Martin Frank

Das QCD-Phasendiagramm bei endlicher Isospindichte

Diplomarbeit

am
Fachbereich Physik
der
Technischen Universität Darmstadt

Juli 2003

Vorwort

Theorien über Elementarteilchenphysik oder das frühe Universum haben mich schon immer fasziniert. Weil ich mehr über diese Dinge erfahren wollte und weil ich wußte, daß deren Studium genaue Kenntnisse über höhere Mathematik und Physik erfordert, begann ich ein Studium der Mathematik und Physik an der TU Darmstadt.

Obwohl ich mittlerweile in der Mathematik promoviere, habe ich mich entschlossen, eine Physik-Diplomarbeit zu schreiben in einem Themenbereich, der zum einen grundlegende und moderne Fragen in der Physik berührt und der zum anderen völlig verschieden ist von dem, womit ich mich in der Mathematik beschäftige. Das QCD-Phasendiagramm ist gegenwärtig von großem theoretischen und experimentellen Interesse und die feldtheoretischen und thermodynamischen Methoden zur Beschreibung sehr interessant.

Mir hat die Arbeit an diesem Thema sehr viel Spaß gemacht und ich hoffe, daß dies auch an dieser Arbeit erkennbar ist.

Daher möchte ich mich bei Prof. Dr. J. Wambach bedanken für die Möglichkeit, eine Diplomarbeit über dieses sehr interessante Thema schreiben zu dürfen, und für seine Geduld mit mir. Ein ganz besonderer Dank gebührt Dr. M. Buballa für die hervorragende Betreuung. Er hatte immer Zeit und war immer an meinen Ergebnissen interessiert. Ein Dankeschön geht auch an Dr. M. Oertel, die sich die Zeit genommen hat, mir ihre Arbeit und ihre Programme zu erklären, die ich leider dann doch nicht benutzt habe. Zuletzt möchte ich mich bei Freunden, Familie, Kollegen und Kommilitonen bedanken, die mich während meines Studiums an der TU Darmstadt unterstützt haben.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

1.1 Das QCD-Phasendiagramm

Viele wichtige und aktuelle physikalische Fragestellungen beschäftigen sich mit dem Verhalten stark wechselwirkender Materie unter verschiedenen äußeren Bedingungen, zum Beispiel die Physik des frühen Universums oder die Physik von Neutronensternen. Wie viele aus dem Alltag bekannte chemische Substanzen nimmt auch die stark wechselwirkende Materie bei verschiedenen äußeren Bedingungen unterschiedliche Phasen an.

Für gewöhnlich wählt man die Temperatur T und das chemische Potential der Baryonen μ_B als Parameter und trägt die Phasen der QCD in ein μ_B-T-Diagramm ein. Im folgenden wollen wir kurz die Charakteristika des QCD-Phasendiagramms andeuten und deren Relevanz für verschiedene Probleme der Physik erklären.

Abbildung 1.1 zeigt ein schematisches QCD-Phasendiagramm für zwei masselose Quarks. Wir beginnen unsere Diskussion bei verschwindendem Baryon chemischen Potential. Entlang dieser Achse kühlte sich das frühe Universum kurz nach seiner Entstehung ab. Ein wichtiger Punkt dabei ist ein Phasenübergang bei einer Temperatur von $T \sim 140 - 190$ MeV [1], auf die das junge Universum in den ersten Millisekunden nach seiner Entstehung abkühlte. Die Temperatur kann man mit Hilfe von QCD-Gitter-Simulationen vorhersagen [2, 3, 4]. Dieser Phasenübergang ist mit zwei Phänomenen verknüpft. Oberhalb der kritischen Temperatur sind Quarks und Gluonen die dominanten Freiheitsgrade (Quark-Gluon-Plasma). Unterhalb der kritischen Temperatur sind diese in den Hadronen gebunden (hadronische Phase). Die Freiheitsgrade sind unter anderem Proton, Neutron und die Pionen. Da freie Quarks zu gebundenen Quarks werden, spricht man vom Deconfinement/Confinement-Übergang. Keineswegs trivial ist, daß bei der kritischen Temperatur wahrscheinlich gleichzeitig ein weiteres Phänomen auftritt, nämlich die Brechung bzw. Restaurierung der chiralen Symmetrie, die später noch zu erläutern sein wird. Die chirale Symmetrie

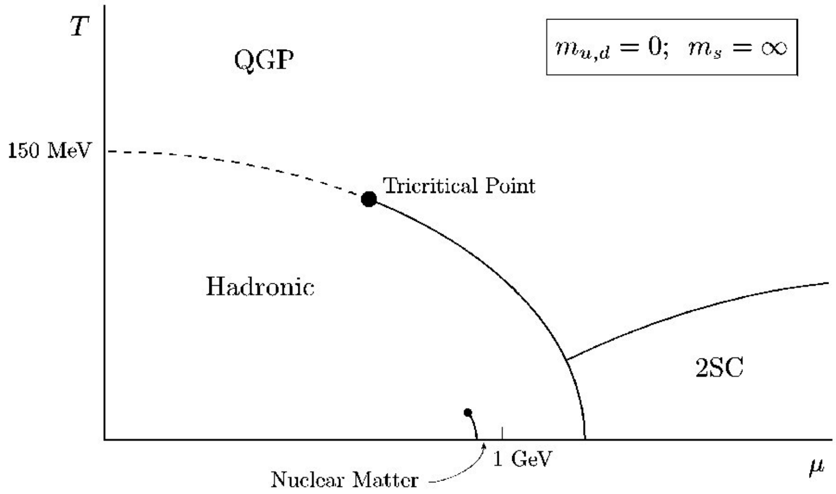

Abbildung 1.1: QCD-Phasendiagramm aus [1] für zwei masselose Quarks. Die durchgezogenen Linien sind Phasenübergänge erster Ordnung. Die gestrichelte Linie ist ein Phasenübergang zweiter Ordnung.

ist eine (approximative) Symmetrie der QCD, die in der hadronischen Phase gebrochen ist, im Quark-Gluon-Plasma aber restauriert ist.

Die Ordnung dieses Phasenübergangs, also gewissermaßen dessen Stärke, könnte von entscheidender Bedeutung sein. Wäre der Übergang nämlich von erster Ordnung, so würde er inhomogen von statten gehen. Es hätten sich isolierte Blasen von hadronischer Materie im Quark-Gluon-Plasma gebildet. Dies hätte lokale Fluktuationen in der Baryonendichte zur Folge, was einen signifikanten Einfluß auf die relativen Häufigkeiten der leichten Elemente in der Epoche der Nukleosynthese gehabt haben könnte [5, 6]. Wahrscheinlich ist dieser Phasenübergang jedoch zweiter Ordnung oder ein Crossover. In Abbildung 1.1 ist deshalb ein Phasenübergang zweiter Ordnung eingezeichnet. Ist jedoch die *strange*-Quarkmasse klein genug, so könnte der Übergang von erster Ordnung sein [1].

Kalte und dichte Quarkmaterie bei kleiner Temperatur und großem chemischen Potential für die Baryonen könnte in den Kernen von Neutronensternen vorliegen. Das sind sehr dichte Sterne mit Massen im Bereich der Chandrasekhar-Masse (etwa 1.4 Sonnenmassen) und Radien von etwa 10 km [7]. Diese Sterne sind die Rückstände von Supernova-Explosionen massereicher Sterne. Man glaubt, daß Neutronensterne die Quelle von Pulsaren sind. Es ist daher von Interesse, die grundlegende Physik von Neutronensternen zu verstehen. Verschiedene Modelle sagen auch die Existenz von Pion- oder Kaon-Kondensation in Neutronensternen voraus [8, 9, 10]. Auch könnte Farbsupraleitung eine Rolle spielen, die man im Phasendiagramm bei sehr hohen Baryon chemischen Potentialen erwartet [11]. Dieser Bereich ist in Abbildung 1.1 mit $2SC$ bezeichnet.

Ein ausgezeichneter und experimentell zugänglicher Punkt im Phasendiagramm könnte ein kritischer Punkt bei $\mu_B \neq 0$ und $T \neq 0$ sein. Aus Gitter-Simulationen ist bekannt, daß der an der ($\mu_B = 0$)-Achse startende Phasenübergang von zweiter Ordnung (bzw. ein Crossover) ist. Wie wir später noch diskutieren werden, ist der Bereich endlichen Baryon chemischen Potentials μ_B direkten Gitter-Simulationen noch nicht zugänglich. Eine Vielzahl von Modellen [12, 13, 14, 15, 16] sagt aber voraus, daß der an der ($T = 0$)-Achse startende Phasenübergang von erster Ordnung ist. Diese beiden Übergänge treffen sich in einem ausgezeichneten Punkt. Die besonderen Eigenschaften der stark wechselwirkenden Materie an diesem Punkt könnten durch die gerade oder in Zukunft beginnenden neuen Experimente mit schweren Ionen gemessen werden [17, 18]. Diese Experimente laufen gerade am Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) am Brookhaven National Laboratory. Zukünftige Experimente werden am Large Hadron Collider (LHC) am CERN in Genf, und am SIS200 Experiment der GSI in Darmstadt durchgeführt. Die theoretischen Vorhersagen für Temperatur und chemisches Potential dieses Punktes schwanken sehr stark. Ein experimenteller Nachweis dieses Endpunktes würde einerseits unser qualitatives Verständnis des QCD-Phasendiagramms stärken, andererseits aber auch viele Modelle quantitativ widerlegen.

