aus Kapitel 4.1 ohne 't Hooft-Wechselwirkung und mit einem einheitlichen chemischen μ Potential für alle Quarks. Hier fanden wir bei $T = 0$ einen Phasenübergang zur CFL-Phase bei einem chemischen Potential von $\mu = 500.8$ MeV, wie man in Abb. 4.1 ablesen kann.
Direkt am Phasenübergang, erhalten wir Quarkflavordichten von $n_u = n_d = 1.606/\mathrm{fm}^3$ und $n_s = 1.527/\mathrm{fm}^3$. Die Behauptung aus Referenz [18] ist damit offensichtlich so nicht richtig, die CFL-Phase ist also nicht automatisch neutral. Dies bestätigt sich auch für höhere μ's, wie man in Abb. 5.2 deutlich erkennen kann, in der die Flavordichten in Abhängigkeit von μ aufgetragen sind.
Betrachtet man sich die Dichten der einzelnen Quarkspezies genauer, so erkennt man,

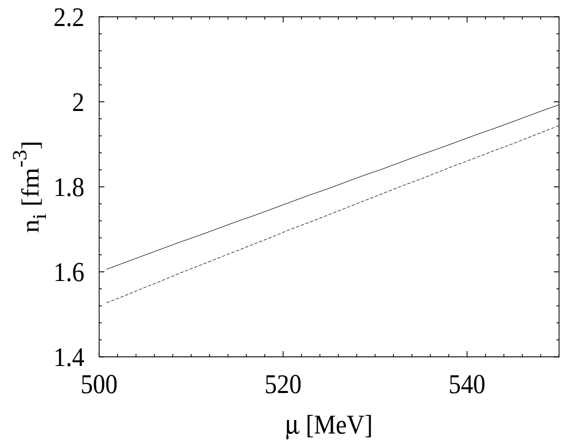

Abbildung 5.1: *Quarkdichten. Dichten der leichten Quarks $n_u = n_d$ (durchgezogene Linie) und der s-Quarks n_s (gestrichelte Linie), für $T = 0$ und in Abhängigkeit von einem einheitlichen Quarkchemischen Potential μ. Die 't Hooft-Wechselwirkung ist abgeschaltet ($K = 0$).*

dass die Argumentation aus [18] nur teilweise nicht korrekt ist. Man erkennt, dass die Dichten der beteiligten Quarks teilweise doch gleich sind

$$n_{u,g} = n_{d,r}, \qquad n_{u,b} = n_{s,r}, \qquad n_{d,b} = n_{s,g}. \tag{5.6}$$

Um dies zu verstehen rufen wir uns noch einmal in Erinnerung, wie wir das Thermodynamische Potential in Kapitel 3.2.1 berechnet haben:

$$\Omega(T,\mu) = -T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \ln \left(\frac{1}{T} S^{-1}(i\omega_n, \vec{p}) \right) + \mathcal{V}. \tag{5.7}$$

Die Determinante des inversen Propagators, die man zur Berechnung von Ω benötigt, konnte man dann in die Determinanten kleinerer Matrizen zerlegen, siehe Gleichung (3.33), von denen sechs 2×2 Matrizen sind und eine eine 6×6 Matrix ist. Die 2×2 Matrizen haben wir mit $\mathcal{M}_{(a,b),(c,d)}$, die 6×6 Matrix mit $\mathcal{M}_{uds}$ bezeichnet.
Betrachtet man sich nun genauer, welche Quarks in diesen Matrizen jeweils gepaart werden, erkennt man: Es sind immer genau die Dichten der Quarks gleich, die in einer der sechs 2×2 Matrizen gepaart werden.
Da die beiden 2×2 Matrizen, in denen die blauen Up und Down Quarks jeweils gepaart werden, aufgrund der Isospinsymmetrie identisch sind, gilt zusätzlich noch:

$$n_{u,b} = n_{d,b} \qquad\qquad n_{u,r} = n_{d,g}. \tag{5.8}$$

Auch dies bestätigt sich durch unsere numerische Rechnung. Die Erklärung, was bei der Argumentation aus Referenz [18] nicht korrekt ist, stammt von Steiner, Reddy und Prakash [19], die eine ähnliche Analyse zeitgleich mit der unseren durchgeführt haben. Nicht richtig an den Überlegungen, die zur scheinbaren Neutralität der CFL-Phase geführt haben, ist die Verallgemeinerung von zwei auf drei Flavors. Ein Zwei-Flavor-System wird nämlich gerade durch eine der 2×2 Blockmatrizen repräsentiert. Hierfür ist die Argumentation auch vollkommen richtig.
Es wurde jedoch nicht bedacht, dass man insgesamt sechs dieser Matrizen bekommt, die

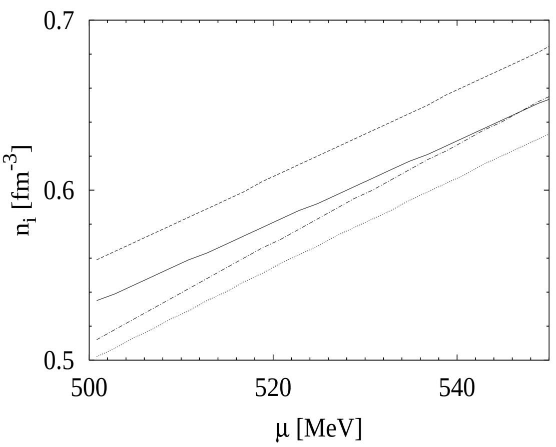

Abbildung 5.2: *Dichten der verschiedenen Quarkspezies für $T = K = 0$ in Abhängigkeit eines einheitlichen chemischen Potentials μ, $n_{u,r} = n_{d,g}$ (durchgezogene Linie), $n_{u,g} = n_{d,r}$ (gestrichelte Linie), $n_{u,b} = n_{d,b} = n_{s,g} = n_{s,r}$ (strichgepunktete Linie) und $n_{s,b}$ (gepunktete Linie).*

jeweils unterschiedliche Dichtebeiträge produzieren. Zusätzlich hat man bei einem Drei-Flavor-System auch noch den Beitrag der 6×6 Matrix. Diese liefert allein schon von-

einander verschiedene Dichtebeiträge für die einzelnen Flavors. Eine solche 6×6 Matrix gibt es bei einem Zwei-Flavor-System nicht. Die Dichten der verschiedenen Quarkspezies, getrennt nach Flavor und Farbe, sind für $T = 0$ und $K = 0$ in Abb. 5.2 gezeigt.
Die CFL-Phase ist zwar nicht automatisch neutral, allerdings ergibt sich durch die teilweise Gleichheit der Quarkdichten auch eine wesentliche Vereinfachung. Mit Hilfe von Gleichung (5.6) kann man nämlich die Farb und Flavordichten (5.1) miteinander in Verbindung bringen

$$n_u = n_r, \qquad n_d = n_g, \qquad n_s = n_b. \tag{5.9}$$

Betrachtet man sich die Bedingungen für die elektrische Neutralität und die Farbneutralität (5.3) und (5.4), so erkennt man, dass eine farbneutrale Phase automatisch auch elektrisch neutral ist, sofern die Elektronendichte verschwindet.
Damit kennen wir den Weg, eine neutrale CFL-Phase zu konstruieren. Die chemischen Potentiale der einzelnen Quarks müssen so angepasst werden, dass die CFL-Phase farbneutral ist. Ist die Elektronendichte dann auch noch Null, was man durch Nullsetzen des chemischen Potentials der Elektronen erreicht, so ist die CFL-Phase automatisch auch elektrisch neutral

$$n_e = 0, \qquad \mu_e = 0. \tag{5.10}$$

Im nächsten Abschnitt werden wir unter anderem eine solche neutrale CFL-Phase konstruieren. Dabei werden wir uns speziell mit der für Neutronensterne relevanten Materie im β-Gleichgewicht auseinandersetzen.

Kapitel 6

Materie im β-Gleichgewicht

In den vergangenen Kapiteln haben wir unter anderem die Dichten ausgerechnet, bei denen in unserem Modell farbsupraleitende Phasen auftreten. Der 2SC-Phase konnten wir hierbei eine Gesamtquarkdichte von etwa $n = 1.2/\mathrm{fm}^3$ bis $n = 2.7/\mathrm{fm}^3$, der CFL-Phase eine Gesamtquarkdichte von etwa $n = 3.7/\mathrm{fm}^3$ bis $n = 5.5/\mathrm{fm}^3$ zuordnen.
Wir vergleichen dies nun mit gewöhnlicher Kernmaterie. Diese hat eine Baryonendichte von etwa $\rho_0 = 0.16/\mathrm{fm}^3$, was einer Quarkdichte von etwa $n_0 = 0.48/\mathrm{fm}^{-3}$ entspricht. Es bedarf also schon extremer Umstände, um Bedingungen vorliegen zu haben, in denen es zu Farbsupraleitung kommen kann.
Solche extremen Bedingungen könnte man im Inneren von Neutronensternen [20, 21] und unter sehr optimistischen Annahmen bei Schwerionenstößen [22] vorfinden.
Bei Neutronensternen handelt es sich um Sterne mit einer Masse von etwa 1.4 Sonnenmassen, die aber nur einen Radius von ungefähr $R = (10 - 12)$ km besitzen. Die Materie in einem Neutronenstern ist also sehr stark komprimiert. Aufgrund der starken Gravitationskraft nimmt die Dichte eines solchen Sterns zu, je weiter man ins Innere vordringt. Es werden schließlich Dichten erreicht, wie sie für das Auftreten der Farbsupraleitung notwendig sind. Die Temperaturen innerhalb eines Neutronensterns von einem MeV oder weniger sind, verglichen mit den chemischen Potentialen und Anregungsenergien der Teilchen und Quasiteilchen, sehr niedrig [23]. Die Näherung, unsere Rechnungen bei $T = 0$ durchzuführen, erscheint deshalb gerechtfertigt.
Die Materie eines Neutronensterns befindet sich im β-Gleichgewicht. Ziel dieses Kapitels ist es, neutrale Materie im β-Gleichgewicht bei $T = 0$, zu beschreiben und herauszufinden, unter welchen Umständen die Materie farbsupraleitend wird. Im letzten Kapitel haben wir bereits die Neutralität der CFL-Phase für ein einheitliches quarkchemisches Potential untersucht. Wir haben dabei herausgefunden, dass eine solche Phase nicht automatisch neutral ist und man die chemischen Potentiale der Quarks variieren müsste, um die Neutralität dieser Phase herzustellen. Wir werden deshalb mit dem allgemeinsten Thermodynamischen Potential, Gleichung (3.41) aus Kapitel 3.2.1 rechnen, in dem zunächst alle neun quarkchemischen Potentiale voneinander verschieden sind. Außerdem bauen wir in unser Modell Elektronen und Myonen ein. Diesen Teilchen müssen wir dann

zwei weitere chemische Potentiale μ_{e^-} und μ_{μ^-} zuordnen.
Als nächstes wollen wir versuchen zu verstehen, was man sich unter dem β-Gleichgewicht vorzustellen hat, in dem sich ein Neutronenstern befindet.

6.1 Das β-Gleichgewicht

Sieht man von den ersten Minuten nach seiner Bildung ab, so handelt es sich bei einem Neutronenstern um ein sehr stabiles Objekt, das sich mit der Zeit praktisch nicht mehr verändert. In einem solchen zeitlich stabilen Objekt müssen sich alle Reaktionen, die im Inneren ablaufen können, in einem Gleichgewicht befinden. Diese Gleichgewichtsbedingung muss dann auch für den β-Zerfall erfüllt sein, der die Umwandlung der verschiedenen Quarkflavors ineinander beschreibt.
Unter dem β-Zerfall versteht man die folgende Reaktion der schwachen Wechselwirkung:

$$d \rightleftharpoons u + e^- + \overline{\nu}_e, \tag{6.1}$$
$$s \rightleftharpoons u + e^- + \overline{\nu}_e. \tag{6.2}$$

Das dazugehörige Gleichgewicht bezeichnet man als β-Gleichgewicht. Dies hat wichtige Folgen, da sich mit Hilfe dieser Reaktionsgleichung die chemischen Potentiale der Quarks in Relation setzen lassen. Das chemische Potential einer Teilchensorte ist die Energie, die man benötigt, um dem System ein solches Teilchen hinzuzufügen. Da sich obige Reaktion im Gleichgewicht befindet, muss die Summe der chemischen Potentiale auf beiden Seiten der Reaktionsgleichungen den gleichen Wert haben. Die Neutrinos können den Neutronenstern nach relativ kurzer Zeit verlassen. Man kann ihnen deshalb ein chemisches Potential von $\mu_\nu = 0$ zuordnen. Für die anderen Spezies gilt:

$$\mu_{d,c} = \mu_{u,c} + \mu_{e^-}, \tag{6.3}$$
$$\mu_{s,c} = \mu_{u,c} + \mu_{e^-}. \tag{6.4}$$

