Diplomarbeit

Modifikation des σ-Mesons in dichter Materie

Carsten Isselhorst

Januar 2001

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die moderne Hadronenphysik beschäftigt sich mit der Beschreibung von Teilchen, die der starken Wechselwirkung unterliegen. Die starke Wechselwirkung ist dabei die stärkste der vier bekannten Wechselwirkungen – Gravitation, Elektromagnetismus, schwache Wechselwirkung und starke Wechselwirkung – allerdings ist ihre Reichweite sehr kurz: Die starke Kernkraft hat eine Reichweite von etwa 1 fm, was in der Größenordnung der Radien leichter Kerne liegt. Stark wechselwirkende Teilchen werden Hadronen genannt. In den 50er Jahren wurden experimentell eine Vielzahl an Hadronen entdeckt, so daß die Vorstellung, daß Hadronen elementare Teilchen sind, in Frage gestellt wurde. Im Jahre 1964 wurde von Gell-Mann und Zweig [1], [2] vorgeschlagen, daß die Vielzahl der entdeckten Hadronen aus elementareren Teilchen, den sogenannten Quarks, aufgebaut sind. Im Rahmen von gruppentheoretischen Überlegungen kann man damit die Vielzahl der Hadronen als Quarkmultipletts sehr gut verstehen.

Mit diesen Quarks lassen sich die Hadronen in zwei Untergruppen unterteilen: Zum einen in Baryonen, die aus drei Quarks aufgebaut sind, und zum anderen in Mesonen, die aus einem Quark-Antiquark-Paar bestehen. Quarks existieren dabei in sechs unterschiedlichen „Flavours" („up", „down", „strange", „charm", „bottom" und „top"), wobei das top-Quark als letztes der sechs Quarks im Jahre 1995 nachgewiesen wurde [3]. Quarks sind Fermionen und unterliegen somit dem Pauli-Prinzip, welches besagt, daß zwei Fermionen sich in mindestens einer Quantenzahl voneinander unterscheiden müssen. Die Ω^--Resonanz etwa, die aus drei strange-Quarks besteht, hat für den Fall, daß die Spins der drei s-Quarks ausgerichtet sind, eine symmetrische Wellenfunktion. Dies widerspricht allerdings dem Pauli-Prinzip und man kann daraus ableiten, daß Quarks eine weitere Quantenzahl besitzen müssen, um eine total antisymmetrische Wellenfunktion für das Ω^--Teilchen zu erhalten. Diese bezeichnet man als „Farbe" und ordnet ihr drei verschiedene Werte zu. Allerdings konnte diese Quantenzahl bisher nie beobachtet werden, da alle Hadronen „farblos" sind, also als Farbsinguletts auftreten, obwohl sie aus Quarks zusammengesetzt sind, die Farbe tragen. Daher postuliert man das sogenannte „Confinement", das das Auftreten von freien farbigen Teilchen verbietet.

Als Theorie der starken Wechselwirkung wurde Anfang der siebziger Jahre die Quanten-

chromodynamik (QCD) entwickelt. Diese ist eine renormierbare Eichtheorie analog zur Quantenelektrodynamik (QED). Die Wechselwirkung der Quarks untereinander wird dabei über die masselosen Eichbosonen der Theorie, die Gluonen, vermittelt. Die Lagrangedichte der QCD ist invariant unter $SU(3)$-Rotationen im Farbraum. Die $SU(3)$ ist aber im Gegensatz zur $U(1)$ – der Eichgruppe der QED – eine nichtabelsche Gruppe, so daß die Gluonen selbst Farbladung tragen und miteinander wechselwirken.
Eine direkte Folge dieser Selbstwechselwirkung der Gluonen ist, daß die Kopplungskonstante der QCD im Niedrigenergiebereich sehr groß ist und eine störungstheoretische Behandlung, die im Rahmen der QED sehr erfolgreich angewendet werden kann, unmöglich macht. Bei hohen Impulsüberträgen ist die Kopplungskonstante allerdings soweit abgeschwächt, daß eine störungstheoretische Behandlung der QCD möglich ist. Dieser Effekt ist als asymptotische Freiheit bekannt: Für extrem hohe Impulsüberträge verschwindet die Kopplungskonstante und die Quarks und Gluonen sind somit freie Teilchen. Die Beschreibung der Hadronen durch die QCD gestaltet sich aufgrund des nichtperturbativen Charakters im Niedrigenergiebereich als äußerst schwierig. Im Rahmen der Gitter-Eichtheorie wird versucht, die QCD numerisch zu lösen, wobei bereits einige Erfolge vor allem bei endlicher Temperatur erzielt wurden, allerdings ist es bisher nicht gelungen den Aufbau der Hadronen komplett im Rahmen der Gitterrechnung zu verstehen. Daher versucht man die Hadronen mit phänomenologischen Modellen zu beschreiben, wobei man als relevante Freiheitsgrade nicht mehr Quarks und Gluonen betrachtet, sondern Hadronen. Dabei wird allerdings versucht, die der QCD zugrundeliegenden Symmetrien zu berücksichtigen.
Eine wichtige Symmetrie ist in diesem Zusammenhang die chirale Symmetrie, die im Fall verschwindender Quarkmassen erfüllt ist. Die Lagrangedichte der QCD ist in diesem Fall invariant unter Flavour-Rotationen rechts- und linkshändiger Quarkfelder, also Quarks mit Helizität $+1$ oder -1. Wenn wir uns auf die nahezu masselosen up- und down-Quarks beschränken ($m_u \sim 1-5$ MeV $m_d \sim 3-9$ MeV [4]), ist die chirale Symmetrie sehr gut erfüllt. Als Folge dieser Symmetrie ist, sowohl im mesonischen, wie auch im baryonischen Sektor das Auftreten chiraler Dubletts gleicher Masse zu erwarten. Diese Dubletts werden allerdings unterhalb einer Massenskala von $1.5-2$ GeV nicht beobachtet. Zusammen mit der Tatsache, daß die Pionen im Vergleich zu anderen Mesonen eine viel geringere Masse haben, folgt daraus, daß die chirale Symmetrie spontan gebrochen ist. Aus der spontanen Brechung dieser $SU(2)\otimes SU(2)$-Symmetrie fordert das Goldstone-Theorem das Auftreten von drei masselosen Goldstone-Bosonen, die mit den Pionen identifiziert werden können. Aufgrund der expliziten Brechung der chiralen Symmetrie durch die nichtverschwindenden Quarkmassen erhält das Pion dann seine endliche Masse. Diese Eigenschaft nutzt man in der chiralen Störungstheorie aus, die im Niederenergiebereich Vorhersagen über das Verhalten der Hadronen, insbesondere der Pionen, treffen kann. Rechnungen im Rahmen der Gitter-QCD zeigen aber, daß diese spontan gebrochene Symmetrie bei endlicher Temperatur wiederhergestellt wird, so daß man bei dieser Temperatur chirale Dubletts gleicher Masse erwartet. Änderungen der Mesonen im Medium können also ein Hinweis auf eine (teilweise) Restaurierung dieser Symmetrie liefern.
Im Rahmen dieser Arbeit werden wir uns mit einem phänomenologischen Modell zur Be-

schreibung des σ-Mesons beschäftigen, dessen relevante Freiheitsgrade die Pionen und das σ-Meson sind. Das σ-Meson koppelt sehr stark an zwei Pionen und ist im Vakuum eine Resonanz mit einer Zerfallsbreite von mehreren hundert MeV, so daß die Frage, ob man beim σ-Meson von einem Teilchen sprechen kann, heftig umstritten ist. Dennoch gibt es mehrere Gründe, warum man an den Eigenschaften des σ-Mesons interessiert ist: Für die Attraktion des Nukleon-Nukleon-Potentials im Bereich mittlerer Entfernungen von $1-1.5$ fm wird der Austausch eines effektiven σ verantwortlich gemacht. Daher ist man daran interessiert, wie sich das σ in dichter Materie verhält. Für andere Mesonen, wie etwa das ρ-Meson, sind derartige Untersuchungen bereits erfolgreich durchgeführt worden [5].
Ein weiterer wichtiger Punkt ist, daß das σ-Meson der chirale Partner des Pions ist (im Sinne der oben angesprochenen chiralen Dubletts), und Modifikationen des σ-Mesons Rückschlüsse auf eine Restaurierung der chiralen Symmetrie geben könnten. Bei einer Wiederherstellung der Symmetrie würde man erwarten, daß die Masse des Pions gleich der des σ ist, sich die Masse des σ also aufgrund der chiralen Symmetrie reduziert – die Pionmasse sollte nahezu konstant bleiben, da die Pionen Goldstone-Bosonen sind. Insbesondere besteht großes Interesse daran, den Phasenübergang von der spontan gebrochenen Phase in die chiral symmetrische Phase zu bestimmen. Für verschwindende Baryonendichte, gleichbedeutend mit verschwindendem chemischen Potential μ, wird von Gitterrechnungen der QCD eine kritische Temperatur $T_c \approx 150$ MeV für den Phasenübergang vorhergesagt [6]. Für endliches chemisches Potential μ sollte ebenso ein Phasenübergang auftreten. Voraussagen über das kritische chemische Potential μ_c lassen sich allerdings nur schwer treffen. In diesem Zusammenhang können insbesondere Änderungen des σ-Mesons bei endlicher Temperatur oder endlicher Dichte Hinweise auf den Phasenübergang oder zumindest die (teilweise) Wiederherstellung der chiralen Symmetrie liefern.
Aus diesem Grund sind in letzter Zeit mehrere Experimente durchgeführt worden, die das Verhalten des σ-Mesons im Medium untersuchen. Dabei wurden Experimente durchgeführt, in denen im Ausgangskanal ein Pionenpaar mit den Quantenzahlen des σ-Mesons detektiert wurde. Von der CHAOS-Kollaboration wurde die Pionproduktionsreaktion $(\pi^+ A \rightarrow \pi^+\pi^- A')$ an mehreren Kernen gemessen [7]. Mit steigender Massenzahl der Kerne wurden im Wirkungsquerschnitt eine Zunahme von Stärke in der Nähe der Produktionsschwelle für zwei Pionen beobachtet. Von der „Crystal Ball Collaboration“ wurde ebenfalls eine Pionproduktionsreaktion betrachtet: $\pi^- A \rightarrow \pi^0\pi^0 A'$ [8]. Schließlich wird derzeit bei MAMI die Photoproduktionsreaktion $(\gamma A \rightarrow \pi^0\pi^0 A')$ untersucht [9].
Auch von experimenteller Seite liegen also Daten über das Verhalten des σ-Mesons in Kernreaktionen vor. Aus der Analyse der gemessenen Wirkungsquerschnitte könnten dabei ebenfalls Hinweise auf eine Modifikation des σ-Mesons geliefert werden. Aus den oben genannten Gründen ist es naheliegend, eine theoretische Beschreibung des σ-Mesons zu entwickeln, die insbesondere auch die Bedingungen aus der chiralen Symmetrie berücksichtigt. Von daher werden wir in unserem Modell großen Wert darauf legen, daß die chirale Symmetrie erfüllt ist. Bei Nichtberücksichtigung der chiralen Symmetrie wurde von Z.Aouissat et al. [10] im Rahmen eines Modells zur Beschreibung des σ-Mesons gezeigt, daß Pionpaarkondensation bereits bei nuklearer Sättigungsdichte einsetzt.

Als Ausgangspunkt zur Beschreibung des σ wählen wir das lineare σ-Modell, das 1960 von Lévy und Gell-Mann eingeführt wurde. Dieses ist ein chiral symmetrisches Modell mit Pionfeldern und einem σ-Feld, wobei wir aufgrund der endlichen Pionmasse eine explizite Brechung berücksichtigen. Im ersten Kapitel werden wir daraus unter Benutzung bekannter Methoden aus der Vielteilchenphysik eine symmetrieerhaltende Beschreibung des σ-Mesons ableiten. Insbesondere werden wir darauf achten, daß das Pion ein Goldstoneboson ist und deshalb seine Masse im chiralen Limes verschwindet.
Im zweiten Kapitel passen wir dann die Parameter unseres Modells an die experimentellen Streuphasen der $\pi\pi$-Streung im $I = J = 0$ Kanal an. Anschließend diskutieren wir das resultierende σ-Meson im Vakuum. Zusätzlich werden wir auch die $T_{\pi\pi}$-Streumatrix berechnen, die aufgrund von Ward-Identitäten mit den Zweipunktfunktionen des Pions und des σ-Mesons verknüpft ist.
Um Aussagen über eine teilweise Restaurierung der chiralen Symmetrie treffen zu können, werden wir dann das Modell im dritten Kapitel auf endliche Temperatur erweitern. Für den Fall, daß die explizite Brechung verschwindet, werden wir den Übergang von der Nambu-Goldstone-Phase, in der die Symmetrie spontan gebrochen ist, in die Wigner-Weyl-Phase, in der die Symmetrie wieder hergestellt ist, diskutieren.
Im vierten Kapitel werden wir dann Modifikationen in dichter Materie beschreiben. Dabei werden wir zunächst das Pion auf wohlbekannte Art und Weise renormieren, indem wir es an Teilchen-Loch- und Δ-Loch-Prozesse koppeln (siehe z.B. [11]). Für das σ-Meson werden wir eine dichteabhängige Massenreduzierung durch Kopplung an den sogenannten Tadpolegraphen einführen. Wir werden dann die Ergebnisse für den σ-Propagator und die $T_{\pi\pi}$-Streumatrix diskutieren. Im fünften Kapitel werden wir dann eine mögliche Anwendung des Modells beschreiben: Wir betrachten das von der CHAOS-Kollaboration durchgeführte „Knockout“-Experiment [7]. Der im Experiment beobachtete Anstieg des Wirkungsquerschnittes an der Produktionsschwelle für zwei Pionen ist möglicherweise eine Folge von Endzustandswechselwirkungen zweier Pionen. Diese kann man durch die $T_{\pi\pi}$-Streumatrix beschreiben. Dabei werden wir kurz noch auf die zugrundegelegte Reaktionstheorie eingehen, die die Verknüpfung zwischen dem Modell und dem Experiment herstellt.

Kapitel 2

Das lineare σ-Modell

2.1 Das Modell

Wir betrachten ein lineares $O(N+1)$ σ-Modell mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{1}{2}[(\partial_\mu\vec{\pi})^2 + (\partial_\mu\sigma)^2] - \frac{\mu_0^2}{2}[\vec{\pi}^2 + \sigma^2] - \frac{\lambda_0^2}{4N}[\vec{\pi}^2 + \sigma^2]^2 + \sqrt{N}c\sigma\,. \tag{2.1}$$

Dabei haben wir uns zunächst auf den mesonischen Teil beschränkt. Diese Lagrangedichte beinhaltet ein skalares σ-Feld und ein π-Feld mit N pseudoskalaren Komponenten. λ_0 steht für die „nackte" Kopplungskonstante und μ_0 ist der Massenparameter.
Die Lagrangedichte ist für $c = 0$ invariant unter Transformationen

$$\phi = \begin{pmatrix}\sigma\\ \vec{\pi}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\sigma\\ \vec{\pi}\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}\sigma\\ \vec{\pi}\end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

wobei die infinitesimale Verrückung gegeben ist durch

$$\delta\phi_j = \delta\omega_\alpha T^\alpha_{jk}\phi^k\,. \tag{2.3}$$

Die T^α_{jk} sind die Generatoren der $O(N+1)$ Gruppe. In unserem Fall sind die T^α_{jk} reelle, total antisymmetrische $(N+1)\times(N+1)$-Matrizen. Der zur Transformation gehörende Noetherstrom ergibt sich zu:

$$J^\alpha_\mu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial^\mu\phi_i)}T^\alpha_{ij}\phi_j = \partial_\mu\phi_i T^\alpha_{ij}\phi_j\,. \tag{2.4}$$

Das σ-Feld, das dem ϕ_0 entspricht, ist dabei besonders ausgezeichnet aufgrund des zusätzlichen Terms in der Lagrangedichte, und man kann den Noetherstrom in zwei Ströme aufspalten:

$$\begin{aligned} A^\alpha_\mu &= \partial_\mu\phi_0 T^\alpha_{0j}\phi_j + \partial_\mu\phi_i T^\alpha_{i0}\phi_0 = (\partial_\mu\sigma)\vec{\pi}^\alpha - (\partial_\mu\vec{\pi}^\alpha)\sigma\,,\\ V^\alpha_\mu &= \partial_\mu\pi_i T^\alpha_{ij}\pi_j\,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Der Strom A_μ^α ist dabei der Strom, der zu den Transformationen der Pionfelder in ein σ-Feld gehört. Im Fall $N = 3$ ist dies der bekannte Axialvektorstrom. V_μ^α ist der Strom, der zu den Rotationen der Pionen untereinander gehört. Der Term $\sqrt{N}c\sigma$ bricht explizit die Symmetrie.
Das σ-Meson besitzt in diesem Modell einen nichtverschwindenden Erwartungswert $\langle\sigma\rangle$. Nun kann man das σ-Feld um seinen Erwartungswert entwickeln, indem man ein verschobenes Feld $\tilde{\sigma}$ einführt:

$$\tilde{\sigma} = \sigma - \langle\sigma\rangle\,. \tag{2.6}$$

Drückt man die Lagrangedichte jetzt durch das verschobene σ-Feld aus, erhält man:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; & \frac{1}{2}[(\partial_\mu\vec{\pi})^2 + (\partial_\mu\tilde{\sigma})^2] - \frac{1}{2}(\mu_0^2 + \frac{\lambda_0^2\langle\sigma\rangle^2}{N})\vec{\pi}^2 - \frac{1}{2}(\mu_0^2 + \frac{3\lambda_0^2\langle\sigma\rangle^2}{N})\tilde{\sigma}^2 \\ & - \frac{\lambda_0^2}{4N}(\vec{\pi}^2 + \tilde{\sigma}^2)^2 + \tilde{\sigma}(\sqrt{N}c - \mu_0^2\langle\sigma\rangle - \frac{\lambda_0^2}{N}\langle\sigma\rangle^3) - \frac{\lambda_0^2 v}{N}\tilde{\sigma}(\vec{\pi}^2 + \tilde{\sigma}^2) + const.\,.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Daraus lassen sich sofort die Massen des Pion- und σ-Feldes in niedrigster Ordnung ablesen:

$$\begin{aligned} m_\pi^2 &= \mu_0^2 + \frac{\lambda_0^2}{N}\langle\sigma\rangle^2\,, \\ m_\sigma^2 &= \mu_0^2 + \frac{3\lambda_0^2}{N}\langle\sigma\rangle^2\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Den Vakuumerwartungswert $\langle\sigma\rangle$ des ursprünglichen Feldes kann man nun aus der Baumgraphen-Näherung berechnen. Diese besagt, daß der Vakuumerwartungswert eines Feldes gleich dem Wert des Feldes am Minimum des Potentials ist. Das Potential kann man dabei aus der Lagrangedichte ablesen und erhält:

$$\begin{aligned} V =& \frac{1}{2}(\mu_0^2 + \frac{\lambda_0^2\langle\sigma\rangle^2}{N})\vec{\pi}^2 + \frac{1}{2}(\mu_0^2 + \frac{3\lambda_0^2\langle\sigma\rangle^2}{N})\tilde{\sigma}^2 + \frac{\lambda_0^2}{4N}(\vec{\pi}^2 + \tilde{\sigma}^2)^2 \\ & - \tilde{\sigma}(\sqrt{N}c - \mu_0^2\langle\sigma\rangle - \frac{\lambda_0^2}{N}\langle\sigma\rangle^3) + \frac{\lambda_0^2 v}{N}\tilde{\sigma}(\vec{\pi}^2 + \tilde{\sigma}^2) - const.\,. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Per Konstruktion verschwindet der Vakuumerwartungswert des neuen Feldes: $\langle 0|\,\tilde{\sigma}\,|0\rangle = 0$. Man erhält somit als Bedingung:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial V}{\partial\tilde{\sigma}}\right|_{\tilde{\sigma}=0} &= -\mu_0^2\langle\sigma\rangle - \frac{\lambda_0^2}{N}\langle\sigma\rangle^3 + \sqrt{N}c = 0 \\ \Rightarrow \sqrt{N}c &= \langle\sigma\rangle(\mu_0^2 + \frac{\lambda_0^2}{N}\langle\sigma\rangle^2)\,. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Kombiniert man dieses Ergebnis mit Gl.(2.8), erhält man schließlich für die Massen:

$$\begin{aligned} m_\pi^2 &= \frac{\sqrt{N}c}{\langle\sigma\rangle}\,, \\ m_\sigma^2 &= m_\pi^2 + \frac{2}{N}\lambda_0^2\langle\sigma\rangle^2\,. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Im chiralen Limes (d.h. $c \to 0$) gilt es zwei Fälle zu unterscheiden.

- $\mu_0^2 > 0$: Aus Gl.(2.10) folgt dann, daß auch der Vakuumerwartungswert $\langle\sigma\rangle$ verschwindet und die Massen der Pionfelder gleich der des σ-Feldes sind. Die ursprüngliche Symmetrie der Lagrangedichte ist wiederhergestellt.

- $\mu_0^2 < 0$: In diesem Fall hingegen ist der Vakuumerwartungswert nach Gl.(2.10) gleich $\sqrt{-N\mu_0^2/\lambda_0^2}$ und es tritt spontane Symmetriebrechung auf. Das Theorem von Goldstone besagt nun, daß für jeden spontan gebrochenen Generator einer kontinuierlichen Symmetrie der Lagrangedichte ein masseloses Goldstone-Boson auftreten muß. Die $O(N+1)$-Rotationssymmetrie der Lagrangedichte wird durch den nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert des σ-Feldes gebrochen, während die $O(N)$-Symmetrie, die Rotationen der Pionen untereinander vollführt, erhalten bleibt. Die Gruppe $O(N+1)$ besitzt $N(N+1)/2$ Generatoren, die Gruppe $O(N)$ allerdings nur $N(N-1)/2$. Es werden also N Generatoren gebrochen und daher müssen auch N masselose Goldstone-Bosonen auftreten – die Pionen [12]. In der Baumgraphen-Näherung ist es offensichtlich, daß die Pionen Goldstone-Bosonen sind, da die Pionmasse direkt proportional zu c ist und im chiralen Limes verschwindet. Die Masse des σ-Feldes hingegen verschwindet aufgrund des Terms proportional zu $\langle\sigma\rangle^2$ nicht, da im Fall der spontanen Symmetriebrechung (also $\mu_0^2 < 0$) der Vakuumerwartungswert nicht verschwindet.

Für den Fall der expliziten Brechung erhalten nach Gl.(2.11) sowohl das Pion als auch das σ eine Masse. Von dem ursprünglich erhaltenen Strom aus Gl.(2.5) ist nun der Anteil A_μ^α nicht mehr erhalten:

$$\partial^\mu A_\mu^\alpha = \sqrt{N} c \pi^\alpha \,. \tag{2.12}$$

Dieses Ergebnis ist die sogenannte PCAC-Relation (**P**artial **C**onserved **A**xial **C**urrent). In einem späteren Abschnitt werden wir noch einmal auf dieses Ergebnis zurückkommen, um Aussagen über $\pi\pi$-Streuung im Bereich kleiner Energien treffen zu können.
Andererseits bleibt die Rotationssymmetrie der Pionen untereinander erhalten, so daß der zu diesen Transformationen zugehörige Strom, der Vektorstrom, weiterhin erhalten ist. Diese Symmetrie ist die Isospinsymmetrie, die bewirkt, daß die Massen des Isospintripletts (π^-, π^0, π^+) nahezu identisch sind.

2.2 Die Hartree-Fock-Bogoliubov-Näherung

In diesem Abschnitt werden wir den Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB) Formalismus vorstellen, in dem wir unser Modell beschreiben wollen. Die Grundidee des HFB-Formalismus

ist es, den exakten Grundzustand des Hamiltonoperators durch den Grundzustand von Quasiteilchen anzunähern. Durch Variation dieses neu eingeführten Quasiteilchengrundzustandes bestimmt man nun die spezielle Quasiteilchenbasis, in der die Grundzustandsenergie minimal ist. Aus dieser Bedingung kann man dann die Bogoliubov-Faktoren bestimmen, die die Transformation von der Teilchen- in diese spezielle Quasiteilchenbasis vollführen.
Die Teilchenbasis ist wie üblich durch Einführung von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren gegeben. Wir rechnen im Folgenden in einem Kasten mit endlichem Volumen V. Daraus folgt für die Feldoperatoren in der Lagrangedichte in Gl.(2.1):

$$\begin{aligned} \vec{\pi}(\vec{x}) &= \sum_q \frac{1}{\sqrt{V 2\omega_q}} (\vec{a}_q e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} + \vec{a}_q^\dagger e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}) \, , \\ \sigma(\vec{x}) &= \sum_q \frac{1}{\sqrt{V 2\omega_q}} (b_q e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} + b_q^\dagger e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}) \, , \end{aligned} \tag{2.13}$$

wobei ω_q für beide Felder gegeben ist durch

$$\omega_q = \sqrt{\mu_0^2 + \vec{q}^{\,2}} \, . \tag{2.14}$$

Die eingeführten Operatoren erfüllen die bekannten Kommutatorrelationen für Bosonen:

$$\begin{aligned} [a_{qi}, a_{q'j}] &= [b_q, b_{q'}] = 0 \\ [b_q, b_{q'}^\dagger] &= \delta_{qq'} \\ [a_{qi}, a_{q'j}^\dagger] &= \delta_{qq'}\delta_{ij} \, . \end{aligned} \tag{2.15}$$

Nun möchten wir diese Basis in eine Quasiteilchenbasis überführen, bezüglich der die Grundzustandsenergie minimal ist. Die allgemeinste Form einer linearen Transformation ist gegeben durch eine Rotation der ursprünglichen Operatoren in die Quasiteilchenoperatoren:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^\dagger & -V^\dagger \\ -V^T & U^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix} = \mathcal{W}^\dagger \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix} . \tag{2.16}$$

Für die in Gl.(2.16) eingeführte Matrix $\mathcal{W}^\dagger$ erhält man aus der Forderung, daß die Quasiteilchenoperatoren dieselben Vertauschungsrelationen erfüllen wie die Teilchenbasis, folgende Bedingung :

$$\mathcal{W}^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathcal{W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{2.17}$$

Nach dem Theorem von Bloch und Messiah [13] kann eine Matrix von diesem Typ in drei Transformationsmatrizen zerlegt werden:

$$\mathcal{W} = \mathcal{D}\bar{\mathcal{W}}\mathcal{C} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D^\star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X} & \bar{Y} \\ \bar{Y} & \bar{X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C^\star \end{pmatrix} . \tag{2.18}$$

Diese beinhalten zum einen eine unitäre Transformation der Teilchenoperatoren untereinander,

$$c_k^\dagger = \sum_l D_{lk} a_l^\dagger \,, \tag{2.19}$$

zum anderen eine unitäre Transformation der Quasiteilchenbasis,

$$\nu_k^\dagger = \sum_{k'} C_{kk'} \alpha_{k'}^\dagger \,, \tag{2.20}$$

und zusätzlich eine „spezielle“ Bogoliubovtransformation, die lediglich Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren zum gleichen Eigenwert q ineinander überführt

$$\alpha_q^\dagger = \; u_q a_q^\dagger - v_q a_{-q} \,. \tag{2.21}$$

Wir wählen in unserem Fall eine spezielle Bogoliubovrotation. Es ergeben sich folgende neue Quasiteilchenoperatoren :

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_q^\dagger &= \; u_q \vec{a}_q^\dagger - v_q \vec{a}_{-q} \,, \\ \beta_q^\dagger &= \; x_q b_q^\dagger - y_q b_{-q} - w^* \delta_{q0} \,. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Dabei hängen u_q,v_q,x_q und y_q nur von dem Betrag des Impulses ab und w ist eine komplexe Zahl. Der zusätzliche Translationsterm, der in der zweiten Gleichung auftritt, berücksichtigt den nichtverschwindenden Erwartungswert $\langle\sigma\rangle$ des σ-Feldes. Für bosonische Operatoren ist diese Verschiebung erlaubt und erhält die oben beschriebenen bosonischen Kommutatorrelationen. Durch diese Verschiebung ist sichergestellt, daß die Erwartungswerte von β_0 und β_0^+ trotz des nichtverschwindenden Erwartungswert des σ-Feldes im Vakuum verschwinden, während für die Operatoren b_0 und b_0^+ gilt:

$$\begin{aligned} \langle\sigma\rangle &= \frac{\langle b_0^+\rangle + \langle b_0\rangle}{\sqrt{V2\mu_0}} = \frac{(x_0+y_0)(w^\star + w) + (x_0+y_0)(\langle\beta_0^\dagger\rangle + \langle\beta_0\rangle)}{\sqrt{V2\mu_0}} \\ &= \frac{(x_0+y_0)(w^\star+w)}{\sqrt{V2\mu_0}} \,. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Damit die Transformation kanonisch ist, also die Quasiteilchenoperatoren dieselben Vertauschungsrelationen erfüllen wie die Operatoren der ursprünglichen Teilchenbasis, muß gelten:

$$\begin{aligned} [\alpha_{qi}, \alpha_{q'j}] &= [\beta_q, \beta_{q'}] = 0 \,, \\ [\beta_q^\dagger, \beta_{q'}] &= \delta_{qq'} \,, \\ [\alpha_{qi}^\dagger, \alpha_{q'j}] &= \delta_{qq'}\delta_{ij} \,. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Aus Gl.(2.22) folgt dann:

$$u_q^2 - v_q^2 = 1, \quad\; x_q^2 - y_q^2 = 1 \,. \tag{2.25}$$

Für den Grundzustand der Quasiteilchen, der durch die Forderung $\vec{\alpha}_q|HFB\rangle = \beta_q|HFB\rangle = 0$ bestimmt ist, kann man nach dem Theorem von Thouless [14] folgenden Ansatz machen:

$$|HFB\rangle = \exp\Big[\sum_q (z_1(q)\vec{a}_q^\dagger \vec{a}_{-q}^\dagger + z_2(q)b_q^\dagger b_{-q}^\dagger) + \frac{w}{x_0}b_0^+\Big]|0\rangle \equiv e^\Phi|0\rangle\,. \tag{2.26}$$

Dabei bezeichnet der Zustand $|0\rangle$ das Vakuum der ursprünglichen Operatoren ($\vec{a}_q\,|0\rangle = b_q\,|0\rangle = 0$). Aus der Forderung, daß die Quasiteilchenoperatoren diesen Grundzustand vernichten, erhält man unter Verwendung der Baker-Hausdorff-Formel:

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha}_q|HFB\rangle &= \Big(\vec{\alpha}_q + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}[\Phi,\vec{\alpha}_q]\Big)|0\rangle \\
&= \Big(u_q\vec{a}_q - v_q\vec{a}_{-q}^\dagger + 2u_q z_1(q)a_{-q}^\dagger\Big)\;|0\rangle \stackrel{!}{=} 0\,, \\
\beta_q|HFB\rangle &= \Big(\beta_q + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}[\Phi,\beta_q]\Big)|0\rangle \\
&= \Big(x_q b_{-q}^\dagger - y_q b_{-q}^\dagger - w\delta_{q0} + 2x_q z_2(q)b_{-q}^\dagger + w\delta_{q0}\Big)\;|0\rangle \stackrel{!}{=} 0\,.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Daraus kann man nun direkt Bedingungen für die Funktionen $z_i(q)$ ablesen:

$$z_1(q) = \frac{v_q}{2u_q}, \qquad z_2(q) = \frac{y_q}{2x_q}\,. \tag{2.28}$$

Wir haben eine Quasiteilchenbasis definiert, bezüglich der der neu eingeführte Grundzustand verschwindet. Als nächstes kann man nun die Felder und ihre konjugierten Impulse bezüglich der neuen Basis schreiben als

$$\begin{aligned}
\pi_j(\vec{x}) &= \sum_q \frac{1}{\sqrt{V2\omega_q}}(u_q+v_q)\Big(\alpha_{qj}e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} + \alpha_{qj}^\dagger e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}\Big)\,, \\
\dot{\pi}_j(\vec{x}) &= \sum_q \frac{1}{\sqrt{V2\omega_q}}(-i\omega_q)(u_q-v_q)\Big(\alpha_{qj}e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} - \alpha_{qj}^\dagger e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}\Big)\,, \\
\sigma(\vec{x}) &= \sum_q \frac{1}{\sqrt{V2\omega_q}}(x_q+y_q)\Big(\beta_q e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} + \beta_q^\dagger e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}\Big)\,, \\
\dot{\sigma}(\vec{x}) &= \sum_q \frac{1}{\sqrt{V2\omega_q}}(-i\omega_q)(x_q-y_q)\Big(\beta_q e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} - \beta_q^\dagger e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}\Big)\,.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Mit den Definitionen für die Felder können wir jetzt den Hamiltonoperator in der neuen Quasiteilchenbasis bestimmen. Zur Berechnung des Hamiltonoperators benutzen wir die in Gl.(2.7) angegebene Lagrangedichte. Damit ergibt sich die Hamiltondichte zu

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_0 \vec{\pi}} \dot{\vec{\pi}}(\vec{x}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_0 \sigma} \dot{\sigma}(\vec{x}) - \mathcal{L} = \dot{\vec{\pi}}^2(\vec{x}) + \dot{\sigma}^2(\vec{x}) - \mathcal{L} \\
&= \frac{1}{2}(\dot{\vec{\pi}}^2 + \dot{\sigma}^2 + (\nabla\vec{\pi})^2 + (\nabla\sigma)^2) + (\mu_0^2\langle\sigma\rangle + \frac{\lambda_0^2}{N}\langle\sigma\rangle^3 - \sqrt{N}c)\sigma \\
&+ \frac{1}{2}(\mu_0^2 + \frac{\lambda_0^2}{N}\langle\sigma\rangle^2)\vec{\pi}^2 + \frac{1}{2}(\mu_0^2 + \frac{3\lambda_0^2}{N}\langle\sigma\rangle^2)\sigma^2 + \frac{\lambda_0^2}{N}\langle\sigma\rangle(\vec{\pi}^2 + \sigma^2)\sigma \\
&+ \frac{\lambda_0^2}{4N}(\vec{\pi}^2 + \sigma^2)^2 + \frac{\mu_0^2}{2}\langle\sigma\rangle^2 + \frac{\lambda_0^2}{4N}\langle\sigma\rangle^4 - c\sqrt{N}\langle\sigma\rangle\,.
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

In einem weiteren Schritt werden wir die Grundzustandsenergie minimieren, wobei wir den Erwartungswert des Hamiltonoperators mit dem Vakuum zu bilden haben. Von daher ist es vorteilhaft die im Hamiltonoperator auftretenden Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren in Normalordnung zu überführen. Normalordnung bedeutet, daß Vernichtungsoperatoren rechts von Erzeugungsoperatoren stehen. Um den Hamiltonoperator in Normalordnung zu erhalten, benutzen wir das Wick-Theorem:

$$
\begin{aligned}
H &= H_0(v, y, \langle\sigma\rangle) + \eta[\beta_0 + \beta_0^\dagger] + \sum_q \varepsilon_\pi(q)\vec{\alpha}_q^\dagger\vec{\alpha}_q + \sum_q \varepsilon_\sigma(q)\beta_q^\dagger\beta_q \\
&+ \sum_q c_\pi(q)[\vec{\alpha}_q^\dagger\vec{\alpha}_{-q}^\dagger + \vec{\alpha}_q\vec{\alpha}_{-q}] + \sum_q c_\sigma(q)[\beta_q^\dagger\beta_{-q}^\dagger + \beta_q\beta_{-q}] \\
&+ \int d^3x : \Big[\frac{\lambda_0^2}{N}\langle\sigma\rangle(\pi^2(x) + \sigma^2(x))\sigma(x) + \frac{\lambda_0^2}{4N}(\pi^2(x) + \sigma^2(x))^2\Big] : \,.
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

Dabei wurden folgende Abkürzungen verwendet:

$$
\begin{aligned}
H_0(v, y, \langle\sigma\rangle) =& \sum_q \omega_q(Nv_q^2 + y_q^2 + \frac{N+1}{2}) + \frac{\lambda_0^2}{4N}[3I_\sigma^2 + (N^2 + 2N)I_\pi^2 + 2NI_\pi I_\sigma] \\
&+ \frac{\lambda_0^2\langle\sigma\rangle^2}{2N}[NI_\pi + 3I_\sigma] + \frac{\mu_0^2}{2}\langle\sigma\rangle^2 + \frac{\lambda_0^2}{4N}\langle\sigma\rangle^4 - c\sqrt{N}\langle\sigma\rangle\,,
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

$$
\eta = \frac{x_0 + y_0}{\sqrt{\mu}}[\lambda_0^2\langle\sigma\rangle I_\pi + \frac{3}{N}\lambda_0^2\langle\sigma\rangle I_\sigma + \frac{\lambda_0^2}{N}\langle\sigma\rangle^3 + \mu_0^2\langle\sigma\rangle - c\sqrt{N}]\,,
\tag{2.33}
$$

$$
c_\pi(q) = \omega_q(u_q v_q) + \frac{\lambda_0^2}{2}\frac{(u_q + v_q)^2}{2\omega_q}[\frac{N+2}{N}I_\pi + \frac{1}{N}I_\sigma + \frac{1}{N}\langle\sigma\rangle^2]\,,
\tag{2.34}
$$

$$
c_\sigma(q) = \omega_q(x_q y_q) + \frac{\lambda_0^2}{2}\frac{(x_q + y_q)^2}{2\omega_q}[I_\pi + \frac{3}{N}I_\sigma + \frac{3}{N}\langle\sigma\rangle^2]\,,
\tag{2.35}
$$

$$
\varepsilon_\pi(q) = \omega_q(u_q^2 + v_q^2) + \lambda_0^2\frac{(u_q + v_q)^2}{2\omega_q}[\frac{N+2}{N}I_\pi + \frac{1}{N}I_\sigma + \frac{1}{N}\langle\sigma\rangle^2]\,,
\tag{2.36}
$$

$$
\varepsilon_\sigma(q) = \omega_q(x_q^2 + y_q^2) + \lambda_0^2\frac{(x_q + y_q)^2}{2\omega_q}[I_\pi + \frac{3}{N}I_\sigma + \frac{3}{N}\langle\sigma\rangle^2]\,.
\tag{2.37}
$$

Hierbei sind I_π und I_σ im Limes $V \to \infty$ Integrale über die Tadpole-Loops

$$I_\pi = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{(u_q + v_q)^2}{2\omega_q}, \quad I_\sigma = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{(x_q + y_q)^2}{2\omega_q}. \tag{2.38}$$

Durch Minimierung des Vakuumerwartungswertes $\langle HFB \mid H \mid HFB \rangle / \langle HFB \mid HFB \rangle$ werden nun die Bogoliubov-Faktoren und der Wert für $\langle\sigma\rangle$ bestimmt. Berechnet man den Vakuumerwartungswert des Hamiltonoperators, so sieht man, daß die Terme proportional zu ε_π und ε_σ keinen Beitrag liefern, der Term mit dem Einteilchenoperator $\beta_0^\dagger$ sowie die Terme proportional c_π und c_σ hingegen nicht verschwinden. Daraus ergibt sich, daß der Vakuumerwartungswert des Hamiltonoperators genau dann minimal ist, wenn auch diese Terme verschwinden, also für $c_\pi = c_\sigma = \eta = 0$!
Aus $\eta = 0$ folgt sofort eine Bedingung für den Vakuumerwartungswert $\langle\sigma\rangle$:

$$\frac{c\sqrt{N}}{\langle\sigma\rangle} = \mu_0^2 + \lambda_0^2[I_\pi + \frac{3}{N} I_\sigma + \frac{1}{N}\langle\sigma\rangle^2]. \tag{2.39}$$

Zur Bestimmung der Bogoliubov-Faktoren führen wir zunächst die folgende Größen ein:

$$\begin{aligned} e_\pi(q) &= \omega_q + \Delta_\pi(q),\ \ \Delta_\pi(q) = \frac{\lambda_0^2}{2\omega_q}[\frac{N+2}{N} I_\pi + \frac{1}{N} I_\sigma + \frac{1}{N}\langle\sigma\rangle^2], \\ e_\sigma(q) &= \omega_q + \Delta_\sigma(q),\ \ \Delta_\sigma(q) = \frac{\lambda_0^2}{2\omega_q}[I_\pi + \frac{3}{N} I_\sigma + \frac{3}{N}\langle\sigma\rangle^2]. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Damit lassen sich die Quasiteilchenenergien und die Koeffizienten c_π und c_σ des Hamiltonoperators schreiben als

$$\begin{aligned} c_\pi(q) &= u_q v_q e_\pi(q) + \frac{(u_q^2 + v_q^2)}{2}\Delta_\pi(q), \\ \varepsilon_\pi(q) &= (u_q^2 + v_q^2) e_\pi(q) + 2u_q v_q \Delta_\pi(q), \\ c_\sigma(q) &= x_q y_q e_\sigma(q) + \frac{(x_q^2 + y_q^2)}{2}\Delta_\sigma(q), \\ \varepsilon_\sigma(q) &= (x_q^2 + y_q^2) e_\sigma(q) + 2x_q y_q \Delta_\sigma(q). \end{aligned} \tag{2.41}$$

Nach einfachen algebraischen Umformungen kann man aus der Forderung, daß die Koeffizienten c_π und c_σ im Vakuum verschwinden, die Bogoliubov Faktoren berechnen:

$$\begin{aligned} u_q^2 &= \frac{1}{2}\Big(1 \pm \frac{e_\pi}{\sqrt{e_\pi^2 - \Delta_\pi^2}}\Big), \quad v_q^2 = \frac{1}{2}\Big(-1 \pm \frac{e_\pi}{\sqrt{e_\pi^2 - \Delta_\pi^2}}\Big), \\ x_q^2 &= \frac{1}{2}\Big(1 \pm \frac{e_\sigma}{\sqrt{e_\sigma^2 - \Delta_\sigma^2}}\Big), \quad y_q^2 = \frac{1}{2}\Big(-1 \pm \frac{e_\sigma}{\sqrt{e_\sigma^2 - \Delta_\sigma^2}}\Big). \end{aligned} \tag{2.42}$$

Mit diesem Ergebnis lassen sich die Quasiteilchenenergien schreiben als

$$\begin{aligned} \varepsilon_\pi^2(q) &= (u_q - v_q)^2 w_q = \sqrt{q^2 + \varepsilon_\pi^2(0)}, \\ \varepsilon_\sigma^2(q) &= (x_q - y_q)^2 w_q = \sqrt{q^2 + \varepsilon_\sigma^2(0)}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Daraus kann man schließlich eine BCS-Gap-Gleichung für die Massen der Quasiteilchen angeben:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\pi^2(0) &= \mu_0^2 + \lambda_0^2\left(\frac{N+2}{N}I_\pi + \frac{1}{N}I_\sigma + \frac{1}{N}\langle\sigma\rangle^2\right), \\
\varepsilon_\sigma^2(0) &= \mu_0^2 + \lambda_0^2\left(I_\pi + \frac{3}{N}I_\sigma + \frac{3}{N}\langle\sigma\rangle^2\right).
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Eine etwas ausführlichere Herleitung dieses Ergebnisses findet man in Anhang B. Kombiniert man dieses Ergebnis mit Gl.(2.39), erhält man

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\pi^2(0) &= \frac{c\sqrt{N}}{\langle\sigma\rangle} + \frac{2\lambda_0^2}{N}[I_\pi - I_\sigma], \\
\varepsilon_\sigma^2(0) &= \frac{c\sqrt{N}}{\langle\sigma\rangle} + \frac{2\lambda_0^2}{N}\langle\sigma\rangle^2.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

In Abbildung 2.1 sind die Propagatoren der Quasiteilchen in der Hartree-Fock-Bogoliubov-Näherung auch in grafischer Form dargestellt.

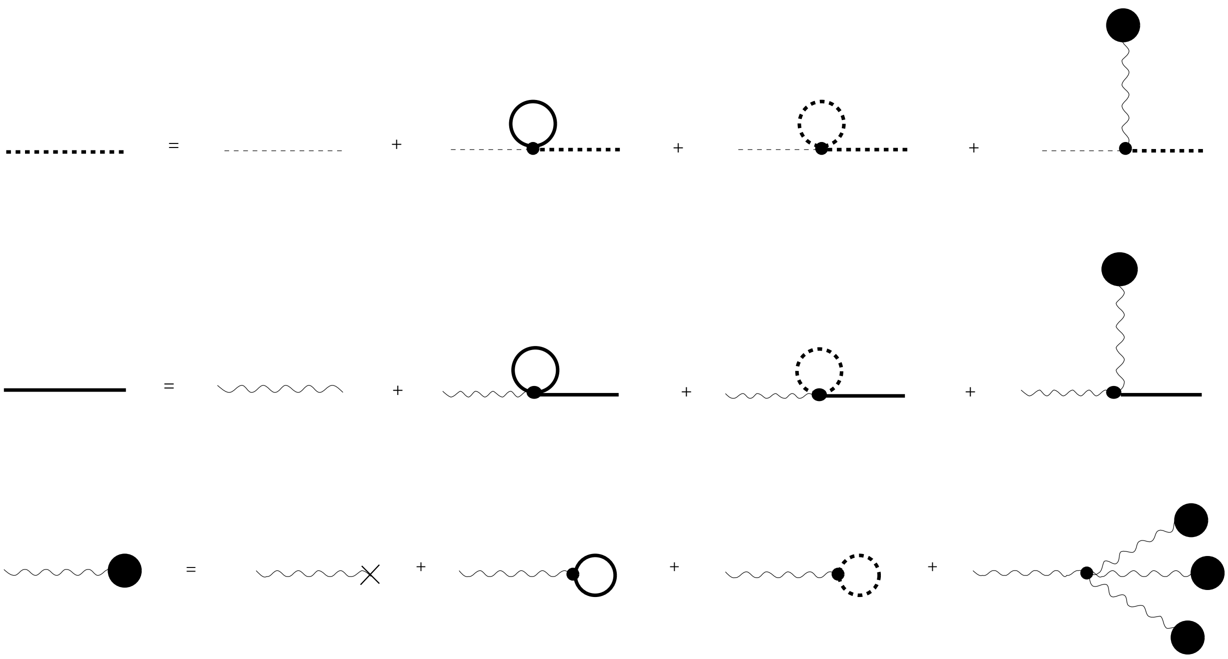

Abbildung 2.1: *Grafische Darstellung der Ergebnisse für das π, σ und das Kondensat $\langle\sigma\rangle$ in der Hartree-Fock-Bogoliubov-Näherung. Die gestrichelte Linie steht dabei für den Pionpropagator, die durchgezogene Linie für das σ und die Wellenlinie für das „nackte" σ. Die Dyson-Gleichungen erhält man dabei aus Gl.(2.45) und das Kondensat aus Gl.(2.39)*

Die Quasipionmasse verschwindet in der Hartree-Bogoliubov-Näherung im chiralen Limes ($c \to 0$) nun nicht mehr, da sie einen Term proportional zur Differenz $I_\pi - I_\sigma$ besitzt, der für $c = 0$ einen endlichen Wert besitzt. Dies stellt jedoch eine Verletzung des Goldstone-Theorems dar. Dieses fordert im chiralen Limes als Folge der spontanen Brechung der chiralen Symmetrie durch den nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert $\langle\sigma\rangle$ masselose Goldstone-Bosonen. Um den Goldstone-Charakter der Pionen und damit die Symmetrie der Lagrangedichte im chiralen Limes wiederherzustellen, werden wir im folgenden Abschnitt das Modell mittels einer Random-Phase-Approximation (RPA) erweitern.

2.3 Random-Phase-Approximation

Bei Herleitung der RPA-Gleichungen startet man mit dem Ansatz, daß die in der Schrödingergleichung auftretenden Eigenzustände $|\nu\rangle$ des Hamiltonoperators bekannt seien.

$$H\,|\,\nu\rangle = E_\nu\,|\,\nu\rangle\,. \tag{2.46}$$

Nun kann man Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren dieser Zustände wie folgt einführen:

$$Q_\nu^\dagger\,|\,0\rangle =|\,\nu\rangle\,, \qquad Q_\nu\,|\,0\rangle = 0\,. \tag{2.47}$$

Kombiniert man diese beiden Gleichungen und wendet den Kommutator von H mit diesen Anregungsoperatoren auf den Grundzustand an, so erhält man:

$$[H, Q_\nu^\dagger]\,|\,0\rangle = (E_\nu - E_0)Q_\nu^\dagger\,|\,0\rangle\,. \tag{2.48}$$

Wenn wir jetzt diese Gleichung von links mit dem Zustand $\langle 0\,|\,Q_\nu$ multiplizieren, dann folgt:

$$\langle 0\,|\,Q_\nu[H, Q_\nu^\dagger]\,|\,0\rangle = (E_\nu - E_0)\langle 0\,|\,Q_\nu Q_\nu^\dagger\,|\,0\rangle\,. \tag{2.49}$$

Da $Q_\nu|0\rangle = 0$, kann man in obiger Gleichung auch den Kommutator $[Q_\nu, Q_\nu^\dagger]$ verwenden und es ergibt sich nach Variation bezüglich Q_ν die wohlbekannte RPA-Bewegungsgleichung [15]:

$$\langle 0|[\delta Q_\nu, [H, Q_\nu^\dagger]]|0\rangle = \Omega_\nu\langle 0|[\delta Q_\nu, Q_\nu^\dagger]|0\rangle \tag{2.50}$$

mit der Energiedifferenz

$$\Omega_\nu = E_\nu - E_0\,. \tag{2.51}$$

Die Anregungsoperatoren sind im allgemeinen Fall komplizierte Vielteilchenoperatoren, für die man Gl.(2.50) nicht exakt lösen kann. Daher muß man auf Näherungen zurückgreifen. Man schränkt die Operatoren im Rahmen der RPA auf Ein- und Zweiteilchenoperatoren ein und erhält somit den sogenannten RPA-Grundzustand:

$$Q_\nu|RPA\rangle = 0\,. \tag{2.52}$$

Im Rahmen der Quasiboson-Näherung nimmt man zusätzlich noch an, daß der RPA-Grundzustand durch den Hartree-Fock-Bogoliubov-Grundzustand angenähert werden kann

$$Q_\nu|HFB\rangle = 0\,, \tag{2.53}$$

so daß man schließlich als Bewegungsgleichung erhält

$$\langle HFB|[\delta Q_\nu,[H,Q_\nu^\dagger]]|HFB\rangle = \Omega_\nu\langle HFB|[\delta Q_\nu,Q_\nu^\dagger]|HFB\rangle\,. \tag{2.54}$$

Der RPA-Formalismus wurde hier zunächst willkürlich eingeführt, allerdings zeigt sich, daß die RPA die Symmetrie wiederherstellt, die durch den HFB-Formalismus verletzt wurde. Im HFB-Formalismus sind die Pionen im chiralen Limes keine Goldstone-Bosonen, wie es vom Goldstone-Theorem gefordert wird, sondern besitzen nach Gl.(2.45) eine endliche Masse. Um zu sehen, daß die Symmetrie durch die RPA wiederhergestellt wird, betrachtet man den Operator, der die Symmetrietransformation generiert. Dieser vertauscht mit dem Hamiltonoperator,

$$[H,Q_\nu^\dagger] = 0\,. \tag{2.55}$$

Für den Fall, daß der RPA-Anregungsoperator in den Symmetrieoperator übergeht, verschwindet also die linke Seite von Gl.(2.54). Also muß $\Omega_\nu = 0$ gelten. Diese Lösungen nennt man „spurios“, und sie lassen sich mit den Goldstone-Bosonen identifizieren. Wir müssen also nur sicherstellen, daß der Ansatz für den RPA-Anregungsoperator den Symmetrieoperator der spontan gebrochenen Symmetrie enthält.

In unserem Fall können wir für die allgemeinen Anregungsoperatoren in der im vorigen Kapitel eingeführten Quasiteilchenbasis folgenden Ansatz machen:

$$\begin{aligned}
\vec{Q}_\pi^\dagger &= X_\pi^1\vec{\alpha}_0^\dagger - Y_\pi^1\vec{\alpha}_0 + \sum_q\left[X_\pi^2(q)\beta_q^\dagger\vec{\alpha}_{-q}^\dagger - Y_\pi^2(q)\beta_{-q}\vec{\alpha}_q\right]\\
Q_\sigma^\dagger &= \left[X_\sigma^1\beta_0^\dagger - Y_\sigma^1\beta_0\right] + \sum_q\left[X_\sigma^2(q)\beta_q^\dagger\beta_{-q}^\dagger - Y_\sigma^2(q)\beta_{-q}\beta_q\right]\\
&\quad + \sum_q\left[X_\sigma^3(q)\vec{\alpha}_q^\dagger\vec{\alpha}_{-q}^\dagger - Y_\sigma^3(q)\vec{\alpha}_{-q}\vec{\alpha}_q\right].
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Diese entsprechen den geforderten Ein- und Zweiteilchenanregungsoperatoren. Betrachten wir nun den Symmetriegenerator der spontan gebrochenen Symmetrie. In unserem Falle ist dies der Operator Q_5^a, die axiale Ladung, die man aus der Volumenintegration über die Zeitkomponente des Axialvektorstromes A_μ^a erhält. Dieser Strom ist im linearen σ-Modell gegeben durch Gl.(2.5)

Damit folgt für die axiale Ladung in der Quasiteilchenbasis

$$\begin{aligned}
Q_5^a &= \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{2\varepsilon_\pi(0)}}i\varepsilon_\pi(0)\langle\sigma\rangle[\alpha_0^{a\dagger} - \alpha_0^a] + \sum_q i\frac{\varepsilon_\pi(q)-\varepsilon_\sigma(q)}{\sqrt{4\varepsilon_\pi(q)\varepsilon_\sigma(q)}}[\beta_q^\dagger\alpha_{-q}^{a\dagger} - \beta_{-q}\alpha_q^a]\\
&\quad + \sum_q i\frac{\varepsilon_\pi(q)+\varepsilon_\sigma(q)}{\sqrt{4\varepsilon_\pi(q)\varepsilon_\sigma(q)}}[\beta_q\alpha_q^{a\dagger} - \beta_{-q}^\dagger\alpha_{-q}^a]\,.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Wie man sieht, unterscheidet sich der chirale Symmetrieoperator Q_5^a nur durch die Terme mit $\beta_q\alpha_q^{a\dagger}$ und $\beta^\dagger_{-q}\alpha^a_{-q}$ von dem RPA-Operator $Q_\pi^{a\dagger}$. Diese Terme geben allerdings keinen Beitrag zu den RPA-Gleichungen in Gl.(2.50), da der Einteilchenanteil des Hamiltonoperators in der HFB-Quasiteilchenbasis diagonal ist, so daß diese Terme verschwinden, wenn man den Erwartungswert mit dem Quasiteilchenvakuum bildet.
Wenn man nun den allgemeinen RPA-Anregungsoperator für das Pion in die Bewegungsgleichung einsetzt, ergibt sich:

$$\langle HFB|[\vec{\alpha}_0,[H,\vec{Q}_\nu^\dagger]]|HFB\rangle = \Omega_\nu\langle HFB|[\vec{\alpha}_0,\vec{Q}_\nu^\dagger]|HFB\rangle\,, \tag{2.58}$$

$$\langle HFB|[\vec{\alpha}_0^\dagger,[H,\vec{Q}_\nu^\dagger]]|HFB\rangle = \Omega_\nu\langle HFB|[\vec{\alpha}_0^\dagger,\vec{Q}_\nu^\dagger]|HFB\rangle\,, \tag{2.59}$$

$$\langle HFB|[\vec{\alpha}_{-q}\beta_q,[H,\vec{Q}_\nu^\dagger]]|HFB\rangle = \Omega_\nu\langle HFB|[\vec{\alpha}_{-q}\beta_q,\vec{Q}_\nu^\dagger]|HFB\rangle\,, \tag{2.60}$$

$$\langle HFB|[\vec{\alpha}_q^\dagger\beta^\dagger_{-q},[H,\vec{Q}_\nu^\dagger]]|HFB\rangle = \Omega_\nu\langle HFB|[\vec{\alpha}_q^\dagger\beta^\dagger_{-q},\vec{Q}_\nu^\dagger]|HFB\rangle\,. \tag{2.61}$$

Mit den Gleichungen für den Hamiltonoperator und den RPA-Operator lassen sich die Kommutatoren berechnen. Die resultierenden Gleichungen lassen sich dann als ein Eigenwertproblem schreiben:

$$\sum_{q_2}\begin{pmatrix} \mathcal{A}(q_1,q_2) & \mathcal{B}(q_1,q_2) \\ \mathcal{B}(q_1,q_2) & \mathcal{A}(q_1,q_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathcal{U}_\nu(q_2)\\ \mathcal{V}_\nu(q_2)\end{pmatrix} = \Omega_\nu\mathcal{N}\begin{pmatrix}\mathcal{U}_\nu(q_1)\\ \mathcal{V}_\nu(q_1)\end{pmatrix}. \tag{2.62}$$

Die RPA-Eigenvektoren und die Matrix $\mathcal{N}$ sind dabei gegeben durch

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I\end{pmatrix},\quad \mathcal{U}_\nu(q) = \begin{pmatrix} X_\pi^1 \\ X_\pi^2(q)\end{pmatrix},\quad \mathcal{V}_\nu(q) = \begin{pmatrix} Y_\pi^1 \\ Y_\pi^2(q)\end{pmatrix}, \tag{2.63}$$

wobei I die 2×2 Einheitsmatrix darstellt. Für die Matrizen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ergibt sich:

$$\mathcal{A}(q_1,q_2) = \begin{pmatrix}\varepsilon_\pi(0) & 0 \\ 0 & \varepsilon_\pi(q_1)+\varepsilon_\sigma(q_1)\end{pmatrix}\delta_{q_1q_2}\,, \tag{2.64}$$

$$\mathcal{B}(q_1,q_2) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_\pi(0)}}\begin{pmatrix} 0 & 2\frac{\lambda_0^2}{N}\langle\sigma\rangle\mathcal{R}(q_2) \\ 2\frac{\lambda_0^2}{N}\langle\sigma\rangle\mathcal{R}(q_1) & 2\frac{\lambda_0^2}{N}\mathcal{R}(q_1)\mathcal{R}(q_2)\end{pmatrix} \tag{2.65}$$

mit

$$\mathcal{R}(q) = \Big[(2\pi)^3 4\varepsilon_\pi(q)\varepsilon_\sigma(q)\Big]^{-1/2}. \tag{2.66}$$

Daraus lassen sich nun die RPA-Eigenenergien bestimmen:

$$\Omega_\nu^2 = \varepsilon_\pi^2(0) + \frac{\lambda_0^4}{N^2}\frac{4\langle\sigma\rangle^2\Sigma_{\pi\sigma}(\Omega_\nu^2)}{1-\frac{2\lambda_0^2}{N}\Sigma_{\pi\sigma}(\Omega_\nu^2)}\,, \tag{2.67}$$

wobei $\Sigma_{\pi\sigma}(p^2)$ die Quasipion-Quasisigma-Schleife ist,

$$\Sigma_{\pi\sigma}(p^2) = -i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - \varepsilon_\pi^2(0) + i\eta} \frac{1}{(p-q)^2 - \varepsilon_\sigma^2(0) + i\eta} . \tag{2.68}$$

Mit Hilfe der Identität

$$\Sigma_{\pi\sigma}(0) = \frac{I_\pi - I_\sigma}{\varepsilon_\pi^2(0) - \varepsilon_\sigma^2(0)} \tag{2.69}$$

und Gl.(2.45) erhalten wir die physikalische Pionmasse,

$$m_\pi^2 = \frac{c\sqrt{N}}{\langle\sigma\rangle} + \frac{2\lambda_0^2}{N} \frac{[\varepsilon_\pi^2(0) - \varepsilon_\sigma^2(0)][\Sigma_{\pi\sigma}(0) - \Sigma_{\pi\sigma}(m_\pi^2)]}{1 - \frac{2\lambda_0^2}{N}\Sigma_{\pi\sigma}(m_\pi^2)} . \tag{2.70}$$

Für die Masse des σ erhält man analog [19]:

$$m_\sigma^2 = \varepsilon_\sigma^2(0) + 2\frac{\lambda_0^4}{N}\langle\sigma\rangle^2 \frac{\Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2) + \frac{9}{N}\Sigma_{\sigma\sigma}(m_\sigma^2) - 6\lambda_0^2\frac{N+3}{N^2}\Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)\Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)}{[1 - \frac{N+2}{N}\lambda_0^2\Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)][1 - \frac{3}{N}\lambda_0^2\Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)] - \frac{1}{N}\lambda_0^4\Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)\Sigma_{\sigma\sigma}(m_\sigma^2)} . \tag{2.71}$$

$\Sigma_{\pi\pi}$ und $\Sigma_{\sigma\sigma}$ sind die entsprechenden $\pi\pi$ und $\sigma\sigma$ Schleifen:

$$\begin{aligned} i\Sigma_{\pi\pi}(p^2) &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - \varepsilon_\pi^2(0) + i\eta} \frac{1}{(p-q)^2 - \varepsilon_\pi^2(0) + i\eta} , \\ i\Sigma_{\sigma\sigma}(p^2) &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - \varepsilon_\sigma^2(0) + i\eta} \frac{1}{(p-q)^2 - \varepsilon_\sigma^2(0) + i\eta} . \end{aligned} \tag{2.72}$$

In dieser Näherung ändert sich das Kondensat $\langle\sigma\rangle$ durch die Hinzunahme der RPA-Fluktuationen nicht, im Gegensatz zur Pion- und σ-Masse.