Erste experimentelle Erfolge scheinen schon erzielt worden zu sein. So meldete RHIC am 11. Juni 2003 [19] erste Hinweise auf die Existenz des Quark-Gluon-Plasmas.

1.2 Warum endliche Isospindichte?

In dieser Diplomarbeit untersuchen wir das QCD-Phasendiagramm bei endlichem chemischen Potential für den Isospin, im folgenden vielleicht sprachlich nicht ganz korrekt als Isospin chemisches Potential bezeichnet. Kurz gesagt ordnen wir *up* und *down* Quark, aus denen die uns umgebende hadronische Materie größtenteils besteht, unterschiedliche chemische Potentiale zu.

Betrachten wir das thermodynamische Potential Ω als Funktion der chemischen Potentiale, so sind die zugehörigen Teilchenzahldichten definiert als

$$n_i = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_i}. \tag{1.1}$$

Da die Baryonenzahldichte n_B und Isospindichte n_I durch

$$n_B = \frac{1}{3}(n_u + n_d) \quad \text{und} \quad n_I = \frac{1}{2}(n_u - n_d) \tag{1.2}$$

gegeben sind, definieren wir analog das Baryon chemische Potential μ_B und das Isospin chemische Potential μ_I als

$$\mu_B = \frac{3}{2}(\mu_u + \mu_d) \quad \text{und} \quad \mu_I = \mu_u - \mu_d. \tag{1.3}$$

Wir verwenden später der Einfachheit halber auch die in der Literatur ebenfalls gebräuchlichen Abkürzungen $\Delta\mu = \frac{\mu_u - \mu_d}{2}$ und $\mu = \frac{\mu_u + \mu_d}{2}$.

Endliche Isospindichten wurden vor allem im Zusammenhang mit Farbsupraleitung untersucht [20, 21, 22, 23, 24]. Ein endliches Isospin chemisches Potential zu betrachten hat physikalische, aber auch praktische Gründe.

In der Natur kommen Systeme mit Isospin-asymmetrischer Materie z.B. in Neutronensternen vor [20]. Auch in Experimenten mit schweren Ionen ist in natürlicher Weise das Isospin chemische Potential von Null verschieden [25]. Ob dies auch für das frühe Universum zutrifft, ist fraglich. Es könnte aber durchaus einzelne räumliche Zonen mit unterschiedlicher Isospindichte gegeben haben.

Ein praktischer Grund, nur ein chemisches Potential für den Isospin zu betrachten, bei gleichzeitig verschwindendem Baryon chemischen Potential, sind Probleme der Gitter-Monte-Carlo Simulationen der QCD. Wir können hier nicht genau auf die Details der Probleme dieses Ansatzes eingehen, sondern erwähnen nur, daß ein endliches Baryon chemisches Potential zu einer komplexen Fermiondeterminante führt. Dies verhindert den wahrscheinlichkeitstheoretischen Zugang der Monte-Carlo-Methode. QCD bei endlichen Isospin chemischen Potentialen, aber verschwindendem Baryon chemischen Potential, kann dagegen auf dem Gitter simuliert werden [20, 26, 27]. Einerseits ist es daher interessant, Zusammenhänge zwischen dem Phasendiagramm bei endlichem Baryon chemischen Potential und dem Phasendiagramm bei endlichem Isospin chemischen Potential herzustellen. Möglicherweise sind die Phasenübergänge bei hohen Isospin bzw. Baryon chemischen Potentialen ähnlich, da sowohl Isospin als auch Baryonenzahl Erhaltungsgrößen der starken Wechselwirkung sind. Andererseits kann man auch die Vorhersagen effektiver Modelle mit den Gitter-Simulationen vergleichen.

Wir müssen noch erwähnen, daß Systeme mit endlichem Isospin, aber verschwindender Baryonenzahl, rein theoretische Konstrukte sind, die in der Natur nicht vorkommen und außerdem instabil gegenüber schwachen Zerfällen sind, die nicht den Isospin erhalten. Da wir aber nur an der starken Wechselwirkung interessiert sind, vernachlässigen wir in dieser Arbeit alle Effekte der elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkung.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, den Einfluß eines endlichen Isospin chemischen Potentials auf das QCD-Phasendiagramm zu studieren. Zu untersuchende Fragen sind unter anderem der Einfluß auf die Lage des kritischen Punktes, ein Vergleich der Phasendiagramme in $(\mu_B - T)$- und $(\mu_I - T)$-Ebene, und der Einfluß auf die Pionen. Wie verhalten sich die Massen der Pionen und gibt es Hinweise auf Pionkondensation?

Um diese Fragen zu diskutieren, behelfen wir uns eines effektiven Modells der QCD, des NJL-Modells. In Kapitel 2 stellen wir kurz die QCD-Lagrangedichte vor und diskutieren diese mit Hilfe des Noether-Theorems und des Goldstone-Theorems. Dann führen wir das NJL-Modell ein. Schließlich geben wir grundlegende Definitionen zur Ordnung von Phasenübergängen an. In Kapitel 3 benutzen wir die Mean-Field-Näherung, um Phasendiagramme in verschiedenen Parameterbereichen zu berechnen. Wir benutzen eine verallgemeinerte NJL-Lagrangedichte und diskutieren unter anderem die mögliche Existenz von zwei kritischen Punkten und untersuchen Pionkondensation. Mit Hilfe der Random Phase Approximation untersuchen wir in Kapitel 4 die Mesonenmassen bei endlichem Isospin chemischen Potential. Wir schließen in Kapitel 5 mit einer kurzen Diskussion unserer Ergebnisse und möglicher Ansatzpunkte für weitere Untersuchungen.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel stellen wir einige Grundlagen vor. Zunächst diskutieren wir die Symmetrien der Lagrangedichte der QCD. Mit Hilfe des Noether-Theorems leiten wir aus den Symmetrien Erhaltungsgrößen ab. Das Goldstone-Theorem erlaubt es, die leichten Mesonen als Goldstone-Bosonen der spontanen Brechung der chiralen Symmetrie zu interpretieren. Danach stellen wir das Nambu-Jona-Lasinio Modell vor, das wir in dieser Arbeit zum Studium des QCD-Phasendiagramms verwenden wollen und gehen wieder auf die Symmetrien der Lagrangedichte ein. Schließlich definieren wir die Ordnung bei Phasenübergängen. Wir folgen in Teilen dieses Abschnitts den Darstellungen [28, 29].

2.1 Quantenchromodynamik (QCD)

Die Quantenchromodynamik (QCD) ist die $SU(3)_C$ Eichtheorie der starken Wechselwirkung mit der Farbe als Ladung. Die Lagrangedichte der QCD läßt sich schreiben als

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G_a^{\mu\nu}, \tag{2.1}$$

wobei $G^a_{\mu\nu}$ der Feldstärketensor des Gluon-Feldes,

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu - g f_{abc} G^b_\mu G^c_\nu, \tag{2.2}$$

und D^μ die kovariante Ableitung ist,

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\frac{\lambda_a}{2}G^a_\mu(x). \tag{2.3}$$

Dabei sind f_{abc} die Strukturkonstanten der Symmetriegruppe $SU(3)$,

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2i f_{abc}\lambda_c. \tag{2.4}$$

Die Quarkfelder sind im Vektor

$$\psi = [u, d, s, \dots]^T \tag{2.5}$$

zusammengefaßt. Die Massen-Matrix

$$m = \mathrm{diag}(m_u, m_d, m_s, \dots) \tag{2.6}$$

wirkt im Flavor-Raum.

Mit Hilfe einfacher Symmetrieüberlegungen kann man bereits einige Aussagen aus der Lagrangedichte ableiten. Wesentlich dafür sind das Noether-Theorem und das Goldstone-Theorem, die wir im folgenden kurz vorstellen und dann auf die QCD anwenden.

2.1.1 Symmetrien und Noether-Theorem

Das Studium von Symmetrien ist nicht nur in der Quantenfeldtheorie von entscheidender Bedeutung. Symmetrien eines physikalischen Systems (genauer: Symmetrien der Lagrangefunktion oder Lagrangedichte) implizieren die Existenz von Erhaltungsgrößen. Zum Beispiel führt die Translationsinvarianz der Naturgesetze zur Impulserhaltung, Isotropie zu Drehimpulserhaltung und Zeitinvarianz zur Energieerhaltung.

Der Schlüssel für diesen Zusammenhang ist das Noether-Theorem, dessen Beweis wir hier skizzieren wollen. Eine Variante des Noether-Theorems lautet:

Zu jeder Symmetrie in der Lagrangedichte existiert ein erhaltener Strom.