Diese Gleichungen sind für alle Farben, $c = r, g, b$ gültig, da die schwache Wechselwirkung die Farbladung erhält. Wir haben damit also sechs Gleichungen, die die chemischen Potentiale der Quarks miteinander in Relation setzen.
Myonen können über einen Prozeß der schwachen Wechselwirkung in Elektronen und Neutrinos zerfallen. Auch diese Reaktion muss sich im Gleichgewicht befinden

$$\mu^- \rightleftharpoons e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu. \tag{6.5}$$

Damit sind die chemischen Potentiale der Elektronen und Myonen gleich

$$\mu_{e^-} = \mu_{\mu^-}. \tag{6.6}$$

So reduziert sich die Zahl der voneinander unabhängigen chemischen Potentiale von dreizehn auf vier. Diese vier chemischen Potentiale entsprechen den vier erhaltenen Ladungen

des Systems. Diese sind die drei Farbladungen und die elektrische Ladung.
Ihnen kann man jetzt vier chemische Potentiale: μ_r, μ_g, μ_b und μ_Q zuordnen. Die quarkchemischen Potentiale $\mu_{f,c}$ lassen sich eindeutig aus diesen vier μ's berechnen

$$\mu_{u,c} = \frac{2}{3}\mu_Q + \mu_c, \tag{6.7}$$

$$\mu_{d,c} = \mu_{s,c} = -\frac{1}{3}\mu_Q + \mu_c, \tag{6.8}$$

$$\mu_Q = -\mu_{e^-} = -\mu_{\mu^-}. \tag{6.9}$$

Üblicherweise benutzt man bis auf μ_Q die so gebildeten chemischen Potentiale nicht direkt, sondern bildet aus ihnen zunächst Linearkombinationen, [19, 26]

$$\mu = \frac{1}{3}\mu_r + \frac{1}{3}\mu_g + \frac{1}{3}\mu_b, \tag{6.10}$$

$$\mu_3 = \frac{1}{2}\mu_r - \frac{1}{2}\mu_g, \tag{6.11}$$

$$\mu_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\mu_r + \frac{1}{2\sqrt{3}}\mu_g - \frac{1}{\sqrt{3}}\mu_b. \tag{6.12}$$

Die dazugehörigen Dichten n, n_3 und n_8 lassen sich deshalb mit den durch Gleichung (5.1) in Kapitel 5.1 definierten Farbdichten in Verbindung bringen

$$n = n_r + n_g + n_b, \tag{6.13}$$

$$n_3 = n_r - n_g, \tag{6.14}$$

$$n_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}n_r + \frac{1}{\sqrt{3}}n_g - \frac{2}{\sqrt{3}}n_b. \tag{6.15}$$

Insbesondere entspricht also n der Gesamtquarkdichte und n_Q der Gesamtladungsdichte des Systems.
Die Neutralitätsbedingungen aus Kapitel 5.1 werden mit diesen Definitionen dann zu

$$n_3 = n_8 = n_Q = 0. \tag{6.16}$$

Als nächstes müssen wir noch die Parameter festlegen, mit denen wir die numerischen Rechnungen durchgeführt haben. Dabei benutzen wir jetzt nicht mehr einen Parametersatz aus Tabelle 4.1, Kapitel 4.2, sondern folgen bei der Wahl der Parameter Referenz [19]. Diese Parameter sind in Tabelle 6.1 aufgeführt. Bis auf den Wert für die Quark-

$G\Lambda^2$	$H\Lambda^2$	$K\Lambda^5$	m_u [MeV]	m_s [MeV]	Λ
1.835	1.835	12.36	5.5	140.7	602.3

Tabelle 6.1: *Parametersatz aus Referenz [19]. Zur Vereinfachung wurde hier H=G gesetzt.*

Quark-Kopplungskonstante ist dies genau der Parametersatz aus Referenz [17], der für uns schon in Kapitel 4 als Ausgangspunkt zur Fixierung der Parameter unseres Modells gedient hat.
Qualitativ sollte man für diesen Parametersatz keine anderen Ergebnisse erhalten, als für einen der in den vorangegangenen Kapiteln verwendeten.

6.2 Phasenstruktur und neutrale Phasen

Bevor wir uns mit der Konstruktion neutraler Phasen befassen können, müssen wir uns zunächst wieder mit der Phasenstruktur auseinandersetzen. Dabei beginnen wir wieder mit dem Grenzfall eines einheitlichen chemischen Potential für alle Quarks μ, damit ist $\mu_3 = \mu_8 = \mu_Q = 0$. Die Resultate für die Gap-Parameter sind in Abb. 6.1 gezeigt. Vergleicht man diese Kurven mit den Ergebnissen aus Kapitel 4.2, so ergeben sich erwar-

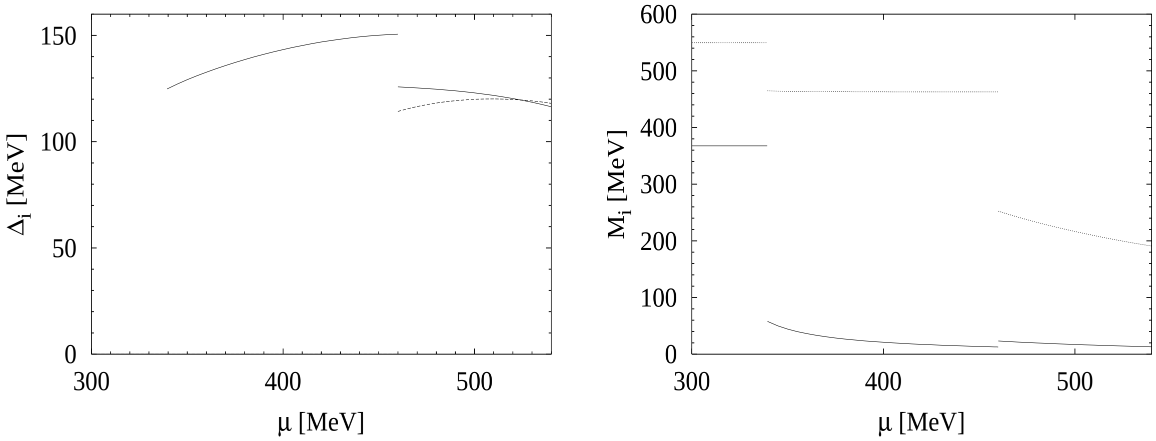

Abbildung 6.1: *Gaps und Konstituentenmassen als Funktion von μ für $\mu_3 = \mu_8 = \mu_Q = 0$. Links: Diquarkgaps Δ_2 (durchgezogene Linie) und $\Delta_5 = \Delta_7$ (gestrichelte Linie). Rechts: Konstituentenmassen $M_u = M_d$ (durchgezogene Linie) und M_s(gestrichelte Linie).*

tungsgemäß keine qualitativen Unterschiede. Wieder lassen sich drei Phasen, die hadronische Phase, die 2SC-Phase und die CFL-Phase identifizieren, die durch Phasenübergänge erster Ordnung deutlich voneinander getrennt werden.
Da wir an der Konstruktion neutraler Phasen interessiert sind, zeigen wir für den Grenzfall $\mu_3 = \mu_8 = \mu_Q = 0$ in Abb. 6.2 noch die Dichten n, n_8 und n_Q, die wir den chemischen Potentialen zugeordnet haben. Man achte darauf, dass wir die Werte für die Gesamtdichte n durch zehn dividiert haben, um die gleiche Skala wie für n_8 und n_Q verwenden zu können.
Für die Farbdichte n_3 gilt in diesem Grenzfall $n_3 = 0$. Durch diese Dichte wird nach

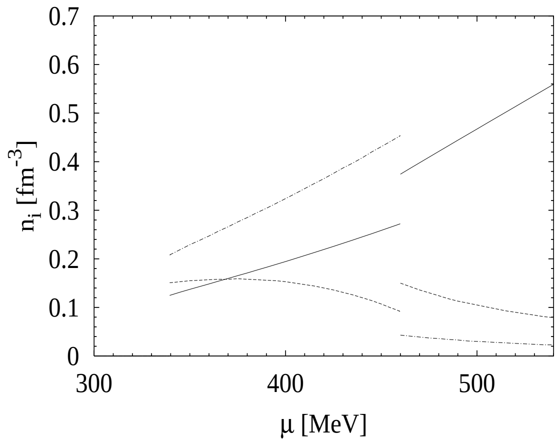

Abbildung 6.2: *Dichten. Gesamtdichte $n/10$ (durchgezogene Linie), Farbladungsdichte n_8 (gestrichelte Linie) und Ladungsdichte n_Q (strichgepunktete Linie) als Funktion des chemischen Potentials μ und für $\mu_3 = \mu_8 = \mu_Q = 0$.*

Gleichung (6.14) ein Unterschied von roter n_r und grüner Dichte n_g angegeben, der im betrachteten Grenzfall verschwindet.
Man kann erkennen, dass in der hadronischen Phase alle Dichten verschwinden und die Phase daher dem Vakuum entspricht. Dies muss auch so sein, denn eine nichtverschwindende Dichte für u- und d-Quarks führt sofort zu einer Cooper-Instabilität und damit zur Formierung eines Diquarks.
In der 2SC-Phase findet man dann eine nichtverschwindende Gesamtdichte n, zu der die u-Quarks und d-Quarks zu gleichen Teilen beitragen. Die Dichte der s-Quarks verschwindet hier, weil sie eine zu große Masse besitzen, um angeregt werden zu können, die der Elektronen aufgrund von $\mu_Q = 0$. Damit können wir aber die elektrische Ladungsdichte der 2SC-Phase sehr leicht verstehen. Sie ist direkt durch die Gesamtdichte gegeben: $n_Q = \frac{1}{6}n$. Der nichtverschwindende Wert für n_8 spiegelt die Tatsache wieder, dass die Dichte der gepaarten roten und grünen Quarks größer ist als die Dichte der ungepaarten blauen Quarks.
Am Phasenübergang zur CFL-Phase ändert sich n_Q sehr stark und springt auf einen wesentlich kleineren Wert, was daran liegt, dass es nun auch eine endlich s-Quarkdichte gibt. Der Wert für die Farbladungsdichte n_8 nimmt am Phasenübergang schlagartig zu, wobei die relative Farbladungsdichte n_8/n nahezu konstant bleibt. Die Änderung ist aber bei weitem nicht so stark wie bei n_Q. In der CFL-Phase sind die Dichten der elektrischen Ladung und der Farbladung über Gleichung (5.9) aus Kapitel 5.2 gekoppelt. Für den Spezialfall $n_3 = 0$ also $n_r = n_g$ erhält man $n_Q = 1/(2\sqrt{3})n_8$. Dies bestätigt sich durch unsere numerische Analyse.
Im nächsten Schritt wollen wir nun neutrale 2SC- bzw. CFL-Phasen konstruieren. Dazu

muss man im allgemeinen nichtverschwindende Werte für die chemischen Potentiale μ_Q und μ_8 zulassen. Durch das Einführen dieser chemischen Potentiale werden jedoch auch die Phasengrenzen selbst verändert. Wir müssen daher zuerst untersuchen, in welcher Weise diese Beeinflussung erfolgt.
Zuerst betrachten wir den Einfluss von μ_8, ein entsprechendes Phasendiagramm ist in Abb. 6.3 gezeigt. Man findet also wieder die normale oder hadronische Phase, die 2SC-

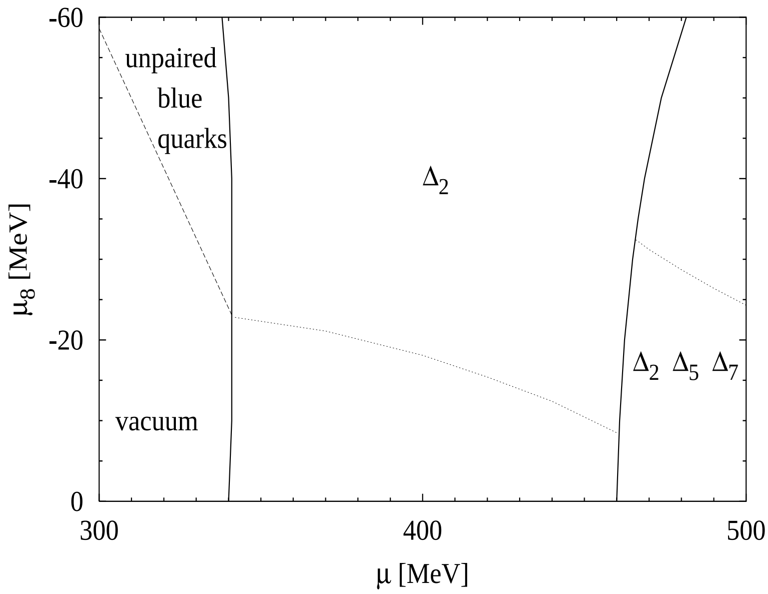

Abbildung 6.3: *Phasendiagramm in der $\mu - \mu_8$ Ebene für $\mu_3 = \mu_Q = 0$. Die verschiedenen Phasen werden dadurch charakterisiert, dass jeweils unterschiedliche Diquark-Gaps von Null verschiedene Werte annehmen. In der nichtsupraleitenden Phase gibt es Quarks nur oberhalb der gestrichelten Linie. Die gepunkteten Linien entsprechen farbneutraler Materie, in der CFL-Phase ist die Materie damit automatisch auch farbneutral.*