2.4 Das Modell in der 1/N - Entwicklung

Im vorigen Abschnitt haben wir die Massenkorrekturen des Pions und des σ-Mesons im Rahmen einer RPA-Näherung besprochen. Diese Korrekturen sind abhängig von der Zahl N der Pionfelder in der Lagrangedichte Gl.(2.1). Wir verlangen, daß der Hamiltonoperator mit der Zahl N der Pionfelder skaliert. Daraus folgt, daß auch das Kondensat eine Abhängigkeit von N hat. Diese Skalierung lässt sich dann folgendermaßen schreiben:

$$\langle\sigma\rangle = \sqrt{N}s . \tag{2.73}$$

Nun können wir in Gl.(2.70),Gl.(2.71) und Gl.(2.39) das Kondensat ersetzen und den Grenzübergang N$\rightarrow \infty$ bilden. In führender Ordnung der 1/N-Entwicklung erhalten wir

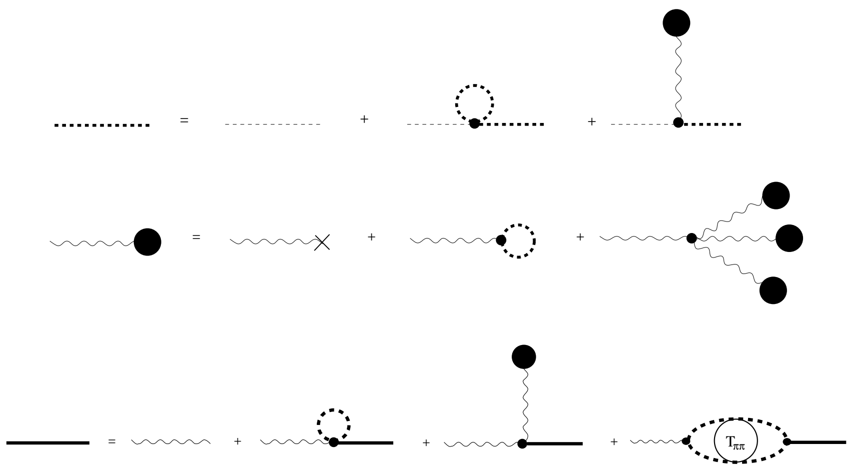

Abbildung 2.2: *Grafische Darstellung von Pion, σ-Meson und des Kondensates $\langle\sigma\rangle$ in der $1/N$-Entwicklung*

damit folgende Resultate:

$$\begin{aligned}
\frac{c}{s} &= \mu_0^2 + \lambda_0^2[I_\pi + s^2]\,, \\
m_\pi^2 &= \varepsilon_\pi^2(0) = \frac{c}{s}\,, \\
m_\sigma^2 &= \frac{c}{s} + 2\lambda_0^2 s^2 + 2\lambda_0^4 s^2 \frac{\Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)}{1-\lambda_0^2\Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)} \\
&= \varepsilon_\sigma^2(0) + 2\lambda_0^4 s^2 \frac{\Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)}{1-\lambda_0^2\Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)}\,.
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Die Beiträge der RPA-Fluktuationen für das Pion heben sich im Fall $N \to \infty$ mit dem Beitrag aus der HFB-Näherung auf, so daß die Masse des Pions durch die Tree-Level-Näherung bestimmt ist, während die Masse des σ durch die Fluktuationen modifiziert ist. Im chiralen Limes ist das Goldstone-Theorem jetzt erfüllt, da die Pionmasse in Gl.(2.74) dann verschwindet.
Aus Gl.(2.74) lässt sich für die Kopplungskonstante λ_0 eine Beziehung zur „Quasiteilchen"-σ-Masse $\varepsilon_\sigma(0)$, der Pionmasse m_π und dem Kondensat s herstellen.

$$2\lambda_0^2 = \frac{\varepsilon_\sigma^2(0) - \varepsilon_\pi^2(0)}{s^2}\,. \tag{2.75}$$

In Abb.2.2 sieht man das σ, π und Kondensat in führender Ordnung der $1/N$-Entwicklung.

Kapitel 3

Das Vakuum

Nachdem im vorigen Kapitel das Modell vorgestellt wurde, in dessen Rahmen wir das σ-Meson diskutieren wollen, werden wir es nun auf das Vakuum anwenden und die freien Parameter an experimentelle Daten anpassen. Das Modell erfüllt die Bedingungen der chiralen Symmetrie, sowie eine Reihe von Ward-Identitäten.
Mit den im vorigen Kapitel hergeleiteten Gleichungen lassen sich der Pion- und der σ-Propagator direkt angeben:

$$\begin{aligned} D_\pi(E,\vec{p}) &= \frac{1}{E^2 - \vec{p}^2 - m_\pi^2}\,, \\ D_\sigma(E,\vec{p}) &= [E^2 - \vec{p}^2 - \varepsilon_\sigma^2 - \frac{2\lambda_0^4\langle\sigma\rangle^2\Sigma_{\pi\pi}(E,\vec{p})}{1-\lambda_0^2\Sigma_{\pi\pi}(E,\vec{p})}]^{-1}\,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Hieran kann man sofort die Selbstenergie des σ-Mesons ablesen:

$$\Sigma_\sigma = \frac{2\lambda_0^4\langle\sigma\rangle^2\Sigma_{\pi\pi}(E,\vec{p})}{1-\lambda_0^2\Sigma_{\pi\pi}(E,\vec{p})}\,. \tag{3.2}$$

Das Schleifenintegral $\Sigma_{\pi\pi}$ lässt sich im Vakuum ausführen, und man erhält

$$\Sigma_{\pi\pi}(E,\vec{0}) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty dq\frac{q^2}{\omega_q}\frac{1}{E^2-4\omega_q^2}\,, \tag{3.3}$$

mit der Energie des Pions

$$\omega_q = \sqrt{m_\pi^2 + \vec{q}^2}\,. \tag{3.4}$$

Dabei wurde ausgenutzt, daß aufgrund der Lorentz-Invarianz des Vakuums die Selbstenergie im Schwerpunktsystem, also für $\vec{p} = 0$, berechnet werden kann. Dieses Integral ist logarithmisch divergent und wir regularisieren es durch Einführung eines Formfaktors $v(q)$ der Form

$$v(q) = g\Big(\frac{1}{1+\frac{q^2}{Q_d^2}}\Big)^\alpha\,, \tag{3.5}$$

wobei q der Dreierimpuls der Pionen ist. Die etwas ungewöhnliche Form des Formfaktors werden wir in Kap.3.2 erklären. Für die Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$ erhält man somit:

$$\Sigma_{\pi\pi}(E,\vec{0}) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty dq \frac{q^2}{\omega_q}\frac{1}{E^2-4\omega_q^2}v(q)^2 \,. \tag{3.6}$$

Für die „nackte“ Masse des σ wählen wir $\varepsilon_\sigma(0)$=1 GeV. Die Pionmasse hat den Wert 139 MeV. Der Wert des Kondensates ist im Vakuum gleich der Pionzerfallskonstante:

$$\langle\sigma\rangle = f_\pi \,. \tag{3.7}$$

Für die Pionzerfallskonstante wählen wir einen Wert von 93 MeV.

3.1 Ward-Identitäten und „Soft-Pion“-Theoreme

Das Modell erfüllt durch die im vorigen Kapitel vorgestellten Näherungen eine ganze Reihe von Ward-Identitäten. Diese stellen Beziehungen her zwischen den n-Punktfunktionen des Modells und den $n-1$-Punktfunktionen. Für die Ward-Identitäten in niedrigster Ordnung erhält man im vorliegenden Falle folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} D_\pi^{-1}(0) &= \frac{c}{s}\,, \\ m_\sigma^2 - m_\pi^2 &= \frac{2\lambda_0^2 s^2}{1-\lambda_0^2\Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)}\,. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Die erste Ward-Identität ist dabei die Realisierung des Goldstone-Theorems, die im chiralen Limes für masselose Pionen sorgt. Die zweite Identität stellt eine Verbindung mit den Zweipunktfunktionen von σ und π, sowie der Vierpunktfunktion $T_{\pi\pi}$ her. Eine grafische Darstellung der Ward-Identitäten ist in Abb. 3.1 zu sehen.

In Kapitel 2 wurde bereits diskutiert, daß die Symmetrie der Lagrangedichte explizit gebrochen ist. Als direkte Folge dieser Symmetriebrechung hat der axiale Strom A_μ^α eine nichtverschwindende Divergenz. Dies ist die in Gl.(2.12) hergeleitete PCAC-Relation. Aus dieser Relation und mit Hilfe des Reduktionsschemas lassen sich die sogenannten „Soft-Pion“-Theoreme herleiten [16]. Dabei ist ein Pion „soft“, falls sein Viererimpuls verschwindet, was sich streng genommen nur im chiralen Limes realisieren lässt, also bei verschwindender Masse des Pions. Aufgrund der geringen Masse des Pions im Vergleich zu anderen Hadronen ist diese Näherung allerdings zulässig und man kann Voraussagen über das Verhalten der $\pi\pi$-Streuamplituden bei kleinen Energien machen.
Dazu führen wir zunächst die sogenannten Mandelstamvariablen ein. In Abbildung 3.2 kann man drei verschiedene Reaktionskanäle ausmachen. Zum einen den s-Kanal, der die Streuung von Pion 1 mit Pion 2 beschreibt. Die anderen beiden Mandelstamvariablen t und u bezeichnen die entsprechenden Austauschkanäle $\pi_1+\pi_{3/4}\to\pi_2+\pi_{4/3}$. Aus

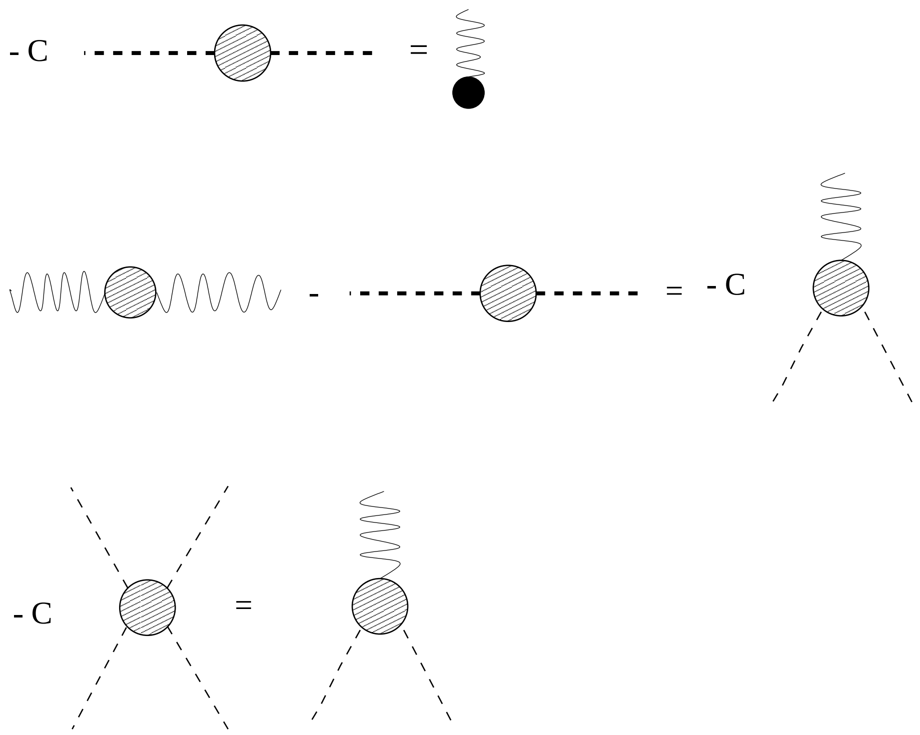

Abbildung 3.1: *Grafische Darstellung der Ward-Identitäten in unserem Modell. C steht dabei für den Wert des Kondensates* $\langle\sigma\rangle$.

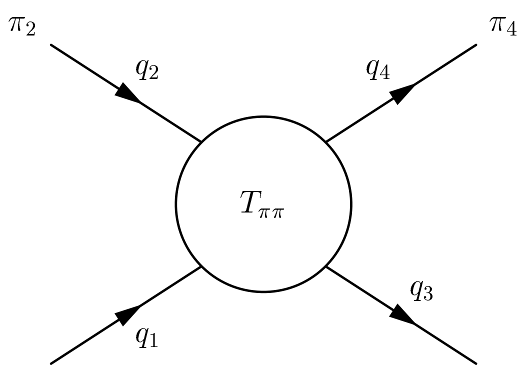

Abbildung 3.2: *Darstellung der Streuung von zwei Pionen.*

der Viererimpulserhaltung kann man für die Mandelstamvariablen folgende Beziehungen aufstellen:

$$\begin{aligned} s &= (q_1 + q_2)^2 = (q_3 + q_4)^2 \,, \\ t &= (q_1 - q_3)^2 = (q_2 - q_4)^2 \,, \\ u &= (q_1 - q_4)^2 = (q_2 - q_3)^2 \,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Betrachten wir nun die „Soft-Pion“-Theoreme. Zunächst gibt es das Adler-Theorem, welches besagt, daß die $\pi\pi$-Streuamplitude verschwindet, wenn ein Pion „soft“ und die anderen drei Pionen „on-shell“ sind, also die relativistische Energie-Impuls-Beziehung erfüllen. Damit kann man an die Viererimpulse der Teilchen folgende Bedingung stellen:

$$q_1 = (0, \vec{0}),\, q_2^2 = m_\pi^2,\, q_3^2 = m_\pi^2,\, q_4^2 = m_\pi^2 \,. \tag{3.10}$$

Wenn man nun die Viererimpulse durch die zugehörigen Mandelstamvariablen s,t und u ausdrückt, erhält man $s = t = u = m_\pi^2$, und damit das Adler-Theorem:

$$T_{\pi\pi}^{00}(s = t = u = m_\pi^2) = 0 \,. \tag{3.11}$$

Die T-Matrix beschreibt die Übergangswahrscheinlichkeit für die Streuung von zwei Pionen. Die Indizes geben dabei Gesamtisospin und Gesamtspin der beiden Pionen an. Das Adler-Theorem beschreibt somit die Streuung von zwei Pionen im $I = J = 0$ Kanal, also dem Kanal mit den Quantenzahlen des σ-Mesons.
Zum anderen gibt es das „double Soft-Pion“-Theorem: Betrachtet man die Streuung eines „on-shell“-Pions an einem „soften“ Pion, also an dem kinematischen Punkt mit $s = u = m_\pi^2$ und $t = 0$, so kann man für die T-Matrix $T_{\pi\pi}$ zeigen:

$$T_{\pi\pi}^{00}(s = u = m_\pi^2, t = 0) = \frac{m_\pi^2}{f_\pi^2} \,. \tag{3.12}$$

Unter Ausnutzung der PCAC-Relation erhält man nach Weinberg [17] für die $T_{\pi\pi}$-Streuamplitude an der Schwelle:

$$T_{\pi\pi}^{00}(s = 4m_\pi^2, t = u = 0) = -7\frac{m_\pi^2}{f_\pi^2} \,. \tag{3.13}$$

Die zugehörige Streulänge beträgt

$$a_0^0 = -\frac{T_{\pi\pi}^{00}}{32\pi m_\pi} \approx 0.16 m_\pi^{-1} \,. \tag{3.14}$$

Dieser Wert ist allerdings zu niedrig, verglichen mit dem experimentellen Wert von 0.20 m_π^{-1} [18].

In der Baumgraphennäherung ergibt sich für die $T_{\pi\pi}$-Matrix an der Schwelle in niedrigster Ordnung [19]

$$T^{00}_{\pi\pi} = -9\frac{m_\pi^2}{f_\pi^2}\,. \tag{3.15}$$

Der Unterschied zu Gl.(3.13) kommt von der Tatsache, daß in führender Ordnung der $1/N$-Entwicklung nur der s-Kanal zur Streumatrix beiträgt, während bei Herleitung von Gl.(3.13) auch t- und u-Kanal Beiträge berücksichtigt sind. Diese sind repulsiv und verringern daher den Wert der Streumatrix.
Bemerkenswert ist, daß es im Niederenergiebereich zu einem Vorzeichenwechsel in der Streumatrix kommt, da die Streuamplitude an der Zweipionschwelle noch attraktiv ist, und dann beim kinematischen Punkt $s = u = m_\pi^2$ und $t = 0$ ein positives Vorzeichen besitzt, also repulsiv ist.

3.2 Die Streumatrix

Die $\pi\pi$-Streumatrix lässt sich unter Verwendung des Blankenbecler-Sugar-Reduktionsschemas durch eine Lippmann-Schwinger-Gleichung ausdrücken:

$$T_{\pi\pi}(E,\vec{p}) = V_{\pi\pi}(E,\vec{p}) + \frac{1}{2}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}V_{\pi\pi}(E,\vec{p})G^0_{\pi\pi}(E,\vec{p},\vec{q})T_{\pi\pi}(E,\vec{p})\,. \tag{3.16}$$

Dabei bezeichnen E und $\vec{p}$ die Energie und den Dreierimpuls des Pionpaares. Der Zwei-Pion-Propagator lautet dabei

$$\begin{aligned} G^0_{\pi\pi}(E,\vec{p},\vec{q}) &= i\int\frac{dq_0}{2\pi}D_\pi(q)D_\pi(p-q) \\ &= \frac{\omega_q+\omega_{pq}}{2\omega_q\omega_{pq}}\frac{1}{E^2-(\omega_q+\omega_{pq})^2}\,, \end{aligned} \tag{3.17}$$

wobei ω_q und ω_{pq} die Energien der Pionen sind

$$\omega_q = \sqrt{m_\pi^2+\vec{q}^2}, \quad \omega_{pq} = \sqrt{m_\pi^2+(\vec{p}-\vec{q})^2} \tag{3.18}$$

Für $\vec{p}$=0 vereinfacht sich der Zwei-Pion-Propagator weiter zu :

$$G^0_{\pi\pi}(E,\vec{0},\vec{q}) = \frac{1}{\omega_q}\frac{1}{E^2-4\omega_q^2}\,. \tag{3.19}$$

Mit der in Gl.(3.3) angegebenen Selbstenergie kann man Gl.(3.16) in eine einfache Form überführen und erhält schließlich für die Streumatrix:

$$T_{\pi\pi}(E,\vec{p}) = \frac{V_{\pi\pi}(E,\vec{p})}{1-\frac{1}{2}V_{\pi\pi}(E,\vec{p})\Sigma_{\pi\pi}(E,\vec{p})} \tag{3.20}$$

Für das Potential ergibt sich in führender Ordnung in der 1/N-Entwicklung

$$V_{\pi\pi}(E,\vec{p}) = 2\lambda_0^2 \frac{s - m_\pi^2}{s - m_\sigma^2} \,. \tag{3.21}$$

Durch Anwendung der Gl.(2.75) lässt sich die Streumatrix auch durch die Propagatoren ausdrücken als:

$$T_{\pi\pi}(E,\vec{p}) = N \frac{D_\pi^{-1}(E,\vec{p}) - D_\sigma^{-1}(E,\vec{p})}{\langle\sigma\rangle^2} \frac{D_\sigma(E,\vec{p})}{D_\pi(E,\vec{p})} \,. \tag{3.22}$$

In führender Ordnung der $1/N$-Entwicklung liefert die T-Matrix eine zu grosse Attraktion. Um dies zu korrigieren und damit eine bessere Beschreibung der s-Wellen Phasenverschiebung zu erhalten, versehen wir das Quasi-Potential in der Lippmann-Schwinger-Gleichung mit einem Formfaktor:

$$V_{\pi\pi}(E,\vec{p},q,q') \to v(q) V_{\pi\pi}(E,\vec{p}) v(q') \,. \tag{3.23}$$

Aus Konvergenzgründen nehmen wir den Formfaktor, der bereits in Gl.(3.5) zur Regularisierung der Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$ verwendet wurde. Dabei sind q und q' die Impulse der ein- und auslaufenden Pionen im Schwerpunktsystem. Daraus erhält man dann für die Streumatrix:

$$T_{\pi\pi}(E,\vec{p},q,q') = \frac{v(q) V_{\pi\pi}(E,\vec{p}) v(q')}{1 - \frac{1}{2} V_{\pi\pi}(E,\vec{p}) \Sigma_{\pi\pi}(E,\vec{p})} \,, \tag{3.24}$$

mit der Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$ aus Gl.(3.6)

3.3 Die s-Wellen Phasenverschiebung

Zur Fixierung der Formfaktor-Parameter g,Q_D und α fordern wir, daß das Modell die experimentellen Streudaten über einen weiten Energiebereich möglichst gut wiedergibt. Wir erhalten eine gute Beschreibung der s-Wellen-Phasenverschiebung bis zu Energien von etwa 700 MeV mit den Werten

$$\begin{aligned} g &= 0.9\,, \\ Q_D &= 1.2\mathrm{GeV}\,, \\ \alpha &= 3\,. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Der Vergleich mit den Streudaten ist in Abbildung 3.3 dargestellt.

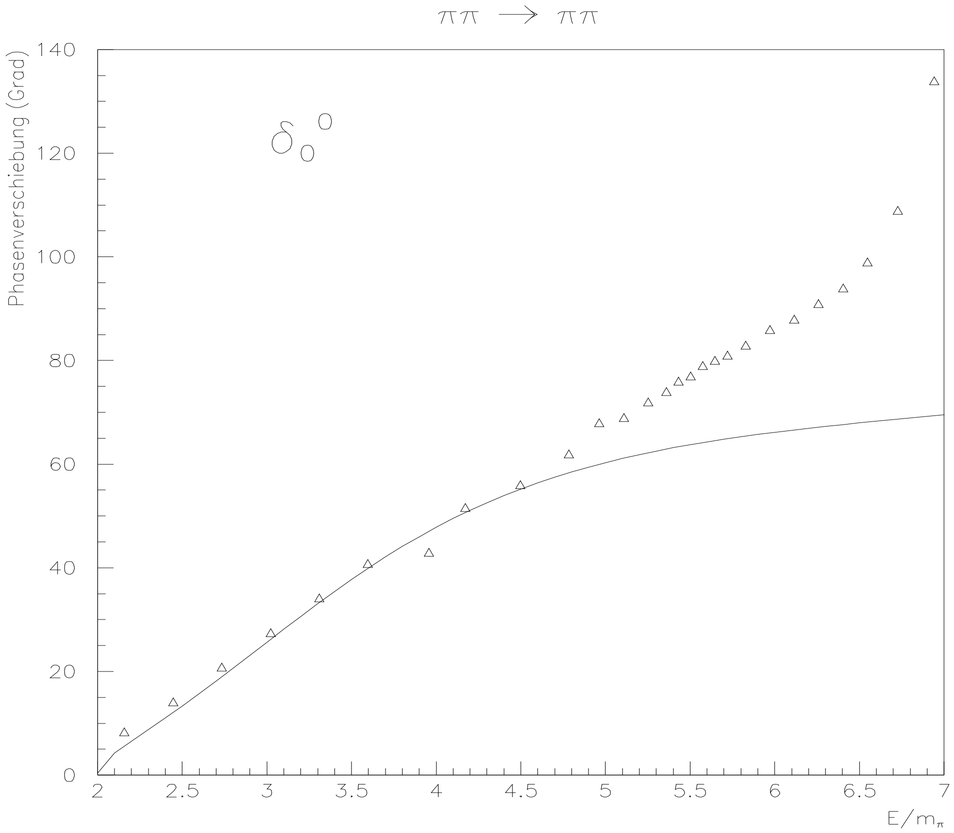

Abbildung 3.3: *Die s-Wellen Phasenverschiebung im I=J=0 Kanal des Modells (durchgezogene Linie), sowie experimentelle Daten aus [20]*

Für höhere Energien sind allerdings deutliche Abweichungen von den experimentellen Streudaten zu sehen. Diese kann man darauf zurückführen, daß wir zum einen nur Pionen und das σ-Meson berücksichtigen, und daher Kopplungen etwa an den $K\bar{K}$-Kanal nicht enthalten sind [21]. Zum anderen haben wir auch die Austauschgraphen – den t- und u-Kanal – nicht berücksichtigt, da diese Terme Beiträge in nächsthöherer Ordnung der $1/N$-Entwicklung darstellen.

3.4 Der σ-Propagator und die $T_{\pi\pi}$-Matrix im Vakuum

Nachdem in den vorherigen Abschnitten die freien Parameter des Modells fixiert wurden, möchten wir die Resultate für das σ-Meson im Vakuum diskutieren. Das σ-Meson ist im Gegensatz zum Pion im Vakuum kein „scharfes“ Teilchen. Dafür ist die Selbstenergie des σ-Mesons verantwortlich. Diese Selbstenergie ist das Resultat der in Kap.2.3 durchgeführten RPA, in der die Beiträge aus den Schleifenintegralen aufsummiert wurden. In Gl.(3.2) wurde die explizite Form der Selbstenergie angegeben. Die Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$, sowie die volle Selbstenergie Σ_σ des σ-Mesons sind in Abbildung 3.4 gezeigt. Der Realteil von Σ_σ ist im gezeigten Energiebereich bis 1 GeV immer negativ und bewirkt somit die Verschiebung der Masse des σ-Mesons von der nackten Masse 1 GeV hin zu einer niedrigeren Masse. Der Imaginärteil erhält erst für Energien oberhalb der Schwelle für die Produktion von zwei Pionen einen Beitrag, also bei etwa 280 MeV, da unterhalb dieser Schwelle das σ-Meson im Vakuum nicht zerfallen kann. Mit der Selbstenergie können wir jetzt den Propagator des σ-Mesons und die Streumatrix berechnen, die durch Gl.(3.1) und Gl.(3.22) gegeben sind.
Die Ergebnisse sind in Abbildung 3.5 gezeigt. Im oberen Teil des Bildes ist der Real- und Imaginärteil des Propagators angegeben und in der unteren Hälfte die Streumatrix.
Für den Propagator erhält man eine breite Resonanz mit einer effektiven Masse von 530 MeV und einer Breite von etwa 360 MeV.
Die $T_{\pi\pi}$-Matrix im Vakuum hat die wichtige Eigenschaft, daß sie unterhalb der Produktionsschwelle für zwei Pionen von attraktiv zu repulsiv wechselt. Diese Eigenschaft wird auch von den im vorigen Abschnitt hergeleiteten Theoremen gefordert und ist eine Folge der chiralen Symmetrie, die unserem Modell zugrundeliegt. Dieser Wechsel findet bei einer Energie von etwa 140 MeV statt. Der Imaginärteil der Streumatrix erhält, wie der Imaginärteil des σ-Propagators, erst Beiträge ab der Zwei-Pion-Schwelle, da er nur vom Pion- und σ-Propagator abhängt und der Pionpropagator im Vakuum keinen Imaginärteil besitzt.
Für die Streulänge, die in Gl.(3.14) definiert wurde, erhält man $a_0^0 = 0.20 m_\pi^{-1}$, was in guter Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert von $0.20 \pm 0.01\ m_\pi^{-1}$ [18] ist. Dieser Wert ist besser als der aus den „Soft-Pion“-Theoremen geforderte Wert, da dieser nur Terme führender Ordnung berücksichtigt, während wir noch eine zusätzliche Anpassung an die Streudaten mit dem Formfaktor vornehmen.