Zum *Beweis* nehmen wir an, daß die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ nur von den Feldern ϕ_j und ihren Ableitungen $\partial_\mu \phi_j$ abhängt, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$. Eine infinitesimale Transformation $\delta\phi$ ist eine Symmetrie, falls

$$\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}(\phi + \delta\phi). \tag{2.7}$$

Gleichwertig dazu ist

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_j} \delta\phi_j + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_j)} \delta(\partial_\mu \phi_j) = 0. \tag{2.8}$$

Wir setzen die Bewegungsgleichung

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_j)} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_j} \tag{2.9}$$

ein und haben

$$\partial_\mu \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_j)} \right] \delta\phi_j + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_j)} \delta(\partial_\mu \phi_j) = \partial_\mu \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_j)} \delta\phi_j \right] = 0. \tag{2.10}$$

Also ist der Strom

$$J^\mu := \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_j)} \delta\phi_j \tag{2.11}$$

erhalten ($\partial_\mu J^\mu = 0$). Die zugehörige erhaltene Ladung ($\dot{Q} = 0$) ist

$$Q := \int d^3\vec{x} J_0(x). \tag{2.12}$$

2.1.2 Symmetriebrechung und Goldstone-Theorem

Ein Gegenstück zum Noether-Theorem stellt das Goldstone-Theorem [30] dar. Das Noether-Theorem verknüpft Symmetrien der Lagrangedichte mit erhaltenen Strömen, während das Goldstone-Theorem die Brechung von Symmetrien mit der Existenz von Teilchen verknüpft. Ist der Grundzustands des physikalischen Systems *nicht* invariant gegenüber einer der Symmetrien der Lagrangedichte, so spricht man von *spontaner Symmetriebrechung.* Das Goldstone-Theorem besagt nun:

Die spontane Brechung einer stetigen Symmetrie impliziert die Existenz masseloser Teilchen, der Goldstone-Bosonen. Die Anzahl ist gleich der Anzahl gebrochener Generatoren der Symmetrie.

Wir skizzieren wieder den *Beweis.* Wir betrachten die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - V(\phi). \tag{2.13}$$

Das Feld $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots)^T$ habe einen Vakuumerwartungswert $\langle\phi\rangle = v$, der das Potential V minimiere. Diese Bedingung impliziert

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_j}(v) = 0. \tag{2.14}$$

Außerdem ist die Hesse-Matrix

$$M_{jk}^2 = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_j \partial \phi_k}(v) \tag{2.15}$$

positiv semi-definit (und läßt sich daher als Quadrat einer positiv semi-definiten Matrix schreiben). Wir entwickeln nun die Lagrangedichte um den Erwartungswert v. Mit den verschobenen Feldern $\phi' := \phi - v$ lautet die Lagrangedichte bis zur zweiten Ordnung

$$\mathcal{L}(\phi') = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi')(\partial^\mu \phi') - \frac{1}{2} M_{jk}^2 \phi'_j \phi'_k. \tag{2.16}$$

Wir erkennen, daß die Matrix M^2 einen Massenterm darstellt. Die Fluktuationen ϕ' um den Erwartungswert v kann man also als Bosonen interpretieren. Die Massen der Bosonen sind gerade die Eigenwerte der Matrix M.

Das Potential $V(\phi)$ und somit auch $\mathcal{L}(\phi)$ seien invariant gegenüber der infinitesimalen Symmetrietransformation

$$\delta\phi = i\varepsilon_a T^a \phi. \tag{2.17}$$

Dabei sind die antihermiteschen Matrizen T^a die Generatoren der Symmetriegruppe. Dies bedeutet

$$V(\phi) = V(\phi + \delta\phi) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial V}{\partial \phi_k}(\phi)\varepsilon_a T^a_{kl}\phi_l = 0. \tag{2.18}$$

Differentiation nach ϕ_j liefert an der Stelle v

$$M^2_{jk}\varepsilon_a T^a_{kl} v_l + \frac{\partial V}{\partial \phi_k}(v)\varepsilon_a T^a_{kj} = 0. \tag{2.19}$$

Da der zweite Term verschwindet, erhalten wir

$$M^2 T^a v = 0. \tag{2.20}$$

Für den Fall spontan gebrochener Symmetrie, also $T^a v \neq 0$ ist dies gerade eine Eigenwertgleichung mit Eigenwert 0. Dies entspricht einem masselosen Goldstone-Boson.

2.1.3 Symmetrien und Symmetriebrechung in der QCD

Wir vernachlässigen für einen Moment den Massenterm in der QCD-Lagrangedichte. Dann ist die Lagrangedichte invariant unter verschiedenen Transformationen, zum Beispiel

$$\psi \to \psi' = e^{i\alpha}\psi, \qquad U_V(1) \tag{2.21}$$
$$\psi \to \psi' = e^{i\alpha\lambda_a}\psi, \qquad SU_V(n_f) \tag{2.22}$$
$$\psi \to \psi' = e^{i\alpha\gamma_5}\psi, \qquad U_A(1) \tag{2.23}$$
$$\psi \to \psi' = e^{i\alpha\lambda_a\gamma_5}\psi, \qquad SU_A(n_f), \tag{2.24}$$

wobei n_f die Anzahl der Flavors ist. Wir haben auch die zugrundeliegenden Symmetriegruppen angegeben. Die zugehörigen Noetherströme sind

$$V_0^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{2.25}$$
$$V_a^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\lambda_a\psi \tag{2.26}$$
$$A_0^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \tag{2.27}$$
$$A_a^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\lambda_a\psi. \tag{2.28}$$

Der Strom V_0^μ entspricht der Baryonenzahlerhaltung, während V_a^μ der Isospin/Strangeness/ … -Erhaltung entspricht. Diese Symmetrie ist nur exakt, wenn die Massen aller Quarks gleich sind. Aus Tabelle 2.1 ist ersichtlich, daß dies nur für u und d Quarks annähernd erfüllt ist. Der Strom A_0^μ, erzeugt

Quark Flavor	Masse [MeV/c^2]
up	$1.5 \ldots 4.5$
down	$2.5 \ldots 5.5$
strange	$80 \ldots 155$
charm	$1.0 \ldots 1.4 \cdot 10^3$
bottom	$4.0 \ldots 4.5 \cdot 10^3$
top	$169.8 \ldots 188.5 \cdot 10^3$

Tabelle 2.1: Quarkmassen aus dem Particle Data Book [33].

durch die Gruppe $U_A(1)$, wird trotz seines Auftauchens hier nicht als erhaltener Strom der Lagrangedichte angesehen. Die Brechung dieser Symmetrie wurde von 't Hooft durch Instantonen erklärt [31, 32].

Für uns ist in dieser Arbeit die chirale Symmetrie am interessantesten. Eine anschauliche Erklärung ist die folgende. Vernachlässigen wir die Quarkmassen, so enthält die QCD-Lagrangedichte keinen Term, der die links- und rechtshändigen Komponenten des Feldes,

$$\psi_{R,L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\psi, \tag{2.29}$$

mischt. Beide transformieren sich also unabhängig voneinander. Die Symmetriegruppe der QCD-Lagrangedichte ist also

$$G_{QCD} = SU_L(n_f) \otimes SU_R(n_f) \otimes U_V(1) = SU_V(n_f) \otimes SU_A(n_f) \otimes U_V(1). \tag{2.30}$$

Das Vakuum ist tatsächlich invariant unter der Isospinsymmetrie, ersichtlich z.B. am Isospindublett der Nukleonen. Wäre aber die chirale Symmetrie erfüllt, so müßte es zu jedem Teilchen auch einen Partner umgekehrter Parität und gleicher Masse geben. Diese werden aber nicht beobachtet. Die beobachtete (approximative) Symmetriegruppe des Vakuums ist also

$$G_{\text{vac}} = SU_V(n_f) \otimes U_V(1). \tag{2.31}$$

Wir folgern daraus, daß die chirale Symmetrie spontan gebrochen ist. Bei zwei Flavors muß es also $2^2 - 1 = 3$ Goldstone-Bosonen geben. Diese findet man auch tatsächlich mit den Pionen, π^0, π^+ und π^-. Bei drei Flavors kommen noch die Kaonen und das η hinzu. Die endlichen Massen der Pionen, $m_\pi \approx 140$ MeV, lassen sich damit erklären, daß die Quarks kleine aber endliche Massen besitzen. Dies bricht die chirale Symmetrie explizit, denn ein Term der Form

$$\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L \tag{2.32}$$

mischt die beiden Händigkeiten.

Allein mit Hilfe des Noether-Theorems und des Goldstone-Theorems lassen sich also bereits viele Eigenschaften des Teilchenspektrums erklären.

2.2 Das Nambu-Jona-Lasinio (NJL) Modell

Obwohl wir durch einfache Symmetrieüberlegungen schon viel Information aus der QCD erhalten haben, ist es schwierig, die Dynamik der QCD zu studieren. Für große Energien erlaubt die asymptotische Freiheit [34, 35] einen Zugang mit Hilfe der Störungsrechnung. Bei niedrigeren Energien im Bereich der Hadronenmassen (~ 1 GeV) zeigt die QCD aber nicht-perturbatives Verhalten, wie zum Beispiel Confinement, was die analytische Behandlung sehr erschwert.

Deshalb greifen wir auf ein Modell zurück, das einfach ist, zugleich aber einige wesentliche Eigenschaften der QCD nachbildet. Ein solches Modell ist das Nambu–Jona-Lasinio (NJL) Modell, dessen Lagrangedichte für zwei Flavors gegeben ist durch

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + G\left[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2\right]. \tag{2.33}$$

Dieses Modell wurde von Nambu und Jona-Lasinio ursprünglich zur Beschreibung von Nukleonen eingeführt [36, 37], wird aber heute gewöhnlich als Quarkmodell benutzt. Das NJL-Modell wurde unter verschiedenen Gesichtspunkten unter anderem in den Review-Artikeln [38, 39, 40] beschrieben. Die Matrix $m = \mathrm{diag}(m_u, m_d)$ wirkt im Flavorraum auf $\psi = (u, d)^T$. Diese Lagrangedichte besitzt einige Symmetrien der QCD, nämlich $U_V(1)$ (Baryonenzahlerhaltung), $SU_V(2)$ (Isospinerhaltung), falls $m_u = m_d$, und $SU_A(2)$ (chirale Symmetrie), falls $m_u = m_d = 0$. Die $U_A(1)$ Symmetrie ist explizit gebrochen.