Phase und die CFL-Phase, wie wir sie auch für $\mu_8 = 0$ in Abb. 6.1 vorgefunden haben. Ein wesentlicher Unterschied zu $\mu_8 = 0$ ergibt sich für die normale Phase. Wenn das chemische Potential der blauen Quarks $\mu_b = \mu - 2/\sqrt{3}\mu_8$ größer wird als die Konstituentenmassen der leichten Quarks im Vakuum, können Zustände blauer u-Quarks und blauer d-Quarks besetzt werden. Diese bilden dann ein Gas aus freien blauen Quarks. Die entsprechende Region innerhalb des Phasendiagramms, in der man ein solches Gas findet, wird durch die gestrichelte Linie in Abb. 6.3 begrenzt. Dabei haben wir vernachlässigt, dass diese Quarks sich auch noch in einem anderen Kanal paaren können [24, 25].
Im Falle der farbsupraleitenden Phasen 2SC und CFL sind in Abb. 6.3 gepunktete Linien eingetragen, für die diese Phasen farbneutral werden. Die CFL-Phase ist entlang dieser

Linie aufgrund der Kopplung der elektrischen Ladung und der Farbladung (5.9) automatisch auch ladungsneutral. In Referenz [19] wurde ebenfalls eine neutrale CFL-Phase konstruiert. Unsere Resultate stimmen mit diesen Ergebnissen überein. Die Linie, entlang der die CFL-Phase neutral ist, trifft bei $\mu = 465.7$ MeV, $\mu_8 = -32.5$ MeV die Phasengrenze zur 2SC-Phase.
Anders als die CFL-Phase ist die farbneutrale 2SC nicht automatisch auch elektrisch neutral, vielmehr wird das Verhältnis von u-Quarks und d-Quarks durch ein endliches μ_8 nicht verändert und man kann die elektrische Ladung immer noch über die Gesamtdichte bestimmen, $n_Q = 1/6n$.
Wir kommen jetzt zum Einfluss eines nichtverschwindenden μ_Q auf die Phasenstruktur. Dazu haben wir ein Phasendiagramm für $\mu_8 = \mu_3 = 0$ berechnet, welches in Abb. 6.4 gezeigt ist.
Unser Ziel sollte sein, elektrisch neutrale 2SC- und CFL-Phasen zu konstruieren. In Abb.

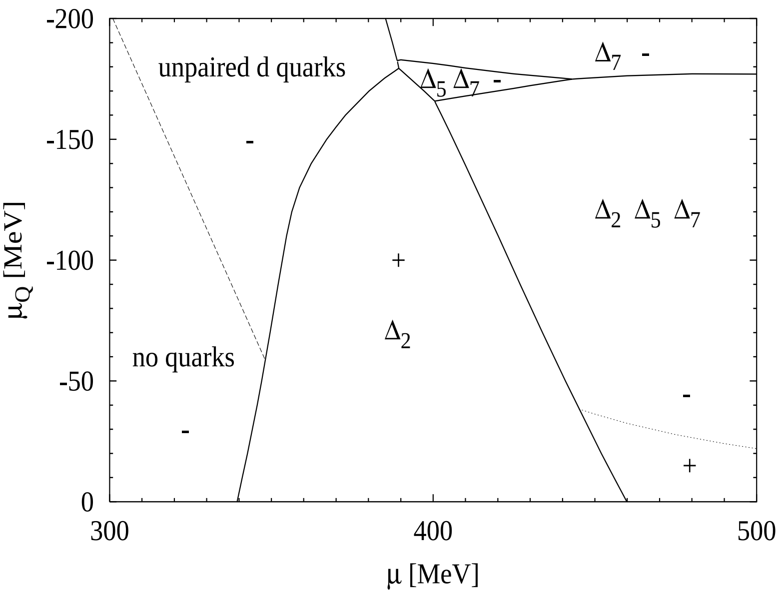

Abbildung 6.4: *Phasendiagramm in der $\mu - \mu_8$ Ebene für $\mu_3 = \mu_8 = 0$. Die verschiedenen farbsupraleitenden Phasen unterscheiden wir wieder dadurch, welche der Δ_i's von null verschiedene Werte annehmen. Die „+" und „-" Zeichen geben jeweils das Vorzeichen der elektrischen Ladungsdichte an. In der normalen, nichtsupraleitenden Phase existieren Quarks nur oberhalb der gestrichelten Linie. Die gepunktete Linie entspricht elektrisch neutraler CFL Materie.*

6.2 erkennt man, dass sowohl die 2SC-Phase, als auch die CFL-Phase für $\mu_3 = \mu_8 = \mu_Q = 0$ positiv geladen sind. Wir beschränken uns daher auf die Betrachtung von $\mu_Q < 0$. Für

$\mu_Q > -180$ MeV erhält man das schon gewohnte Bild aus einer normalen Phase für kleine μ, der 2SC-Phase im Bereich mittelgroßer μ und der CFL-Phase für große chemische Potentiale.
Wächst μ_Q jedoch noch weiter in den negativen Bereich an, so entsteht ein völlig neues und unerwartetes Bild. Die 2SC- und die CFL-Phase verschwinden zugunsten zweier völlig neuer Phasen. Für $\mu_Q < -180$ MeV erhält man eine zur 2SC analoge Phase, die sich nur dadurch unterscheidet, dass hier d-Quarks und s-Quarks anstatt der u-Quarks und d-Quarks gepaart sind. Wir wollen diese neue Phase daher als $2SC_{ds}$-Phase bezeichnen.
In einem relativ kleinen Bereich des Phasendiagramms findet man us- und ds-Diquarks aber keine ud-Diquarks. Diese Phase bezeichnen wir als SC_{us+ds}-Phase.
In der normalen Phase sind zunächst wiederum die Quarkdichten identisch null. Wenn das chemische Potential der d-Quarks $\mu_d = \mu - 1/3\mu_Q$ allerdings größer wird als ihre Vakuummasse können auch d-Quark-Zustände besetzt werden und es bildet sich ein Gas freier d-Quarks. Die neutrale Phase entspricht aber hier niemals dem Vakuum, da aufgrund von $\mu_Q \neq 0$ immer zumindest Elektronen vorhanden sind.
In Abb. 6.5 zeigen wir die μ_Q-Abhängigkeit der Konstituentenquarkmassen und der Diquarkgaps für ein quarkchemisches Potential von $\mu = 390$ MeV.
Man kann deutlich die drei Phasen erkennen, die wir auch in Abb. 6.4 eingetragen ha-

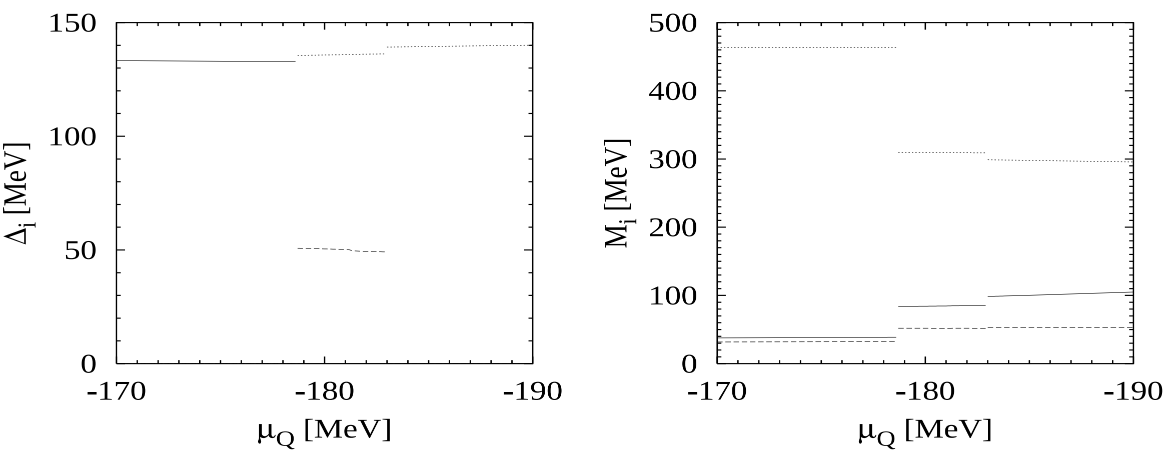

Abbildung 6.5: *Diquarkgaps und Konstituentenmassen als Funktion von μ_Q bei $\mu = 390$ MeV und $\mu_8 = \mu_3 = 0$. Links: Diquarkgaps Δ_2 (durchgezogene Linie), Δ_5 (gestrichelte Linie) und Δ_7 (gepunktete Linie). Rechts: Konstituentenmassen M_u (durchgezogene Linie), M_d (gestrichelte Linie) und M_s (gepunktete Linie).*

ben, also zuerst die 2SC, dann die SC_{us+ds} und schließlich die $2SC_{ds}$-Phase. Die beiden Phasenübergänge sind erster Ordnung.
In Abb. 6.4 sind außerdem die Vorzeichen der elektrischen Ladungsdichte eingetragen.

Die Lösungen für eine elektrisch neutrale CFL-Phase sind in Abb. 6.4 als gepunktete Linie eingezeichnet. Diese elektrisch neutrale CFL-Phase ist jedoch nicht gleichzeitig auch farbneutral, da wir durch $\mu_Q \neq 0$ eine endliche Elektronendichte erhalten, was aufgrund der Kopplung von elektrischer Dichte und Farbladungsdichte (5.9) für eine vollständig neutrale CFL-Phase nicht sein darf.
Man erkennt, dass die 2SC-Phase durchweg positiv geladen ist. Es gelingt also in diesem Fall nicht, eine elektrisch neutrale 2SC-Phase zu konstruieren. Die 2SC vollzieht also einen Phasenübergang in die CFL- bzw. $\mathrm{SC}_{us,ds}$-Phase, bevor μ_Q soweit erniedrigt werden konnte, um die Phase zu neutralisieren.
Weiter erkennt man, dass die neuen Phasen $2\mathrm{SC}_{ds}$ und SC_{us+ds} negativ geladen sind. Die normale Phase ist ebenfalls durchweg negativ geladen, da zuerst nur Elektronen und dann, für $\mu_d > M_d$, Elektronen und d-Quarks vorhanden sind.
Wir können festhalten, dass es innerhalb dieses Phasendiagramms, außer für die CFL-Phase, keine Bereiche von elektrischer Neutralität gibt.
In Abb. 6.6 sind die Dichten n_3, n_8 und n_Q relativ zur Gesamtdichte n in Abhängigkeit von μ_Q für $\mu = 390$ MeV gezeigt. Die Ladungsdichte n_Q verhält sich hier wie erwartet

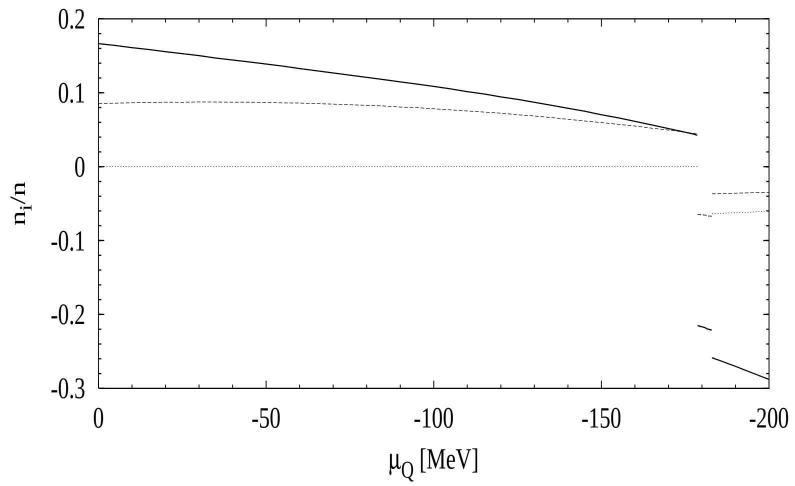

Abbildung 6.6: *Relative Dichten als Funktion von $\mu_Q = 0$, für $\mu = 390$ MeV und $\mu_3 = \mu_8 = 0$. n_Q/n (durchgezogene Linie), n_8/n (gestrichelte Linie) und n_3/n (gepunktete Linie).*

und nimmt ab je stärker μ_Q in den negativen Bereich anwächst. Bevor n_Q jedoch das Vorzeichen wechseln kann, findet der Phasenübergang in die SC_{us+ds} statt. Es gibt für $\mu_3 = \mu_8 = 0$ also keine elektrisch neutrale und stabile 2SC-Phase.
Bis zu diesem Punkt haben wir entweder den Einfluss eines nichtverschwindenden μ_8 oder eines μ_Q betrachtet. Man könnte nun die Hoffnung haben, dass ein endliches μ_8,

durch welches die Farbneutralität der 2SC-Phase hergestellt werden kann, siehe Abb. 6.3, dafür sorgt, dass man die 2SC-Phase doch neutralisieren kann. Dafür müsste sich der Phasenübergang von der 2SC in die SC_{us+ds} nur zu kleineren μ_Q verschieben, oder aber die 2SC-Phase wird durch ein endliches μ_8 selbst negativer. Es stellt sich jedoch heraus, dass diese beiden Effekte nicht ausreichen, um eine stabile und neutrale 2SC-Phase zu erhalten. Der Phasenübergang in die SC_{us+ds} findet in diesem Fall statt, bevor der Neutralitätspunkt erreicht ist. Wir finden damit also keine elektrisch neutrale 2SC-Phase.
Zusätzlich zu den bis jetzt diskutierten Phasen sind auch noch andere Phasen mit allen denkbaren Kombinationen nichtverschwindender Diquarkgaps denkbar. Diese haben wir in Tabelle 6.2 zusammengefasst. Die Phasen SC_{ud+us} und SC_{ud+ds} sind dabei die einzi-