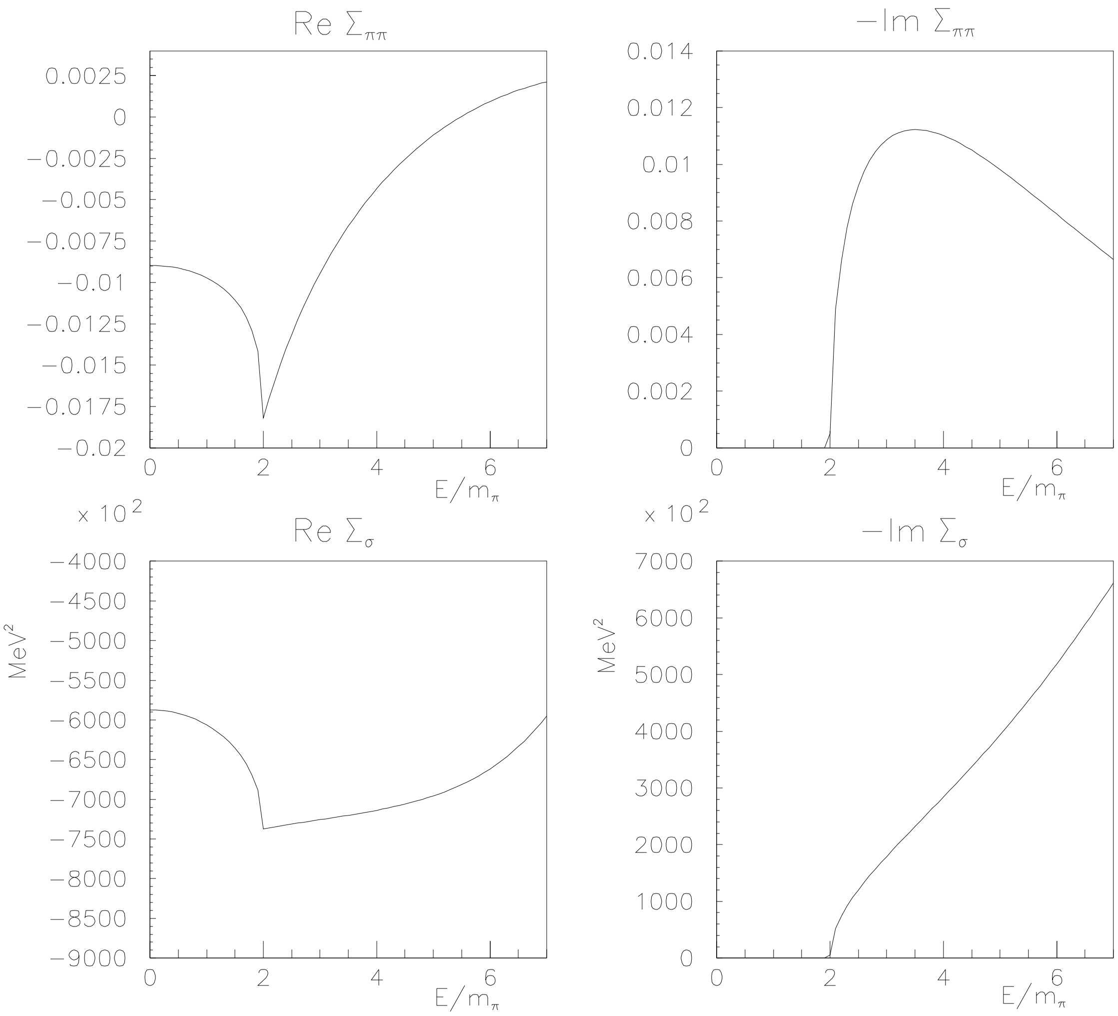

Abbildung 3.4: *Im oberen Teil sieht man Real- und Imaginärteil der Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$. Im unteren Teil des Bildes die volle Selbstenergie Σ_σ.*

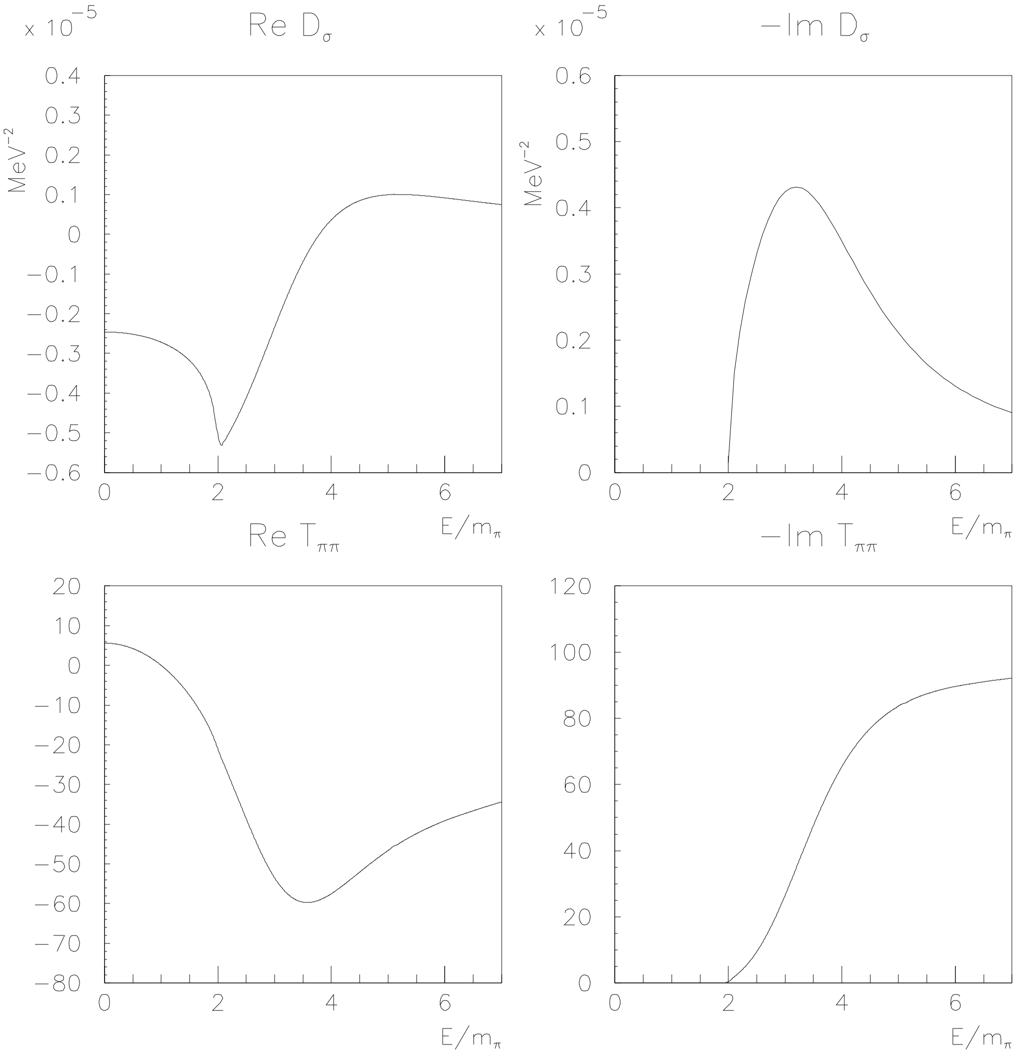

Abbildung 3.5: *Real- und Imaginärteil des σ-Propagators und der $T_{\pi\pi}$-Streumatrix. Für $E \rightarrow 0$ sieht man, daß der Realteil von $T_{\pi\pi}$ größer null ist, also repulsiv wirkt.*

Kapitel 4

Effekte bei endlicher Temperatur

4.1 Thermodynamische Grundlagen

In diesem Abschnitt möchten wir das in den vorherigen Kapiteln beschriebene Modell zu endlicher Temperatur erweitern. Dazu werden wir das thermodynamische Potential Ω eines großkanonischen Ensembles berechnen. Das thermodynamische Potential Ω ist gegeben durch

$$\Omega = \langle H \rangle - TS - \mu \langle N \rangle \,. \tag{4.1}$$

Hierbei ist N der Teilchenzahloperator, μ das chemische Potential, S die Entropie und T die Temperatur des Ensembles. Da wir uns auf die Betrachtung von bosonischen Freiheitsgraden beschränken, für die die Teilchenanzahl keine Erhaltungsgrösse ist, verschwindet das chemische Potential μ und damit der Term proportional zum Teilchenzahloperator. Zusätzlich betrachten wir noch den Dichteoperator ρ, für den folgende Bedingung gilt:

$$\mathrm{Tr}\rho = 1 \,. \tag{4.2}$$

Es ist bekannt, daß sich mit Hilfe dieses Dichteoperators die großkanonischen Erwartungswerte eines beliebigen Operators folgendermaßen darstellen lassen:

$$\langle O \rangle = \mathrm{Tr}[\rho O] \,, \tag{4.3}$$

so daß man für den Erwartungswert des Hamiltonoperators H und die Entropie S erhält:

$$\langle H \rangle = Tr[\rho H] \quad , \quad S = \langle -\ln \rho \rangle = -Tr[\rho \ln \rho] \,. \tag{4.4}$$

Aus dem Variationsprinzip folgt $\frac{\delta \Omega}{\delta \rho} = 0$, und man erhält für den Dichteoperator ρ:

$$\rho = Z^{-1} e^{-\beta H} \qquad Z = Tr[e^{-\beta H}] \,. \tag{4.5}$$

Hierbei ist Z die großkanonische Zustandssumme und $\beta = 1/T$ die inverse Temperatur. Für den einfachen Fall, daß der Hamiltonoperator diagonal in bilinearen Ausdrücken der Feldoperatoren ist,

$$H = H_0 + \sum_i \varepsilon_i a_i^\dagger a_i \,, \tag{4.6}$$

kann man die Exponentialfunktion im Dichteoperator entwickeln und man erhält [23]:

$$\rho = \prod_i [f_i n_i + (1 - f_i)(1 - n_i)] \,. \tag{4.7}$$

Dabei sind n_i die Teilchenanzahloperatoren $n_i = a_i^\dagger a_i$ für die verschiedenen Teilchensorten und f_i die bekannten bosonischen Verteilungsfunktionen

$$f_i = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_i} - 1} \,. \tag{4.8}$$

Damit erhält man dann für die Entropie S

$$S = -\sum_i [f_i \ln f_i - (1 + f_i) \ln (1 + f_i)] \,. \tag{4.9}$$

Im nächsten Abschnitt werden wir wieder mit Hilfe des HFB-Formalismus Quasiteilchen einführen, die nun allerdings nicht mehr den Erwartungswert des Hamiltonoperators bezüglich des Vakuums $\langle\Psi|H|\Psi\rangle/\langle\Psi|\Psi\rangle$ minimieren, sondern das thermodynamische Potential.

4.2 HFB-Formalismus bei endlicher Temperatur

Der Übergang zu einer Quasiteilchenbasis läuft analog zum Fall T=0 ab. Man transformiert die ursprünglichen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren der Teilchen durch eine spezielle Bogoliubovtransformation in Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Quasiteilchen. Die in der Transformation auftretenden Faktoren sind nun allerdings temperaturabhängig. Die Bogoliubovtransformation lautet somit bei endlicher Temperatur:

$$\vec{\alpha}_q^\dagger(T) = u_{q,T}\vec{a}_q^\dagger - v_{q,T}\vec{a}_{-q} \quad ; \quad \beta_q^\dagger(T) = x_{q,T} b_q^\dagger - y_{q,T} b_{-q} + w\delta_{q0} \,. \tag{4.10}$$

Um die Formeln übersichtlich zu halten werden wir den Index T im weiteren Verlauf weglassen. Dabei sind die Bogoliubovfaktoren wiederum durch die Bedingung eingeschränkt, daß die Transformation kanonisch sein soll, also die üblichen Kommutatorrelationen erfüllt sein müssen. Daraus erhält man als Einschränkung:

$$u_q^2 - v_q^2 = 1 \quad ; \quad x_q^2 - y_q^2 = 1 \,. \tag{4.11}$$

Nun kann man den Hamiltonoperator in dieser neu eingeführten Quasiteilchenbasis ausdrücken und erhält den Hamiltonoperator bei endlicher Temperatur analog zu Gl.(2.31):

$$
\begin{aligned}
H &= H_0(v_q, y_q, \langle\sigma\rangle) + \eta[\beta_0 + \beta_0^\dagger] \\
&+ \sum_q \varepsilon_\pi(q)\vec{\alpha}_q^\dagger\vec{\alpha}_q + \sum_q \varepsilon_\sigma(q)\beta_q^\dagger\beta_q \\
&+ \sum_q c_\pi(q)[\vec{\alpha}_q^\dagger\vec{\alpha}_{-q}^\dagger + \vec{\alpha}_q\vec{\alpha}_{-q}] + \sum_q c_\sigma(q)[\beta_q^\dagger\beta_{-q}^\dagger + \beta_q\beta_{-q}] \\
&+ \int d^3x : \Big[\frac{\lambda_0^2}{N}\langle\sigma\rangle(\pi^2(x) + \sigma^2(x))\sigma(x) + \frac{\lambda_0^2}{4N}(\pi^2(x) + \sigma^2(x))^2\Big] : .
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Für $T = 0$ wurde durch Anwendung des Wick-Theorems der Hamiltonoperator in Normalordnung überführt und so sein Erwartungswert bezüglich des Quasiteilchenvakuums bestimmt. Anschließend konnten aus der Minimierung dieses Vakuumerwartungswertes die Bogoliubovfaktoren bestimmt werden. Bei endlicher Temperatur ist dies allerdings nicht mehr möglich, da die Quasiteilchenanregungen ein statistisches Ensemble liefern. Der in Gl.(2.26) definierte Quasiteilchengrundzustand kann nicht länger als Referenzzustand für die Normalordnung der Operatoren dienen. Nach dem Theorem von Bloch und de Dominicis [24] kann man allerdings weiterhin das Wick-Theorem auf die Ensemble-Mittelwerte der Operatoren anwenden, so daß man für den großkanonischen Erwartungswert des Hamiltonoperators schreiben kann:

$$
\begin{aligned}
\langle H\rangle &= H_0(v_q, y_q, \langle\sigma\rangle) + \eta[\beta_0 + \beta_0^\dagger] \\
&+ \sum_q \varepsilon_\pi(q)\vec{\alpha}_q^\dagger\vec{\alpha}_q + \sum_q \varepsilon_\sigma(q)\beta_q^\dagger\beta_q \\
&+ \sum_q c_\pi(q)[\vec{\alpha}_q^\dagger\vec{\alpha}_{-q}^\dagger + \vec{\alpha}_q\vec{\alpha}_{-q}] + \sum_q c_\sigma(q)[\beta_q^\dagger\beta_{-q}^\dagger + \beta_q\beta_{-q}] \\
&+ \int d^3x : \Big[\frac{\lambda_0^2}{N}\langle\sigma\rangle(\pi^2(x) + \sigma^2(x))\sigma(x) + \frac{\lambda_0^2}{4N}(\pi^2(x) + \sigma^2(x))^2\Big] : .
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Bei der Bestimmung der Bogoliubovfaktoren tritt nun anstelle der Minimierung der Vakuumsenergie die Minimierung des thermodynamischen Potentials Ω, das in Gl.(4.1) definiert wurde, bezüglich der Bogoliubovfaktoren u_q, x_q und $\langle\sigma\rangle$. Man erhält aus dieser Bedingung folgende Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\eta &= \frac{x_0 + y_0}{\sqrt{\mu}}\Big[\lambda_0^2\langle\sigma\rangle I_\pi + \frac{3}{N}\lambda_0^2\langle\sigma\rangle I_\sigma + \lambda_0^2\langle\sigma\rangle^3 + \mu_0^2\langle\sigma\rangle - c\sqrt{N}\Big] = 0, \\
c_\pi(q) &= \omega_q u_q v_q + \frac{\lambda_0^2}{2}\frac{(u_q + v_q)^2}{2\omega_q}\Big[\frac{N+2}{N}I_\pi + I_\sigma + \langle\sigma\rangle^2\Big] = 0, \\
c_\sigma(q) &= \omega_q x_q y_q + \frac{\lambda_0^2}{2}\frac{(x_q + y_q)^2}{2\omega_q}\Big[I_\pi + \frac{3}{N}I_\sigma + \langle\sigma\rangle^2\Big] = 0\,.
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

mit den Tadpole-Integralen

$$I_\pi = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1+2f_\pi(q)}{2\varepsilon_\pi(q)}, \quad I_\sigma = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1+2f_\sigma(q)}{2\varepsilon_\sigma(q)}. \tag{4.15}$$

Daraus lassen sich jetzt leicht die Quasiteilchenenergien berechnen. Es ergibt sich:

$$\varepsilon_\pi(q) = \omega_q(u_q^2+v_q^2) + \lambda_0^2 \frac{(u_q+v_q)^2}{2\omega_q} \left[\frac{N+2}{N} I_\pi + \frac{1}{N} I_\sigma + \frac{1}{N}\langle\sigma\rangle^2\right] \tag{4.16}$$

$$\varepsilon_\sigma(q) = \omega_q(x_q^2+y_q^2) + \lambda_0^2 \frac{(x_q+y_q)^2}{2\omega_q} \left[I_\pi + \frac{3}{N} I_\sigma + \frac{3}{N}\langle\sigma\rangle^2\right]. \tag{4.17}$$

Diese sind von gleicher Form, wie die in Gl.(2.40) im Fall $T=0$ definierten Quasiteilchenenergien. Analog dazu lassen sich dann auch die Quasiteilchenmassen für das Pion und das σ-Meson bestimmen:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\pi^2(0) &= \frac{c\sqrt{N}}{\langle\sigma\rangle} + \frac{2}{N}\lambda_0^2(I_\pi - I_\sigma), \\ \varepsilon_\sigma^2(0) &= \frac{c\sqrt{N}}{\langle\sigma\rangle} + \frac{2}{N}\lambda_0^2\langle\sigma\rangle^2. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Dabei ist das Kondensat $\langle\sigma\rangle$ bei endlicher Temperatur bestimmt durch

$$\frac{c\sqrt{N}}{\langle\sigma\rangle} = \left[\mu_0^2 + \lambda_0^2(I_\pi + \frac{3}{N}I_\sigma + \frac{1}{N}\langle\sigma\rangle^2)\right]. \tag{4.19}$$

Man erhält also BCS-Gleichungen von gleicher Form wie bei $T=0$. Das Goldstone-Theorem ist wiederum durch die von null verschieden Quasipionmasse verletzt. Wir werden die Symmetrieverletzung durch die Erweiterung auf die RPA wieder beseitigen.

4.3 RPA bei endlicher Temperatur

Zunächst suchen wir uns einen Anregungsoperator $Q_\nu^\dagger$, der von derselben Form ist wie der Symmetrieoperator. Wie im Fall $T=0$ ist der Symmetrieoperator wieder durch die axiale Ladung gegeben. Man kann daher für den RPA-Operator folgenden Ansatz machen:

$$\begin{aligned} Q_\nu^\dagger &= X_\nu^1 \alpha_0^{a\dagger} - Y_\nu^1 \alpha_0^a \\ &+ \sum_q \left[X_\nu^2(q)\beta_q^\dagger\alpha_{-q}^{a\dagger} - Y_\nu^2(q)\beta_{-q}\alpha_q^a + X_\nu^3(q)\beta_q\alpha_q^{a\dagger} - Y_\nu^3(q)\beta_{-q}^\dagger\alpha_{-q}^a\right]. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Dieser enthält jetzt zusätzlich Terme proportional zu $\beta_q\alpha_q^{a\dagger}$ und $\beta_{-q}^\dagger\alpha_{-q}^a$. Im Fall $T=0$ lieferten diese Terme keinen Beitrag zu den RPA-Gleichungen aufgrund der Diagonalität des Hamiltonoperators. Diese verschwinden nun nicht mehr, da keine Erwartungswerte mit dem Quasiteilchenvakuum gebildet werden, sondern großkanonische Erwartungswerte. Die zugehörigen Bewegungsgleichungen bei endlicher Temperatur kann man in gleicher Weise wie in Kap.2.3 herleiten und man erhält [25]:

$$\langle [\delta Q_\nu, [H, Q_\nu^\dagger]] \rangle = \Omega_\nu \langle [\delta Q_\nu, Q_\nu^\dagger] \rangle \,. \tag{4.21}$$

Dabei ist zu beachten, daß man bei endlicher Temperatur jeweils den großkanonischen Erwartungswert zu bilden hat, und die Variation von Q_ν auf die gleichen Quasiteilchenzustände beschränkt ist, die den RPA-Operator definieren. Da der RPA-Anregungsoperator nun sechs verschiedene Ein- und Zweiteilchenanregungen enthält, anstelle der im Vakuum aufgrund der Diagonalität des Hamiltonoperators auftretenden vier, lassen sich aus der Bewegungsgleichung sechs RPA-Gleichungen ableiten:

$$\langle [\alpha_0^a, [H, Q_\nu^\dagger]] \rangle = \Omega_\nu \langle [\alpha_0^a, Q_\nu^\dagger] \rangle \,, \tag{4.22}$$

$$\langle [\alpha_0^{a\dagger}, [H, Q_\nu^\dagger]] \rangle = \Omega_\nu \langle [\alpha_0^{a\dagger}, Q_\nu^\dagger] \rangle \,, \tag{4.23}$$

$$\langle [\alpha_{-q}^a \beta_q, [H, Q_\nu^\dagger]] \rangle = \Omega_\nu \langle [\alpha_{-q}^a \beta_q, Q_\nu^\dagger] \rangle \,, \tag{4.24}$$

$$\langle [\alpha_q^{a\dagger} \beta_{-q}^\dagger, [H, Q_\nu^\dagger]] \rangle = \Omega_\nu \langle [\alpha_q^{a\dagger} \beta_{-q}^\dagger, Q_\nu^\dagger] \rangle \,, \tag{4.25}$$

$$\langle [\alpha_q^a \beta_q^\dagger, [H, Q_\nu^\dagger]] \rangle = \Omega_\nu \langle [\alpha_q^a \beta_q^\dagger, Q_\nu^\dagger] \rangle \,, \tag{4.26}$$

$$\langle [\alpha_{-q}^{a\dagger} \beta_{-q}, [H, Q_\nu^\dagger]] \rangle = \Omega_\nu \langle [\alpha_{-q}^{a\dagger} \beta_{-q}, Q_\nu^\dagger] \rangle \,. \tag{4.27}$$

Diese Gleichungen kann man dann durch Einführung einer Matrix in kompakter Form schreiben als:

$$\sum_p \mathcal{M}_{ij}(q,p) \chi_j(p) = \Omega_\nu \mathcal{N}_{ij}(q) \chi_j(q) \,. \tag{4.28}$$

Dies stellt ein Eigenwertproblem dar mit den Eigenwerten Ω_ν und den Eigenvektoren $\chi_j(q)$. Diese sind gegeben durch

$$\chi_j(q) = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_\nu(q) \\ \mathcal{V}_\nu(q) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_\nu(q) = \begin{pmatrix} X_\nu^1(q) \\ X_\nu^2(q) \\ X_\nu^3(q) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}_\nu(q) = \begin{pmatrix} Y_\nu^1(q) \\ Y_\nu^2(q) \\ Y_\nu^3(q) \end{pmatrix}. \tag{4.29}$$

Die Matrix $\mathcal{N}_{ij}(q)$ kann man aus den Vertauschungsrelationen der Quasiteilchenoperatoren bestimmen:

$$\mathcal{N}_{11} = -\mathcal{N}_{44} = 1 \tag{4.30}$$

$$\mathcal{N}_{22} = -\mathcal{N}_{55} = 1 + f_\pi(q) + f_\sigma(q) \tag{4.31}$$

$$\mathcal{N}_{33} = -\mathcal{N}_{66} = f_\sigma(q) - f_\pi(q) \,. \tag{4.32}$$

Zur Bestimmung von $\mathcal{M}$ führt man zunächst den Doppelkommutator auf der linken Seite der Gl. (4.27) aus und bildet anschließend den großkanonischen Erwartungswert. Daraus kann man dann die Komponenten der Matrix $\mathcal{M}$ ablesen.

$$\mathcal{M}(q,p) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}(q,p) & \mathcal{B}(q,p) \\ \mathcal{B}(q,p) & \mathcal{A}(q,p) \end{pmatrix}. \tag{4.33}$$

Die Matrizen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind 3×3 Matrizen und sind gegeben durch

$$\mathcal{A}(q,p) = \begin{pmatrix} \varepsilon_\pi(0) & 0 & 0 \\ 0 & [\varepsilon_\pi(q)+\varepsilon_\sigma(q)] & 0 \\ 0 & 0 & [\varepsilon_\pi(q)-\varepsilon_\sigma(q)] \end{pmatrix}\delta_{qp}\,, \tag{4.34}$$

$$\mathcal{B}(p,q) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_\pi(0)}}\begin{pmatrix} 0 & 2\frac{\lambda_0^2}{N}\langle\sigma\rangle\mathcal{R}(p) & 2\frac{\lambda_0^2}{N}\langle\sigma\rangle\mathcal{R}(p) \\ 2\frac{\lambda_0^2}{N}\langle\sigma\rangle\mathcal{R}(q) & 2\frac{\lambda_0^2}{N}\langle\sigma\rangle\mathcal{R}(q)\mathcal{R}(p) & 2\frac{\lambda_0^2}{N}\langle\sigma\rangle\mathcal{R}(q)\mathcal{R}(p) \\ 2\frac{\lambda_0^2}{N}\langle\sigma\rangle\mathcal{R}(q) & 2\frac{\lambda_0^2}{N}\langle\sigma\rangle\mathcal{R}(q)\mathcal{R}(p) & 2\frac{\lambda_0^2}{N}\langle\sigma\rangle\mathcal{R}(q)\mathcal{R}(p) \end{pmatrix}. \tag{4.35}$$

Der Term $\mathcal{R}(q)$ hat dabei dieselbe Form wie in Gl.(2.66) und ist implizit temperaturabhängig. Man stellt an den RPA-Operator die Bedingung, daß dieser normiert ist, also für den großkanonischen Erwartungswert des Kommutators gilt:

$$\langle[Q_\pi, Q_\pi^\dagger]\rangle = (|X_\pi^1|^2 + |Y_\pi^1|^2) + \sum_q \Big[[1+f_\pi(q)+f_\sigma(q)](|X_\pi^2|^2+|Y_\pi^2|^2) \tag{4.36}$$

$$+ [f_\sigma(q)-f_\pi(q)](|X_\pi^3|^2+|Y_\pi^3|^2)\Big] = 1\,. \tag{4.37}$$

Daraus lassen sich dann die Lösungen der RPA für das Pion bei endlicher Temperatur bestimmen:

$$\Omega_\nu^2 = \varepsilon_\pi^2(0) + \frac{4\lambda_0^4}{N^2}\frac{\langle\sigma\rangle^2\Sigma_{\pi\sigma}(\Omega_\nu^2)}{1-2\lambda_0^2\Sigma_{\pi\sigma}(\Omega_\nu^2)} \tag{4.38}$$

Daraus lässt sich, wie im Fall $T=0$, unter Ausnutzung der BCS-Gap-Gleichungen in Gl.(4.18) und der Identität

$$\Sigma_{\pi\sigma}(0) = \frac{I_\pi - I_\sigma}{\varepsilon_\pi^2(0)-\varepsilon_\sigma^2(0)} \tag{4.39}$$

die Pionmasse bei endlicher Temperatur bestimmen:

$$m_\pi^2 = \frac{c}{s} + \frac{2\lambda_0^2}{N}\frac{[\varepsilon_\pi^2-\varepsilon_\sigma^2][\Sigma_{\pi\sigma}(0)-\Sigma_{\pi\sigma}(m_\pi^2)]}{1-\frac{2\lambda_0^2}{N}\Sigma_{\pi\sigma}(m_\pi^2)}\,. \tag{4.40}$$

Für die σ-Masse erhält man analog:

$$m_\sigma^2 = \varepsilon_\sigma^2 + 2\lambda_0^4 s^2 \frac{\Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2) + \frac{9}{N}\Sigma_{\sigma\sigma}(m_\sigma^2) - 6\lambda_0^2\frac{N+3}{N^2}\Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)\Sigma_{\sigma\sigma}(m_\sigma^2)}{[1-\frac{N+2}{N}\lambda_0^2\Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)][1-\frac{3}{N}\lambda_0^2\Sigma_{\sigma\sigma}(m_\sigma^2)] - \frac{1}{N}\lambda_0^4\Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)\Sigma_{\sigma\sigma}(m_\sigma^2)}\,. \tag{4.41}$$

Dabei wurde erneut das Kondensat $\langle\sigma\rangle$ durch s ersetzt wie in Gl.(2.73). Die Selbstenergien $\Sigma_{\pi\sigma}$, $\Sigma_{\sigma\sigma}$ und $\Sigma_{\pi\pi}$ ergeben sich bei endlicher Temperatur nach Ausführung der

q_0-Integration zu:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\pi\sigma}(\Omega_\nu^2,\vec{p}) = & \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\Big[\frac{\varepsilon_\pi(\vec{q})+\varepsilon_\sigma(\vec{p}-\vec{q})}{2\varepsilon_\pi(\vec{q})\varepsilon_\sigma(\vec{p}-\vec{q})}\frac{1+f_\pi(\vec{q})+f_\sigma(\vec{p}-\vec{q})}{\Omega_\nu^2-(\varepsilon_\pi(\vec{q})+\varepsilon_\sigma(\vec{p}-\vec{q}))^2} \\
& + \frac{\varepsilon_\pi(\vec{q})-\varepsilon_\sigma(\vec{p}-\vec{q})}{2\varepsilon_\pi(\vec{q})\varepsilon_\sigma(\vec{p}-\vec{q})}\frac{f_\sigma(\vec{p}-\vec{q})-f_\pi(\vec{q})}{\Omega_\nu^2-(\varepsilon_\pi(\vec{q})-\varepsilon_\sigma(\vec{p}-\vec{q}))^2}\Big] && (4.42) \\
\Sigma_{\pi\pi}(\Omega_\nu^2,\vec{p}) = & \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\Big[\frac{\varepsilon_\pi(\vec{q})+\varepsilon_\pi(\vec{p}-\vec{q})}{2\varepsilon_\pi(\vec{q})\varepsilon_\pi(\vec{p}-\vec{q})}\frac{1+f_\pi(\vec{q})+f_\pi(\vec{p}-\vec{q})}{\Omega_\nu^2-(\varepsilon_\pi(\vec{q})+\varepsilon_\pi(\vec{p}-\vec{q}))^2} \\
& + \frac{\varepsilon_\pi(\vec{q})-\varepsilon_\pi(\vec{p}-\vec{q})}{2\varepsilon_\pi(\vec{q})\varepsilon_\pi(\vec{p}-\vec{q})}\frac{f_\pi(\vec{q})-f_\pi(\vec{p}-\vec{q})}{\Omega_\nu^2-(\varepsilon_\pi(\vec{q})-\varepsilon_\pi(\vec{p}-\vec{q}))^2}\Big] && (4.43) \\
\Sigma_{\sigma\sigma}(\Omega_\nu^2,\vec{p}) = & \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\Big[\frac{\varepsilon_\sigma(\vec{q})+\varepsilon_\sigma(\vec{p}-\vec{q})}{2\varepsilon_\sigma(\vec{q})\varepsilon_\sigma(\vec{p}-\vec{q})}\frac{1+f_\sigma(\vec{q})+f_\sigma(\vec{p}-\vec{q})}{\Omega_\nu^2-(\varepsilon_\sigma(\vec{q})+\varepsilon_\sigma(\vec{p}-\vec{q}))^2} \\
& + \frac{\varepsilon_\sigma(\vec{q})-\varepsilon_\sigma(\vec{p}-\vec{q})}{2\varepsilon_\sigma(\vec{q})\varepsilon_\sigma(\vec{p}-\vec{q})}\frac{f_\sigma(\vec{q})-f_\sigma(\vec{p}-\vec{q})}{\Omega_\nu^2-(\varepsilon_\sigma(\vec{q})-\varepsilon_\sigma(\vec{p}-\vec{q}))^2}\Big]\,. && (4.44)
\end{aligned}$$

Nun kann man erneut den Limes $N \to \infty$ bilden und erhält für das Kondensat und die Massen der Quasiteilchen:

$$\begin{aligned}
\frac{c}{s} &= \mu_0^2 + \lambda_0^2[I_\pi + s^2] \\
m_\pi^2 &= \frac{c}{s} = \mu_0^2 + \lambda_0^2[I_\pi + s^2] \\
m_\sigma^2 &= \frac{c}{s} + 2\lambda_0^2 s^2 + 2\lambda_0^4 s^2 \frac{\Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)}{1-\lambda_0^2\Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)}\,.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Man sieht wieder, daß die Pionen die Goldstone-Bosonen sind, da die Pionmasse im chiralen Limes verschwindet. Die Masse des σ-Mesons erhält allerdings wieder Beiträge aus der RPA. Diese sind von gleicher Form wie im Fall $T = 0$. Die Massen und das Kondensat haben jedoch eine Temperaturabhängigkeit erhalten. Insbesondere muß man folgenden Fall beachten: Bei einer bestimmten endlichen Temperatur kann der Wert des Kondensates $\langle\sigma\rangle$ verschwinden. Dies ist im chiralen Limes ein Phasenübergang in die ungebrochene Phase des Modells, in der die Massen der Quasiteilchen nach Gl.(4.45) gleich sind . Zusätzlich wäre die in Gl.(4.14) geforderte Bedingung für η automatisch erfüllt. Dieser Phasenübergang und seine Auswirkungen werden im nächsten Kapitel etwas ausführlicher diskutiert.