In Abschnitt 3.2 stellen wir die Lagrangedichte genauer und in einer allgemeineren Form vor. Die Nachteile des NJL-Modells kommentieren wir im abschließenden Kapitel 5.

2.3 Phasenübergänge

In dieser Arbeit betrachten wir das Phasendiagramm der stark wechselwirkenden Materie. Verschiedene Phasen des gleichen chemischen Stoffes sind uns aus unserer täglichen Erfahrung bekannt, so z.B. die feste, flüssige und gasförmige Phase. Diese verschiedenen Phasen sind durch die mittleren Molekülabstände und die Stärke der Wechselwirkung charakterisiert. In der gasförmigen Phase sind die Moleküle so weit voneinander entfernt, daß die Wechselwirkung praktisch keine Rolle spielt, in der flüssigen Phase wirken intermolekulare (van-der-Waals) Kräfte, in der kristallinen Phase sind die Atome auf einem Kristall angeordnet und mittels Atombindungen gebunden.

Welche Phase vorliegt, hängt von den äußeren Bedingungen ab, z.B. Temperatur und Druck. In dem in Abbildung 1.1 vorgestellten QCD-Phasendiagramm sind dies die Temperatur T und das Baryon chemische Potential μ_B. Man sieht verschiedene Phasen, getrennt durch Linien. An den Phasengrenzen koexistieren beide Phasen. Beim Übergang über eine Phasengrenze kann sich der chemische

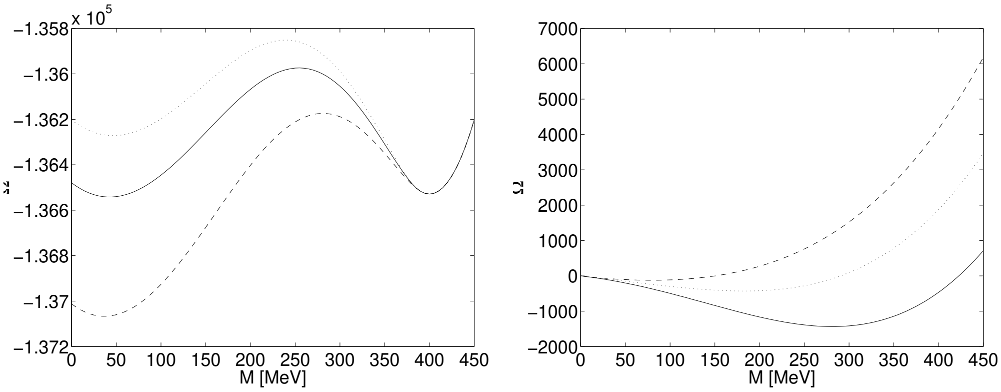

Abbildung 2.1: Links: Thermodynamisches Potential bei einem Übergang erster Ordnung. Dargestellt ist das thermodynamische Potential als Funktion der Quarkmasse M bei $T = 0$. Das Baryon chemische Potential ist zunächst kleiner als der kritische Wert (gepunktete Linie), dann gleich dem kritischen Wert (durchgezogene Linie) und schließlich größer als der kritische Wert (gestrichelte Linie). Das Potential ist normalisiert auf den Wert bei $M = 400$ MeV. Rechts: Thermodynamisches Potential bei einem Übergang zweiter Ordnung. Dargestellt ist das thermodynamische Potential als Funktion der Quarkmasse M bei $\mu_B = 0$. Das Baryon chemische Potential ist zunächst kleiner als der kritische Wert (durchgezogene Linie), dann gleich dem kritischen Wert (gepunktete Linie) und schließlich größer als der kritische Wert (gestrichelte Linie). Das Potential ist normalisiert auf $\Omega(0) = 0$.

Stoff bzw. die stark wechselwirkende Materie unterschiedlich verhalten, d.h. der Phasenübergang kann unterschiedlich stark sein. Eine Einordnung der verschiedenen Arten von Phasenübergängen ist die Ehrenfest-Klassifizierung:

Wenn die n-te Ableitung der Gibbs'schen freien Enthalpie einen Sprung hat, so handelt es sich um einen Phasenübergang n-ter Ordnung.

Um Phasenübergänge theoretisch zu behandeln, betrachtet man eine makroskopische Größe, die sich bei einem Phasenübergang in charakteristischer Weise ändert. Wir nennen diese einen *Ordnungsparameter*. Man kann die Phasenübergänge auch nach dem Verhalten des Ordnungsparameters einteilen. Ist der Ordnungsparameter am Übergang *unstetig*, so spricht man von einem Übergang *erster Ordnung*, ist er *stetig* aber *nicht differenzierbar*, von *zweiter Ordnung*, ist er *stetig* und *differenzierbar*, von einem *Crossover*. In Abbildung 1.1 ist der Ordnungsparameter die Quarkmasse bzw. das Quarkkondensat.

Die verschiedenen Ordnungen von Phasenübergängen kann man leicht anhand des thermodynamischen Potentials des Systems verstehen. In Abbildung 2.1 ist das typische Verhalten des thermodynamischen Potentials bei Phasenübergängen erster und zweiter Ordnung dargestellt.

Beim ($T = 0$)-Übergang besitzt das thermodynamische Potential zwei lokale Minima. Das Minimum bei größerer Masse ist aber das globale Minimum. Erreicht das Baryon chemische Potential den kritischen Wert, so sind beide Minima gleichberechtigt. Überschreitet μ_B den kritischen Wert, so wird das lokale Minimum bei kleinerer Masse das globale Minimum. Die Masse springt also auf einen kleineren Wert. Dies entspricht einem Phasenübergang erster Ordnung.

Der ($\mu = 0$)-Übergang ist zweiter Ordnung. Das thermodynamische Potential hat nur ein Minimum das stetig zu kleinerer Masse wandert. Also wird die Masse kontinuierlich kleiner, was einem Übergang zweiter Ordnung entspricht.

Kapitel 3

Phasendiagramm in Mean-Field-Näherung

3.1 Grundlagen

Wir analysieren das NJL-Modell zunächst in Mean-Field-Näherung. Die Idee der Mean-Field-Näherung ist es, die Wechselwirkungsterme der Lagrangedichte um ihre Erwartungswerte zu linearisieren. Die Lagrangedichte in Mean-Field-Näherung beschreibt dann kleine Schwankungen um die Erwartungswerte. Aus der Lagrangedichte erhält man die Hamiltondichte. Mit Hilfe der großkanonischen Gesamtheit läßt sich aus der Hamiltondichte eine Zustandssumme und damit ein thermodynamisches Potential gewinnen. Die Forderung, daß sich das physikalische System in einem Minimum des thermodynamischen Potentials befindet, führt zu Bestimmungsgleichungen für die Erwartungswerte. Über diese erhält man Rückschlüsse auf den Zustand des Systems.

Dies ist nur ein kurzer Abriß des Formalismus. In Abschnitt 3.3 werden wir die einzelnen Rechenschritte, Besonderheiten und Schwierigkeiten erläutern. In den anderen Abschnitten geben wir nur die Ergebnisse an.

Wir starten in Abschnitt 3.2 mit einer verallgemeinerten NJL-Lagrangedichte mit zwei Wechselwirkungstermen und diskutieren die Möglichkeit von zwei getrennten Phasenübergängen des Quarkkondensats. In Abschnitt 3.3 betrachten wir Pionkondensation in der einfachen Lagrangedichte, in Abschnitt 3.4 deuten wir weitere Ansatzmöglichkeiten an.

3.2 Quarkkondensation

Wir betrachten eine allgemeinere Lagrangedichte [41, 38] als die in der Einführung beschriebene:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \tag{3.1}$$

mit

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi \tag{3.2}$$
$$\mathcal{L}_1 = G_1[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}\vec{\tau}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2] \tag{3.3}$$
$$\mathcal{L}_2 = G_2[(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\vec{\tau}\psi)^2 - (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2]. \tag{3.4}$$

Der Vektor

$$\psi = (u, d)^T \tag{3.5}$$

enthält die Quarkfelder, die Matrix

$$m = \mathrm{diag}(m_u, m_d) \tag{3.6}$$

enthält die (Strom-)Quarkmassen. Wir betrachten zwei Kopplungskonstanten G_1 und G_2. Weiterhin bezeichnet $\vec{\tau}$ den Vektor der Paulimatrizen. Die Wechselwirkungsterme sind invariant unter $SU_L(2)\otimes SU_R(2)\otimes U_V(1)$-Transformationen. Der Term $\mathcal{L}_1$ ist invariant unter der $U_A(1)$ Symmetrie. Der Term $\mathcal{L}_2$ steht im Zusammenhang mit der Brechung der $U_A(1)$-Symmetrie durch Instantonen [31, 32].