Phase	N	$2SC$	$2SC_{us}$	$2SC_{ds}$	SC_{ud+us}	SC_{ud+ds}	SC_{us+ds}	CFL
Diquark Gap	keine	Δ_2	Δ_5	Δ_7	Δ_2, Δ_5	Δ_2, Δ_7	Δ_5, Δ_5	$\Delta_2, \Delta_5, \Delta_7$

Tabelle 6.2: *Phasen mit den jeweils von Null verschiedenen Diquark Gaps.*

gen Phasen, die in unseren Rechnungen nicht aufgetreten sind. Dies liegt jedoch einfach daran, dass die spezielle Suche nach neuen Phasen nicht das eigentliche Ziel dieser Arbeit war, sondern vielmehr die Suche nach neutraler Materie. Insbesondere sind uns bei dieser Suche jedoch alle Beispiele begegnet, bei denen ein einziges $\Delta_i, i = 2, 5, 7$ der einzige nicht verschwindende Diquark Gap ist. Ein Beispiel für einen Bereich des Phasendiagramms, bei dem wir es mit einer Phase zu tun haben, bei der Δ_5 der einzige nichtverschwindende Diquarkgap ist, ist in Abb. 6.7 gezeigt.
Bei dem gezeigten Phasendiagramm handelt es sich um einen kleinen Teil einer Ebene im vierdimensionalen Raum der chemischen Potentiale. Bei dieser Ebene sind μ und μ_8 die unabhängigen Variablen, die beiden anderen chemischen Potentiale erhält man durch $\mu_3 = -\mu_Q/2$ und $\mu_8 = -\mu_Q/7 - 30$ MeV. Weshalb wir uns hier genau diese Ebene ausgesucht haben, wird im nächsten Kapitel deutlich werden, in dem es um die Konstruktion neutraler, gemischter Phasen geht. Hier soll das in Abb. 6.7 gezeigte Phasendiagramm nur als Beispiel für einen Bereich des Phasenraums verstanden werden, in dem alle chemischen Potentiale von Null verschieden sind und in dem man eine $2\mathrm{SC}_{us}$-Phase findet.

6.3 Gemischte Phasen

Im letzten Kapitel haben wir versucht, neutrale Phasen für Materie im β-Gleichgewicht zu konstruieren. Dazu haben wir allen Quark-Spezies voneinander unabhängige quarkchemische Potentiale zugeordnet. Durch das β-Gleichgewicht, Gleichungen (6.3) und (6.4), hat sich die Anzahl der unabhängigen chemischen Potentiale von dreizehn auf vier,

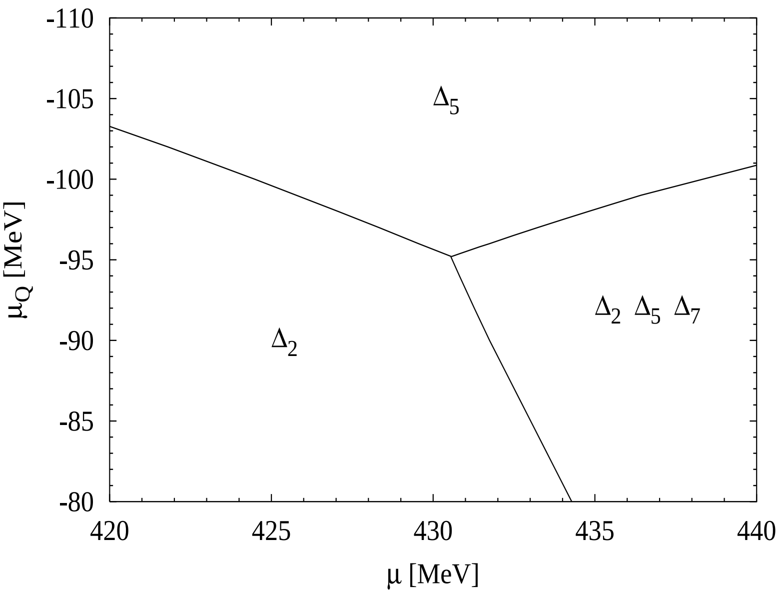

Abbildung 6.7: *Ausschnitt eines Phasendiagramms in Abhängigkeit von μ und μ_Q. Die verbleibenden chemischen Potentiale sind durch $\mu_3 = -\mu_Q/2$ und $\mu_8 = -\mu_Q/7 - 30$ MeV gegeben. Wir charakterisieren die Phasen wieder mit Hilfe der nicht verschwindenden Diquarkgaps.*

nämlich μ, μ_3, μ_8 und μ_Q, reduziert. Mit Hilfe dieser vier chemischen Potentiale ist es uns dann gelungen, eine neutrale CFL-Phase zu konstruieren, die als gepunktete Linie in Abb. 6.3 eingetragen ist. Im Falle der 2SC-Phase ist uns eine solche Konstruktion jedoch nicht gelungen. Bevor der Punkt der elektrischen Neutralität erreicht werden kann, vollzieht sich hier ein Phasenübergang in die SC_{us+ds}-Phase, die wir in Abb. 6.6 veranschaulicht haben.
Bei großen chemischen Potentialen μ befindet sich die Materie in der CFL-Phase auf der gepunkteten Linie in Abb. 6.3. Verringert man nun das chemische Potential und damit die Dichte, bewegt man sich entlang dieser Linie von rechts nach links. Was aber passiert, wenn man die Phasengrenze erreicht?
Die neutrale CFL Materie befindet sich an der Phasengrenze im chemischen Gleichgewicht mit Materie in der 2SC-Phase, die weder farbneutral noch ladungsneutral ist. Ein Phasenübergang kann hier somit nicht so einfach stattfinden, da man natürlich keine ungeladene in eine geladene Phase umwandeln kann. Von den Autoren in Referenz [19] wurden daher nur neutrale Phasen miteinander verglichen. Diese Phasen befinden sich jedoch nicht im chemischen Gleichgewicht miteinander, weil man für ein festes μ jeweils andere Werte für die übrigen chemischen Potentiale, μ_3, μ_8 und μ_Q benötigt, um die Phase zu neutralisieren.

Im folgenden wollen wir vielmehr die Möglichkeit der Bildung gemischter Phasen untersuchen, die sich entlang der Phasengrenzen bilden können. Die Komponenten, aus denen die gemischte Phase besteht, müssen natürlich nicht jede für sich, sondern nur als Gemisch elektrisch neutral und farbneutral sein.

6.3.1 Bedingungen für gemischte neutrale Phasen

Gemischte Phase aus zwei Komponenten

Wir haben die Phasen danach unterschieden, welche der Diquarkgaps einen endlichen Wert annehmen. Wir wollen nun die Bedingungen einer gemischten neutralen Phase aufstellen, dabei sei eine der Phasen durch die Diquarkgap-Kombination χ_1 (z.B. $\chi_1 = \Delta_2$ für die 2SC-Phase.), die andere Phase durch die Diquarkgap-Kombination χ_2 charakterisiert. Eine gemischte Phase kann sich nur entlang einer Phasengrenze bilden, da sich nur hier die Phasen im chemischen Gleichgewicht befinden. An der Phasengrenze sind die Thermodynamischen Potentiale der beiden beteiligten Phasen gleich

$$\Omega(T, \mu; \chi_1) = \Omega(T, \mu; \chi_2). \tag{6.17}$$

Handelt es sich um einen Phasenübergang von erster Ordnung, so ist $\chi_1 \neq \chi_2$.
Aus den Thermodynamischen Potentialen der einzelnen Phasen lassen sich die jeweiligen Dichten $n_i^{\chi_{1/2}}$ berechnen. Um die gemischte Phase zu charakterisieren, führt man ein Mischungsverhältnis x ein. Es gibt an, welche Volumenanteile von den beteiligten Phasen in Anspruch genommen werden. Die Gesamtdichte der gemischten Phase kann man damit leicht berechnen:

$$n_i = x^{\chi_1} n_i^{\chi_1} + (1 - x^{\chi_1}) n_i^{\chi_2}. \tag{6.18}$$

Damit das Mischungsverhältnis eine physikalisch sinnvolle Bedeutung hat, muss es im Intervall, $0 < x < 1$, liegen. Aus der Neutralitätsbedingung,

$$n_3 = n_8 = n_Q = 0, \tag{6.19}$$

erhält man drei Gleichungen, aus denen man die Variable x^{χ_1} eliminieren kann

$$\frac{n_3^{\chi_1}}{n_3^{\chi_2}} = \frac{n_8^{\chi_1}}{n_8^{\chi_2}} = \frac{n_Q^{\chi_1}}{n_Q^{\chi_2}} = \frac{x^{\chi_1} - 1}{x^{\chi_1}}. \tag{6.20}$$

Man erkennt hieraus sofort, dass die Ladungsdichten der an der Mischung beteiligten Phasen entgegengesetzte Vorzeichen haben müssen.
Insgesamt haben wir damit zusammen mit Gleichung (6.17) drei Gleichungen für die vier Unbekannten, μ, μ_3, μ_8, μ_Q. Unter Vorgabe eines der chemischen Potentiale kann man alle anderen berechnen. Es ergibt sich eine Trajektorie im vierdimensionalen Raum der μ's.
Das Mischungsverhältnis x^{χ_1} läßt sich aus Gleichung (6.20) natürlich ebenfalls ausrechnen

$$x^{\chi_1} = \frac{n_i^{\chi_2}}{n_i^{\chi_2} - n_i^{\chi_1}}. \tag{6.21}$$

Die Lösungen für eine neutrale gemischte Phase entspricht, wie oben beschrieben, einer Linie auf der Phasengrenze. Trifft diese Linie eine weitere, dritte Phasengrenze, so ergibt sich die Möglichkeit einer gemischten Phase, die sich aus drei Komponenten zusammensetzt. Wir haben solche dreifach gemischten Phasen ebenfalls gefunden und wollen deshalb auch die Bedingungen besprechen, die man hier erfüllen muss.

Gemischte Phase aus drei und vier Komponenten

Auch eine gemischte Phase aus drei Komponenten kann sich nur entlang der Phasengrenze der beteiligten Phasen bilden. Damit müssen die Thermodynamischen Potentiale aller drei beteiligten Phasen gleich sein

$$\Omega(T,\mu,\chi_1) = \Omega(T,\mu,\chi_2) = \Omega(T,\mu,\chi_3). \tag{6.22}$$

Um die Volumenanteile anzugeben, die von den jeweiligen Phasen in Anspruch genommen werden, benötigt man drei anstatt zwei Variable, wobei die Volumenanteile zusammen wieder eins ergeben müssen: $x^{\chi_1} + x^{\chi_2} + x^{\chi_3} = 1$,

$$n_i = x^{\chi_1} n_i^{\chi_1} + x^{\chi_2} n_i^{\chi_2} + x^{\chi_3} n_i^{\chi_3}. \tag{6.23}$$

Die Neutralitätsbedingung, $n_3 = n_8 = n_Q = 0$, kann man kompakt formulieren

$$N\vec{x} = \begin{pmatrix} n_3^{\chi_1} & n_8^{\chi_1} & n_Q^{\chi_1} \\ n_3^{\chi_2} & n_8^{\chi_2} & n_Q^{\chi_2} \\ n_3^{\chi_3} & n_8^{\chi_3} & n_Q^{\chi_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{\chi_1} \\ x^{\chi_2} \\ x^{\chi_3} \end{pmatrix} = 0. \tag{6.24}$$