4.4 Eigenschaften des σ-Propagators bei endlicher Temperatur

Aus den im vorigen Kapitel hergeleiteten Gleichungen kann man sofort den Pionpropagator und den σ-Propagator bei endlicher Temperatur bestimmen:

$$D_\pi^T(E,\vec{p}) = \frac{1}{E^2 - \vec{p}^2 - m_\pi^2(T)}, \tag{4.46}$$

$$D_\sigma^T(E,\vec{p}) = \left[E^2 - \vec{p}^2 - \varepsilon_\sigma^2(T) - \frac{2\lambda_0^4 \langle\sigma\rangle_T^2 \Sigma_{\pi\pi}^T(E,\vec{p})}{1 - \lambda_0^2 \Sigma_{\pi\pi}^T(E,\vec{p})}\right]^{-1}. \tag{4.47}$$

Aus Gl.(4.45) erhält man die Pion- und die σ-Masse und das Kondensat. Dies sind zwei miteinander gekoppelte nichtlineare Gleichungen für die Pionmasse und das Kondensat, woraus man dann mit der dritten Gleichung auch die Masse des σ-Mesons bestimmen kann. I_π steht dabei für den pionischen Tadpole:

$$I_\pi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1 + 2f_\pi(\vec{p})}{\omega_p}, \tag{4.48}$$

mit

$$\omega_p = \sqrt{m_\pi^2(T) + \vec{p}^2}. \tag{4.49}$$

Dieses Integral besitzt allerdings einen quadratisch divergenten Anteil und wir regularisieren diesen mittels der Methode von Pauli-Villars, wie in Anhang C beschrieben. Man erhält dann für den Tadpole-Beitrag unter Einführung einer schweren Regulatormasse:

$$\begin{aligned} I_\pi = \frac{1}{16\pi^2} &\left[(m_\pi^2(T) + 2\Lambda^2) \ln \frac{m_\pi^2(T) + 2\Lambda^2}{m_\pi^2(T)} - 2(m_\pi^2(T) + \Lambda^2) \ln \frac{m_\pi^2(T) + \Lambda^2}{m_\pi^2(T)}\right] \\ &+ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2f_\pi(\vec{p})}{\omega_p}. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Für Λ haben wir einen Wert von 1.2 GeV gewählt. Damit kann man nun die Teilchenmassen ausrechnen und man erhält die in Abb.4.1 gezeigte Temperaturabhängigkeit. Die Masse des Pions bleibt über einen großen Temperaturbereich nahezu konstant, was darauf zurückzuführen ist, daß die Pionen Goldstone-Bosonen sind (zumindest im chiralen Limes) und von daher ihre Masse keine allzugroßen Änderungen erfahren sollte. Man sieht deutlich, daß die Masse des σ sich mit steigender Temperatur der Pionmasse annähert. Dies ist auf die unserem Modell zugrundeliegende chirale Symmetrie zurückzuführen. Bei einer Temperatur $T = 200$ MeV ist die Masse des σ-Mesons unter die zweifache Pionenmasse gesunken. Das σ kann dann nicht mehr in zwei Pionen zerfallen und der Imaginärteil der Selbstenergie verschwindet. An dieser Stelle sieht man daher einen Knick in der Masse des σ-Mesons. Das Kondensat nimmt mit der Temperatur kontinuierlich ab und geht für sehr hohe Temperaturen ($T > 500$ MeV) gegen null. Es hat allerdings bereits bei $T \approx 350$ MeV

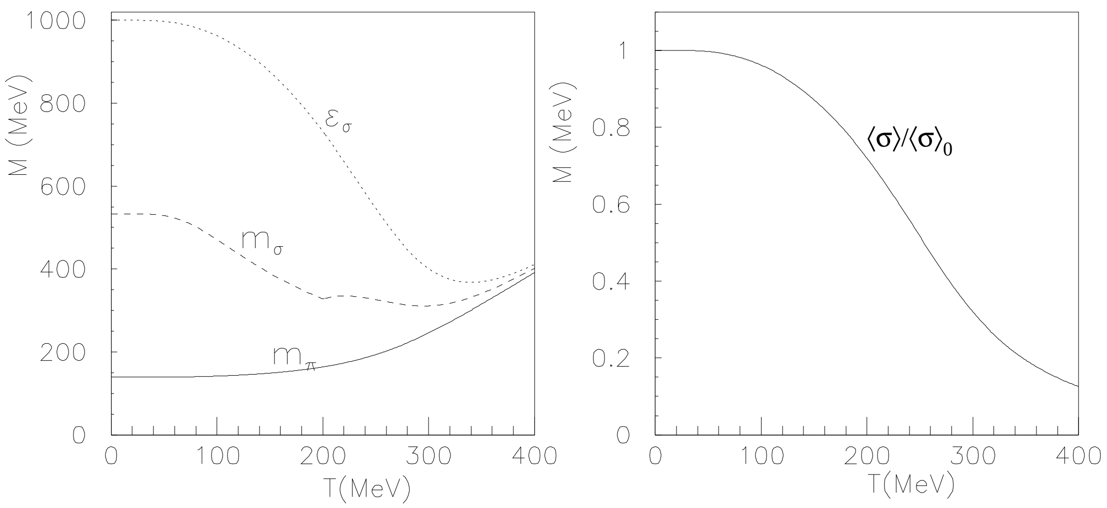

Abbildung 4.1: *Die Massen von Pion und σ-Meson als Funktion der Temperatur. Auf der rechten Seite ist der Verlauf des Kondensates zu sehen.*

einen kleinen Wert, so daß die Massen des Pions und des σ-Mesons bei dieser Temperatur ungefähr gleich sind.
Im chiralen Limes würde man bei einer kritischen Temperatur T_c eine vollständige Restaurierung der spontan gebrochen Symmetrie der Lagrangedichte erwarten. Dies kommt daher, daß das Kondensat, dessen endlicher Wert für die spontane Symmetriebrechung verantwortlich ist, bei einer bestimmten Temperatur verschwindet. Damit verschwinden nach Gl.(4.47) die RPA-Fluktuationen für das σ-Meson und die physikalische Masse des σ-Mesons wäre gleich der nackten Masse. Zudem folgt aus Gl.(4.45), daß die Massen von Pion und σ-Meson gleich sind. Die chirale Symmetrie ist also wiederhergestellt. Dies ist in Abb.4.2 zu sehen. Hier wurde der Symmetriebrechungsparameter c auf einen sehr kleinen Wert gesetzt. Die Masse des Pions ist bis zu einer Temperatur T_c von etwa 170 MeV null, wie es vom Goldstone-Theorem gefordert wird. Bei dieser Temperatur ist das Kondensat auf den Wert null gesunken und damit gelangt man von der Nambu-Goldstone-Phase – der spontan gebrochenen Phase des Modells – in die Wigner-Weyl-Phase. In dieser Phase ist die ursprüngliche Symmetrie der Lagrangedichte wiederhergestellt und die Massen des Pions und des σ-Mesons sind entartet. Das Pion ist nun kein Goldstone-Boson mehr, da keine spontane Symmetriebrechung mehr vorliegt, und kann von da an auch Massen größer null annehmen. Die Masse des σ-Mesons fällt im Bereich $T < T_c$ ab wegen des abnehmenden Kondensates. Bei T_c verschwindet das Kondensat. Die Masse des σ-Mesons ist gleich der des Pions, also gleich null. Mit wachsender Temperatur steigen dann die Massen der beiden Teilchen aufgrund des Beitrages der Tadpoleschleife wieder an, bleiben aber entartet, wie man in Abb.4.2 gut sehen kann. Der Wert der kritischen Temperatur T_c von 170 MeV ist dabei in guter Übereinstimmung mit Rechnungen im Rahmen der Gitter-QCD, die für den chiralen Phasenübergang eine kritische Temperatur von 150 MeV $\pm$ 20 MeV vorhersagen [6].

Der Massenverlauf des σ-Mesons unterhalb von T_c ist allerdings etwas ungewöhnlich. Bei einer Temperatur $T \approx 80$ MeV sieht man einen Knick. Dieser ist Folge der RPA-Fluktuationen, die sich bei dieser Temperatur stark ändern. Die Masse des σ-Mesons ist im chiralen Limes nach Gl.(2.75) und Gl.(3.8) gegeben durch:

$$m_\sigma^2(T) = \frac{\varepsilon_\sigma^2(T)}{1 - \lambda_0^2 \Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)} \tag{4.51}$$

Aus dieser Gleichung kann man ablesen, daß die σ-Masse durch große Fluktuationen unterdrückt ist. Die Fluktuationen sind im Bereich $T < 80$ MeV relativ klein und zeigen einen leichten Anstieg, so daß die σ-Masse in diesem Bereich dem Verlauf von ε_σ folgt. Bei $T \approx 80$ MeV beginnen Real- und insbesondere Imaginärteil von $\Sigma_{\pi\pi}$ dann stark zu steigen und man erhält den in Abb.4.2 gezeigten Verlauf für die σ-Masse. In Abb.4.3 sieht man den Verlauf der RPA-Fluktuationen mit der Temperatur. In der oberen Hälfte sind Real- und Imaginärteil der Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$ zu sehen und in der unteren Hälfte der Faktor $1/(1 - \lambda_0^2 \Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2))$ für verschiedene Regularisierungen der Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$, sowie der Verlauf der Massen. Deutlich kann man bei $T \approx 80$ MeV den starken Anwachs des Imaginärteils der Selbstenergie erkennen, der für den Knick in der Massenfunktion verantwortlich ist. Dieser Effekt ist, wie man in der unteren Hälfte der Abb.4.3 sehen kann, qualitativ unabhängig von der gewählten Regularisierung der Selbstenergie. Die Temperatur, bei der es zu dem starken Anstieg im Imaginärteil kommt, zeigt allerdings eine Abhängigkeit von den bei der Regularisierung verwendeten Parametern. Die Masse zeigt von daher für beide Regularisierungen einen ähnlichen Verlauf. Eine physikalische Interpretation dieses Effektes ist, daß durch die RPA-Fluktuationen der Phasenübergang zu einer niedrigeren Temperatur verschoben wird. Allerdings tragen die RPA-Fluktuationen aufgrund unserer Näherung nicht zum Kondensat bei. Daher sieht man diesen Effekt nur in der σ-Masse. Bei einer selbstkonsistenten Behandlung würde man erwarten, daß das Kondensat bei derselben reduzierten Temperatur verschwindet wie die σ-Masse, und daß dann der Imaginärteil des σ-Propagators, der proportional zur skalaren Suszeptibilität ist, eine Deltafunktion ist [26].

Zur Bestimmung des σ-Propagators muß man wiederum den Beitrag der RPA-Fluktuationen berücksichtigen. Dieser Beitrag war abhängig von der Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}(E, \vec{p})$. Die Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}(E, \vec{p})$ ergibt sich bei endlicher Temperatur zu:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\pi\pi}(E, \vec{p}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \Big(& \frac{\varepsilon_\pi(\vec{q}) + \varepsilon_\pi(\vec{p} - \vec{q})}{2\varepsilon_\pi(\vec{q})\varepsilon_\pi(\vec{p} - \vec{q})} \frac{1 + f_\pi(\vec{q}) + f_\pi(\vec{p} - \vec{q})}{E^2 - (\varepsilon_\pi(\vec{q}) + \varepsilon_\pi(\vec{p} - \vec{q}))^2} \\ & + \frac{\varepsilon_\pi(\vec{q}) - \varepsilon_\pi(\vec{p} - \vec{q})}{2\varepsilon_\pi(\vec{q})\varepsilon_\pi(\vec{p} - \vec{q})} \frac{f_\pi(\vec{q}) - f_\pi(\vec{p} - \vec{q})}{E^2 - (\varepsilon_\pi(\vec{q}) - \varepsilon_\pi(\vec{p} - \vec{q}))^2} \Big) v(q)^2 \,. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Im Spezialfall $\vec{p} = 0$ vereinfacht sich die Selbstenergie wie folgt:

$$\Sigma_{\pi\pi}(E) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{v(q)^2}{2\varepsilon_\pi(\vec{q})} \frac{1 + 2f_\pi(\vec{q})}{E^2 - 4\varepsilon_\pi(\vec{q})^2} \,. \tag{4.53}$$

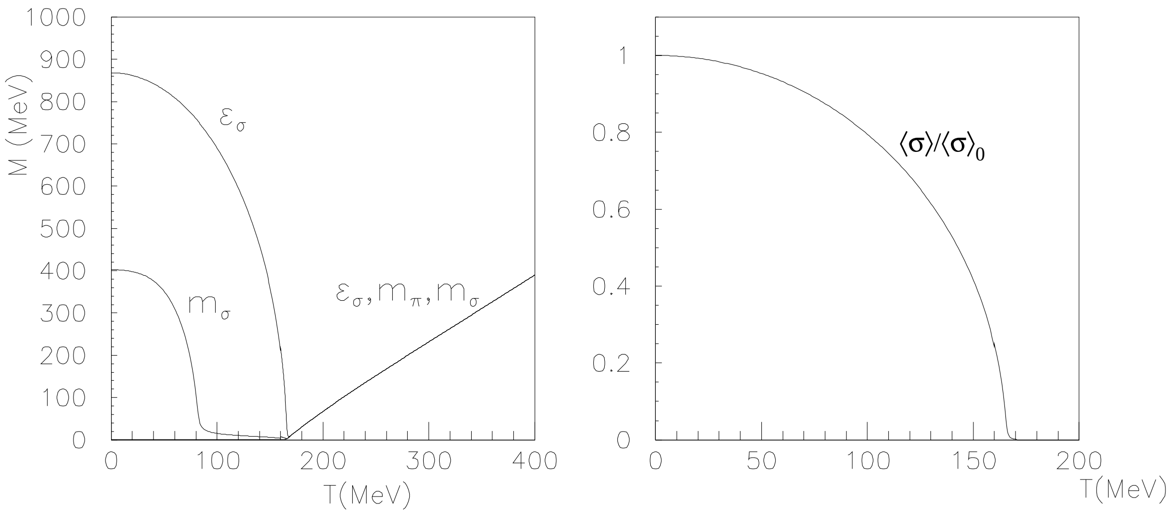

Abbildung 4.2: *Die Massen von Pion und σ-Meson als Funktion der Temperatur im chiralen Limes, sowie der Verlauf des Kondensates. ε_σ ist dabei die Masse des Quasi-sigma und m_σ die physikalische σ-Masse. Der Übergang von der Nambu-Goldstone-Phase in die Wigner-Weyl-Phase findet bei ca. 170 MeV statt.*

Dieses Integral ist durch den bereits in Gl.(3.5) eingeführten Formfaktor regularisiert. Die Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$, sowie die volle Selbstenergie Σ_σ des σ-Mesons sind in Abbildung 4.4 gezeigt.

Im oberen Teil des Bildes sind zunächst der Real- und der Imaginärteil der Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$ für $T = 150$ MeV und $T = 0$ MeV zu sehen. Der Imaginärteil von $\Sigma_{\pi\pi}$ erhält bei endlicher Temperatur erst ab einer im Vergleich zu $T = 0$ erhöhten Energie Beiträge. Das liegt daran, daß bei endlicher Temperatur die Pionmasse einen höheren Wert besitzt und daher die Zweipionschwelle, ab der der Imaginärteil von $\Sigma_{\pi\pi}$ Beiträge erhält, erhöht ist. Zudem zeigt der Imaginärteil an der Schwelle eine Erhöhung um etwa 80 Prozent gegenüber $T = 0$. Im Realteil von $\Sigma_{\pi\pi}$ sieht man mit steigender Temperatur eine leichte Verschiebung des Minimums zu höheren Energien. Zudem ist das Minimum stärker ausgebildet. In der unteren Hälfte sieht man die volle Selbstenergie Σ_σ bei der gleichen Temperatur. Der Realteil der Selbstenergie Σ_σ wird mit steigender Temperatur vom Betrag her kleiner, was einen Anstieg der Masse des σ-Mesons zur Folge hätte. Dieser Effekt wird aber kompensiert dadurch, daß die „nackte“ Masse ε_σ sich aufgrund des abnehmenden Kondensates verringert. Im Massenspektrum sieht man diesen Effekt im Temperaturbereich ab etwa 200 MeV, in dem die Masse des σ-Mesons nahezu konstant ist, trotz abnehmender Masse ε_σ. Der Imaginärteil von Σ_σ erhält bei steigender Temperatur erst bei höheren Energien Beiträge aus dem oben beschriebenen Grund. Im Gegensatz zur Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$ ist allerdings der Imaginärteil bei $T = 150$ MeV leicht reduziert im Vergleich zu $T = 0$. Diese Reduzierung für Real- und Imaginärteil ist Folge des abnehmenden Wertes des Kondensates. Nun können wir den Propagator des σ-Mesons bei endlicher Temperatur mittels Gl.(4.47) berechnen. Die im Massenspektrum gezeigte physikalische Masse des σ-Mesons

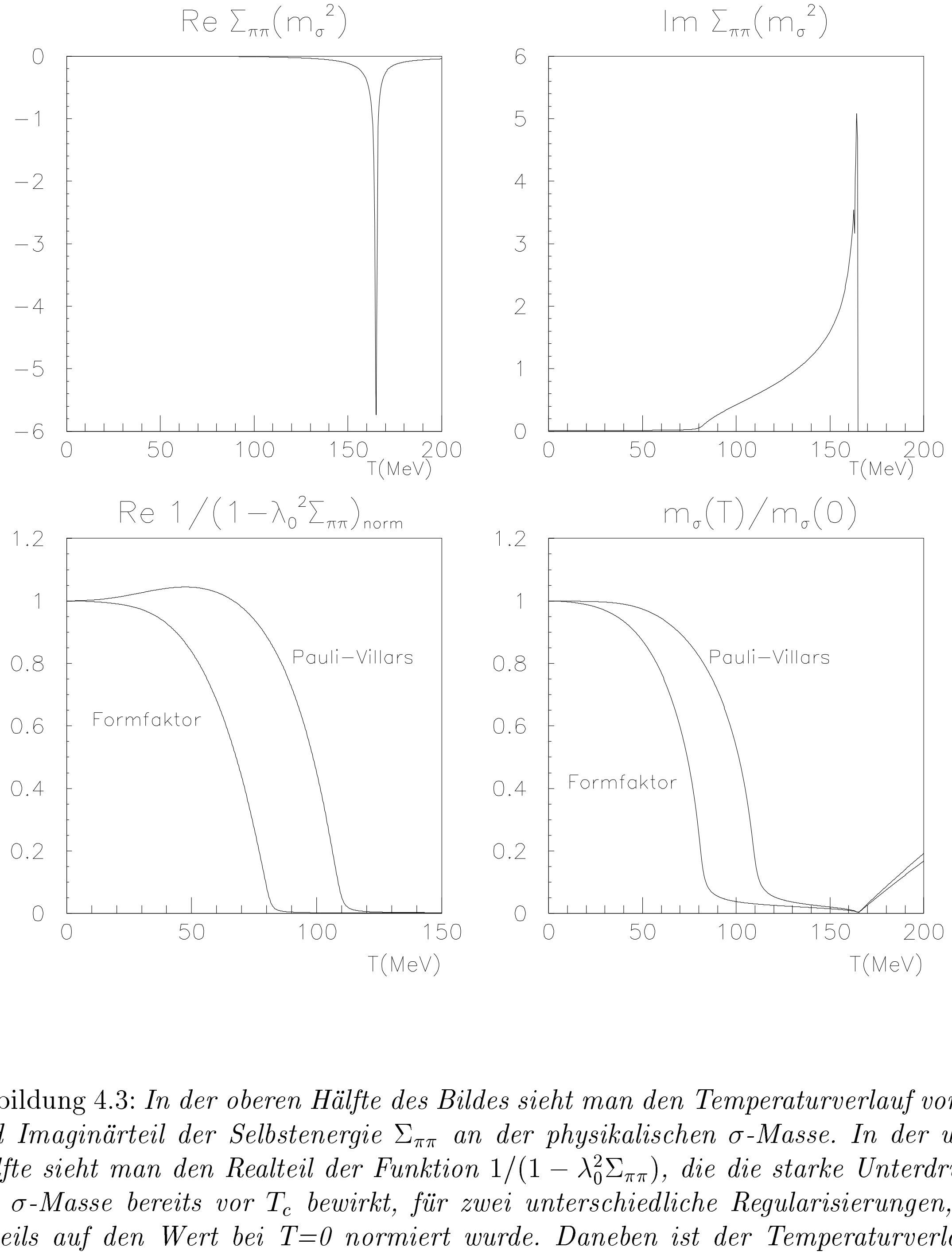

Abbildung 4.3: *In der oberen Hälfte des Bildes sieht man den Temperaturverlauf von Real- und Imaginärteil der Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$ an der physikalischen σ-Masse. In der unteren Hälfte sieht man den Realteil der Funktion $1/(1-\lambda_0^2\Sigma_{\pi\pi})$, die die starke Unterdrückung der σ-Masse bereits vor T_c bewirkt, für zwei unterschiedliche Regularisierungen, wobei jeweils auf den Wert bei T=0 normiert wurde. Daneben ist der Temperaturverlauf für beide Regularisierungen zu sehen.*

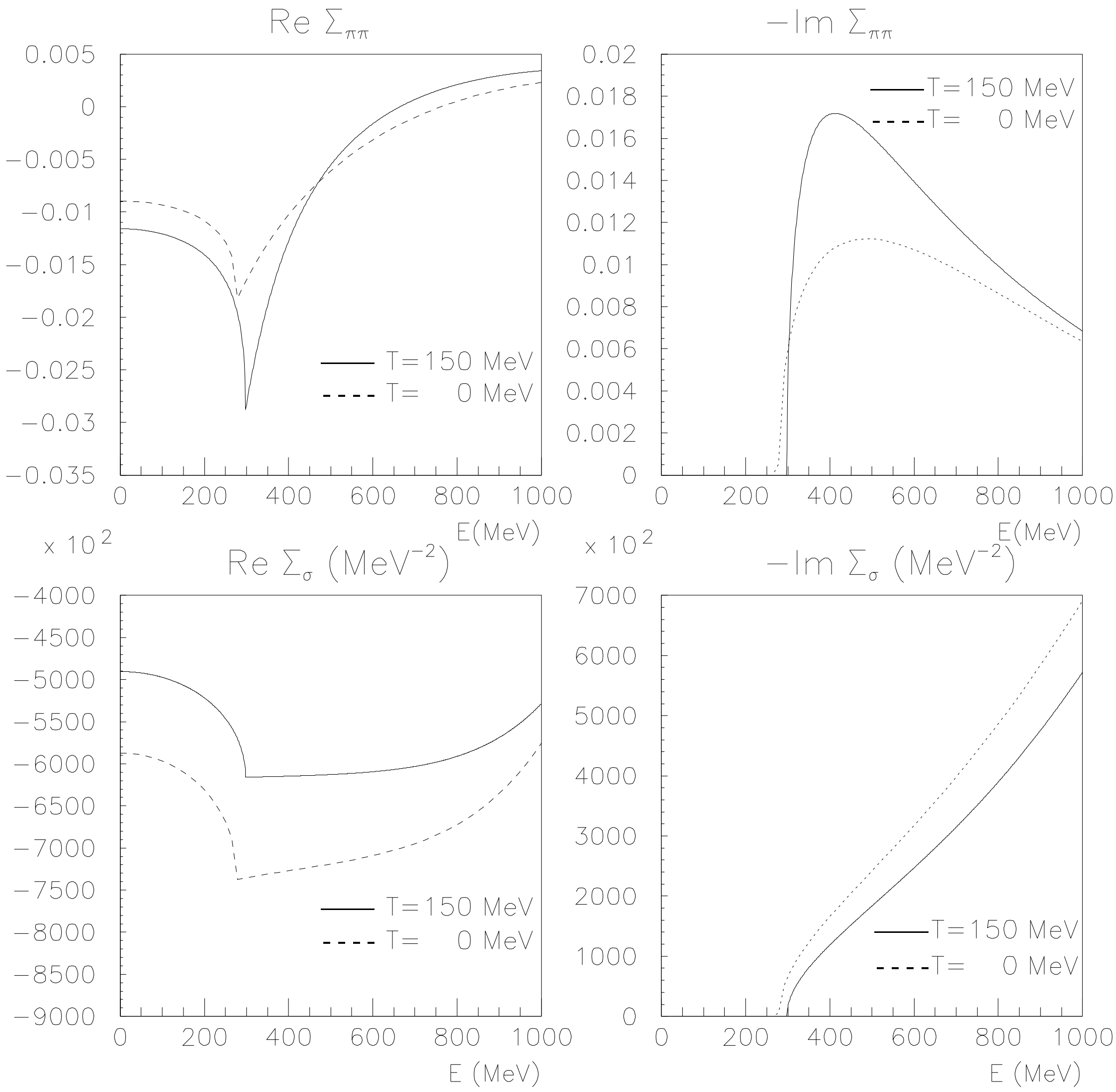

Abbildung 4.4: *Im oberen Teil des Bildes sieht man die Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$ bei einer Temperatur T=150 MeV und T=0. Im unteren Teil sind der Real- und Imaginärteil der Selbstenergie des σ-Mesons bei den gleichen Temperaturen dargestellt. Die gestrichelte Linie kennzeichnet dabei jeweils den Fall T=0, während die durchgezogene Linie das Verhalten bei T=150 MeV zeigt.*

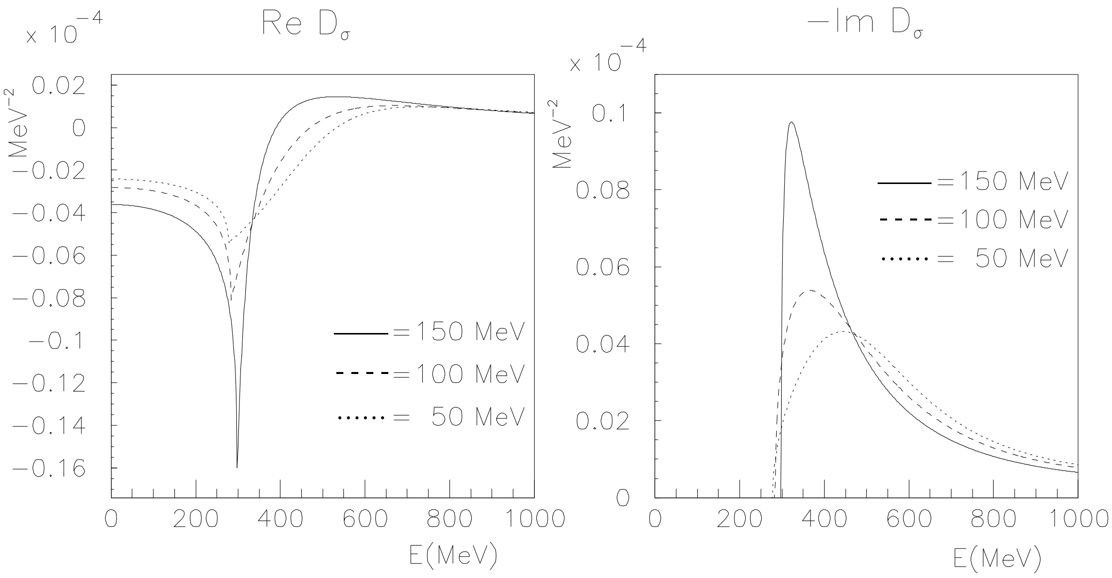

Abbildung 4.5: *Real- und Imaginärteil des σ-Propagators bei einer Temperatur von 50 MeV, 100 MeV und 150 MeV.*

erhält man dabei aus der Nullstelle des Realteils des Propagators.
In Abb.4.5 kann man erkennen, daß für eine Temperatur von 50 MeV sich die Masse kaum verändert hat und etwa 528 MeV beträgt. Dann allerdings kommt es, wie bereits im Verlauf der Massenspektren zu sehen, zu einer starken Änderung der Masse mit steigender Temperatur, so daß die Masse bei einer Temperatur von 150 MeV einen Wert von 390 MeV erreicht. Man kann allerdings noch einen weiteren Effekt im Realteil des Propagators beobachten: Für steigende Temperaturen wird das Minimum in Realteil immer „schärfer", bis es bei einer Temperatur von etwa 200 MeV zu einer Polstelle wird. Das liegt daran, daß dann die Masse des σ-Mesons kleiner ist als die zweifache Pionenmasse und damit der Imaginärteil null wird, da das σ in Ruhe nicht mehr in zwei Pionen zerfallen kann. Der Imaginärteil, der die Breite des σ-Mesons beschreibt, erfährt auch eine temperaturabhängige Änderung. Bei einer Temperatur von 150 MeV ist die Breite, die im Vakuum 360 MeV betragen hatte, auf den Wert von 165 MeV, also ungefähr auf die Hälfte, abgesunken. Für den Fall, daß die Temperatur größer als 200 MeV ist, und damit die σ-Masse unterhalb der Zweipionenschwelle liegt, verschwindet die Breite des σ-Mesons. Zur Bestimmung der $T_{\pi\pi}$-Streumatrix benutzen wir die in Gl.(3.22) eingeführte Ward-Identität, jetzt aber mit den temperaturabhängigen Größen:

$$T_{\pi\pi}(E,\vec{p}) = \frac{D_\pi^{-1}(E,\vec{p}) - D_\sigma^{-1}(E,\vec{p})}{s^2} \frac{D_\sigma(E,\vec{p})}{D_\pi(E,\vec{p})} \tag{4.54}$$

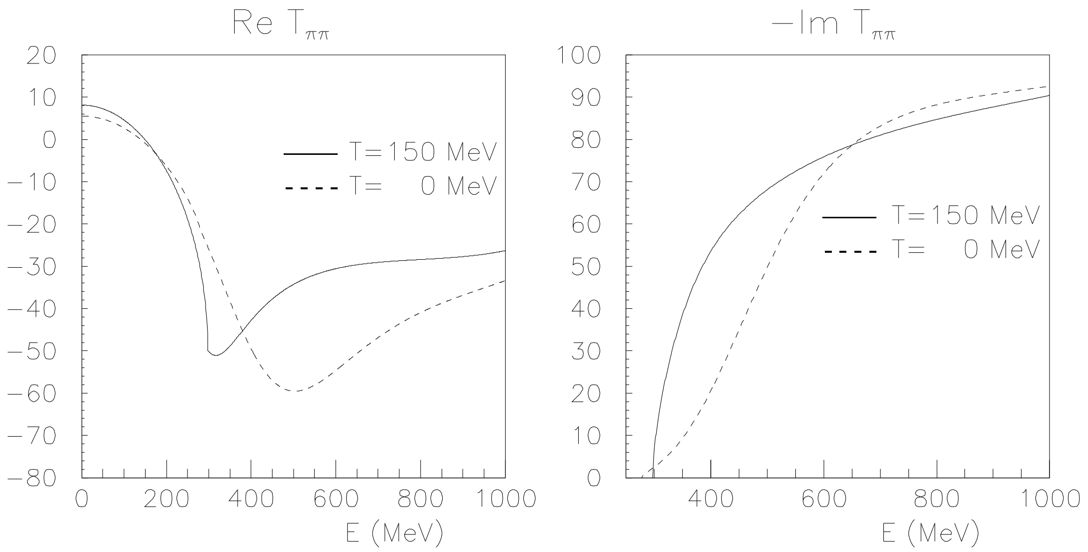

Abbildung 4.6: *Real- und Imaginärteil der $T_{\pi\pi}$-Streumatrix bei einer Temperatur von 150 MeV. Die gestrichelte Linie steht für T=0.*

Mit den zuvor berechneten Größen ergibt sich dann für die Streumatrix der in Abb.4.6 gezeigte Verlauf. Die wichtige Eigenschaft, daß der Realteil der Streumatrix repulsiv ist für kleine Energien, ist wieder erfüllt. Die Schwelle für den Imaginärteil ist aufgrund der gestiegenen Pionmasse leicht zu höheren Energien hin verschoben. Zudem erkennt man eine starke Zunahme des Imaginärteils in Schwellennähe.