Als Funktion der Quarkfelder u und d läßt sich die Lagrangedichte schreiben als

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& \bar{u}(i\partial\!\!\!/ - m_u)u + \bar{d}(i\partial\!\!\!/ - m_d)d \\ &+ 2G_1\left[(\bar{u}u)^2 + (\bar{d}d)^2 + 2(\bar{u}d)(\bar{d}u) + (\bar{u}i\gamma_5 u)^2 + (\bar{d}i\gamma_5 d)^2 + 2(\bar{u}i\gamma_5 d)(\bar{d}i\gamma_5 u)\right] \\ &+ 4G_2\left[(\bar{u}u)(\bar{d}d) - (\bar{u}d)(\bar{d}u) - (\bar{u}i\gamma_5 u)(\bar{d}i\gamma_5 d) + (\bar{u}i\gamma_5 d)(\bar{d}i\gamma_5 u)\right]\end{aligned} \tag{3.7}$$

Man kann die Wechselwirkungsterme um verschiedene Erwartungswerte linearisieren. Wir führen folgende Abkürzungen ein:

$$\langle\bar{u}u\rangle = \sigma_u, \qquad \langle\bar{u}i\gamma_5 u\rangle = \pi_u^0 \tag{3.8}$$
$$\langle\bar{d}d\rangle = \sigma_d, \qquad \langle\bar{d}i\gamma_5 d\rangle = \pi_d^0 \tag{3.9}$$
$$\langle\bar{u}d\rangle = \sigma^+, \qquad \langle\bar{u}i\gamma_5 d\rangle = \pi^+ \tag{3.10}$$
$$\langle\bar{d}u\rangle = \sigma^-, \qquad \langle\bar{d}i\gamma_5 u\rangle = \pi^-. \tag{3.11}$$

Wir linearisieren nun um die Erwartungswerte, indem wir zum Beispiel $\bar{u}u = \sigma_u + \delta(\bar{u}u)$ in die Lagrangedichte einsetzen, Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\delta^2)$ vernachlässigen und schließlich wieder $\delta(\bar{u}u) = \bar{u}u - \sigma_u$ verwenden.

Wir vernachlässigen zunächst Pionkondensation, d.h. wir nehmen an, daß nur die Erwartungswerte $\sigma_u := \langle \bar{u}u \rangle$ und $\sigma_d := \langle \bar{d}d \rangle$ nicht verschwinden. Die Lagrangedichte in Mean-Field-Näherung ist dann

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{MF} = \; & \bar{u}(i\partial\!\!\!/ - m_u + 4G_1\sigma_u + 4G_2\sigma_d)u \\ & + \bar{d}(i\partial\!\!\!/ - m_d + 4G_1\sigma_u + 4G_2\sigma_d)d \\ & - 2G_1(\sigma_u^2 + \sigma_d^2) - 4G_2\sigma_u\sigma_d.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Durch die Einführung von Konstituenten-Quarkmassen,

$$M_u = m_u - 4G_1\sigma_u - 4G_2\sigma_d \tag{3.13}$$

$$M_d = m_d - 4G_1\sigma_d - 4G_2\sigma_u, \tag{3.14}$$

läßt sich die Lagrangedichte schreiben als

$$\mathcal{L}_{MF} = \bar{u}(i\partial\!\!\!/ - M_u)u + \bar{d}(i\partial\!\!\!/ - M_d)d - 2G_1(\sigma_u^2 + \sigma_d^2) - 4G_2\sigma_u\sigma_d. \tag{3.15}$$

Der freie Anteil beschreibt dann formal Fermionen mit den Massen M_u und M_d, die Konstituentenquarks. Die Lagrangedichte besteht dann aus zwei freien Fermionen und einem formal von den Feldern unabhängigen Anteil. Die Hamiltondichte läßt sich schreiben als

$$\mathcal{H}_{MF} = \mathcal{H}_0(M_u) + \mathcal{H}_0(M_d) + 2G_1(\sigma_u^2 + \sigma_d^2) + 4G_2\sigma_u\sigma_d. \tag{3.16}$$

Dabei ist $\mathcal{H}_0$ die Einteilchen-Hamiltondichte.

Das thermodynamische Potential ist somit die Summe der thermodynamischen Potentiale zweier freier Fermionen und einem feldunabhängigen Anteil,

$$\Omega_{MF} = \Omega_0(M_u, \beta, \mu_u) + \Omega_0(M_d, \beta, \mu_d) + 2G_1(\sigma_u^2 + \sigma_d^2) + 4G_2\sigma_u\sigma_d. \tag{3.17}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}\Omega_0(M, \beta, \mu) = -2n_c \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \Big[& E_{\vec{p}} + \frac{1}{\beta} \ln(1 + \exp(-\beta(E_{\vec{p}} - \mu))) \\ & + \frac{1}{\beta} \ln(1 + \exp(-\beta(E_{\vec{p}} + \mu)))\Big]\end{aligned} \tag{3.18}$$

das thermodynamische Potential für ein freies Fermion mit Masse M, Temperatur $1/\beta$ und chemischem Potential μ, und $E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + M^2}$. Mittels der Gap-Gleichungen (3.13) und (3.14) fassen wir das thermodynamische Potential als Funktion der Kondensate σ_u und σ_d auf.

Wir nehmen an, daß sich das physikalische System in einem Minimum des thermodynamischen Potentials befindet. Nullsetzen des Gradienten des thermodynamischen Potentials bezüglich der Kondensate liefert die Gleichungen

$$\sigma_f = -2n_c \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{M_f}{E_{\vec{p}}} (1 - n_{\vec{p},f} - \bar{n}_{\vec{p},f}), \quad f = u, d, \tag{3.19}$$

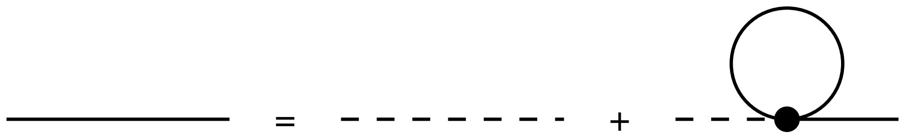

Abbildung 3.1: Gap-Gleichung als Feynman-Diagramm. Die durchgezogene Linie ist der Konstituentenquark-Propagator, die gestrichelte Linie der Stromquark-Propagator.

die zusammen mit den Gap-Gleichungen (3.13) und (3.14) selbstkonsistent gelöst werden müssen. Dabei bezeichnen

$$n_{\vec{p},f} = \frac{1}{\exp(\beta(E_{\vec{p},f} - \mu)) + 1} \tag{3.20}$$

$$\bar{n}_{\vec{p},f} = \frac{1}{\exp(\beta(E_{\vec{p},f} + \mu)) + 1} \tag{3.21}$$

fermionische Besetzungszahlen. In Anlehnung an die BCS-Theorie der Supraleitung [42] werden die0 Gleichungen „Gap-Gleichungen" genannt, da zwischen dem Anregungsspektrum der Teilchen (Quarks bzw. Elektronen) und der Quasi-Teilchen (Konstituentenquarks bzw. Cooper-Paare) eine Lücke (Gap) besteht. Die Gap-Gleichung läßt sich auch mit Hilfe der Propagatoren von nackten Quarks und Konstituentenquarks interpretieren und graphisch als Feynman-Diagramm darstellen, siehe Abbildung 3.1. Bezeichnen wir nämlich den Quarkloop mit $\Sigma(M)$, so folgt aus Abbildung 3.1,

$$(\not{p} - M)^{-1} = (\not{p} - m)^{-1} + (\not{p} - m)^{-1}\Sigma(M)(\not{p} - M)^{-1} \tag{3.22}$$

oder gerade

$$M = m + \Sigma(M). \tag{3.23}$$

Die Quasi-Teilchen erhalten also dynamisch durch Selbstwechselwirkung bzw. Wechselwirkung mit dem Kondensat eine Masse.

In der weiteren Diskussion setzen wir

$$G_1 = (1 - \alpha)G \quad \text{und} \quad G_2 = \alpha G. \tag{3.24}$$

Im Falle $\alpha = \frac{1}{2}$ erhalten wir die Standard NJL-Lagrangdichte aus der Einleitung. Wir beobachten, daß dann für $m_u = m_d$ stets auch $M_u = M_d$ ist. Beide Quark-Flavors haben also die gleiche Masse. Benutzen wir also die Quarkmassen M_u und M_d oder die Kondensate σ_u und σ_d als Ordnungsparameter, so besitzen beide Quark-Flavors einen gemeinsamen Phasenübergang.

Setzen wir dagegen $\alpha = 0$, so entkoppeln die Gap-Gleichungen, d.h. die u-Masse hängt nur von σ_u und die d-Masse nur von σ_d ab. Die beiden Quark-Flavors sind also unabhängig voneinander. Wählen wir unterschiedliche chemische Potentiale μ_u und μ_d, so erhalten wir verschobene Phasendiagramme für u und d Quark.

Wie auch die numerischen Ergebnisse im nächsten Abschnitt bestätigen werden, gibt es also zwei getrennte Phasenübergänge.

Die Autoren aus Ref. [43, 44] verwenden nur eine dem Fall $\alpha = 0$ entsprechende Wechselwirkung und finden immer zwei Phasenübergänge. Wir wollen im folgenden studieren, bei welchen Werten des Isospin chemischen Potentials und bei welchen Werten von α einer oder zwei Phasenübergänge vorliegen. Wir diskutieren physikalisch realistische Werte für die Parameter und versuchen die Frage zu beantworten, ob zum Beispiel in Schwerionenexperimenten zwei Phasenübergänge zu erwarten sind.

3.2.1 Numerische Ergebnisse

Bevor wir numerische Ergebnisse berechnen können, müssen wir zunächst das Regularisierungsschema festlegen. Die Integrale im thermodynamischen Potential bzw. in den Gap-Gleichungen divergieren nämlich. Da das NJL-Modell nicht renormierbar ist, wählen wir einen einfachen $\mathcal{O}(3)$-Cutoff Λ für die Integrale.