Diese Matrix-Gleichung ist nur dann erfüllbar, wenn die Determinante der Matrix N verschwindet

$$\det N = 0. \tag{6.25}$$

Mit dieser von den Volumenanteilen unabhängigen Gleichung, stehen uns wieder drei Gleichungen für die Bestimmung der vier Unbekannten μ's zur Verfügung. Damit muss eines der μ's vorgegeben werden und es ergibt sich wiederum eine Trajektorie im vierdimensionalen Raum, der von den chemischen Potentialen aufgespannt wird.
Nachdem man die verschiedenen Dichten $n_i^{\chi_j}$ auf diese Weise bestimmt hat, lassen sich die Volumenanteile der verschiedenen Phasen ebenfalls ausrechnen:

$$x^{\chi_1} = \frac{n_8^{\chi_3}(n_3^{\chi_2} - n_3^{\chi_3}) - n_3^{\chi_3}(n_8^{\chi_2} - n_8^{\chi_3})}{(n_3^{\chi_1} - n_3^{\chi_3})(n_8^{\chi_2} - n_8^{\chi_3}) - (n_3^{\chi_2} - n_3^{\chi_3})(n_8^{\chi_1} - n_8^{\chi_3})}, \tag{6.26}$$

$$x^{\chi_2} = \frac{n_8^{\chi_3}(n_3^{\chi_1} - n_3^{\chi_3}) - n_3^{\chi_3}(n_8^{\chi_1} - n_8^{\chi_3})}{(n_3^{\chi_2} - n_3^{\chi_3})(n_8^{\chi_1} - n_8^{\chi_3}) - (n_3^{\chi_1} - n_3^{\chi_3})(n_8^{\chi_2} - n_8^{\chi_3})}, \tag{6.27}$$

$$x^{\chi_3} = 1 - x^{\chi_1} - x^{\chi_2}. \tag{6.28}$$

Auch eine aus vier Komponenten gemischte Phase ist möglich und auch vorhanden, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden. Hier müssen die Thermodynamischen Potentiale aller beteiligten Phasen ebenfalls gleich sein

$$\Omega(T,\mu,\chi_1) = \Omega(T,\mu,\chi_2) = \Omega(T,\mu,\chi_3) = \Omega(T,\mu,\chi_4). \tag{6.29}$$

Hieraus kann man dann schon die gesuchte Trajektorie im μ Raum ausrechnen. Die Volumenanteile ergeben sich über die drei Neutralitätsbedingungen

$$n_i = x^{\chi_1} n_i^{\chi_1} + x^{\chi_2} n_i^{\chi_2} + x^{\chi_3} n_i^{\chi_3} + x^{\chi_4} n_i^{\chi_4} \tag{6.30}$$

und der Gleichung, die die Volumenanteile auf eins normiert

$$1 = x^{\chi_1} + x^{\chi_2} + x^{\chi_3} + x^{\chi_4}. \tag{6.31}$$

6.3.2 Ergebnisse

In Kapitel 6.2 haben wir eine neutrale CFL-Phase konstruiert und diese auch in Abb. 6.3 eingezeichnet. Die Linie, auf der wir neutrale CFL Materie gefunden haben, trifft bei chemischen Potentiale von $\mu = 465.7$ MeV, $\mu_8 = -32.5$ MeV sowie $\mu_3 = \mu_8 = 0$ die Phasengrenze zur 2SC-Phase.
Dieser Punkt ist unser Ausgangspunkt für die Konstruktion einer gemischten Phase aus 2SC-und CFL-Materie. Da an diesem Punkt die CFL Materie für sich genommen schon neutral ist, benötigt man hier natürlich keinen 2SC-Anteil, damit ist $x^{CFL} = 1, x^{2SC} = 0$. Für niedrigere chemische Potentiale μ werden dann gemischte Phasen möglich, die, wenn man von Coulomb und Oberflächeneffekten absieht, auch energetisch günstiger als neutrale homogene Phasen sind, wie sie in Referenz [19] berechnet wurden.
Die von uns berechnete neutrale, gemischte Phase aus 2SC- und CFL-Materie befindet sich ungefähr entlang der Phasengrenze dieser beiden Phasen, des in Abb. 6.7 gezeigten Phasendiagramms. Damit folgen die chemischen Potentiale μ_3 und μ_8 einem einfachen linearen Zusammenhang, $\mu_3 \approx -\mu_Q/2$ und $\mu_8 \approx -\mu_Q/7 - 30$ MeV. Der Grund, weshalb wir dieses Phasendiagramm in Kapitel 6.2 berechnet und gezeigt haben, wird somit klar. Der Anteil der 2SC-Materie an der Mischung, der in Abb. 6.8 auf der linken Seite gezeigt ist, steigt dabei nur sehr langsam an und erreicht nur einen Maximalwert von weniger als 2%.
Die CFL-Phase muss damit also für sich genommen schon fast farb neutral und ladungsneutral sein. Diese Tatsache ist auf der rechten Seite von Abb. 6.8 dargestellt. Hier sind die relativen Dichten $n_3/n, n_8/n$ und n_Q/n in Abhängigkeit vom chemischen Potential μ aufgetragen. Die Farbdichte n_3 verschwindet dabei völlig, so lange das μ_3 der (2SC, CFL) gemischten Phase dem Verlauf von $\mu_3 = -\mu_Q/2$ folgt. Aus dieser Beziehung folgt direkt $\mu_{u,r} = \mu_{d,g}$. Damit ist aber aufgrund der Isospinsymmetrie auch $n_u = n_d$. In der CFL gilt grundsätzlich Gleichung (5.9): $n_u = n_r$ und $n_d = n_g$. Die Farbdichte $n_3 = n_r - n_g$ verschwindet somit, $n_3 = 0$.
Die chemischen Potentiale der (2SC, CFL) neutralen Phase bewegen sich also entlang der

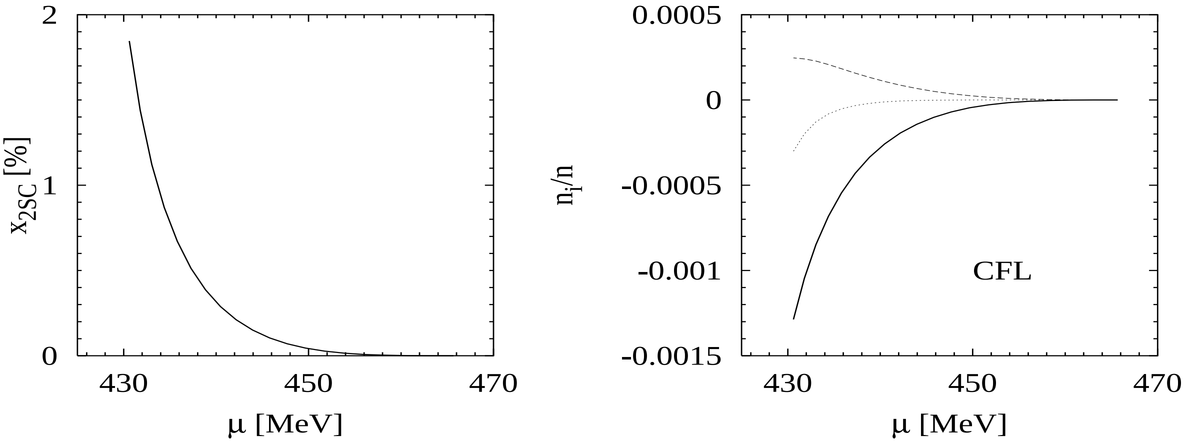

Abbildung 6.8: *Physikalische Größen der 2SC-CFL gemischten Phase als Funktion des chemischen Potentials μ. Links: Volumenanteil x_{2SC} der 2SC-Phase. Rechts: Relative Ladungsdichten der CFL-Phase, n_3/n (gepunktete Linie), n_8/n (gestrichelte Linie) und n_Q/n (durchgezogene Linie).*

entsprechenden Phasengrenze in Abb. 6.7. Sie trifft jedoch bei $\mu = 430.6$ MeV auf einen Tripelpunkt von 2SC-, CFL- und 2SC$_{us}$-Phase. Folgt man der Neutralitätslinie zu kleineren μ, so kommt man zu einer Fläche im Raum der chemischen Potentiale, an dem drei Phasen im chemischen Gleichgewicht sind. Auf einer solchen Fläche ist die Bildung einer dreikomponentigen gemischten Phase möglich. Wir haben auch hier die Neutralitätslinie berechnet und sie zu kleineren μ verfolgt.
Bei einem chemischen Potential von $\mu = 427.1$ MeV trifft diese Linie dann auf eine weitere Phasengrenze und es kommt für ein kurzes Intervall zur Bildung einer gemischten Phase aus vier Komponenten, der 2SC-, der SC$_{us+ds}$-, der CFL- und der 2SC$_{us}$-Phase.
Innerhalb dieser vierfach gemischten Phase verringert sich der Anteil der 2SC$_{us}$-Phase jedoch sehr schnell. Die Volumenanteile der einzelnen Komponenten der gemischten Phasen sind in Abb. 6.9 als Funktion von μ gezeigt.
Ab einem chemischen Potential von $\mu = 426.5$ MeV kommt es dann zur Bildung einer dreikomponentigen gemischten Phase aus 2SC-, SC$_{us+ds}$- und CFL-Materie. Diese Phase hat relativ lange Bestand, dabei nimmt der Volumenanteil der CFL-Materie kontinuierlich ab.
Bei $\mu = 407.7$ MeV verschwindet die CFL-Materie dann völlig und es bildet sich ein Gemisch aus jetzt nur noch zwei Materieformen, der 2SC- und der SC$_{ud+ds}$-Materie.
Nach der Bildung einer weiteren gemischten Phase aus drei Komponenten kommt es dann ab einem chemischen Potential von $\mu = 388.8$ MeV erstmals zur Beimischung der normalen Phase. Für ein sehr kurzes Intervall kommt es dann jeweils zur Bildung einer vierfach gemischten Phase aus 2SC-, CFL-, 2SC$_{us}$-, SC$_{us+ds}$-Materie, sowie einer dreifach gemischten Phase aus 2SC-, CFL-, 2SC$_{us}$-Materie. Ab einem quarkchemischen Potential

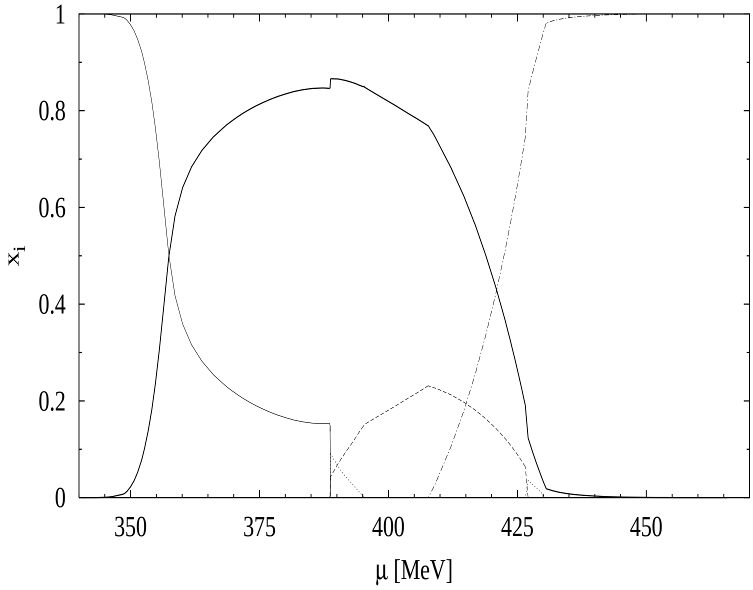

Abbildung 6.9: *Volumenanteile der verschiedenen Komponenten an den gemischten Phasen in Abhhängigkeit vom chemischen Potential μ, normale Phase (dünne durchgezogene Linie), 2SC (dicke durchgezogene Linie), CFL (strichgepunktete Linie), SC_{us+ds} (gestrichelte Linie) und $2SC_{us}$ (gepunktete Linie).*

von $\mu = 388.6$ MeV hat man es dann nur noch mit einem einfachen Gemisch aus der normalen und der 2SC-Phase zu tun.
Da es uns in Kapitel 6.2 nicht gelungen ist, eine neutrale und stabile 2SC-Phase zu finden, kann die Neutralitätslinie nicht in einer neutralen, farbsupraleitenden Phase enden. Damit kann die (N, 2SC)-Phase nur ins Vakuum übergehen, wenn man die Neutralitätslinie zu noch kleineren chemischen Potentialen verfolgt. Da die Elektronendichte über Gleichung (3.56) direkt mit dem chemischen Potential μ_Q verknüpft ist, muss insbesondere dieses gegen Null gehen. In Abb. 6.10 sind die chemischen Potentiale μ_3, μ_8 und μ_Q der gemischten Phasen, als Funktion von μ gezeigt. Ab einem chemischen Potential von $\mu = 348.6$ MeV ist $|\mu_Q| < 60$ MeV, und die normale Phase besteht ab hier dann nur noch aus Elektronen. Da die Elektronen keine Farbladung tragen, muss die 2SC-Phase ab diesem Punkt für sich genommen schon farbneutral sein. Das ist der Grund, weshalb μ_8 ab diesem Punkt wieder ansteigt. Bei einem chemischen Potential von $\mu = 340.9$ MeV erreicht man dann endgültig das Vakuum. Dabei handelt es sich genau um den Punkt, bei dem die Linie farbneutraler 2SC-Materie in Abb. 6.3 in Kapitel 6.2 die Phasengrenze zur normalen Phase erreicht.
Wie wir schon bei der Konstruktion der gemischten Phase aus CFL- und 2SC-Phase festgestellt haben, benötigen wir für alle μ_i von null verschiedene Werte, um die Neutralität der Gemische herzustellen. Eine Ausnahme bildet die gemischte Phase aus normaler und 2SC-Materie, für die $\mu_3 = 0$ ist. Die Farbdichte n_3, die einen Unterschied in den Dichten