Kapitel 5

Das σ-Meson in dichter Materie

In diesem Kapitel möchten wir nun die Änderungen diskutieren, die das σ-Meson in dichter Materie erfährt. In dichter Umgebung muß man dabei aufgrund des Vorhandenseins von fermionischen Freiheitsgraden einen zusätzlichen Term in der Lagrangedichte berücksichtigen, der Kopplungen der Bosonen an die Fermionen beschreibt. Dieser Term ist im linearen σ-Modell gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\to \mathcal{L} + \mathcal{L}_F \,, \\ \mathcal{L}_F &= \bar{\Psi}\Big[i\partial_\mu\gamma^\mu + g(\sigma + i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}\gamma_5)\Big]\Psi \,. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Ψ steht dabei für ein freies Nukleonfeld und $\vec{\tau}$ ist der Vektor aus den Pauli-Matrizen. Für diese, wie auch für die γ-Matrizen, benutzen wir die in [27] verwandte Form. Dabei beschränken wir uns auf drei Pionfelder. Der so eingeführte Wechselwirkungsterm erlaubt dann Kopplungen von einem Boson an ein Fermion-Antifermion-Paar.

5.1 Der Pionpropagator

In diesem Kapitel geht es nun darum, das σ in Materie zu beschreiben. Dazu muss man zwei Effekte in Betracht ziehen: Zum einen Effekte durch die direkte Wechselwirkung des σ mit den umgebenden Nukleonen, zum anderen aber auch Effekte, die durch Modifikationen des Pions in Materie entstehen. Zuerst möchten wir die Modifikationen des Pions beschreiben. In Materie erhält der Pionpropagator Selbstenergiebeiträge durch Wechselwirkungen mit der Materie. Der Pionpropagator kann dann folgendermaßen geschrieben werden:

$$D_\pi(E,\vec{p}) = \frac{1}{E^2 - \vec{p}^2 - m_\pi^2 - \Sigma_\pi(E,\vec{p})} \,. \tag{5.2}$$

Die dominanten Beiträge zur Pion-Selbstenergie kommen durch Kopplungen des Pions an Teilchen-Loch- und Delta-Loch-Prozesse zustande, wobei die Teilchen-Loch-Prozesse hauptsächlich p-Wellen Prozesse sind – die s-Wellen-Beiträge sind bei den relevanten

Pion-Impulsen um etwa eine Größenordnung unterdrückt. Bei Vernachlässigung anderer Beiträge zur Pionselbstenergie und unter Einführung der pionischen Suszeptibilitäten $\tilde{\chi}_{NN^{-1}}$ und $\tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}}$ kann man die Selbstenergie schreiben als

$$\Sigma_\pi(p_0,\vec{p}) = -\vec{p}^{\,2}(\chi_{NN^{-1}} + \chi_{\Delta N^{-1}})\,, \tag{5.3}$$

wobei die pionischen Suszeptibilitäten definiert werden durch

$$\tilde{\chi}_{NN^{-1}}(p_0,\vec{p}) = -4\frac{f^2_{\pi NN}\Gamma^2_\pi(\vec{p})}{m^2_\pi} i\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} G_N(q)G_N(q+p) \tag{5.4}$$

$$\tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}}(p_0,\vec{p}) = -\frac{16}{9}\frac{f^2_{\pi\Delta N}\Gamma^2_\pi(\vec{p})}{m^2_\pi} i\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} G_N(q)(G_\Delta(q+p) + G_\Delta(q-p))\,. \tag{5.5}$$

G_N,G_Δ sind die üblichen Nukleon- respektive Delta-Greensfunktionen, $f_{\pi NN}$, $f_{\pi\Delta N}$ die πNN^{-1}, $\pi\Delta N^{-1}$ Kopplungskonstanten und $\Gamma_\pi(\vec{q})$ ist ein Monopolfaktor, der die endliche Ausdehnung der Pion-Baryon-Vertizes berücksichtigt:

$$\Gamma_\pi(\vec{q}) = \frac{\Lambda^2 - m^2_\pi}{\Lambda^2 + \vec{q}^{\,2}}\,, \tag{5.6}$$

wobei wir für den Abschneideparameter Λ den Wert 1.2 GeV gewählt haben. Die Vorfaktoren sind die entsprechenden Spin-Isospin Übergangsfaktoren für den jeweiligen Prozeß. Die explizite Form der pionischen Suszeptibilitäten wird in Anhang A dargestellt. Um auch kurzreichweitige Spin-Isospin-Korrelationen zwischen den Nukleonen zu berücksichtigen, muß man Migdal-Parameter in den Suszeptibilitäten, sowohl für Teilchen-Loch-, als auch Delta-Loch-Übergänge einführen. Diese Korrekturen müssen berücksichtigt werden, um zu verhindern, daß Pionkondensation bereits bei Dichten unterhalb der Sättigungsdichte $\rho_0 = 0.17\text{fm}^{-3}$ einsetzt.

Wie in Abbildung 5.1 angedeutet, erhält man unter Berücksichtigung der Spin-Isospin-Korrelationen ein gekoppeltes System von zwei Gleichungen für die Suszeptibilitäten:

$$\begin{aligned}\chi_{NN^{-1}} &= \tilde{\chi}_{NN^{-1}} - \tilde{\chi}_{NN^{-1}}g_{NN}\chi_{NN^{-1}} - \tilde{\chi}_{NN^{-1}}g_{N\Delta}\chi_{\Delta N^{-1}}\\ \chi_{\Delta N^{-1}} &= \tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}} - \tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}}g_{\Delta N}\chi_{NN^{-1}} - \tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}}g_{\Delta\Delta}\chi_{\Delta N^{-1}}\,.\end{aligned} \tag{5.7}$$

Daraus lassen sich dann $\chi_{NN^{-1}}$ und $\chi_{\Delta N^{-1}}$ bestimmen:

$$\begin{pmatrix}\chi_{NN^{-1}}\\ \chi_{\Delta N^{-1}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 + g_{NN}\tilde{\chi}_{NN^{-1}} & g_{N\Delta}\tilde{\chi}_{NN^{-1}}\\ g_{\Delta N}\tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}} & 1 + g_{\Delta\Delta}\tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\tilde{\chi}_{NN^{-1}}\\ \tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}}\end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

Damit erhält man schließlich für die Pion-Selbstenergie,

$$\begin{aligned}\Sigma_\pi(E,\vec{p}) &= -\vec{p}^{\,2}\chi_\pi(E,\vec{p}) = -\vec{p}^{\,2}(\chi_{NN^{-1}} + \chi_{\Delta N^{-1}})\\ &= -\vec{p}^{\,2}\frac{\tilde{\chi}_{NN^{-1}} + \tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}} + \tilde{\chi}_{NN^{-1}}\tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}}(2g_{N\Delta} - g_{NN^{-1}} - g_{\Delta N^{-1}})}{(1 + g_{NN^{-1}}\tilde{\chi}_{NN^{-1}})(1 + g_{\Delta N^{-1}}\tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}}) - g^2_{N\Delta}\tilde{\chi}_{NN^{-1}}\tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}}}\,,\end{aligned} \tag{5.9}$$

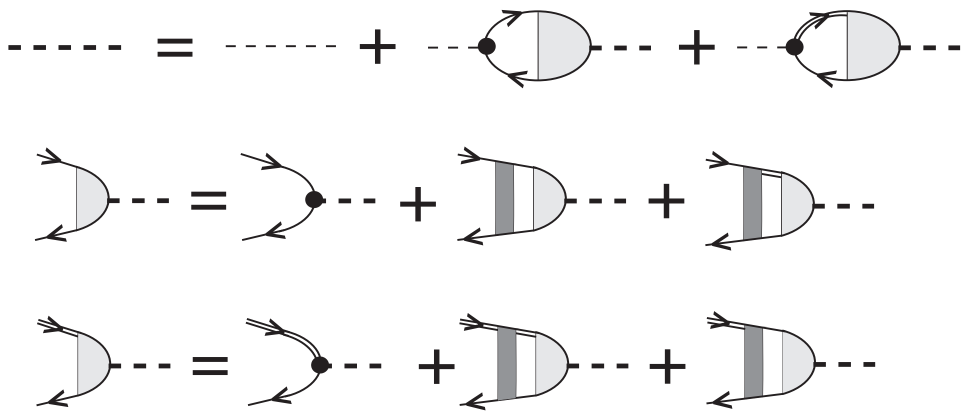

Abbildung 5.1: *Feynman-Graphen für die Kopplung des Pions an Teilchen-Loch- und Δ-Loch-Prozesse. Darunter zuerst die effektive πNN-Kopplung und dann die $\pi\Delta N$-Kopplung. Kurzreichweitige Korrelationen werden durch das Einführen von Migdal-Parametern realisiert (siehe Text) und sind durch die grau gezeichneten Bereiche gekennzeichnet.*

wobei hier $g_{N\Delta}$=$g_{\Delta N}$ gesetzt wurde.
Für die Migdal-Parameter haben wir in Übereinstimmung mit [28] folgende Werte gewählt:

$$g_{\Delta\Delta} = g_{N\Delta} = g_{\Delta N} = 0.5,\ g_{NN} = 0.8\,. \tag{5.10}$$

Mit diesem Ergebnis lässt sich nun der Pionpropagator im Medium berechnen. Das Resultat sieht man in Abb.5.2. Deutlich lassen sich die einzelnen Beiträge erkennen. Für Dreierimpulse, die kleiner sind als etwa 100 MeV, sind die Modifikationen allerdings nur schwach, und man erhält praktisch den „freien“ Propagator.

5.2 Die Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$ im Medium

Aufgrund der im vorigen Abschnitt beschriebenen Modifikationen des Pions durch Kopplungen an Teilchen-Loch- und Delta-Loch-Anregungen erfährt auch die Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$ eine Änderung. Man muss in Gl.(2.72) den „freien“Pionpropagator durch den modifizierten Propagator ersetzen und erhält dann:

$$\Sigma_{\pi\pi}(E,\vec{p}) = -i\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} D_\pi(q) D_\pi(p-q) v(\vec{q})^2\,. \tag{5.11}$$

Das entstehende Integral lässt sich nur noch numerisch berechnen. Dies ist aber keine einfache Aufgabe, da für $E \to 0$ die q_0-Integration zu Ungenauigkeiten führt. Dieses

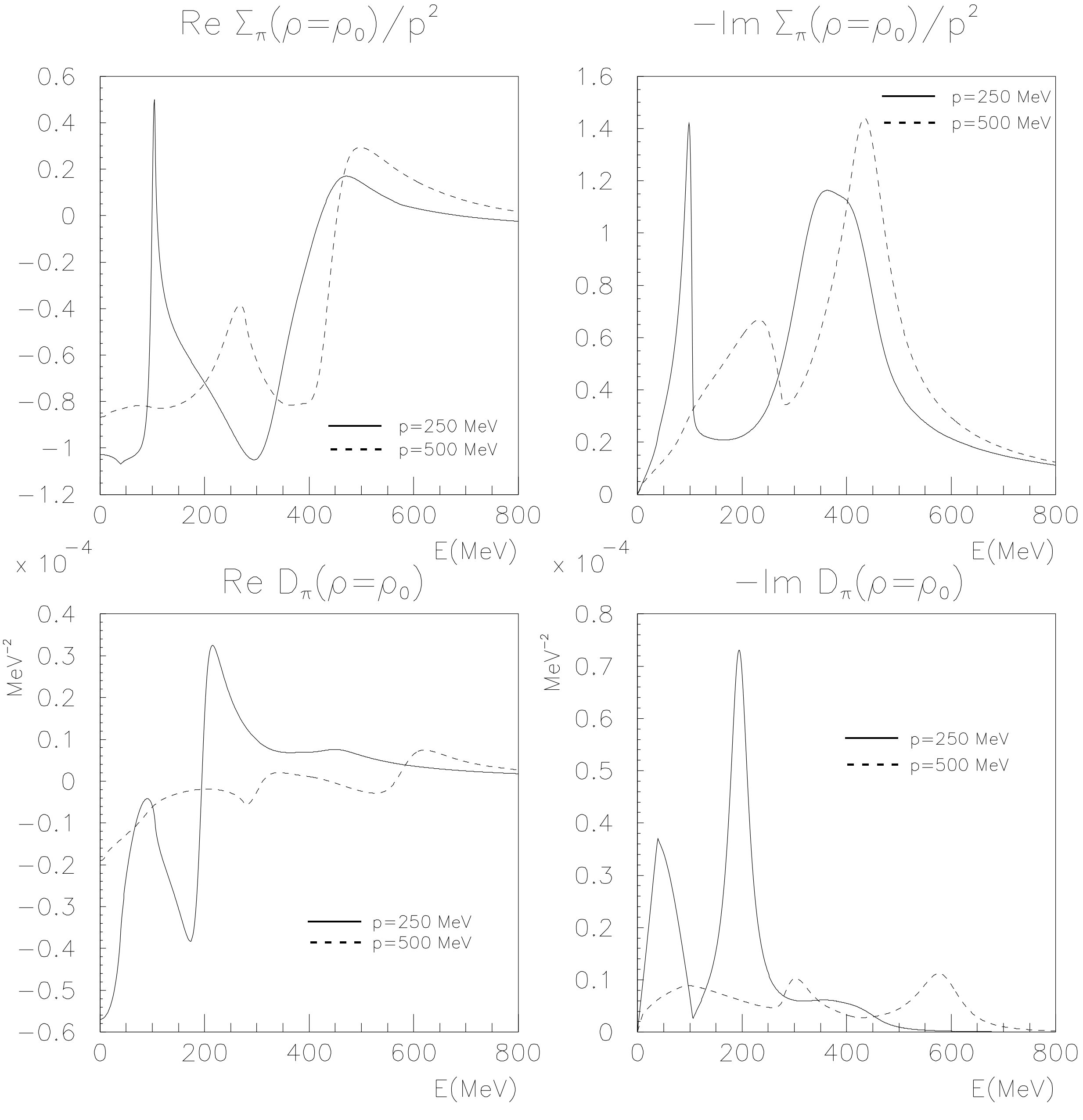

Abbildung 5.2: *Die oberen beiden Bilder zeigen Real- und Imaginärteil der Selbstenergie des Pions bei Sättigungsdichte für zwei verschiedene Dreierimpulse. Im unteren Teil sieht man dann den zugehörigen Pionpropagator. Deutlich kann man die Beiträge aus Kopplungen an Teilchen-Loch (1.Peak) und Δ-Loch (3.Peak) unterscheiden. Für Impulse bis etwa 300 MeV sind die Δ-Loch-Beiträge allerdings noch schwach, so daß dieser Peak noch nicht so ausgeprägt ist.*

Problem können wir umgehen, indem wir zunächst ausnutzen, daß die Pionpropagatoren durch ihre Spektraldarstellungen ersetzt werden können:

$$D_\pi(q_0,\vec{q}) = -\int_0^\infty \frac{d\omega^2}{\pi}\frac{\mathrm{Im}D_\pi(\omega,\vec{q})}{q_0^2-\omega^2+i\epsilon}\,. \tag{5.12}$$

Wenn man nun zusätzlich den in Gl.(3.17) eingeführten Zweipionpropagator benutzt und die q_0-Integration ausführt, erhält man:

$$\begin{aligned}\Sigma_{\pi\pi}(E,\vec{p}) =& -\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}G_{\pi\pi}(E,\vec{q},\vec{p})v(\vec{q})^2\,,\\ G_{\pi\pi}(E,\vec{q},\vec{p}) =& \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty d\omega_1^2\int_0^\infty d\omega_2^2\;\mathrm{Im}D_\pi(\omega_1,\vec{q})\mathrm{Im}D_\pi(\omega_2,\vec{p}-\vec{q})\\ &\times\frac{1}{2\omega_1\omega_2}\frac{\omega_1+\omega_2}{E^2-(\omega_1+\omega_2)^2+i\epsilon}.\end{aligned} \tag{5.13}$$

Nun bilden wir noch den Imaginärteil und führen anschließend die Integration über ω_2 durch,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}G_{\pi\pi}(E,\vec{q},\vec{p}) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega_1\int_0^\infty d\omega_2\mathrm{Im}D_\pi(\omega_1,\vec{q})\mathrm{Im}D_\pi(\omega_2,\vec{p}-\vec{q})\delta(E-(\omega_1+\omega_2))\\ &= -\frac{1}{\pi}\int_0^E d\omega_1\mathrm{Im}D_\pi(\omega_1,\vec{q})\mathrm{Im}D_\pi(E-\omega_1,\vec{p}-\vec{q})\,.\end{aligned} \tag{5.14}$$

Der Vorteil besteht nun darin, daß jetzt lediglich eine Integration von 0 bis E ausgeführt werden muß, anstatt der ursprünglichen Integration von $-\infty$ bis $+\infty$.
Den Realteil des Zweipionpropagators berechnen wir über die Dispersionsrelation aus dem Imaginärteil:

$$\mathrm{Re}\,G_{\pi\pi}(E,\vec{p}) = -\mathcal{P}\int_0^\infty\frac{dE'^2}{\pi}\frac{ImG_{\pi\pi}(E',\vec{p})}{E^2-E'^2}\,. \tag{5.15}$$

5.3 Der σ-Propagator im Medium

Neben den in den vorangegangenen Abschnitten behandelten Modifikationen des Pions in dichter Materie wollen wir als weiteren Effekt noch direkte Kopplungen des σ-Mesons an das Medium berücksichtigen. Dabei wollen wir zum einen den sogenannten Tadpolegraphen einführen, der die Anregung einer Nukleonschleife beschreibt. Dieser Beitrag bringt eine dichteabhängige Reduzierung der Masse des σ-Mesons. Für das Pion ist dieser Beitrag gegenüber der p-Wellen-Wechselwirkung unterdrückt [29]. Die Kopplungskonstante am Vertex ist so gewählt, daß die Masse bei der Sättigungsdichte $\rho_0 = 0.175\mathrm{fm}^{-3}$ um 20 Prozent abfällt. Dies ist in Übereinstimmung mit anderen Beschreibungen für das σ-Meson [30] [31], in denen eine dichteabhängige σ-Masse gefunden wird. Zusätzlich kann

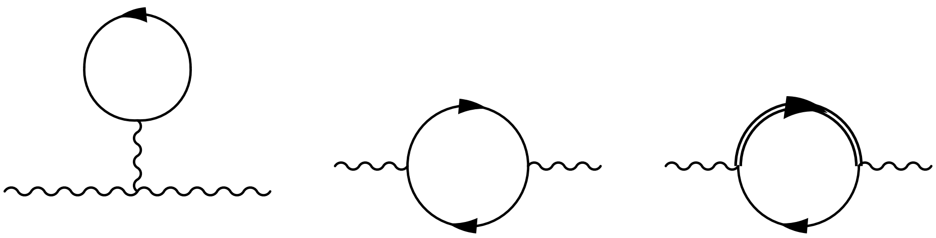

Abbildung 5.3: *Kopplungen des σ an Tadpole- und Teilchen-Loch-Graphen, respektive N^*-Loch.*

man noch das σ an eine Teilchen-Loch-Schleife koppeln. Für verschwindenden Impuls des σ-Mesons gibt dieser Term allerdings keinen Beitrag, da die Integration über die Teilchen-Loch-Schleife wegen Pauli-Blocking verschwindet (siehe Anhang A über die Lindhardfunktion). Die Kopplungskonstante für diesen Prozeß ist die gleiche wie beim Tadpolegraphen. Das σ-Meson kann aufgrund seiner Quantenzahlen allerdings keinen Delta-Loch-Prozeß durchführen, da der Isospin von Delta und Loch nur zu Gesamtisospin eins und zwei gekoppelt werden kann, aber nicht zu null. Die nächste erlaubte Anregung wäre dann der N^*_{1440}-Loch Prozeß, den wir auch berücksichtigen wollen.
In Abb.5.3 sind die Kopplungen des σ-Mesons an die Fermionen grafisch dargestellt.
Der σ-Propagator in dichter Materie lässt sich analog zum Pionpropagator durch Einführung einer Selbstenergie schreiben als:

$$D_\sigma(E,\vec{p}) = \left[E^2 - \vec{p}^2 - \varepsilon_\sigma^2 - \Sigma_\sigma\right]^{-1}. \tag{5.16}$$

Unter Berücksichtigung der genannten Beiträge nimmt die Selbstenergie des σ-Mesons folgende Gestalt an:

$$\Sigma_\sigma = g_{\sigma N}^2 \Sigma^\sigma_{NN^{-1}}(E,\vec{p}) + g_{\sigma N}\frac{I_N}{\langle\sigma\rangle} + g_{\sigma N^*}^2 \Sigma^\sigma_{N^*N^{-1}}(E,\vec{p}) + \frac{2\lambda^4\langle\sigma\rangle^2\Sigma_{\pi\pi}(E,\vec{p})}{1-\lambda^2\Sigma_{\pi\pi}(E,\vec{p})}. \tag{5.17}$$

Dabei steht $\Sigma^\sigma_{NN^{-1}}(E,\vec{p})$ für die Selbstenergie aus einer Teilchen-Loch-Anregung und $\Sigma^\sigma_{N^*N^{-1}}(E,\vec{p})$ für die Selbstenergie einer N^*-Loch-Anregung und I_N ist der Tadpole. Ihre explizite Form ist gegeben durch

$$\Sigma^\sigma_{NN^{-1}}(E,\vec{p}) = -2\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{\omega(\vec{q})\omega(\vec{q}-\vec{p}) - \vec{q}\cdot(\vec{q}-\vec{p}) + m_N^2}{\omega(\vec{q})\omega(\vec{p}-\vec{q})}\frac{n(\vec{q})-n(\vec{p}-\vec{q})}{E-\omega(\vec{p}-\vec{q})+\omega(\vec{q})} \tag{5.18}$$

$$\Sigma^\sigma_{N^*N^{-1}}(E,\vec{p}) = -4\frac{f_{\sigma N^*N}^2\Gamma_\sigma^2(\vec{p})}{m_\pi^2} i\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} G_N(q)(G_{N^*}(q+p) + G_{N^*}(q-p)) \tag{5.19}$$

$$I_N = -8\int_0^{p_F}\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{m_N}{2\sqrt{\vec{p}^2+m_N^2}}, \tag{5.20}$$

wobei $n(\vec{q})$ die Besetzungszahl angibt und p_F der Fermiimpuls ist. Bei nuklearer Sättigungsdichte hat dieser einen Wert von etwa 270 MeV. Die Selbstenergie des N^*-Loch-Prozesses kann man, analog zu der in Anhang A für die Δ-Loch-Anregung gezeigten Weise, in folgende einfache Form überführen:

$$\Sigma^{\sigma}_{N^*N^{-1}}(E,\vec{p}) = -4\frac{f^2_{\sigma N^* N}\Gamma^2_\sigma(\vec{p})}{m^2_\pi}\rho\Big(\frac{1}{E-\epsilon_{N^*N^{-1}}+\frac{i}{2}\Gamma_{N^*}} - \frac{1}{E+\epsilon_{N^*N^{-1}}}\Big) \tag{5.21}$$

mit

$$\epsilon_{N^*N^{-1}} = m_{N^*} - m_N + \frac{\vec{p}^2}{2m_{N^*}}\,. \tag{5.22}$$

Für den Tadpole erhält man nach Ausführung des Integrals:

$$I_N = -\frac{m_N}{\pi^2}\Big(p_F\sqrt{p_F^2+m_N^2} - m_N^2 \ln\frac{p_F+\sqrt{p_F^2+m_N^2}}{m_N}\Big) \tag{5.23}$$

Für die Kopplungskonstante $f_{\sigma N^* N}$ haben wir den Wert 10 gewählt. Diese Wahl ist zunächst willkürlich, da für diesen Prozeß keine experimentellen Daten vorliegen. Diese liegt aber in derselben Größenordnung wie andere Meson-Nukleon-Kopplungskonstanten. Für die N^*-Anregung haben wir in Übereinstimmung mit den in [4] angegebenen Werten eine konstante Breite von 350 MeV gewählt bei einer Masse von 1440 MeV. Der Term $\Gamma_\sigma(\vec{p})$ berücksichtigt dabei die endliche Ausdehnung des Vertex und ist von der üblichen Monopolform mit einem Cutoff Λ von 1.2 GeV. Die Kopplungen eines σ an die N^*-Resonanz sind experimentell nicht bestimmt und von daher sind auch die eingeführten Formfaktoren und Kopplungskonstanten freie Parameter. Man sieht jedoch bei expliziter Berechnung, daß diese Kopplungen einen vernachlässigbaren Beitrag liefern und von daher diese Ungenauigkeiten keinen großen Einfluß haben.

In Abbildung 5.4 sieht man die Form der Selbstenergien Σ_σ und $\Sigma_{\pi\pi}$ bei verschiedenen Dichten für verschwindenden Dreierimpuls. Die Renormierung des Pions in Materie durch die im vorigen Kapitel beschriebenen Prozesse bringt eine deutliche Änderung der Zwei-Pion-Polarisationsfunktion $\Sigma_{\pi\pi}$: Der Realteil zeigt einen „schärferen" Übergang vom negativen in den positiven Bereich. Dabei wird die Nullstelle der Selbstenergie von etwa 765 MeV im Vakuum zu 460 MeV bei nuklearer Sättigungsdichte hinauf geschoben. Der Imaginärteil erhält im Medium auch unterhalb der Produktionsschwelle für zwei Pionen Beiträge. Diese Beiträge entstehen durch die Kopplungen der Pionen an Teilchen-Loch- und Delta-Loch-Prozesse. Bei hohen Energien von etwa 1 GeV sind diese Kopplungen allerdings stark unterdrückt und $\Sigma_{\pi\pi}$ im Medium ist gleich der Selbstenergie im Vakuum. Für Sättigungsdichte ist der Imaginärteil bei Energien um 280 MeV um einen Faktor drei gegenüber dem Vakuum erhöht und besitzt auch im gesamten Bereich unterhalb dieser Energie große Beiträge.