Da man die Integrale für endliche Temperatur nicht explizit berechnen kann, approximieren wir diese numerisch. Wir benutzen die `quadl`-Routine aus `matlab`, eine zusammengesetzte adaptive Lobatto-Quadratur. Der Grundzustand des Systems ist definiert durch das globale Minimum des thermodynamischen Potentials. Die globale Minimierung einer nichtlinearen Funktion auf einer mehrdimensionalen Menge ist sehr aufwendig. Wir kombinieren hier eine Gittersuche zur Bestimmung guter Startwerte und die `matlab`-Routine `fminsearch` (Nelder-Mead Simplex-Methode). Dieser Ansatz ist sehr robust, aber auch recht Rechenzeit-intensiv. Wir verwenden die Parameter $\Lambda = 590$ MeV, $m_u = m_d = 6$ MeV. Die Kopplungskonstante G ist so gewählt, daß $M_{\text{vac}} = 400$ MeV im Vakuum. Dies ergibt eine realistische Pionmasse von $m_\pi = 140.2$ MeV und eine Pionzerfallskonstante von $f_\pi = 92.6$ MeV. Wie man die Pionmasse berechnet, erklären wir in Kapitel 4.

Wir halten nun zunächst das Isospin chemische Potential fest und betrachten verschiedene Werte von α. Im folgenden verwenden wir die Quarkmassen als Ordnungsparameter. Wir betrachten zunächst Abbildung 3.2. Dort sind die Massen von u und d Quark als Funktion des chemischen Potentials μ bei $\Delta\mu = 30$ MeV dargestellt. Zunächst betrachten wir $T = 0$. Im linken oberen Teil der Abbildung ist $\alpha = 0$. Man erkennt Sprünge in den Quarkmassen bei $\mu = 353$ MeV und $\mu = 413$ MeV. Dies sind Phasenübergänge erster Ordnung. Wir haben bereits oben erklärt, daß die Quark-Flavors bei $\alpha = 0$ entkoppeln. Die beiden Übergänge sind also einfach um $2\Delta\mu$ verschoben. Dies ändert sich bei endlichem α. Im rechten oberen Teil der Abbildung ist $\alpha = 0.05$. Wir erkennen immer noch zwei Phasenübergänge erster Ordnung. Da die Quark-Flavors aber gekoppelt sind, springt die u Quarkmasse auch beim Sprung der d Quarkmasse und umgekehrt. Bei weiterer Erhöhung von α wird der Abstand der Phasenübergänge immer kleiner. Bei $\alpha_{\text{crit}} = 0.104$ finden wir nur noch einen

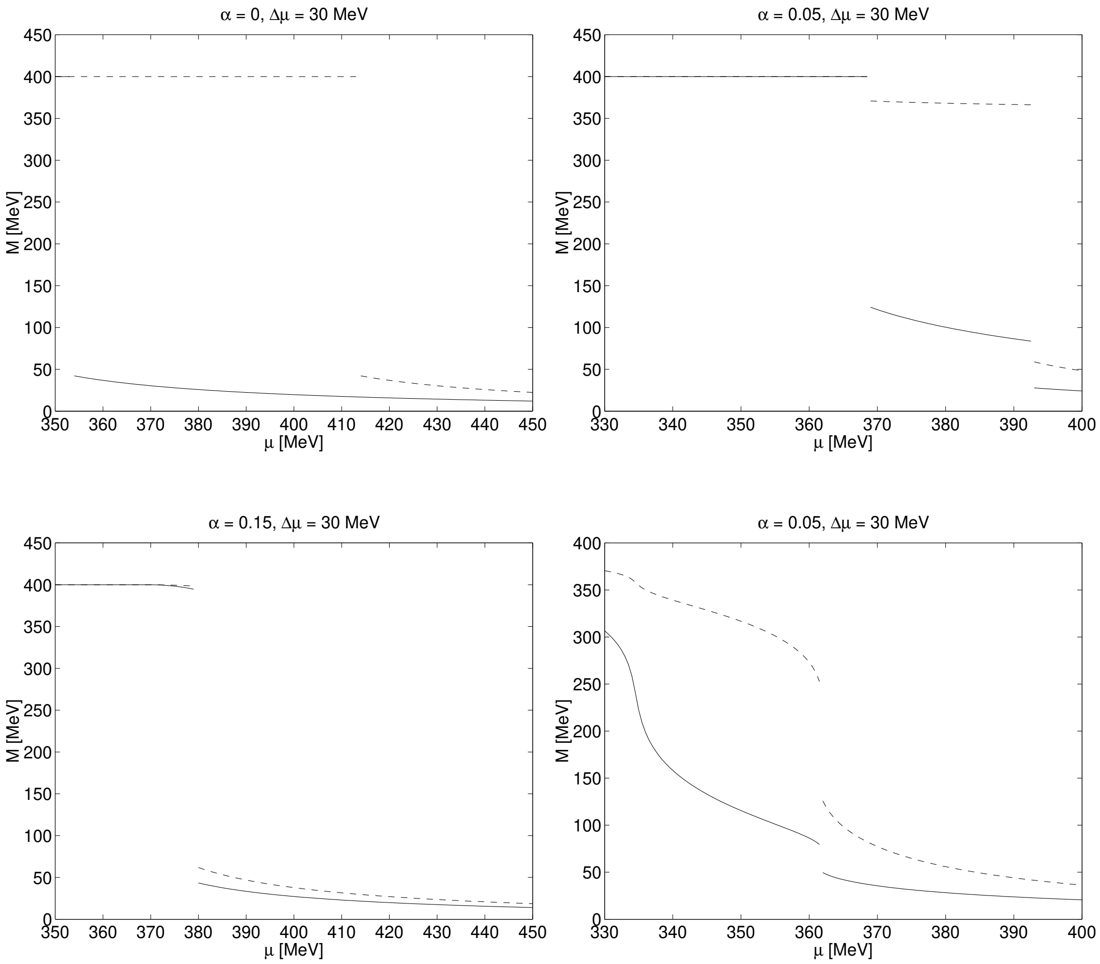

Abbildung 3.2: Quarkmassen als Funktion des Baryon chemischen Potentials für $T = 0$, $\Delta\mu = 30$ MeV und $\alpha = 0$ (links oben), $\alpha = 0.05$ (rechts oben), $\alpha = 0.15$ (links unten) und für $T = 60$ MeV, $\Delta\mu = 30$ MeV und $\alpha = 0.05$ (rechts unten). Die durchgezogene Linie ist die Masse des up Quarks, die gestrichelte die Masse des down Quarks.

gemeinsamen Phasenübergang bei $T = 0$.

Unsere Ergebnisse für endliche Temperatur sind in den Phasendiagrammen in Abbildung 3.3 dargestellt. Die durchgezogene Linie deutet jeweils einen Phasenübergang erster Ordnung an. Für $\alpha = 0$ erkennt man zwei verschobene Übergänge. Bei Erhöhung von α hat man immer noch zwei Übergänge mit geringerem Abstand. Bei $\alpha = 0.11$ ist bei $T = 0$ nur noch ein Phasenübergang. Bei $T \approx 35$ MeV erkennt man noch zwei Übergänge. Bei $\alpha = 0.15$ gibt es endgültig nur noch einen gemeinsamen Phasenübergang. Den kritischen Punkt, d.h. den Punkt in der $(\mu - T)$-Ebene, bei dem der Phasenübergang erster Ordnung zu einem Crossover wird, bestimmen wir durch Betrachten der Massen als Funktion von μ bei verschiedenen Temperaturen. Ein solches Diagramm ist im rechten unteren Teil von Abbildung 3.2 dargestellt. Die Temperatur ist $T = 60$ MeV