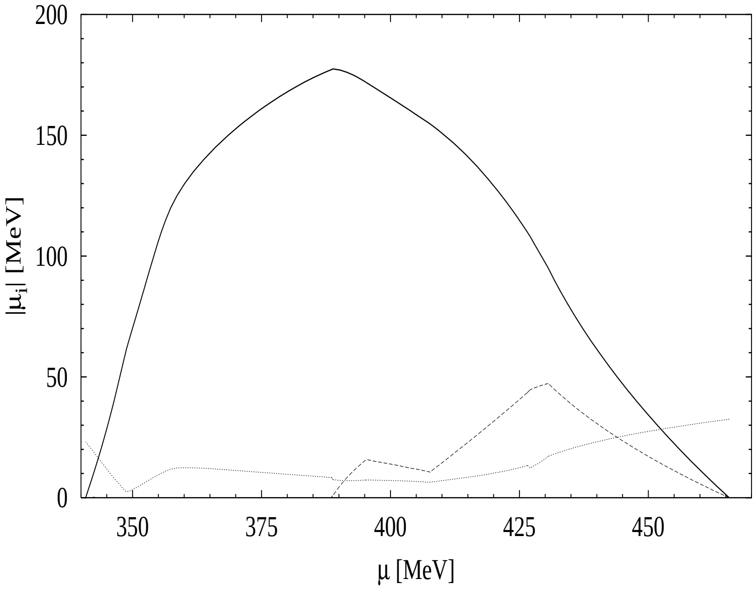

Abbildung 6.10: *Chemische Potentiale μ_3 (gestrichelte Linie), μ_8 (gepunktete Linie), μ_Q (durchgezogene Linie) , der in Tabelle 6.3 aufgeführten gemischten Phasen, als Funktion des Quarkchemischen Potentials μ.*

der roten und blauen Quarks beschreibt, verschwindet dann in beiden beteiligten Phasen für sich.
Die eben beschriebene Abfolge der neutralen gemischten Phasen ist in Tabelle 6.3 zusammengefasst. Hier sind auch die Gesamtdichten aufgeführt, die man den verschiedenen Gemischen zuordnen kann. Die Dichten, die wir den neutralen Gemischen zuordnen können, gehen dabei über einen großen Bereich vom Vakuum bis zu einer Dichte von $n = 3.92$ fm^{-3}. Bei Materie mit noch größeren Dichten sind keine gemischten Phasen mehr möglich, da die Neutralitätslinie bei einem Punkt $\mu = 465.7$ MeV, $\mu_8 = 32.4$ MeV, $\mu_3 = \mu_Q = 0$ die Phasengrenze verlässt. Neutrale Materie liegt dann als homogene CFL-Phase vor, wie wir sie in Kapitel 6.2 in Abb. 6.3 konstruiert haben.
Eine ausführliche Diskussion der Ergebnisse dieses Kapitels findet man auch in Referenz [29].

6.3.3 Abschätzung des Einflusses der Oberflächeneffekte

Die von uns konstruierten gemischten Phasen sind nur dann stabil, wenn der Gewinn an freier Energie, gegenüber einer neutralen, homogenen Phasen größer ist als die Oberflächenenergie und die Energie der elektrischen und der Farb-Felder, die man im Falle der gemischten Phase noch in Betracht ziehen muss. Die Bedingung für die Stabilität der von

Komponenten	μ [MeV]	n [fm^{-3}]
$2SC, CFL$	465.7-430.6	3.92-3.11
$2SC, CFL, 2SC_{us}$	430.6-427.1	3.11-2.93
$2SC, CFL, 2SC_{us}, SC_{us+ds}$	427.1-426.5	2.93-2.90
$2SC, CFL, SC_{us+ds}$	426.5-407.7	2.90-2.59
$2SC, SC_{us+ds}$	407.7-395.4	2.59-1.74
$2SC, SC_{us+ds}, 2SC_{us}$	395.4-388.8	1.74-1.56
$N, 2SC, SC_{us+ds}, 2SC_{us}$	388.8-388.7	1.56-1.56
$N, 2SC, SC_{us+ds}$	388.7-388.6	1.56-1.56
$N, 2SC$	388.6-340.9	1.56-0.00

Tabelle 6.3: *Komponenten der elektrisch- und farbneutralen gemischten Phasen mit den chemischen Potentialen μ, für die diese jeweils auftreten, sowie den dazugehörigen Gesamtdichten n.*

uns konstruierten gemischten Phasen lautet also:

$$\Omega_{\text{Gemisch}} + E^C + E^F + E^S < \Omega_{\text{Homogene Phase}}. \tag{6.32}$$

Dabei ist E^C die Energiedichte der Coulombenergie, E^F die Farbenergiedichte und E^S die Dichte der Oberflächenenergie.
Wir wollen hier keine datailierte Analyse, sondern nur eine Abschätzung der Oberflächeneffekte durchführen. Dabei folgen wir Referenz [27], in der eine solche Analyse für eine gemischte Phase aus hadronischer und CFL Materie gemacht wurde. Da eine hadronische Phase immer farbneutral ist, muss in diesem Fall auch die CFL-Phase farbneutral sein. Die Farbladung spielt in Referenz [27] demnach keine Rolle. Auch wir wollen den Einfluss der Farbenergie vernachlässigen und den Energieverlust außerdem nur für unsere Zwei-Phasen-Gemische berechnen.
Die Beiträge zur Oberflächen bzw. Coulombenergie einer gemischte Phase sind in Referenz [28] gegeben durch:

$$E^S + E^C = \left(4\pi\alpha_{em} d^2 f_d(x) x^2\right)^{1/3} \; (n_Q^{\chi_1} - n_Q^{\chi_2})^{2/3} \; \sigma_{QCD}^{2/3}. \tag{6.33}$$

Dabei ist die Coulombenergie genau halb so groß wie die Oberflächenenergie, $E^C = \frac{1}{2}E^S$.
Die Energie hängt davon ab, in welchen geometrischen Formen die beiden koexestierenden Phasen innerhalb des Gemisches vorliegen. In Referenz [28] wurden dabei verschiedene Geometrien in Betracht gezogen, die durch den Parameter d, sowie die Funktion $f_d(x)$ beschrieben werden. Für $d = 3$ ist eine der Phasen tropfenförmig in der anderen eingelagert. Auf diesen wohl einfachsten Fall wollen wir uns bei unserer Abschätzung beschränken.
Die Funktion $f_{d=3}(x)$ ist für diesen Fall gegeben durch:

$$f_3(x) = \frac{1}{5}(2 - 3x^{1/3} + x). \tag{6.34}$$

Der Parameter σ_{QCD} beschreibt die Stärke der Oberflächenspannung stark wechselwirkender Materie. Er ist zunächst völlig unbekannt und kann nicht mit der Hilfe unseres Modells berechnet werden, x gibt den Volumenanteil der selteneren Komponente des Zwei-Phasen-Gemisches an.
In Abb. 6.11 sind die Oberflächen und Coulombenergien für die zweikomponentige (2SC, CFL)-Phase bzw. für die (N ,2SC)-Phase als Funktion von μ, für eine Oberflächenspannung von $\sigma_{QCD} = 10$ MeV/fm^{-2} gezeigt. Der Energiegewinn, den die gemischten Phasen

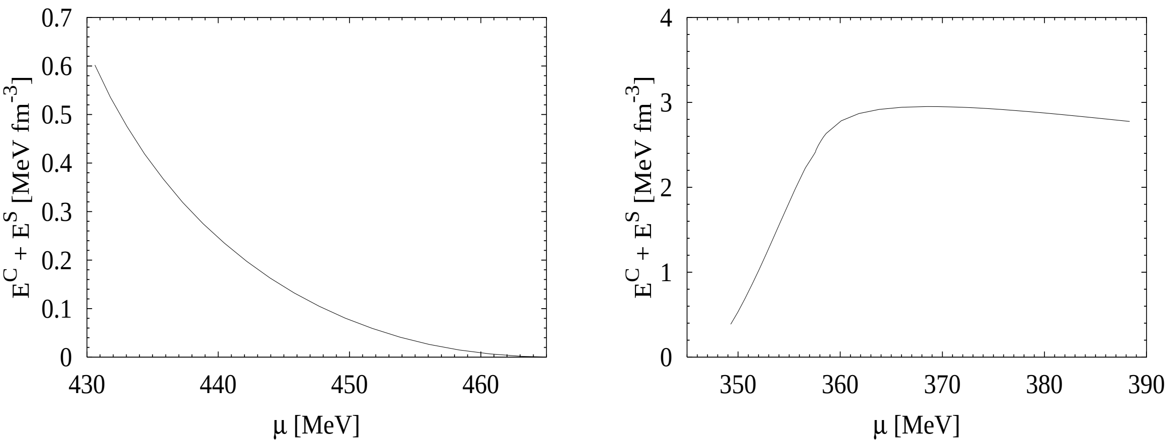

Abbildung 6.11: *Oberflächen und Coulombenergien,$E^C + E^S$, in Abhängigkeit vom chemischen Potential μ, für eine Oberflächenspannung von $\sigma_{QCD} = 10$ MeV/fm^{-2}. Links: (2SC, CFL)-Phase. Rechts: (N, 2SC)-Phase.*

gegenüber den neutralen homogenen Phasen besitzen, wird bereits für den hier gezeigten Wert von σ_{QCD} aufgebraucht.
Gegenüber der neutralen CFL-Phase hat die gemischte (CFL, 2SC)-Phase, lediglich einen Energiegewinn von nur $\Delta\Omega \approx 5 \cdot 10^{-4}$ MeV bei $\mu = 460.7$ MeV bzw. von $\Delta\Omega \approx 0.1 MeV$ am Rand der (CFL, 2SC)-Phase bei $\mu = 430.6$ MeV. Zusätzlich müsste man hier natürlich auch die Energie der Farbfelder berücksichtigen, da keine Komponenten des Phasengemischs für sich genommen farbneutral ist. Der Gewinn der freien Energie, den die gemischte (2SC,CFL)-Phase gegenüber der homogenen CFL-Phase hat ist in Abb. 6.12 gezeigt. Der Energiegewinn ist für alle chemischen Potentials deutlich kleiner als Oberflächen- und Coulombenergien, die in Abb. 6.11 gezeigt sind.
Für die (N, 2SC) gemischte Phase ergibt sich ein ähnliches Bild, wenn man sie mit einer homogenen 2SC-Phase vergleicht. Einem $\Delta\Omega \approx 2.4 MeV$ bei $\mu = 370 MeV$ steht einem durch die Oberflächeneffekte verursachten Energieverlust von $E^C + E^S \approx 3 MeV$ gegenüber.
Für die von uns konstruierten Phasen, die aus mehr als zwei Komponenten bestehen, ist

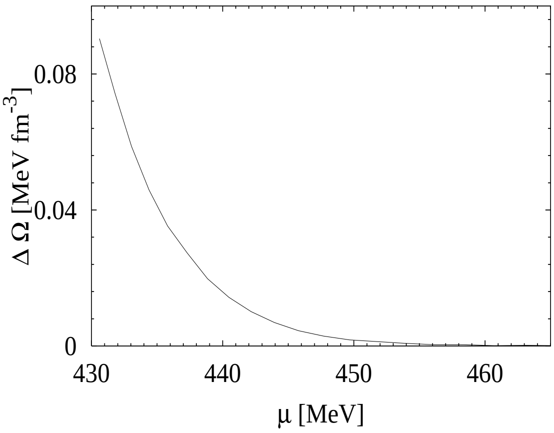

Abbildung 6.12: *Gewinn an freier Energie $\Delta\Omega$ der gemischten (2SC,CFL)-Phase gegenüber einer homogenen und neutralen CFL-Phase, in Abhängigkeit vom chemischen Potential μ.*