In der Selbstenergie des σ-Mesons Σ_σ erkennt man deutlich den Beitrag des Tadpoles, der eine konstante Verschiebung der Selbstenergie bewirkt. Hierbei wurde bei verschwindendem Dreierimpuls gerechnet, bei dem die Teilchen-Loch- und N^*-Loch-Selbstenergie

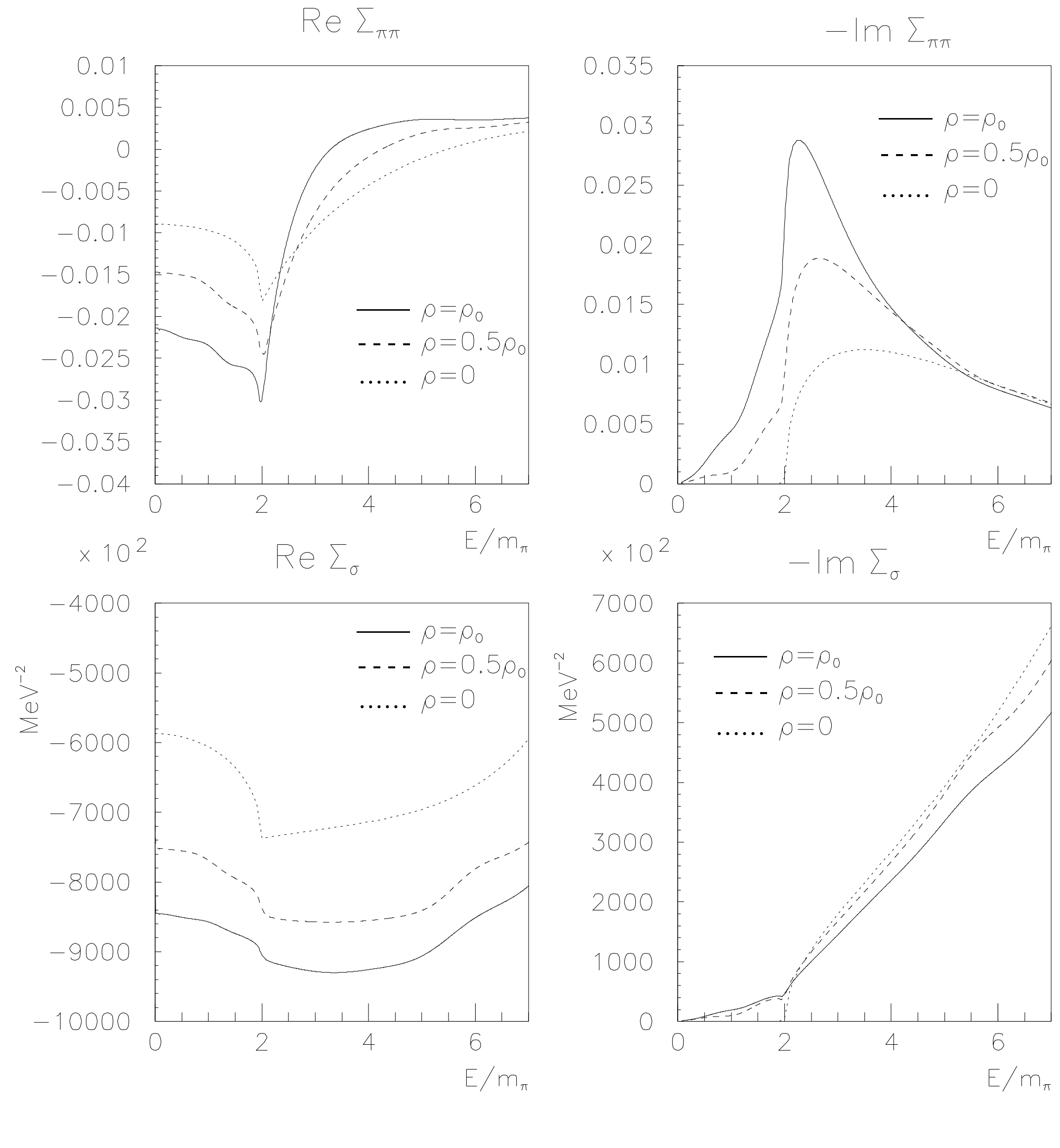

Abbildung 5.4: *Real- und Imaginärteil der Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$ (obere Hälfte) und Σ_σ (untere Hälfte) für Dichten 0, ρ_0 und $0.5\rho_0$ jeweils bei verschwindendem Dreierimpuls. Deutlich kann man in Σ_σ den Effekt aus dem Tadpolegraphen sehen, der den Betrag von Σ_σ erhöht und damit die Masse des σ-Mesons zu kleineren Energien hin verschiebt.*

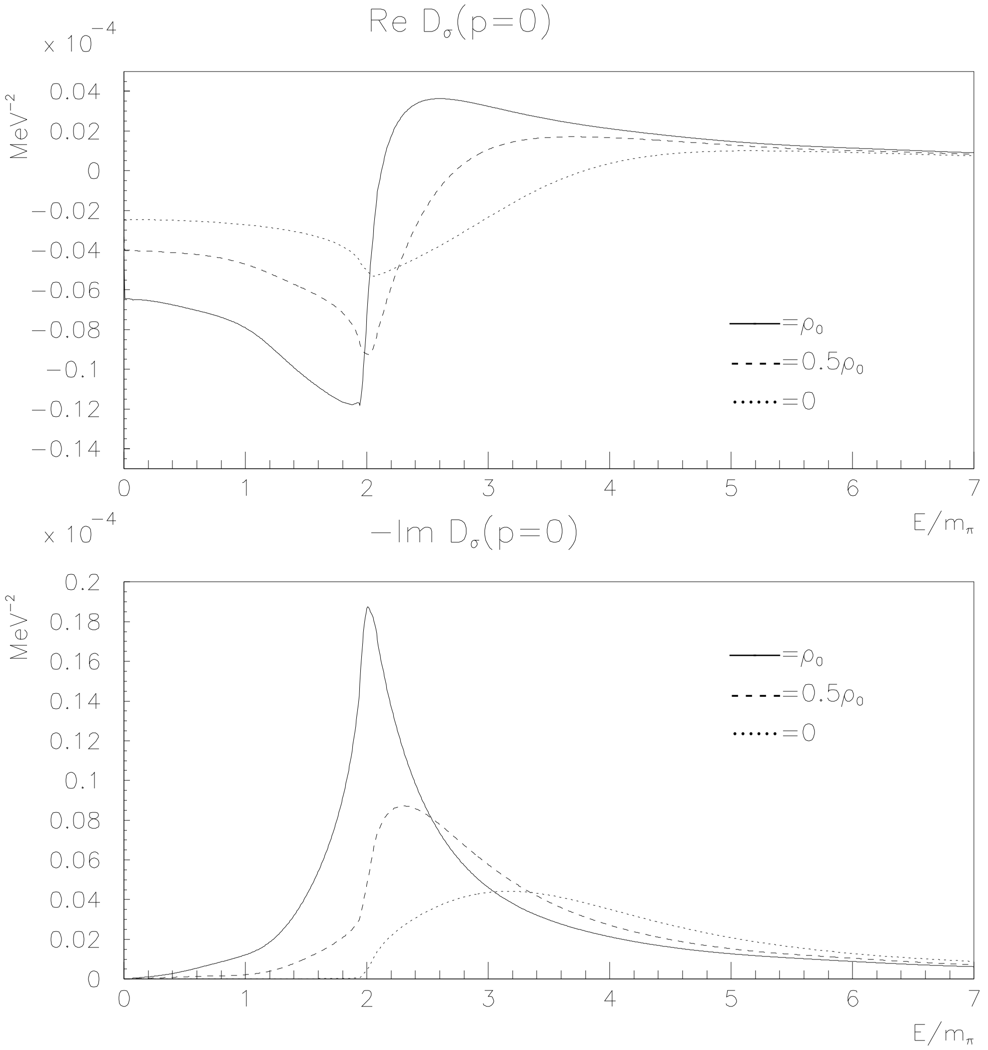

Abbildung 5.5: *Real- und Imaginärteil des σ-Propagators für Dichten ρ_0 und $0.5\rho_0$. Zum Vergleich sind auch die Vakuumkurven mit abgebildet.*

vernachlässigbar sind und daher nur der Tadpolegraph und die RPA-Fluktuationen zur Selbstenergie beitragen. Für den Imaginärteil erhält man keine großen Änderungen. Allerdings hat die Selbstenergie nun auch unterhalb der Schwelle imaginäre Anteile. Diese resultieren hauptsächlich aus der Änderung der Spektralfunktion des Pions im Medium, wie in Abschnitt 5.1 gezeigt. Zum anderen gibt es Beiträge der N^*-Loch-Anregung, die aber vernachlässigbar sind.
Mit Gl.(5.16) und Gl.(5.17) erhält man den σ-Propagator im Medium berechnen:

$$\begin{aligned} D_\sigma(E,\vec{p}) = \Big[& E^2 - \vec{p}^2 - \varepsilon_\sigma^2 - g_{\sigma N}^2 \Sigma^\sigma_{NN^{-1}}(E,\vec{p}) - g_{\sigma N}\frac{I_N}{\langle\sigma\rangle} \\ & - g_{\sigma N^*}^2 \Sigma_{N^* N^{-1}}(E,\vec{p}) - \frac{2\lambda^4 \langle\sigma\rangle^2 \Sigma_{\pi\pi}(E,\vec{p})}{1-\lambda^2\Sigma_{\pi\pi}(E,\vec{p})}\Big]^{-1} . \end{aligned}$$

Dieser ist in Abbildung 5.5 zu sehen. Deutlich kann man erkennen, daß die Masse des σ-Mesons mit steigender Dichte abnimmt. Für halbe Sättigungsdichte erhält man ungefähr eine Masse von 400 MeV. Bei nuklearer Sättigungsdichte ist die Masse auf einen Wert von etwa 300 MeV gesunken. Ebenso sieht man eine starke Zunahme des Imaginärteils des σ-Propagators in der Nähe der Produktionsschwelle von zwei Pionen. Zudem ist die Breite, die im Vakuum noch 350 MeV betragen hat, auf unter 100 MeV abgefallen. Verantwortlich für diese starke Änderung des σ-Propagators sind zwei Effekte: Zum einen die Änderung der Masse des σ durch die direkte Kopplung an den Nukleontadpolegraphen und zum zweiten die Renormierung des Pions in dichter Materie, die über die Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$ den Propagator des σ-Mesons verändert. Dieses kann man auch als Anzeichen für eine partielle Wiederherstellung der chiralen Symmetrie sehen, analog zum Fall endlicher Temperatur, wo mit steigender Temperatur die Masse des σ-Mesons sich der des Pions näherte und die Breite sich verringerte. Den analogen Effekt sieht man hier mit steigender Dichte.
Die T-Matrix im Medium erfüllt weiterhin die in Gl.(3.22) angegebene Ward-Identität. Damit erfährt die Streumatrix im Medium eine Änderung durch die Modifizierung des σ- und Pionpropagators. Das Resultat kann man in Bild 5.6 sehen. Der Realteil von $T_{\pi\pi}$ zeigt ein lokales Minimum bei einer Energie von 300 MeV. Dieses ist eine Folge des σ-Mesons, das in diesem Bereich seinen Pol hat und sowohl Realteil, wie auch Imaginärteil sich in diesem Bereich stark ändern, wie in Abbildung 5.5 zu sehen. Aufgrund der chiralen Symmetrie unseres Modells zeigt der Realteil der T-Matrix, wie bereits im Vakuum, für kleine Energien einen Wechsel von attraktivem zu repulsivem Verhalten, und verhindert damit die von Aouissat et al. [11] gefundene Pionpaarkondensation. Der Imaginärteil zeigt eine deutliche Zunahme der Stärke im Schwellenbereich und teilweise sogar unterhalb der Schwelle, als Folge des deutlichen Anstiegs der σ-Spektralfunktion in diesem Bereich.

5.4 Endlicher Dreierimpuls

Im Medium ist die Lorentzinvarianz explizit gebrochen durch die Festlegung eines Ruhesystems für die Kernmaterie. Daher kann man sich nicht mehr auf Schwerpunktskinematik

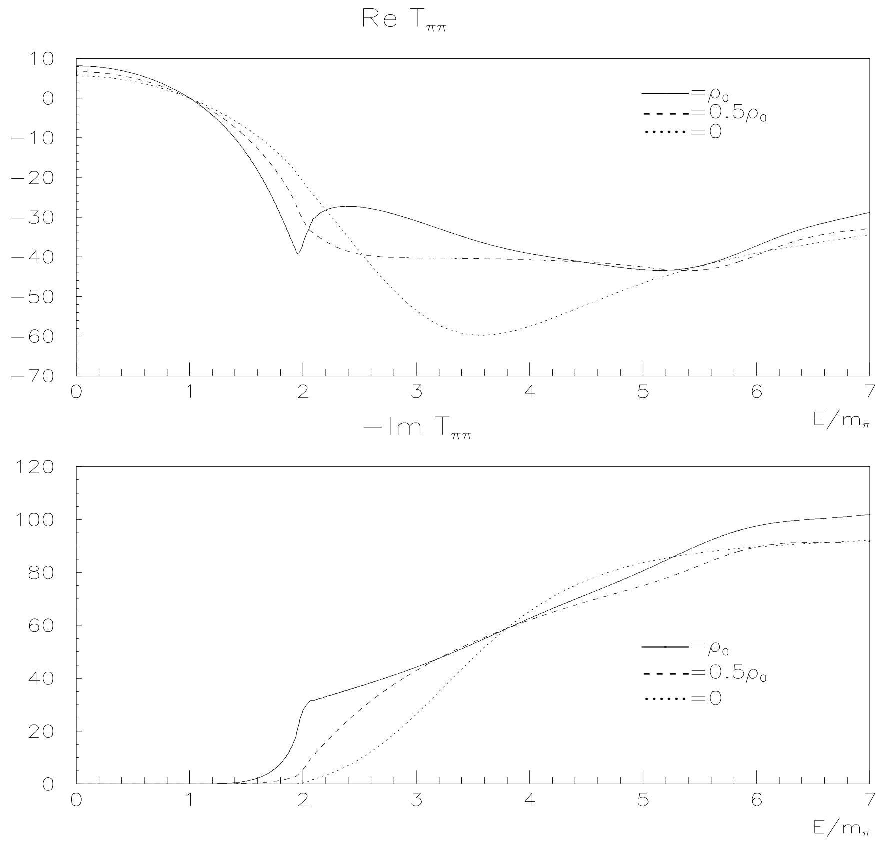

Abbildung 5.6: *Real- und Imaginärteil der Streumatrix für Dichten ρ_0, $0.5\rho_0$ und 0. Deutlich kann man erkennen, daß die Stärke des Imaginärteils in der Nähe der Zwei-Pion-Produktionsschwelle zugenommen hat.*

für die beiden Pionen beschränken. Ein endlicher Impuls des Pionenpaares bringt zusätzliche Schwierigkeiten: Es können direkt Teilchen-Loch-Paare durch das σ-Meson erzeugt werden, deren Beitrag bei kleinen Energien sehr hoch ist und dadurch im Propagator des σ-Mesons Instabilitäten erzeugt. Für die Kopplungen der Pionen an Teilchen-Loch-Kanäle wurden aufgrund dessen Migdal-Parameter eingeführt, die den kurzreichweitigen stark repulsiven Anteil der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung berücksichtigen und die unphysikalische Pionkondensation bei geringen Dichten verhindern [32]. Analog dazu sollte man auch für die Teilchen-Loch-Anregung des σ-Mesons Migdal-Parameter einführen. Dies muß allerdings noch näher untersucht werden, so daß wir den Beitrag aus Kopplungen des σ an Teilchen-Loch-Prozesse im Rahmen dieser Arbeit nicht berücksichtigen. Für Kopplungen an die N^*_{1440}-Loch-Prozesse tritt dieses Problem nicht auf aufgrund des Massenunterschiedes zwischen der Resonanz und einem Nukleonloch. Zudem sind diese Beiträge, wie bereits im vorigen Abschnitt erwähnt, vernachlässigbar. Die Effekte durch endlichen Dreierimpuls kommen somit nur aus der modifizierten Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$, die eine Folge der Verbreiterung des Pions im Medium durch die in Kapitel 5.1 gezeigten Modifikationen ist. In Abbildung 5.7 sieht man den Effekt des endlichen Dreierimpulses auf den Propagator und die Streumatrix. Ein endlicher Impuls des Pionenpaares bewirkt, daß die Masse des σ-Mesons zu leicht höheren invarianten Massen hin verschoben ist. Die invariante Masse $M_{\pi\pi}$ ist definiert als

$$M_{\pi\pi}(E,\vec{p}) = E^2 - \vec{p}^2 \,. \tag{5.24}$$

Die invariante Masse ist dabei ein Maß für die zur Verfügung stehende Energie eines Teilchens. Die Zweipionschwelle für verschiedene Dreierimpulse des Pionenpaares liegt daher immer bei einer invarianten Masse gleich der zweifachen Pionenmasse, während die Energie der Zweipionschwelle sich mit wachsendem Dreierimpuls zu höheren Werten hin verschiebt. Zudem ist der Übergang des Realteils des σ-Propagators nicht mehr so scharf wie im Fall $\vec{p} = 0$. Im Imaginärteil des Propagators erkennt man, daß der Anstieg an der Schwelle um einen Faktor zwei reduziert ist, wenn man von $\vec{p} = 0$ zu $|\vec{p}| = 200$ MeV übergeht. Darüberhinaus ist ein deutlicher Anteil der Stärke mit wachsendem Impuls in die Region unterhalb der Schwelle gewandert. Dadurch erhält das σ mit wachsendem Impuls auch eine größere Breite. Der Imaginärteil der Streumatrix ist an der Schwelle ebenfalls etwa auf die Hälfte abgefallen. Man kann also sagen, daß der Anstieg von Stärke in der Spektralfunktion des σ und im Imaginärteil der Streumatrix an der Produktionsschwelle, der mit steigender Dichte zu sehen war, durch den endlichen Dreierimpuls zum Teil wieder abgeschwächt wird.

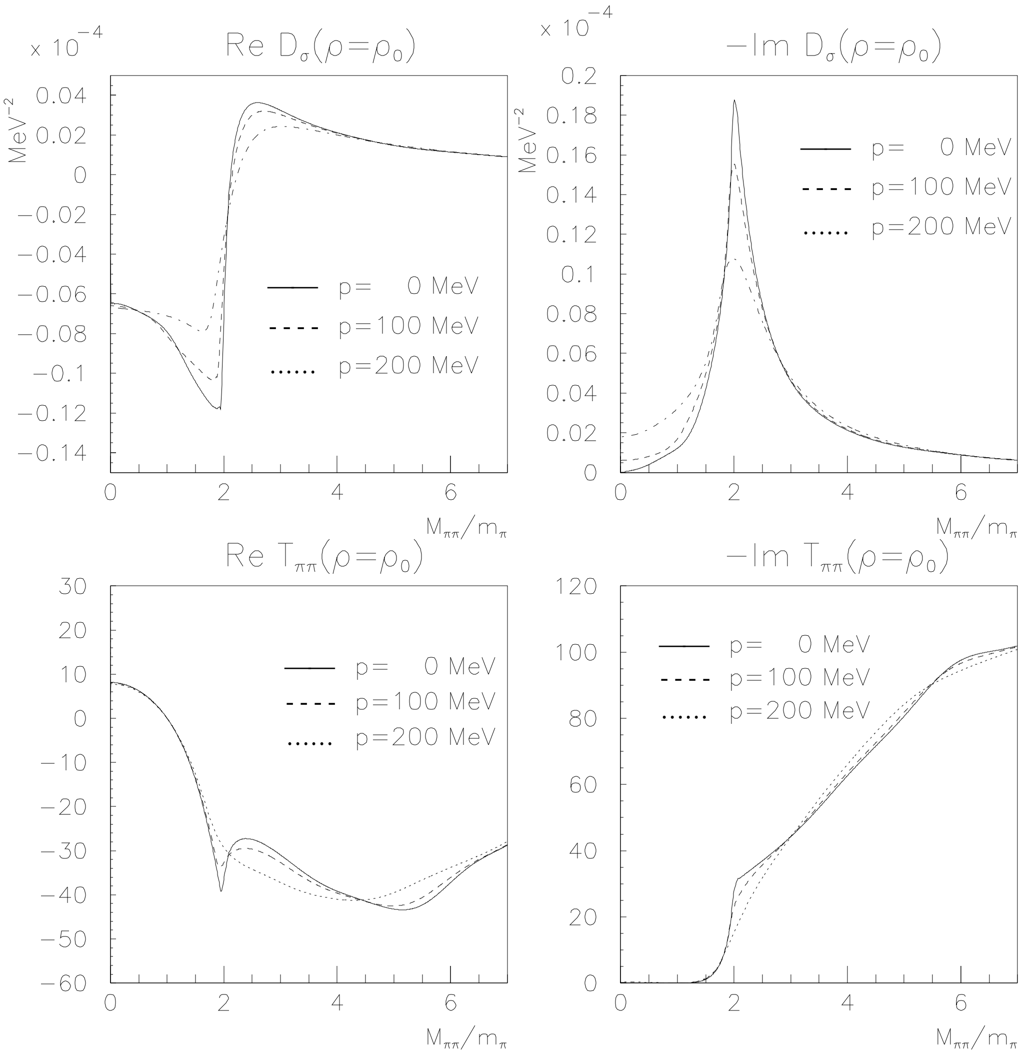

Abbildung 5.7: *σ-Propagator und $T_{\pi\pi}$-Matrix für verschiedene Dreierimpulse des Pionenpaares*

Kapitel 6

Die Reaktion $\pi + A \to \pi\pi + A'$

In diesem Kapitel möchten wir nun eine Anwendung unseres Modells diskutieren. Von der CHAOS-Kollaboration wurde ein Experiment durchgeführt, in dem die Wirkungsquerschnitte der Reaktion $\pi + A \to \pi\pi + A'$ gemessen wurden. Dabei wird ein Pion an einem Kern gestreut und ein weiteres Pion erzeugt, so daß im Ausgangskanal zwei Pionen gemessen werden.

6.1 Das Experiment

Zur Untersuchung des Einflusses von nuklearer Materie auf das σ-Meson wurde die Reaktion $\pi + A \to \pi\pi + A'$ an vier verschiedenen Kernen durchgeführt – ^{2}H, ^{12}C, ^{40}Ca und ^{208}Pb. Mit zunehmender Masse des Kerns erhöht sich die Dichte und aus dem Vergleich mit Daten von leichten Kernen lassen sich dann Aussagen über den Einfluss der Dichte auf das σ-Meson betrachten. Für die einfallenden Pionen wurde ein Strahl aus π^+ gewählt mit einer kinetischen Energie von 282.7 MeV. Im Ausgangskanal wurden dann die beiden Pionen in Koinzidenz gemessen. Dabei konnte der Detektor allerdings nur Paare messen, die maximal um 7^o aus der Reaktionsebene abgelenkt wurden. Das einlaufende π^+ kann entweder mit einem Proton oder einem Neutron des Kerns folgendermaßen reagieren:

$$\pi^+ + p \to \pi^+ + \pi^+ + n \tag{6.1}$$
$$\pi^+ + n \to \pi^+ + \pi^- + p\,. \tag{6.2}$$

Die Quantenzahlen des $\pi^+\pi^+$ Paares sind aufgrund der Symmetrie der $\pi\pi$-Wellenfunktion auf $J = 0$, $I = 2$ beschränkt, während das $\pi^+\pi^-$-Paar sowohl $J = 0$, $I = 0$ als auch $J = 0$, $I = 2$ besitzen kann. Der Anteil der $\pi^+\pi^-$-Paare mit Quantenzahlen $J = 0$, $I = 2$ ist allerdings bei den im Experiment auftretenden Energien vernachlässigbar [33]. Dies erkennt man auch bei einer Betrachtung der Winkelverteilung: Der differentielle Wirkungsquerschnitt aufgetragen gegen den Cosinus des Streuwinkels ergibt eine nahezu flache Winkelverteilung. Das Pionpaar liegt also hauptsächlich in einer relativen s-Welle vor [7].
Das Experiment ist daher im $\pi^+\pi^-$-Kanal eine geeignete Probe zur Untersuchung des

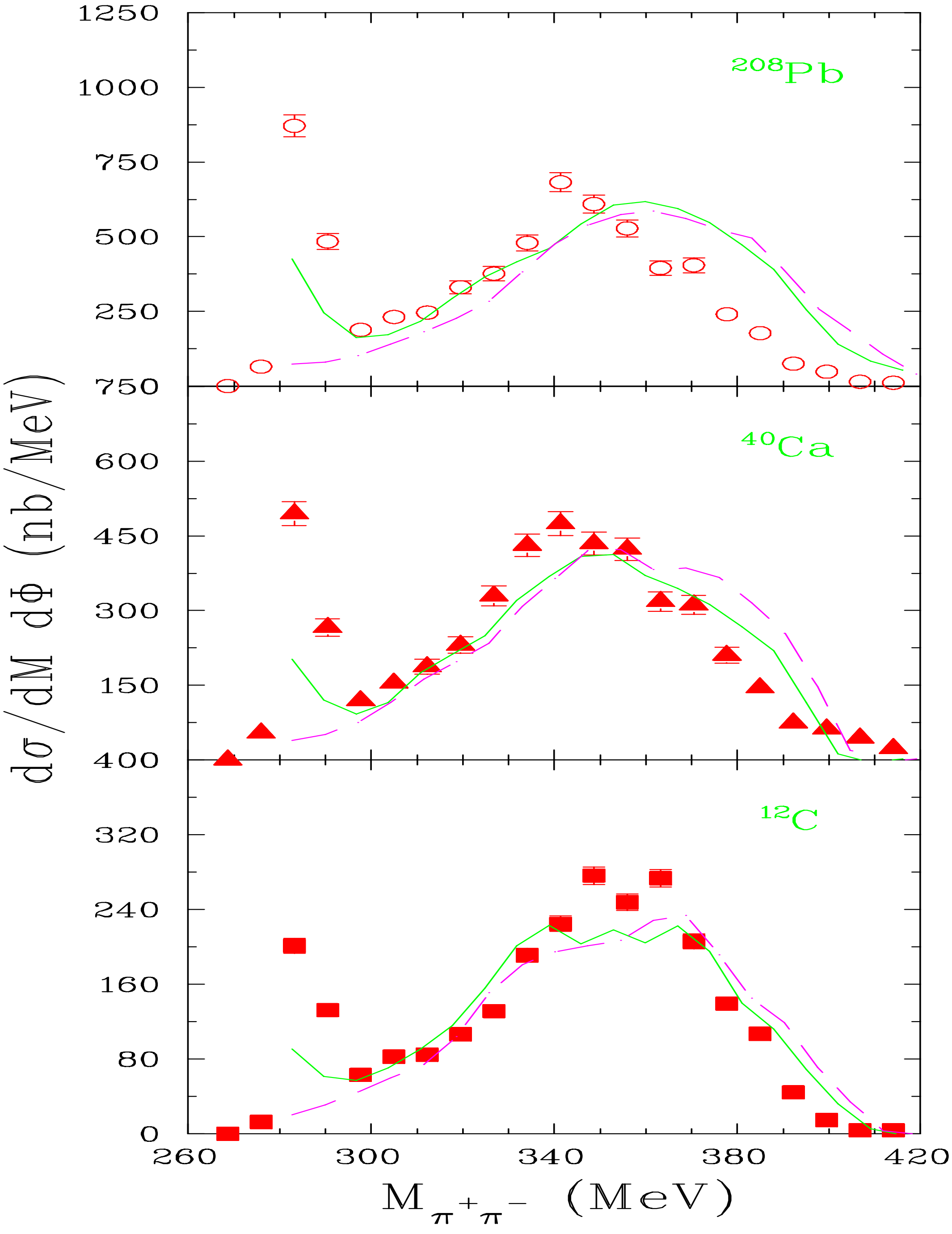

Abbildung 6.1: *Die beobachteten Wirkungsquerschnitte der Reaktion* $\pi^+ + A \rightarrow \pi^+\pi^- + A'$

σ-Mesons, da dieses Paar die Quantenzahlen des σ-Mesons trägt.
In Abbildung 6.1 sind die gemessenen differentiellen Wirkungsquerschnitte gegen die invariante Masse des Pionenpaares für drei verschiedene Kerne gezeigt. Im oberen Teil sieht man die Daten für die Reaktion an Blei, im mittleren Teil für Calcium und im unteren Teil für Kohlenstoff. Die gestrichelte Linie ist dabei das Resultat einer Modellrechnung von Oset [21]. Die durchgezogene Linie wurde von Aouissat [34] im Rahmen eines vereinfachten Modells berechnet. Deutlich kann man eine Zunahme des Wirkungsquerschnittes in der Nähe der Produktionsschwelle für zwei Pionen erkennen. Dieser Anstieg wächst zudem mit steigender Masse des Kerns – also mit steigender Dichte – an und ist möglicherweise ein Mediumeffekt des Pionenpaares. Betrachtet man den Wirkungsquerschnitt für die Reaktion mit Wasserstoff so ist kein Anstieg zu erkennen.

6.2 Die Reaktionstheorie

Zur Beschreibung des Wirkungsquerschnittes benutzen wir ein Modell in der Eikonal-Näherung. Der daraus resultierende Wirkungsquerschnitt ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}\sigma = &\frac{\pi}{q}\int d^2bdzA_{in}(\rho(\vec{r}))A^+_{out}(\rho(\vec{r}_1))A^-_{out}(\rho(\vec{r}_2))\\ &\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d^3q_1}{(2\pi)^3}\frac{d^3q_2}{(2\pi)^3}n(\vec{k})[1-n(\vec{q}+\vec{q}-\vec{q}_1-\vec{q}_2)]\\ &\delta(q_0+\varepsilon_{\vec{k}}-\omega_{\vec{q}_1}-\omega_{\vec{q}_2}-\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}-\vec{q}_1-\vec{q}_2})\frac{1}{2\omega_{\vec{q}_1}}\frac{1}{2\omega_{\vec{q}_2}}|T|^2_{(\pi N\to\pi\pi N)}\times Detektorakzeptanz\end{aligned} \tag{6.3}$$

Diese Beschreibung des Wirkungsquerschnittes wurde bereits von mehreren Autoren benutzt [21], [22]. Dabei steht die Funktion A_{in} für die Absorption des eingehenden Pions und $A^{\pm}_{out}$ für die Absorption der ausgehenden Pionen im Medium. Die Besetzungszahl $n(\vec{k})$ wird aus einer lokalen Dichtenäherung ermittelt, wobei für die Dichteverteilung im Kern die Fermi-Verteilung benutzt wird. Die T-Matrix beschreibt die Übergangsamplitude für den elementaren Pionproduktionsprozeß. Dabei werden die in Abb.6.2 dargestellten Prozesse berücksichtigt. Der Faktor Detektorakzeptanz schließlich berücksichtigt, daß der Detektor nur Pionen im Ausgangskanal messen konnte, die um maximal 7 Grad aus der Reaktionsebene abgelenkt wurden. Mit diesem Modell erhält man die in Abb.6.1 gezeigten Kurven (gestrichelte Linien) für den differentiellen Wirkungsquerschnitt. Zur Erklärung des Anstiegs an der Schwelle möchten wir nun Endzustandswechselwirkungen des Pionenpaares berücksichtigen. Daher führen wir in der Formel für den Wirkungsquerschnitt einen Faktor $(T^{Medium}_{\pi\pi}/T^{Vakuum}_{\pi\pi})^2$ ein, der die relative Stärke dieser Wechselwirkungen beschreibt. Im Rahmen eines vereinfachten Modells wurde mit dieser Beschreibung von Aouissat et al. bereits ein Teil des Stärkeanwachses an der Schwelle erklärt [19]. Die Berechnung des Streuquerschnittes wird dabei mittels Monte-Carlo-Methoden durchgeführt. Betrachtet man sich die Verteilung des Pionenpaares als Funktion der invarianten Masse und des Impulses, die in Abb.6.3 gezeigt ist, erkennt man, daß die meisten Pionenpaare

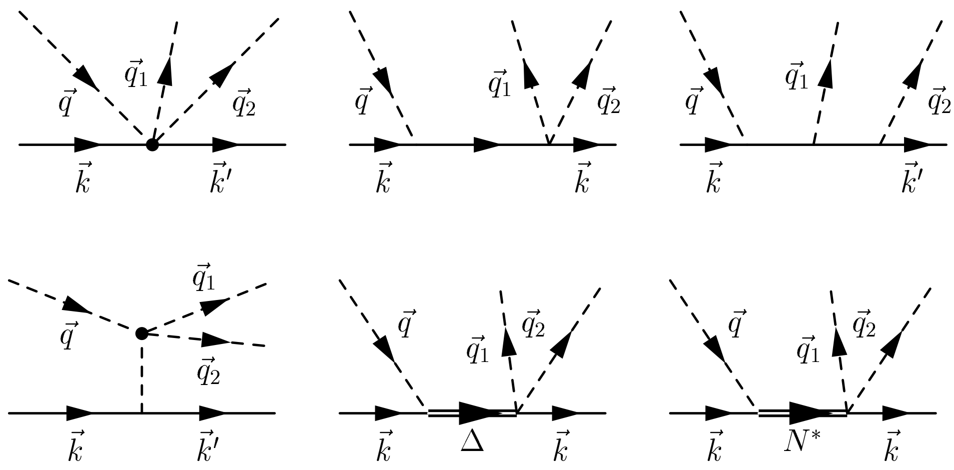

Abbildung 6.2: *Die elementaren Prozesse der Übergangsamplitude* $T_{\pi N \to \pi\pi N}$

einen endlichen Dreierimpuls von etwa 250 MeV besitzen. Von daher ist es notwendig, die Endzustandswechselwirkungen bei endlichem Impuls der Pionen zu berechnen, während in dem vereinfachten Modell bei $\vec{p}$ =0 gerechnet wurde. Die T-Matrix zur Bestimmung der Stärke dieser Endzustandswechselwirkungen wurde bereits für endlichen Dreierimpuls berechnet, allerdings bedarf es in diesem Zusammenhang noch einiger Arbeit, wie etwa die Einbeziehung des Teilchen-Loch-Kanals für das σ-Meson. Vorläufige Untersuchungen mit der im vorigen Kapitel berechneten T-Matrix haben jedoch gezeigt, daß zwar ein Anstieg in Schwellennähe zu sehen ist, dieser aber nicht ausreicht um die gesamte Stärkezunahme, die in Abb.6.1 gezeigt wurde, zu erklären.