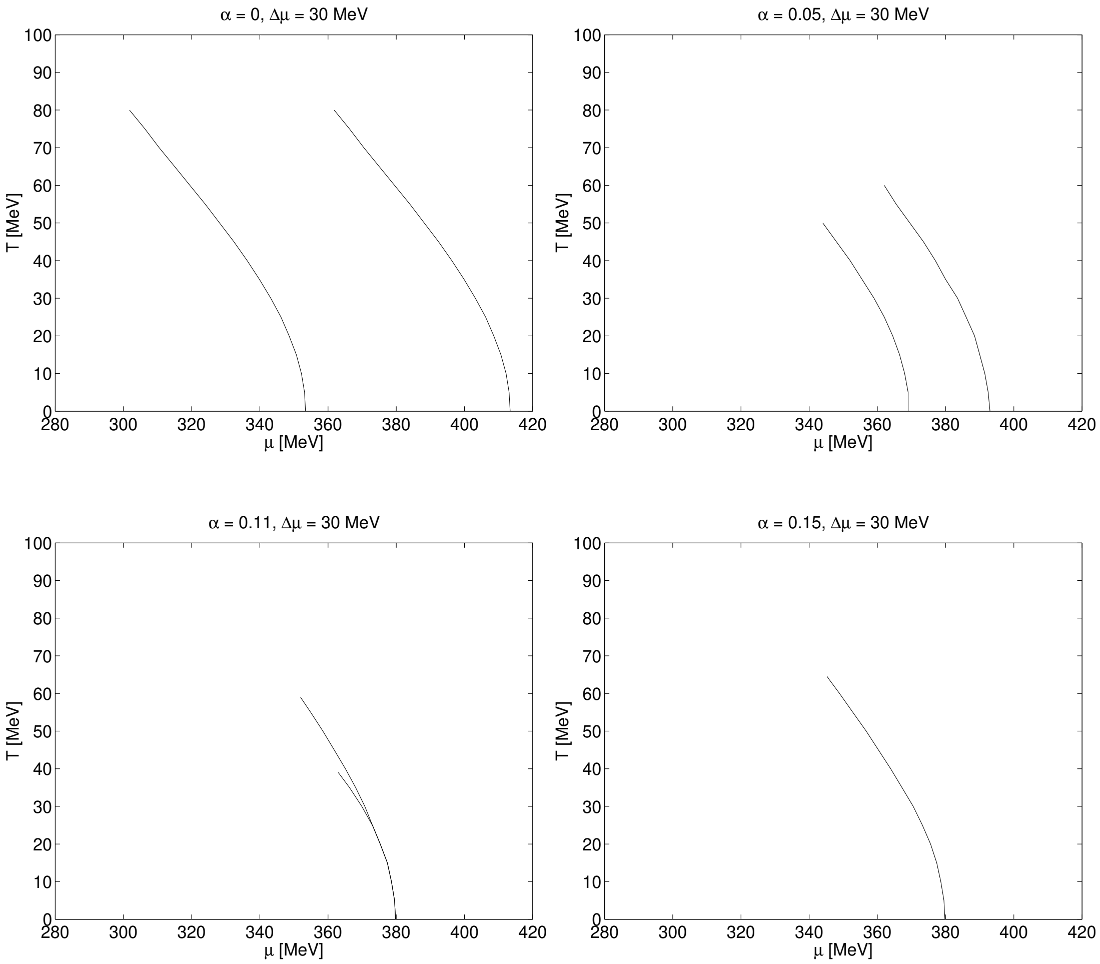

Abbildung 3.3: Phasendiagramme in der μ-T-Ebene für $\Delta\mu = 30$ MeV und $\alpha = 0$ (links oben), $\alpha = 0.05$ (rechts oben), $\alpha = 0.11$ (links unten), $\alpha = 0.15$ (rechts unten). Die Ordnungsparameter sind die Konstituentenquarkmassen. Die durchgezogene Linie bedeutet einen Phasenübergang erster Ordnung.

und $\alpha = 0.05$. Bei $\mu = 362$ MeV haben beide Massen einen Sprung. Dort liegt ein Phasenübergang erster Ordnung vor. Bei $\mu \approx 333$ MeV fällt die u Quarkmasse sehr stark ab, hat aber keinen Sprung. Hier liegt ein Crossover vor. Die Bestimmung des kritischen Endpunktes ist aber sehr schwierig. Es ist oftmals nicht genau erkennbar, ob noch ein Sprung oder schon eine glatte Kurve vorliegt. Die hier bestimmten kritischen Temperaturen sind nur auf etwa ± 5 MeV genau.

Bei $\Delta\mu = 10$ MeV finden wir ein qualitativ ähnliches Verhalten, dargestellt in Abbildung 3.4. Bei $\alpha = 0$ sieht man wieder die verschobenen Übergänge. Bei kleinem endlichen α sieht man zunächst noch zwei Phasenübergänge. Für $\alpha > \alpha_{\mathrm{crit}} = 0.032$ ist nur noch ein gemeinsamer Phasenübergang vorhanden.

In [45] wurde eine Schätzung für α_{crit} hergeleitet. Wir nehmen an, daß bei

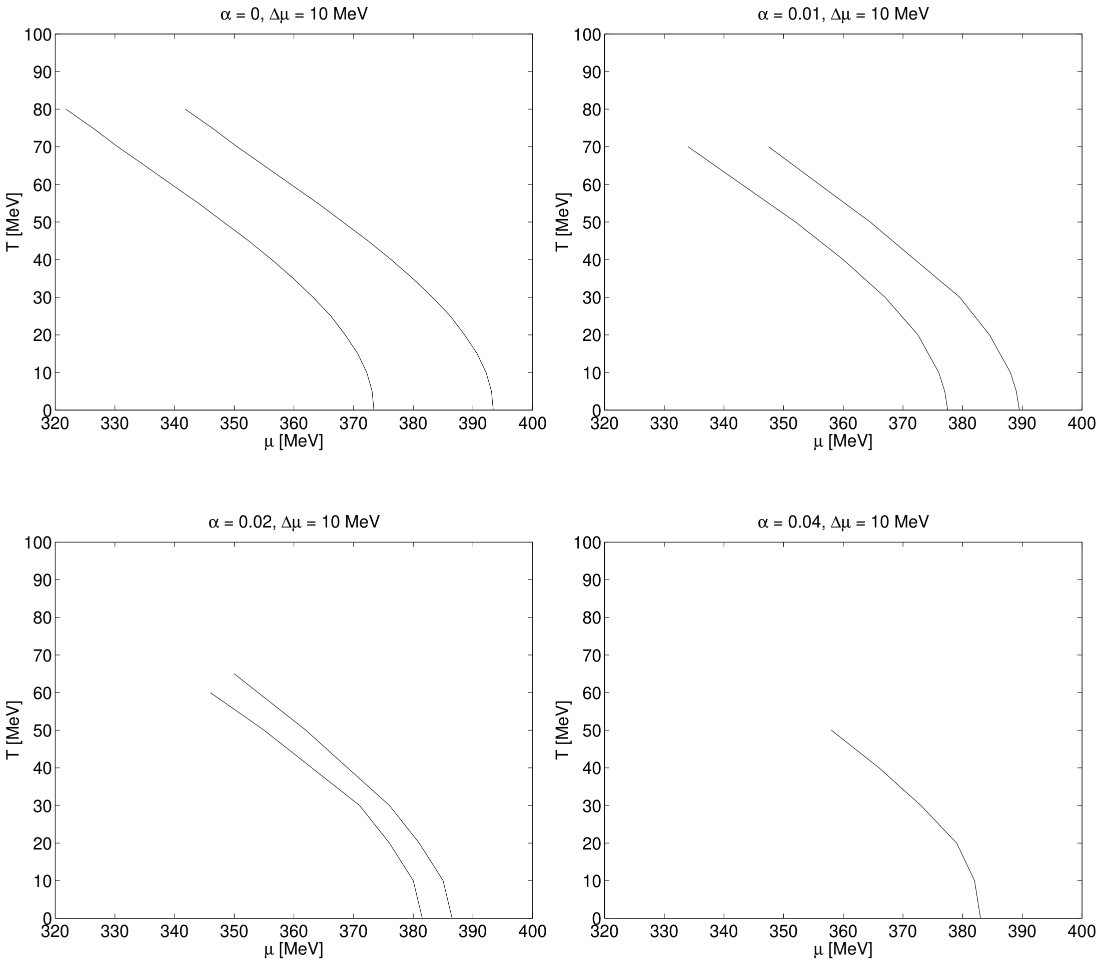

Abbildung 3.4: Phasendiagramme in der μ-T-Ebene für $\Delta\mu = 10$ MeV und $\alpha = 0$ (links oben), $\alpha = 0.01$ (rechts oben), $\alpha = 0.02$ (links unten), $\alpha = 0.04$ (rechts unten). Die Ordnungsparameter sind die Konstituentenquarkmassen. Die durchgezogene Linie bedeutet einen Phasenübergang erster Ordnung.

$T = 0$ der Phasenübergang stattfindet, wenn die Konstituenten-Quarkmasse etwa gleich dem chemischen Potential ist, $\mu_f \approx M_f$. Wir erwarten also, daß der u-Phasenübergang bei $\mu \approx M_{\text{vac}} - \Delta\mu$ stattfindet. Vernachlässigen wir die Stromquarkmassen, so springt M_u und somit σ_u auf Null. Die Gap-Gleichung 3.14 lautet dann näherungsweise

$$M_d \approx -4G(1-\alpha)\sigma_d. \tag{3.25}$$

Also ist

$$M_d \approx (1-\alpha)M_{\text{vac}}. \tag{3.26}$$

Wenn dieser Wert kleiner als μ_d wird, erwarten wir einen Phasenübergang für das d-Quark,

$$(1-\alpha)M_{\text{vac}} \approx \mu_d \approx M_{\text{vac}} - 2\Delta\mu. \tag{3.27}$$

Daraus ergibt sich die Schätzung

$$\alpha_{\text{crit}} \approx \frac{2\Delta\mu}{M_{\text{vac}}}. \tag{3.28}$$

Da wir $M_{\text{vac}} = 400$ MeV gesetzt haben, erhalten wir für $\Delta\mu = 30$ MeV einen Wert $\alpha_{\text{crit}} = 0.15$ und bei $\Delta\mu = 10$ MeV eine Schätzung von $\alpha_{\text{crit}} = 0.05$, die die Größenordnung der numerisch bestimmten Werte wiedergeben.

Bis zu diesem Punkt war dies eine rein theoretische Untersuchung. Um die Frage zu beantworten, ob zum Beispiel in Schwerionenexperimenten einer oder zwei Phasenübergänge zu erwarten sind, müssen wir realistische Werte für α und $\Delta\mu$ angeben. Aus dem 3-Flavor-NJL-Modell kann man eine Schätzung für α herleiten. Dieses Modell enthält einen 6-Punkt-Vertex für u, d und s Quark, aus dem man durch Verbinden der beiden s-Linien einen 4-Punkt-Vertex herleiten kann, der unserem $\mathcal{L}_2$ Wechselwirkungsterm entspricht. Eine Anpassung der Kopplungskonstanten des 6-Punkt-Vertex zur Beschreibung an die η-η'-Aufspaltung [46, 47] ergibt [45] $\alpha \approx 0.16$ bzw. $\alpha \approx 0.21$. Typische Werte für $\Delta\mu$ liegen bei Schwerionenexperimenten im Bereich $\Delta\mu = -2.5$ MeV [25] bzw. $\Delta\mu = -6$ MeV [48].