die Berechnung der Oberflächeneffekte zwar nicht ganz so einfach, qualitativ sollte man hier jedoch eher noch einen größeren Effekt erwarten, da sich die Oberflächen natürlich vergrößern, je mehr Phasen ins Spiel kommen.
Es gibt wichtige Hinweise darauf, dass der eigentliche Wert für die Oberflächenspannung wesentlich höher ist: $\sigma_{QCD} \approx 300$ MeV [27]. Durch die Oberflächeneffekte wird der Gewinn an freier Energie, den die gemischten Phasen gegenüber den neutralen homogenen Phasen haben mehr als aufgebraucht. Für ein festes chemisches Potential μ gibt es für alle gemischten Phasen energetisch günstigere homogene Lösungen.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war es zu untersuchen, inwieweit Farbsupraleitung in dichter Kernmaterie eine Rolle spielt. Unser Hauptaugenmerk haben wir dabei auf elektrisch neutrale und farbneutrale Kernmaterie gelegt, wie sie für Neutronensterne interessant ist.
Grundlage für die Berechnung der Kernmaterie bei hohen Dichten war das NJL-Modell, ein effektives Modell der starken Wechselwirkung.
Mit Hilfe des in Kapitel 3 vorgestellten Formalismus ist es gelungen, ein thermodynamisches Potential für das Modell zu berechnen. Mit der Hilfe dieses thermodynamischen Potentials waren wir dann in der Lage, Phasenübergänge zwischen der hadronischen und den verschiedenen farbsupraleitenden Phasen zu konstruieren.
Zunächst haben wir uns in Kapitel 4 mit einem vereinfachten Fall beschäftigt und den Quarks ein einheitliches quarkchemisches Potential zugeordnet. In dem in Abb. 4.2 gezeigten Phasendiagramm konnten wir vier Phasen unterscheiden, die durch Phasenübergänge erster und zweiter Ordnung voneinander getrennt sind. Diese vier Phasen sind: Die hadronische oder normale Phase, die 2SC-Phase, die CFL-Phase und das QGP.
Anschließend haben wir in Kapitel 4.2 eine Flavor mischende 't Hooft-Wechselwirkung eingeführt und erneut für verschieden Kopplungsstärken dieser Wechselwirkung ein Phasendigramm berechnet. Ziel war es zu untersuchen, ob die 't Hooft-Wechselwirkung einen großen Einfluß auf das Phasendiagramm hat. Die Ergebnisse sind in Abb. 4.5 dargestellt, qualitativ hat sich das Phasendiagramm durch die Einführung der 't Hooft-Wechselwirkung, nicht verändert.
In Kapitel 5.1 haben wir dann die Teilchen und Ladungsdichten unserer farbsupraleitenden Phasen berechnet. Wir haben dabei festgestellt, dass weder die 2SC- noch die CFL-Phase für ein einheitliches quarkchemisches Potential elektrisch neutral oder farbneutral sind. Im Falle der CFL-Phase war dies eine Überraschung, da man bisher der Ansicht war, die CFL-Phase müsse automatisch elektrisch- und farbneutral sein [18]. Wir haben festgestellt, dass man von der Vereinfachung eines einheitlichen quarkchemischen Potentials abrücken muss, wenn man elektrisch- und farbneutrale Materie konstruieren will.
In Kapitel 6 beschäftigten wir uns dann mit dem für Neutronensterne relevanten Fall

von β-stabiler Materie bei $T = 0$. Das β-Gleichgewicht führt dazu, dass sich die Zahl der voneinander unabhängigen chemischen Potentiale der Quarks auf vier reduziert: μ, μ_3, μ_8 und μ_Q. In Abb. 6.3 zeigten wir dann ein Phasendiagramm in Abhängigkeit von μ und μ_8, in ihm sind auch die Lösungen für eine vollständig neutrale CFL-Phase und eine farbneutrale 2SC-Phase eingezeichnet. Um die elektrische Neutralität der 2SC-Phase herzustellen, muss man ein negatives μ_Q einführen. Bevor jedoch der Punkt der elektrischen Neutralität erreicht wird, wird die 2SC-Phase instabil und es treten neue, bisher nicht bekannte Phasen auf. Beispielhaft für das Auftreten neuer farbsupraleitender Phasen haben wir in Abb. 6.4 ein Phasendiagramm in der μ, μ_Q Ebene gezeigt.
Im letzten Teil dieser Arbeit haben wir uns in Kapitel 6.3 mit der Möglichkeit der Bildung von gemischten Phasen beschäftigt. Dabei muss nicht jede der beteiligten Quarkphasen für sich, sondern nur das Phasengemisch als ganzes elektrisch- und farbneutral sein. Zunächst haben wir eine gemischte Phase aus CFL- und 2SC-Materie konstruiert. Ausgangspunkt der gemischten Phase war dabei der Punkt, bei dem die neutrale CFL-Phase in Abb. 6.3 die Phasengrenze zur 2SC-Phase schneidet. Wir haben diese gemischte Phase dann zu kleineren chemischen Potentialen μ verfolgt und festgestellt, dass auch noch andere farbsupraleitende Quarkphasen eine Rolle spielen, d.h. an der Mischung teilnehmen. Insgesamt erhält man neun verschiedene Gemische, diese sind zusammen mit den Dichtebereichen, für die sie gültig sind, in Tabelle 6.3 zusammengefasst.
Bei der Konstruktion der gemischten Phasen haben wir Oberflächeneffekte nicht berücksichtigt. Durch sie kann der Energiegewinn, den die gemischten Phasen gegenüber den neutralen homogenen Phasen haben wieder aufgebraucht werden. In Kapitel 6.3.3 haben wir dann die Oberflächen- und Coulombenergien für die (2SC,CFL)-Phase und für die (N,2SC)-Phase berechnet und an einigen Punkten mit dem Energiegewinn verglichen, der gegenüber einer homogenen, neutralen Phase auftritt. Die Oberflächeneffekte waren dabei in allen Fällen größer als der Energiegewinn. Die gemischten Phasen sind gegenüber den homogenen Phasen also nicht mehr energetisch begünstigt.
Natürlich konnten in dieser Arbeit nicht alle interessanten Fragen zum Thema farbsupraleitende Materie in Neutronensternen behandelt werden. Die folgenden Fragen stellen einen Auszug weitergehender Problemstellungen dar:

- Das NJL-Modell beinhaltet kein Confinement, die hadronische Phase wird daher durch das Modell nur schlecht beschrieben. Für kleine chemische Potentiale ist deshalb der Vergleich mit einer hadronischen Zustandsgleichung interessant. Insbesondere ist hier die Konstruktion eines Phasenübergangs zwischen einer korrekt beschriebenen hadronischen und den farbsupraleitenden Phasen, die man weiter mit Hilfe des NJL-Modells beschreiben würde, von Bedeutung.

- Der Einfluß der Oberflächeneffekte muss genauer untersucht werden. Zum einen muss untersucht werden, wie die Oberflächenenergien für gemischte Phasen aus mehr als zwei Komponenten berechnet werden müssen. Zum anderen kommen bei den von uns konstruierten Gemischen auch noch Energien von Farbfeldern ins Spiel, von denen wir noch nicht wissen, wie wir diese in Rechnung stellen müssen. Des weiteren sind neben der von uns gewählten Tropfen-Geometrie der gemischten Phasen auch noch andere Geometrieen denkbar, wie z. B. die in Referenz [28] diskutierten Pasta-Phasen.

- Bisher wurde noch nicht überprüft, ob die Dichten bzw. chemischen Potentiale in einem Neutronenstern tatsächlich ausreichen, um farbsupraleitende Quarkmaterie vorfinden zu können.

- Bei dem kompakten stellaren Objekt RX J 185635-3754 ging man zunächst davon aus, einen Quark-Stern gefunden zu haben. Die Meßergebnisse für Masse und Radius konnten nur mit Hilfe einer Zustandsgleichung für Quark-Materie erklärt werden [30]. Die Meßdaten wurden inzwischen jedoch korrigiert und können jetzt auch mit Hilfe hadronischer Zustandsgleichungen erklärt werden [31]. Auch für farbsupraleitende Materie ist es möglich, den Radius eines Sterns in Abhängigkeit seiner Masse zu berechnen. Die Messung von Radius und Masse eines entfernten stellaren Objekts sind jedoch mit sehr großen Unsicherheiten behaftet. Es wäre deshalb wichtig zu untersuchen, ob es noch andere beobachtbare Phänomene gibt, die durch die Farbsupraleitung hervorgerufen werden.

- Schon seit geraumer Zeit wird diskutiert, ob Materie mit Strange-Quarks den absoluten Grundzustand der Materie darstellen könnte [32, 33]. Im Rahmen eines NJL-Modells ohne Farbsupraleitung wurde diese Frage bereits untersucht [34]. Die Einergiedichte pro Baryon ist in diesem Fall größer, als die Energiedichte pro Baryon des stabilsten Isotops, des ^{56}Fe. Strange-Quark-Materie ist in diesem Modell also nicht absolut stabil. Es stellt sich die Frage, inwieweit sich dieser Sachverhalt für ein NJL-Modell mit Farbsupraleitung ändert. Untersuchumgen in dieser Richtung sind in Arbeit [35].

Anhang A

Details der Mean-Field Rechnungen

A.1 Linearisierung der Wechselwirkungsterme

A.1.1 Quark-Antiquark-Term

Der Quark-Antiquarkterm der Wechselwirkung ist durch (2.28) gegeben

$$\mathcal{L}_{q\overline{q}} = G\sum_{a=0}^{8}[(\overline{\psi}\tau^a\psi)^2 + (\overline{\psi}i\gamma_5\tau^a\psi)^2] - K[det_f\overline{\psi}^{T_f}(1+\gamma_5)\psi^{T_f} + det_f\overline{\psi}^{T_f}(1-\gamma_5)\psi^{T_f}]. \quad (A.1)$$

In diesem Teil der Wechselwirkung spielen die Diquarkgaps keine Rolle, man benötigt daher nur die Quark-Antiquark-Kondensate, alle anderen Kondensate setzen wir auf Null. Man erhält dann:

$$\begin{aligned} \langle a|\overline{a}\rangle &= \phi_a \quad a = u, d, s, & (A.2)\\ \langle a|\overline{b}\rangle &= 0 \quad a \neq b, & (A.3)\\ \langle a|i\gamma_5|\overline{a}\rangle &= 0 \quad a, b = u, d, s. & (A.4)\end{aligned}$$

Jetzt entwickelt man die Wechselwirkung um diese Erwartungswerte

$$\overline{a}\mathcal{O}b = \langle a|\mathcal{O}|b\rangle + \epsilon(\overline{a}\mathcal{O}b). \quad (A.5)$$

Dabei ist $\epsilon \ll 1$, Beitrğe von ϵ^2 werden daher vernachlässigt.
Für den ersten Term der Wechselwirkung muss man nun explizit die Gestalt der Gell-Mann-Matrizen kennen. Man erhält hier z.B.:

$$\begin{aligned} \overline{\psi}\tau_3\psi &= (\overline{u}u - \overline{d}d)^2\\ &\approx \phi_u^2 + 2\phi_u\epsilon(\overline{u}u) + \phi_d^2 + 2\phi_d\epsilon(\overline{d}d) - 2(\phi_u\phi_d + \phi_u\epsilon(\overline{d}d) + \phi_d\epsilon(\overline{u}u))\\ &\approx 2\overline{u}(\phi_u - \phi_d)u + 2\overline{d}(\phi_d - \phi_u)d + 2\phi_u\phi_d - (\phi_u^2 + \phi_d^2). \end{aligned}$$

Im zweiten Term, die 't Hooft-Wechselwirkung, muss man zuerst die Flavor-Raum-Determinante ausführen. Anschließend geht man analog vor. Man erhält dann (3.6):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{q\overline{q}}^{MF} &= \overline{u}(4G\phi_u + 2K\phi_d\phi_s)u + \overline{d}(4G\phi_d + 2K\phi_u\phi_s)d + \overline{s}(4G\phi_s + 2K\phi_u\phi_d)s \\ &\quad -4K\phi_u\phi_d\phi_s + 2G[\phi_u^2 + \phi_d^2 + \phi_s^2]. \qquad (A.6)\end{aligned}$$

A.1.2 Quark-Quark-Term

Die Quark-Quark-Wechselwirkung ist durch Gleichung (2.28) gegeben. Mit Hilfe der Eigenschaften der Ladungskonjugation kann man leicht zeigen, dass man die Quark-Quark-Wechselwirkung in der folgenden Form schreiben kann,

$$\mathcal{L}_{qq} = H \sum_{A=2,5,7} \sum_{A'=2,5,7} (\psi^T C\gamma_5\tau_A\lambda_{A'}\psi)^\dagger(\psi^T C\gamma_5\tau_A\lambda_{A'}\psi). \qquad (A.7)$$

Im Falle dieses Terms sind die entscheidenden Kondensate die Diquark-Kondensate, um diese Erwartungswerte wird dann die Lagrangedichte entwickelt:

$$\begin{aligned}\langle\psi^T C\gamma_5\tau_A\lambda_A\psi\rangle &= s_{AA}, & (A.8)\\ \langle\psi^T C\gamma_5\tau_A\lambda_{A'}\psi\rangle &= 0 \quad A \neq A'. & (A.9)\\ & & (A.10)\end{aligned}$$

Damit fallen alle Terme in Gleichung (A.7), in denen $A \neq A'$ ist, weg und man erhält:

$$\begin{aligned}(\psi^T C\gamma_5\tau_A\lambda_A\psi) &= s_{AA} + \epsilon(\psi^T C\gamma_5\tau_A\lambda_A\psi), & (A.11)\\ (\psi^T C\gamma_5\tau_A\lambda_A\psi)^\dagger &= s_{AA}^* + \epsilon^*(\psi^T C\gamma_5\tau_A\lambda_A\psi)^\dagger. & (A.12)\end{aligned}$$