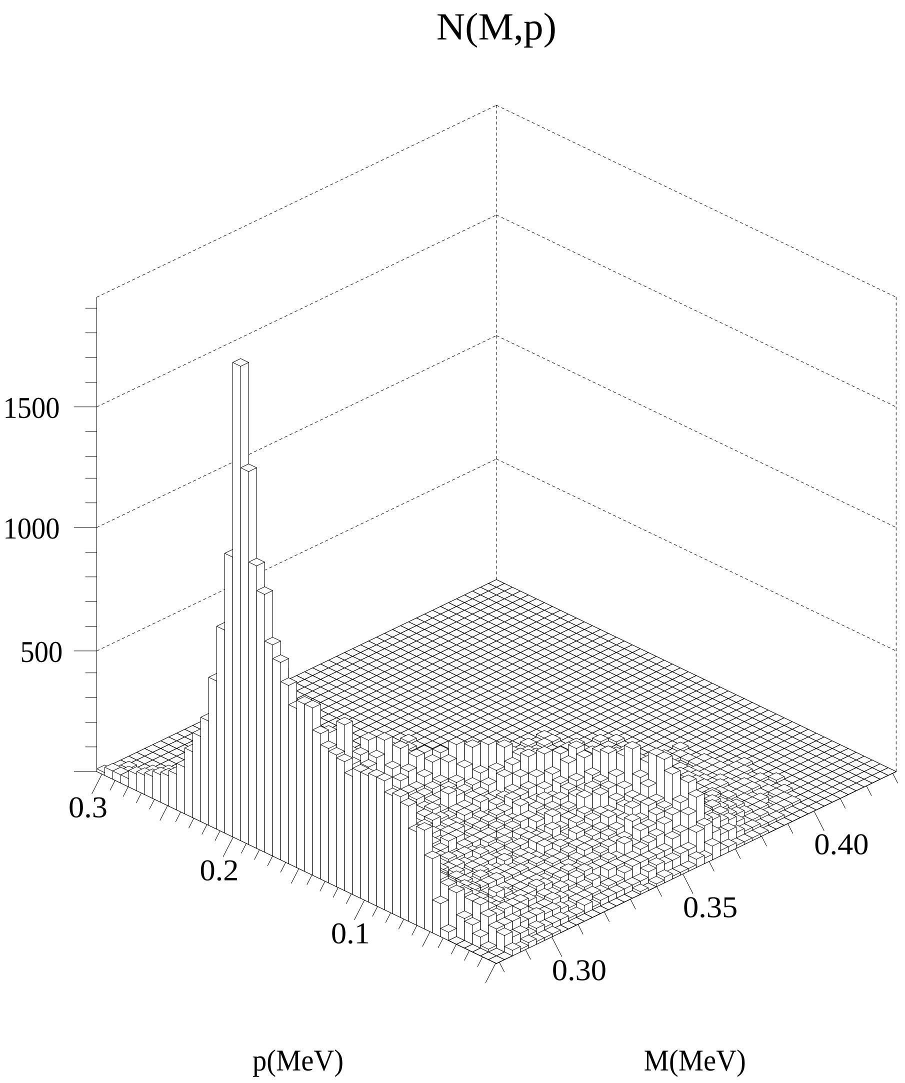

Abbildung 6.3: *Verteilung des Pionenpaares als Funktion von $M_{\pi\pi}$ und $\vec{p}$ in der Reaktion $\pi Pb \rightarrow \pi\pi Pb$. Deutlich sieht man, daß der Großteil der Pionenpaare eine invarianten Masse von $2m_\pi$ und einen Dreierimpuls von etwa 200 MeV haben.*

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war es, das von Z.Aouissat [19] entwickelte Modell zur Beschreibung des σ-Mesons auf endlichen Impuls zu erweitern. Zunächst wurde ausgehend vom linearen σ-Modell eine symmetrieerhaltende Beschreibung der Pionen und des σ entwickelt. Der HFB-Formalismus konnte zwar die spontane Brechung der chiralen Symmetrie beschreiben, verletzte aber das Goldstone-Theorem, das im chiralen Limes masselose Pionen verlangt. Durch Anpassung an experimentelle Streuphasen wurden die Parameter des Modells bestimmt und gezeigt, daß das Modell die „Soft-Pion-Theoreme“ erfüllt, die man aus der PCAC-Relation ableitet.

Im dritten Kapitel wurde die Beschreibung des σ auf endliche Temperatur erweitert. Die (teilweise) Restaurierung der chiralen Symmetrie war deutlich zu erkennen durch die Abnahme der Masse des σ-Mesons und des Kondensates $\langle\sigma\rangle$. Im chiralen Limes konnte der Übergang von der spontan gebrochenen Phase in die ungebrochene Phase explizit gezeigt werden. Der Phasenübergang fand dabei bei einer Temperatur von 170 MeV statt, was in guter Übereinstimmung mit Gitterrechnungen ist [6]. Zudem sieht man mit steigender Temperatur eine Verringerung der Zerfallsbreite des σ-Mesons.

In dichter Materie wurde zunächst das Pion über Teilchen-Loch und Δ-Loch Kopplungen renormiert. Zudem wurden direkte Kopplungen des σ-Mesons an Teilchen-Loch- und N^*-Loch-Prozesse eingeführt, sowie eine dichteabhängige Reduzierung der σ-Masse durch den Nukleon-Tadpolegraphen. Damit ließ sich dann der σ-Propagator berechnen und zeigen, daß das σ in dichter Materie eine starke Modifikation erfährt: Die Masse des σ-Meson verringerte sich bei nuklearer Sättigungsdichte auf unter 300 MeV und die Zerfallsbreite war auf unter 100 MeV abgefallen.

Danach haben wir den Einfluß von endlichem Dreierimpuls auf den Propagator untersucht. In unserem Modell trägt zunächst nur die Zwei-Pion-Selbstenergie zur Impulsabhängigkeit des σ-Mesons bei, da wir den Anteil aus der Teilchen-Loch-Kopplung des σ nicht berücksichtigen konnten, da er zu Instabilitäten führte. Diese Instabilitäten sind Folge der nicht beachteten kurzreichweitigen Abstoßung der Nukleonen. Diese Korrelationen werden für das Pion durch das Einführen von Migdalparametern beschrieben und verhindern diese Instabilität. In Zukunft wollen wir durch Einführung von Migdalparametern – in Analogie

zum Pion – die Instabilitäten unterdrücken und damit auch die Teilchen-Loch-Beiträge für das σ-Meson berücksichtigen. Endlicher Impuls bewirkte eine teilweise Kompensation der durch endliche Dichte hervorgerufenen Effekte: Die Masse des σ-Mesons nahm leicht zu, die Stärke der Spektralfunktion an der Zwei-Pion-Schwelle war um einen Faktor zwei gesunken, und ein großer Teil der Stärke lag im Bereich unterhalb der Schwelle. Der Imaginärteil der Streumatrix war ebenso um einen Faktor zwei an der Schwelle abgefallen.
Im letzten Kapitel schließlich wurde dann eine mögliche Anwendung des Modells diskutiert: Die CHAOS-Kollaboration hat bei der Reaktion $\pi + A \to \pi\pi A'$ mit wachsender Nukleonenanzahl des Targets einen starken Anstieg im Wirkungsquerschnitt an der Zweipionenschwelle nachgewiesen. Als eine mögliche Erklärung für diesen Anstieg wurden von uns die gezeigten Modifikationen des σ-Mesons in dichter Materie vorgeschlagen. Durch Einführung von sogenannter Endzustandswechselwirkungen im Rahmen eines vereinfachten Modells konnte dieser Anstieg zumindest teilweise erklärt werden. Dieses Modell konnte allerdings keinen endlichen Dreierimpuls des Pionenpaares beschreiben. Allerdings konnte gezeigt werden, daß vor allem Pionenpaare mit einem Dreierimpuls von etwa 200 MeV an der Reaktion teilnehmen und von daher der Dreierimpuls berücksichtigt werden muß. Den Effekt von Pionenpaaren mit endlichem Dreierimpuls werden wir von daher in Zukunft näher untersuchen. Zudem gibt es weitere Experimente, wie etwa von der Crystal Ball Collaboration [8] oder bei dem Beschleuniger MAMI in Mainz [9], in denen Wirkungsquerschnitte von Pionenpaaren mit den Quantenzahlen des σ-Mesons gemessen wurden. Wir werden versuchen, die dort gefundenen Ergebnisse im Rahmen unseres Modells zu beschreiben, vor allem im Hinblick auf Modifikationen des Pionenpaares durch das im Experiment vorhandene Medium.

Anhang A

Pion-Selbstenergie in dichter Materie

Die Pion-Selbstenergie in dichter Materie ist gegeben als Funktion der Suszeptibilitäten (Gl.(5.9)), wobei diese folgende Form haben :

$$\tilde{\chi}_{NN^{-1}}(E,\vec{p}) = -4\frac{f_\pi^2\Gamma_\pi^2(\vec{p})}{m_\pi^2} i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} G_{N^{-1}}(q)(G_N(q+p)+G_N(q-p)) \tag{A.1}$$

$$\tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}}(E,\vec{p}) = -\frac{16}{9}\frac{f_{\pi\Delta N}^2\Gamma_\pi^2(\vec{p})}{m_\pi^2} i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} G_{N^{-1}}(q)(G_\Delta(q+p)+G_\Delta(q-p))\,. \tag{A.2}$$

$\Gamma_\pi(\vec{p})$ ist hierbei der übliche Monopolformfaktor am πNN^{-1}- bzw. $\pi\Delta N^{-1}$-Vertex aus Gl.(5.6) Der Nukleon- bzw. Deltapropagator in einem freien Fermigas und nichtrelativistischer Energiebeziehung ist definiert als:

$$G_N(q_0,\vec{q}) = \frac{1-n(\vec{q})}{q_0 - \frac{\vec{q}^2}{2m_N} + i\eta}\,, \tag{A.3}$$

$$G_{N^{-1}}(q_0,\vec{q}) = \frac{n(\vec{q})}{q_0 - \frac{\vec{q}^2}{2m_N} - i\eta}\,, \tag{A.4}$$

$$G_\Delta(q_0,\vec{q}) = \frac{1}{q_0 - \frac{\vec{q}^2}{2m_\Delta} - (m_\Delta - m_N) - \frac{i}{2}\Gamma_\Delta(E,\vec{p}) + i\eta}\,. \tag{A.5}$$

Damit lässt sich die Suszeptibilität $\tilde{\chi}_{NN^{-1}}(E,\vec{p})$ durch die Lindhardfunktion $\Phi(E,\vec{p})$ ausdrücken:

$$\tilde{\chi}_{NN^{-1}}(E,\vec{p}) = -4\frac{f_\pi^2\Gamma_\pi^2(\vec{p})}{m_\pi^2}\Phi_{NN^{-1}}(E,\vec{p})\,, \tag{A.6}$$

wobei die Lindhardfunktion gegeben ist durch

$$\mathrm{Re}\Phi_{NN^{-1}}(E,\vec{p}) = \frac{M_N p_F}{4\pi^2}[1 - \frac{p_F}{2p}(1-z_-^2)\ln(|\frac{z_-+1}{z_--1}|) + \frac{p_F}{2p}(1-z_+^2)\ln(|\frac{z_++1}{z_+-1}|)]$$

$$\mathrm{Im}\Phi_{NN^{-1}}(E,\vec{p}) = \begin{cases} \frac{M_N p_F^2}{8\pi p}(1-z_-^2), & \text{falls } p|p_F - \frac{p}{2}| \le EM_N \le p(p_F + \frac{p}{2}), \\ \frac{M_N^2 E}{4\pi p}, & \text{falls } p < 2p_F \text{ und } 0 \le EM_N \le p(p_F - \frac{p}{2}), \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \tag{A.7}$$

mit

$$z_\pm = \frac{EM_N}{pp_F} \pm \frac{p}{2p_F}. \tag{A.8}$$

Für den Δ-Loch Prozess erhält man nach der q_0-Integration

$$\tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}}(E,\vec{p}) = -\frac{16}{9}\frac{f_{\pi\Delta N}^2\Gamma_\pi^2(\vec{p})}{m_\pi^2} i \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\left(\frac{n(\vec{q})}{E - M_\Delta - \frac{(\vec{p}+\vec{q})^2}{2M_\Delta} + M_N + \frac{\vec{q}^2}{2M_N} + \frac{i}{2}\Gamma_\Delta}\right.$$
$$\left. - \frac{n(\vec{q})}{E + M_\Delta + \frac{(\vec{p}+\vec{q})^2}{2M_\Delta} - M_N - \frac{\vec{q}^2}{2M_N} - \frac{i}{2}\Gamma_\Delta}\right). \tag{A.9}$$

Die Besetzungszahlfunktion $n(\vec{q})$ beschränkt die Integration über $\vec{q}$ bis zum Fermiimpuls. Dieser liegt allerdings für die von uns betrachteten Dichten deutlich unter der Masse der Deltaresonanz. Man kann daher die Terme proportional zu $\vec{q}^2$ vernachlässigen [11] und erhält schließlich

$$\tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}}(E,\vec{p}) = -\frac{4}{9}\frac{f_{\pi\Delta N}^2\Gamma_\pi^2(\vec{p})}{m_\pi^2}\rho\left\{\frac{1}{E - \epsilon_{\Delta N^{-1}} + \frac{1}{2}\Gamma_\Delta} - \frac{1}{E + \epsilon_{\Delta N^{-1}}}\right\}, \tag{A.10}$$

mit

$$\epsilon_{\Delta N^{-1}} = M_\Delta - M_N + \frac{\vec{p}^2}{2M_\Delta}. \tag{A.11}$$

Dabei wurde ausgenutzt, daß die Dichte ρ gegeben ist durch

$$\rho = 4\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\, n(\vec{q}). \tag{A.12}$$

Der Term Γ_Δ wurde eingeführt, da das Delta eine kurzlebige Nukleonresonanz ist, die über Abstrahlung eines Pions sich in ein Nukleon umwandelt. Die Breite soll zum einen Pauli-Blocking und relativistische Korrekturen beinhalten, zum anderen aber auch Korrekturen höherer Ordnung berücksichtigen, so daß

$$\Gamma_\Delta = \Gamma_\Delta^{(1)} + \Gamma_\Delta^{(2)}. \tag{A.13}$$

Den ersten Term entnehmen wir von Oset/Salcedo [35]:

$$\Gamma_{\Delta}^{(1)}(E,\vec{p}) = \frac{2}{3}\frac{f_{\pi\Delta N}^2 q_{cm}^2}{4\pi m_\pi^2}\frac{(W+M_N)^2 - m_\pi^2}{4W^2}\frac{1}{2}(1+\bar{\mu})\Gamma_\pi^2(k) \tag{A.14}$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &= \begin{cases} -1, & \text{falls } \bar{\mu}^0 \leq -1\,, \\ \bar{\mu}^0, & \text{falls } -1 \leq \bar{\mu}^0 \leq +1\,, \\ +1, & \text{falls } \bar{\mu}^0 \geq +1\,, \end{cases} \\ \bar{\mu}^0 &= \frac{E_N^{cm}(M_N+E) - E_F W}{p q_{cm}}\,. \end{aligned} \tag{A.15}$$

Die invariante Δ-Masse und die Fermienergie des Nukleons lauten

$$\begin{aligned} W^2 &= (M_N+E)^2 - p^2\,, \\ E_F &= \sqrt{M_N^2 + p_F^2}\,, \end{aligned} \tag{A.16}$$

und Impuls und Energie des Nukleons im Δ-Ruhesystem sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} E_N^{cm} &= \sqrt{M_N^2 + q_{cm}^2}\,, \\ q_{cm}^2 &= \frac{(W^2 - M_N^2 - m_\pi^2)^2 - 4M_N^2 m_\pi^2}{4W^2}\,. \end{aligned} \tag{A.17}$$

Für $\Gamma_{\Delta}^{(2)}$ wählen wir einen phänomenologischen Ansatz, um das wohlbekannte ρ^2-Verhalten im inelastischen Teil des π-Nukleon Potentials zu erhalten [36]:

$$\Gamma_{\Delta}^{(2)}(E) = 48\frac{\rho}{\rho_0}\Big(1 + \frac{E - m_\pi}{C_1 - m_\pi}\Big)\Lambda(E), \tag{A.18}$$

wobei $C_1 = 380$ MeV ist. Der Formfaktor

$$\Lambda(E) = \Big(1 - \frac{1}{1 + e^{\frac{E-C_2}{10}}}\Big)\Big(\frac{1}{1 + e^{\frac{E-C_3}{15}}}\Big) \tag{A.19}$$

unterdrückt Beiträge von Energien E $\leq C_2$=110 MeV und E $\geq C_3$=400 MeV . Dieser Beitrag alleine reicht allerdings nicht aus, um die Absorption im optischen Potential vollständig zu reproduzieren. Deswegen berücksichtigen wir auch Zwei-Teilchen-Zwei-Loch-Anregungen, die durch das Pion angeregt werden können. Dabei folgen wir dem von der Lyoner Gruppe [37] benutzten Ansatz und setzen für den Imaginärteil

$$\mathrm{Im}\chi_{2p2h}(E,\vec{p}) = -0.3(\frac{\rho}{\rho_0})^2\Lambda(E)\Gamma_\pi^2(\vec{p}). \tag{A.20}$$

Der zugehörige Realteil spielt nur eine untergeordnete Rolle, wir werden ihn daher vernachlässigen. Zur Vereinfachung fassen wir χ_{2p2h} mit der ΔN^{-1} Suszeptibilität zusammen

$$\tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}}(E,\vec{p}) \to \tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}}(E,\vec{p}) + \chi_{2p2h}(E,\vec{p}). \tag{A.21}$$

Anhang B

Der Bogoliubov-Formalismus

Zur Berechnung der Bogoliubov-Faktoren hatten wir in Kap.2.2 die Bedingung gegeben, daß die Koeffizienten c_π und c_σ verschwinden. Daraus folgen als Gleichungen für die Bogoliubov-Koeffizienten:

$$-2U_qV_qe_\Phi(q) = (U_q^2 + V_q^2)\Delta_\Phi(q) \tag{B.1}$$

Hierbei habe ich ein generisches Feld Φ eingeführt, das entweder das σ oder das π kennzeichnet, und die Parameter (U, V) das zugehörige Paar der Bogoliubovfaktoren (u, v) bzw. (x, y). Mithilfe der folgenden Identität

$$\frac{U_q^2 + V_q^2}{e_\Phi(q)} = \frac{-2U_qV_q}{\Delta_\Phi(q)} = \frac{(U_q - V_q)^2}{e_\Phi(q) + \Delta_\Phi(q)} = \frac{(U_q + V_q)^2}{e_\Phi(q) - \Delta_\Phi(q)} \tag{B.2}$$

lässt sich Gl.(B.1) überführen in

$$\frac{e_\Phi(q) - \Delta_\Phi(q)}{e_\Phi(q) + \Delta_\Phi(q)} = \frac{(U_q + V_q)^2}{(U_q - V_q)^2}\,. \tag{B.3}$$

Unter Ausnutzung von $U_q^2 - V_q^2 = 1$

$$(U_q - V_q)^2 * (U_q + V_q)^2 = 1 \Leftrightarrow (U_q - V_q)^2 = \frac{1}{(U_q + V_q)^2} \tag{B.4}$$

erhält man schließlich

$$(U_q + V_q)^2 = \frac{e_\Phi(q) - \Delta_\Phi(q)}{\sqrt{e_\Phi(q)^2 - \Delta_\Phi(q)^2}}\,. \tag{B.5}$$

Kombiniert man dies mit dem obigen Ergebnis, erhält man die in Gl.(2.42) angegebene Lösung für die Bogoliubovfaktoren. Nun können wir dieses Ergebnis benutzen, um die Massen der Quasiteilchen zu bestimmen. Man kombiniert Gl.(2.41) mit Gl.(2.43) und erhält:

$$\varepsilon_\Phi^2(q) = \Big[(U_q^2 + V_q^2)e_\Phi(q) + 2U_qV_q\Delta_\Phi(q)\Big]w_q(U_q - V_q)^2\,. \tag{B.6}$$

Nun kann man noch ausnutzen, daß $e_\Phi(q) = w_q + \Delta_\Phi(q)$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\Phi^2(q) &= [w_q(U_q^2 + V_q^2) + (U_q + V_q)^2\Delta_\Phi(q)]w_q(U_q - V_q)^2 \\
&= w_q^2(U_q - V_q)^2(U_q^2 + V_q^2) + w_q\Delta_\Phi(q) \\
&= w_q^2(U_q - V_q)^2[(U_q + V_q)^2 - 2U_qV_q] + w_q\Delta_\Phi(q) \\
&= w_q^2 - 2w_q^2(U_q - V_q)^2U_qV_q + w_q\Delta_\Phi(q)\,.
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Aus der Bedingung, daß $c_\Phi(q)$ verschwindet, folgt:

$$\Delta_\Phi(q)(U_q + V_q)^2 = -2U_qV_qw_q\,. \tag{B.8}$$

Dies eingesetzt in Gl.(B.7) liefert folgende einfache Form für die Quasiteilchenenergien:

$$\varepsilon_\Phi^2(q) = w_q^2 + 2w_q\Delta_\Phi(q)\,. \tag{B.9}$$

Damit folgt das in Gl.(2.44) angegebene Ergebnis für die Quasiteilchenmassen

$$\varepsilon_\pi^2(0) = \varepsilon_\pi^2(q) - q^2 = w_q^2 + 2w_q\Delta_\Phi(q) - q^2 \tag{B.10}$$

$$= \mu_0^2 + 2w_q\Delta_\Phi(q) \tag{B.11}$$

$$= \mu_0^2 + \lambda_0^2(\frac{N+2}{N}I_0 + \frac{1}{N}J_0 + \langle\sigma\rangle^2)\,. \tag{B.12}$$

Anhang C

Regularisierung der Tadpolediagramme

Die auftretenden Tadpoleintegrale sind quadratisch divergent. Um diese Integrale zu regularisieren, wählen wir die Methode von Pauli-Villars. Die zu regularisierenden Integrale waren von folgender Form:

$$I_\pi = i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2 - m_\pi^2}\,. \tag{C.1}$$

Bei der Pauli-Villars-Regularisierung führt man dann „schwere" Regulatormassen Λ_i ein und ersetzt den Integranden mit Hilfe dieser Regulatormassen in folgender Weise:

$$I_\pi = i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2 - m_\pi^2} \Rightarrow I_\pi = i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2 - m_\pi^2} + i\sum_{i=1}^{n} C_i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2 - \Lambda_i^2}\,. \tag{C.2}$$

Zusätzlich fordert man, daß die eingeführten Massen Λ_i und die Vorfaktoren C_i folgenden Bedingungen genügen:

$$(1)\sum_{i=0}^{n} C_i = 0 \qquad\qquad (2)\sum_{i=0}^{n} C_i\Lambda_i^2 = 0 \tag{C.3}$$

Aus konventionellen Gründen bezeichnet man $C_0 = 1$ und $\Lambda_0 = m_\pi$. Durch die Wahl von $C_1 = 1$, $C_2 = -2$ und $\Lambda_1^2 = m_\pi^2 + 2\Lambda^2$, $\Lambda_2^2 = m_\pi^2 + \Lambda^2$ erfüllt man diese Bedingungen. Nach Einsetzen in das Tadpoleintegral ergibt sich

$$I_\pi = i\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\left[\frac{1}{q^2 - m_\pi^2 + i\varepsilon} + \frac{1}{q^2 - \Lambda_1^2 + i\varepsilon} - \frac{2}{q^2 - \Lambda_2^2 + i\varepsilon}\right] \tag{C.4}$$

Es ist leicht zu zeigen, daß dieses Integral nun nicht mehr divergent ist. Zuerst erhält man nach der q_0-Integration unter Verwendung des Residuensatzes:

$$I_\pi = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\left[\frac{1}{2\omega_{q,m}} + \frac{1}{2\omega_{q,\Lambda_1}} - \frac{2}{2\omega_{q,\Lambda_2}}\right]. \tag{C.5}$$

Dieses Integral lässt sich ebenfalls leicht berechnen und es ergibt sich im Limes $q \to \infty$:

$$\begin{aligned} I_\pi = \frac{1}{8\pi^2} \lim_{q\to\infty} \Big[& q^2 - m_\pi^2 \ln 2q + m_\pi^2 \ln m_\pi + q^2 - \Lambda_1^2 \ln 2q \\ & + \Lambda_1^2 \ln \Lambda_1 - 2q^2 + 2\Lambda_2^2 \ln 2q - 2\Lambda_2^2 \ln \Lambda_2 \Big] . \end{aligned} \tag{C.6}$$

Setzt man nun die Definition der Λ_i ein, so sieht man, daß die q-abhängigen Terme verschwinden und man erhält:

$$\begin{aligned} I_\pi &= \frac{1}{8\pi^2} \Big[m_\pi^2 \ln m_\pi + \Lambda_1^2 \ln \Lambda_1 - 2\Lambda_2^2 \ln \Lambda_2 \Big] \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \Big[m_\pi^2 \ln m_\pi^2 + \Lambda_1^2 \ln \Lambda_1^2 - 2\Lambda_2^2 \ln \Lambda_2^2 \Big] . \end{aligned} \tag{C.7}$$

Unter Ausnutzung der zweiten Bedingung in Gl.(C.3) kann man dies schliesslich in folgende einfache Form überführen:

$$\begin{aligned} I_\pi &= \frac{1}{16\pi^2} \left[\Lambda_1^2 \ln \frac{\Lambda_1^2}{m_\pi^2} - 2\Lambda_2^2 \ln \frac{\Lambda_2^2}{m_\pi^2} \right] \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left[(m_\pi^2 + 2\Lambda^2) \ln \frac{m_\pi^2 + 2\Lambda^2}{m_\pi^2} - 2(m_\pi^2 + \Lambda^2) \ln \frac{m_\pi^2 + \Lambda^2}{m_\pi^2} \right] . \end{aligned} \tag{C.8}$$

Für die „schwere" Regulatormasse haben wir $\Lambda = 1.2$ GeV gewählt.

Literaturverzeichnis

[1] M. Gell-Mann, Phys. Lett. 8 (1964) 214.

[2] G. Zweig, CERN preprint (1964).

[3] F. Abe et al., Phys. Rev. Lett. 74 (1995) 2626.

[4] D. E. Groom et al., The European Physical Journal C 15 (2000) 1.

[5] R. Rapp, G. Chanfray und J. Wambach, Nucl. Phys. A 617 (1997) 472.

[6] F. Karsch, E. Laermann, A. Peikert, Preprint hep-lat/0012023.

[7] F. Bonutti et al., Phys. Rev. Lett. 77 (1996) 603.

[8] B. Nefkens et al., πN Newsletter 15 (1999).

[9] V. Metag, zur Veröffentlichung in Nucl. Phys. A.

[10] Z. Aouissat, G. Chanfray, P. Schuck, Modern Physics Letters A8 (1993) 1379.

[11] Z. Aouissat et al., Nucl. Phys A 581 (1995) 471.

[12] C. Itzykson und J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw- Hill 1980.

[13] C. Bloch und A. Messiah, Nucl.Phys. 39 (1962) 95.

[14] D. J. Thouless, Nucl. Phys. 21 (1960) 225.

[15] D. J. Rowe, Rev. Mod. Phys. 40 (1968) 153.

[16] T. P. Cheng und L. F. Li, *Gauge theories of elementary particle physics*, Oxford Univ. Press 1988.

[17] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett 17 (1966) 616.

[18] H. Burkhardt und J. Lowe, Phys. Rev. Lett. 67 (1991) 2622.

[19] Z. Aouissat, P. Schuck und J. Wambach, Nucl. Phys. A 618 (1997) 402.

[20] S. D. Protopopescu et al., Phys. Rev. D 7 (1973) 1279

[21] E. Oset und M. J. Vicente Vacas, Nucl. Phys. A446 (1985) 584.

[22] R. M. Rockmore, Phys. Rev. C27 (1983) 2150.

[23] A. L. Goodman, Nucl.Phys. A 352 (1981) 30.

[24] C. Bloch und C. De Dominicis, Nucl. Phys. 7 (1958) 459; 10 (1959) 181,509.

[25] H. M. Sommermann, Ann.Phys. 151 (1983) 163.

[26] J. Wambach, Z. Aouissat und P. Schuck, zur Veröffentlichung in Nucl. Phys. A

[27] J. D. Bjorken und S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill 1965.

[28] R. Rapp, Doktorarbeit, Berichte des Forschungszentrums Jülich 3195, 1996; G. Chanfray, R. Rapp und J. Wambach, Phys. Rev. Lett. 76 (1996) 368.

[29] T. E. O. Ericson und W. Weise, *Pions and Nuclei*, Clarendon, Oxford 1988.

[30] D. Davesne, Y. J. Zhang und G. Chanfray, Preprint nucl-th/9909032

[31] T. Hatsuda, T. Kunihiro und H. Shimizu, Phys. Rev. Lett. 82 (1999) 2840.

[32] A. B. Migdal, Rev. Mod. Phys. 50 (1978) 107.

[33] D. Lohse et al., Phys. Lett. B 234 (1990) 235.

[34] P. Schuck et al., Proceedings of the XXXVI. International Winter Meeting on Nuclear Physics Ed. I. Iori, Bormio(Italy) January 1998.

[35] E. Oset und L. L. Salcedo, Nucl.Phys. A 468 (1987) 631.

[36] L. S. Kisslinger, Phys. Rev. 98 (1955) 761.

[37] W. M. Alberico, M. Ericson und A. Molinari, Ann. Phys. 154 (1984) 356; G. Chanfray und M. Ericson, Phys. Lett. B 141 (1984) 163.

Danksagung

Zuerst möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. J. Wambach für die Anregung zu dieser Arbeit und sein ständiges Interesse bedanken.

Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Dr. Zoheir Aouissat für die Betreuung dieser Arbeit. Er war jederzeit bereit, auftretende Fragen zu beantworten und Probleme zu diskutieren.

Allen Mitgliedern der NHC-Gruppe danke ich für die angenehme Atmosphäre und ihre ständige Diskussionsbereitschaft.

Ein besonderer Dank gebührt Dr. Micaela Oertel und Michael Urban, deren kritische Kommentare und Anregungen zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Schließlich möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, die mich während meines gesamten Studiums unterstützt haben.