Dies setzt man ein, man erhält:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{qq}^{MF} &= H\sum_{A=2,5,7} |S_{AA}|^2 + [(\psi^T C\gamma_5\tau_A\lambda_A\psi)^\dagger - S_{AA}^*] \\ &+ S_{AA}^*[(\psi^T C\gamma_5\tau_A\lambda_A\psi) - S_{AA}] \qquad (A.13)\\ &= H\sum_{A=2,5,7} \left(S_{AA}^*(\psi^T C\gamma_5\tau_A\lambda_A\psi) + S_{AA}(\psi^T C\gamma_5\tau_A\lambda_A\psi)^\dagger - |S_{AA}|^2\right). \qquad (A.14)\end{aligned}$$

Nun führt man noch die Diquarkgaps ein

$$\Delta_A = -2HS_{AA} \qquad A = 2,5,7 \qquad (A.15)$$

und erhält das Ergebnis (3.7)

$$\mathcal{L}_{qq}^{MF} = \sum_{A=2,5,7} [\frac{1}{2}\overline{\psi}(\Delta_A\gamma_5\tau_A\lambda_A)C\overline{\psi}^T - \frac{1}{2}\psi^T C(\Delta_A^*\gamma_5\tau_A\lambda_A)\psi + \frac{1}{4H}|\Delta_A|^2]. \qquad (A.16)$$

A.2 Ladungskonjugation

Die Ladungskonjugation ist so definiert, dass ein Fermion ψ mit bestimmtem Spin in ein Antifermion ψ^C mit dem gleichen Spin umgewandelt wird. Die Dirac-Gleichungen für Fermion und Antifermion in einem elektromagnetischen Feld sind gegeben durch:

$$0 = [\gamma^\mu(i\partial_\mu + eA_\mu) - m]\psi, \tag{A.17}$$
$$0 = [\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\psi^C. \tag{A.18}$$

Um ψ mit ψ^C in Verbindung zu bringen, betrachten wir die komplex konjugierte Gleichung von Gleichung (A.17)

$$0 = [\gamma^{\mu *}(i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\psi^*. \tag{A.19}$$

Wir definieren nun die Matrix, die ψ mit ψ^C in Relation setzen soll mit:

$$\psi^C = \tilde{C}\psi^* = (C\gamma_0)\psi^*. \tag{A.20}$$

Alternativ dazu kann man auch schreiben:

$$\psi^C = C\overline{\psi}^T. \tag{A.21}$$

Damit ist also $C\overline{\psi}^T$ das Antifermionenfeld.
Setzt man dies in (A.19) ein und vergleicht mit der Dirac-Gleichung für das Antifermion, kann man leicht eine Bedingung für C ableiten:

$$-C\gamma^0\gamma^{\mu *} = \gamma^\mu C\gamma^0. \tag{A.22}$$

Die folgende Wahl für die Ladungskonjugationsmatrix erfüllt diese Bedingungen:

$$C = i\gamma^2\gamma^0. \tag{A.23}$$

Eigenschaften der Ladungskonjugation

Unter Zuhilfenahme der Eigenschaften der γ Matrizen kann man für die Ladungskonjugationsmatrix C die folgenden Eigenschaften ableiten:

$$C^{-1} = C^T = C^\dagger = -C^* = -C, \tag{A.24}$$

$$C^{-1}i\gamma_5 C = i\gamma_5, \tag{A.25}$$
$$C^{-1}\gamma^\mu C = -{\gamma^\mu}^T, \tag{A.26}$$
$$C^{-1}\gamma^\mu\gamma_5 C = -{\gamma^\mu}^T\gamma_5. \tag{A.27}$$

Anhang B

Berechnung der Matsubara-Summe

Unser Ziel ist hier die Berechnug einer Matsubara-Summe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left[\frac{1}{T^2}(\omega_n^2 + Z^2)\right]. \tag{B.1}$$

Dabei soll Z eine beliebige, von n unabhängige reelle Zahl sein, $\omega_n = (2n+1)\pi T$ sind die fermionischen Matsubara-Frequenzen:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \frac{1}{T^2}(\omega_n^2 + Z^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left((2n+1)^2\pi^2 + \frac{Z^2}{T^2}\right). \tag{B.2}$$

Wir berechnen nun zunächst das folgende Wegintegral in der komplexen Ebene:

$$\int_C \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{e^\omega + 1} \frac{1}{\omega^2 - x}. \tag{B.3}$$

Die Polstellen des Integranden sowie die beiden Wege entlang derer die Integration durchgeführt werden soll, sind in Abbildung B.1 eingezeichnet. Welchen Weg man dabei benutzt, spielt keine Rolle, da man den einen Weg jeweils aus einer Deformation des anderen Weges erhalten kann

$$\int_{C_1} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{e^\omega + 1} \frac{1}{\omega^2 - x} = \int_{C_2} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{e^\omega + 1} \frac{1}{\omega^2 - x}. \tag{B.4}$$

Diese beiden Integrale kann man nun mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel auswerten. Daraus erhält man dann:

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2\pi^2 + x} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1 - \frac{2}{e^{\sqrt{x}} + 1}\right). \tag{B.5}$$

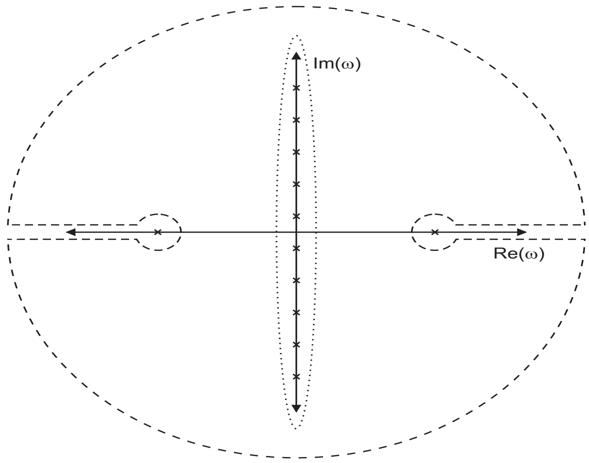

Abbildung B.1: *Die beiden Konturen C_1 (gepunktete Linie) und C_2 (gestrichelte Linie) zur Berechnung der Matsubara-Summe. Eingezeichnet sind die Polstellen des Integranden von Gleichung (B.3) bei $Re(\omega) = \pm\sqrt{x}$, $Im(\omega) = 0$ und bei $Re(\omega) = 0$, $Im(\omega) = (2n+1)\pi$.*

Als nächstes berechnen wir das folgende einfache Integral

$$\int_1^{Z^2/T^2} \frac{dx}{(2n+1)^2\pi^2 + x} = \ln\Big[\frac{1}{T^2}\Big((2n+1)^2\pi^2 + \frac{Z^2}{T^2}\Big)\Big] - \ln\Big[(2n+1)^2\pi^2 + 1\Big]. \quad \text{(B.6)}$$

Nachdem wir von diesem Ausdruck die Summe über alle n gebildet haben, können wir auf der linken Seite Gleichung (B.5) einsetzen und erhalten:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln\Big[\frac{1}{T^2}(\omega_n^2 + Z^2)\Big] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln\Big[(2n+1)^2\pi^2 + 1\Big] + \int_1^{Z^2/T^2} \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big(1 - \frac{2}{e^{\sqrt{x}}+1}\Big). \quad \text{(B.7)}$$

Auf der linken Seite steht also bereits die Matsubara-Summe, die es ursprünglich zu berechnen galt.
Wir benötigen dieses Ergebnis für die Berechnung eines Thermodynamischen Potentials, der erste Term auf der linken Seite ist dafür aber irrelevant, da man alle physikalischen Größen aus Ableitungen des Potentials bestimmt. Nach Auswerten des Integrales und der Streichung weiterer konstanter Terme bekommt man dann das Endergebnis:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln\Big[\frac{1}{T^2}(\omega_n^2 + Z^2)\Big] = \frac{2}{T}\Big[\frac{1}{2}|Z| + T\ln\Big(1 + e^{-|Z|/T}\Big)\Big]. \quad \text{(B.8)}$$

Literaturverzeichnis

[1] T. Mayer-Kuckuk, *Kernphysik*, 4. Auflage, Teubner-Studienbücher, Stuttgart 1984.

[2] A. Zilges, Skript zur Vorlesung *Kernphysik I*, TU-Darmstadt im Sommersemester 2000.

[3] Ch. Kittel, *Einführung in die Festkörperphysik*, 12. Auflage, R. Oldenbourg Verlag, München 1999.

[4] J. Bardeen, L. N. Cooper und J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **106**, 162 (1957)

[5] K. Rajagopal and F. Wilczek, to appear as Chapter 35 in the Festschrift in honor of B. L. Ioffe, ,,At the Frontier of Particle Physics / Handbook of QCD", M. Shifman, ed., (World Scientific).

[6] M. Peskin and D. Schroeder, *An introduction to quantum field theory*, Addison-Wesley Publishing Company, fifth printing, 1997.

[7] G. 't Hooft, Phys. Rep. 142 Nr. 6 (1986)

[8] Y. Nambu and G. Jona−Lasinio, Phys Rev. 122, 345 (1961); 124, 246 (1961)

[9] S. P. Klevansky, Rev. Mod. Phys. 64 (1992) 649.

[10] T. Hatsuda, T. Kunihiro, Phys. Rep. 247 (1994) 221.

[11] U. Vogl, W. Weise, Progr. Part. Nucl. Phys. 27 (1991) 195.

[12] M. Buballa and M. Oertel, Nucl. Phys. A 703 (2002) 770-784.

[13] Z. Fodor, Plenary talk given at Quark Matter '02, Nantes, July 18-24, 2002

[14] J. I. Kapusta, *Finite-temperature field theory*, Cambridge University Press, Cambridge 1993

[15] M. Buballa, J. Hošek and M. Oertel, Phys. Rev. D65 (2002) 014018

[16] M. Alford, J. Berges, K. Rajagopal, Nucl.Phys. B558 (1999) 219-242

[17] P. Rehberg, S. P. Klevansky and J. Hüfner, Phys. Rev. C 53 (1996) 410.

[18] K. Rajagopal and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 86 (2001), 3492.

[19] A. Steiner, S. Reddy and M. Prakash, hep-ph/0205201.

[20] F. Weber, Acta Phys. Polon. B30 (1999) 3149.

[21] "Physics of Neutron Star Interiors", D. Blaschke, N. K. Glendenning and Sedrakian (eds.), Springer, in press, 2002

[22] R. D. Pisarski and D. H. Rischke, Phys. Rev. D 61, 051501, 074017 (2000)

[23] N. K. Glendenning, *Compact Stars*, Springer-Verlag, New York 1997.

[24] T. Schäfer, Phys. Rev. D 62 (2000) 094007.

[25] M. Buballa, J. Hošek and M. Oertel, hep-ph/0204275

[26] M. Alford and K. Rajagopal, JHEP 0206 (2002) 031.

[27] M. Alford, K. Rajagopal, S. Reddy and F. Wilczek, Phys. Rev. D64 (2001) 074017.

[28] D .G. Ravenhall, C. J. Pethick and J. R. Wilson, Phys. Rev. Lett. 50, 2066 (1983).

[29] F. Neumann, M. Buballa and M. Oertel, Nucl. Phys. A im Druck, hep-ph/0210078.

[30] J. J. Drake et al., Astrophys. J. 572 (2002) 996-1001

[31] F. M. Walter and J. Lattimer, submitted to Astrophys. J., astro-ph/0204199

[32] A. R. Bodmer, Phys. Rev. D 4 (1971) 1601.

[33] E. Witten, Phys. Rev. D 30 (1984) 272.

[34] M. Buballa, M. Oertel, Phys. Lett. B, (1999) 261.

[35] M. Buballa, F. Neumann, M. Oertel, in Vorbereitung.

Danksagung

Zunächst möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. J. Wambach bedanken, der mir die Gelegenheit gegeben hat, meine Diplomarbeit über dieses interessante Thema zu schreiben.

Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer Herrn Dr. M. Buballa, von dem die Idee für diese Arbeit stammt. Seine große Hilfsbereitschaft und die Bereitschaft, jederzeit über die weitere Vorgehensweise zu diskutieren, waren für diese Diplomarbeit sehr wichtig.

Bei Frau Dr. M. Oertel bedanke ich mich für die wertvolle Zusammenarbeit und Diskussionen.

Für die ständige Unterstützung bei Computer-Problemen möchte ich mich bei Herrn Dipl. Phys. T. Roth und Herrn Dipl. Phys. C. Isselhorst bedanken.

Allen Mitgliedern der Arbeitsgruppe möchte ich für die angenehme Atmosphäre und ständige Hilfsbereitschaft danken.

Zuletzt möchte ich mich bei meiner Mutter Ilse für die finanzielle und moralische Unterstützung während meines gesamten Studiums bedanken. Meinem Vater Hartmut gilt mein Dank für die finanzielle Unterstützung.

Erklärung zur Diplomarbeit gemäß §Abs. 6 DPO/AT

Hiermit versichere ich, die Diplomarbeit ohne Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus diesen Quellen entnommen wurden, sind als solche kentlich gemacht worden. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Darmstadt, den ??.??. 2002

Frederik Neumann