Die typischen Werte von α liegen also signifikant über den von uns berechneten kritischen Werten, die typischen Isospin chemischen Potentiale unter den von uns benutzten Werten. Obwohl das NJL-Modell, wie wir noch diskutieren werden, die physikalische Realität nicht vollständig erfaßt, schlußfolgern wir, daß in Schwerionenexperimenten wahrscheinlich nur ein Phasenübergang zu beobachten sein wird. Dafür verantwortlich ist der Term $\mathcal{L}_2$, der die $U_A(1)$-Symmetrie bricht.

3.3 Pionkondensation

Wir haben bisher die Lagrangedichte nur um den Erwartungswert von $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ linearisiert. Wie wir in diesem Abschnitt anhand des NJL-Modells nachweisen werden, sind bei verschwindendem Isospin chemischen Potential auch tatsächlich die anderen, mit den Pionen assoziierten, Erwartungswerte Null. Bei nichtverschwindendem Isospin chemischen Potential muß dies aber nicht mehr stimmen.

Der Einfachheit halber betrachten wir zunächst die einfache NJL-Lagrangedichte für $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2]. \tag{3.29}$$

Wir wissen bereits, daß sich die beiden Quark-Flavors hier nicht unterscheiden. Also linearisieren wir die Wechselwirkungsterme um die Erwartungswerte

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle = \sigma \tag{3.30}$$
$$\langle\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi\rangle = \vec{\pi}. \tag{3.31}$$

Vernachlässigen wir Terme höherer Ordnung, so erhalten wir

$$\mathcal{L}_{MF} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m + 2G\sigma + 2G(\vec{\pi}\vec{\tau})i\gamma_5)\psi - G(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) \tag{3.32}$$

mit $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$. Die Hamilton-Dichte in Mean-Field-Näherung ist dann gegeben durch

$$\mathcal{H}_{MF} = \frac{\partial\mathcal{L}_{MF}}{\partial(\partial_0\psi)}(\partial_0\psi) - \mathcal{L}_{MF} \tag{3.33}$$
$$= -\bar{\psi}(i\vec{\gamma}\nabla - m + 2G\sigma + 2G(\vec{\pi}\vec{\tau})i\gamma_5)\psi + G(\sigma^2 + \vec{\pi}^2). \tag{3.34}$$

Der „Massenterm" in der Lagrangedichte ist nun eine Matrix in Dirac- und Flavor-Raum,

$$M = m - 2G\sigma - 2G(\vec{\pi}\vec{\tau})i\gamma_5, \tag{3.35}$$

die nicht diagonal ist. Wir können nun nicht mehr einfach das Resultat für freie Fermionen übernehmen, sondern müssen die Zustandssumme schrittweise berechnen.

Die großkanonische Zustandssumme ist definiert durch

$$\mathcal{Z} = \mathrm{Tr}\left[\exp(-\beta\int d^3\vec{x}(\mathcal{H} - \psi^\dagger\mu\psi))\right] \tag{3.36}$$
$$= \underbrace{\exp(-\beta V G(\sigma^2 + \vec{\pi}^2))}_{=:\mathcal{Z}_1}\underbrace{\mathrm{Tr}\left[\exp(-\beta\int d^3\vec{x}(\mathcal{H}_0 - \psi^\dagger\mu\psi))\right]}_{=:\mathcal{Z}_0}. \tag{3.37}$$

Die Matrix der chemischen Potentiale $\mu = \mathrm{diag}(\mu_u, \mu_d)$ wirkt im Flavor-Raum. Die Spur wird über Farb-, Flavor-, Dirac-Indizes und im Impulsraum ausgeführt.

Nach [49] ist die Spur gegeben durch $\mathcal{Z}_0 = \det D_0$ mit

$$D_0 = -i\beta[(-i\omega_n + \mu) - \gamma^0\vec{\gamma}\vec{p} - (m - 2G\sigma)\gamma^0 + 2G(\vec{\pi}\vec{\tau})i\gamma^0\gamma_5]. \tag{3.38}$$

Dabei sind $\omega_n = (2n+1)\pi T$ fermionische Matsubara-Frequenzen. Wir schreiben die 8×8-Matrix D_0 in Blockform mit vier 4×4-Blöcken,

$$D_0 = -i\beta \begin{bmatrix} \alpha_u + 2Gi\gamma^0\gamma_5\pi_3 & 2Gi\gamma^0\gamma_5(\pi_1 - i\pi_2) \\ 2Gi\gamma^0\gamma_5(\pi_1 + i\pi_2) & \alpha_d - 2Gi\gamma^0\gamma_5\pi_3 \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

mit

$$\alpha_f = (-i\omega_n + \mu_f) - \gamma^0\vec{\gamma}\vec{p} - (m_0 - 2G\sigma)\gamma^0. \tag{3.40}$$

Eine längere Rechnung ergibt

$$\begin{aligned}\ln\det D_0 = 2n_c \sum_n \sum_p \ln\Big\{\beta^4\big[& \;(\omega^2 + (\omega_n + i\mu_u)(\omega_n + i\mu_d))^2 \\ & -(\mu_u - \mu_d)^2(\omega^2 - 4G^2(\pi_1^2 + \pi_2^2))\big]\Big\}\end{aligned} \tag{3.41}$$

mit der Energie

$$\omega := \sqrt{\vec{p}^2 + (2G\sigma - m)^2 + 4G^2\vec{\pi}^2}. \tag{3.42}$$

Dementsprechend interpretieren wir

$$M = \sqrt{(2G\sigma - m)^2 + 4G^2\vec{\pi}^2} \tag{3.43}$$

als Quarkmasse.

Da über positive und negative Matsubara-Frequenzen summiert wird, gilt

$$\begin{aligned}\ln\det D_0 = n_c \sum_n \sum_p \Big(\ln\Big\{\beta^4\big[& \;(\omega^2 + (\omega_n + i\mu_u)(\omega_n + i\mu_d))^2 \\ & -(\mu_u - \mu_d)^2(\omega^2 - 4G^2(\pi_1^2 + \pi_2^2))\big]\Big\} + c.c\Big).\end{aligned} \tag{3.44}$$

Wir erhalten also eine Summe mit reellen Summanden. Fassen wir die Argumente der beiden Logarithmen zusammen, so erhalten wir im Argument ein Polynom vierten Grades in ω_n^2, das wir hier nicht explizit angeben wollen. Um die Matsubara-Summe ausführen zu können, müssen wir das Polynom nach seinen Nullstellen faktorisieren. Wegen der speziellen Gestalt des Polynoms lassen sich die Nullstellen angeben:

$$i\mu \pm i\sqrt{\omega^2 + (\Delta\mu)^2 \pm 2\Delta\mu\sqrt{\omega^2 - 4G^2(\pi_1^2 + \pi_2^2)}}. \tag{3.45}$$

Wir bemerken noch, daß der Radikand der äußeren Wurzel wegen $\omega^2 - 4G^2(\pi_2^2 + \pi_2^2) \leq \omega^2$ stets nicht-negativ ist. Die Nullstellen sind also rein imaginär.

Damit läßt sich die Summe faktorisiert darstellen als

$$\begin{aligned}\ln\mathcal{Z}_0 = n_c \sum_n \sum_p \Big[& \;\ln\{\beta^2(\omega_n^2 + (\mu - E_+))\} + \ln\{\beta^2(\omega_n^2 + (\mu - E_-))\} \\ & + \ln\{\beta^2(\omega_n^2 + (\mu + E_+))\} + \ln\{\beta^2(\omega_n^2 + (\mu + E_-))\}\Big].\end{aligned} \tag{3.46}$$

Dabei sind

$$E_+ = \sqrt{\omega^2 + (\Delta\mu)^2 + 2\Delta\mu\sqrt{\omega^2 - 4G^2(\pi_1^2 + \pi_2^2)}} \tag{3.47}$$

$$E_- = \sqrt{\omega^2 + (\Delta\mu)^2 - 2\Delta\mu\sqrt{\omega^2 - 4G^2(\pi_1^2 + \pi_2^2)}}. \tag{3.48}$$

Wir folgen nun der Rechnung in [49] für freie Fermionen und erhalten schließlich

$$\begin{aligned}\ln \mathcal{Z}_0 = 2n_c V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Big[\quad & \beta E_+ + \beta E_- \\ & + \ln(1 + \exp(-\beta(E_+ + \mu))) \\ & + \ln(1 + \exp(-\beta(E_+ - \mu))) \\ & + \ln(1 + \exp(-\beta(E_- + \mu))) \\ & + \ln(1 + \exp(-\beta(E_- - \mu)))\Big].\end{aligned} \tag{3.49}$$

Dabei ist V ein Volumen, das sich später jedoch im thermodynamischen Potential wieder weghebt,

$$\Omega = -\frac{1}{\beta V} \ln \mathcal{Z}_0. \tag{3.50}$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}\Omega = G(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - 2n_c \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Big[\quad & E_+ + E_- \\ & + \frac{1}{\beta} \ln(1 + \exp(-\beta(E_+ + \mu))) \\ & + \frac{1}{\beta} \ln(1 + \exp(-\beta(E_+ - \mu))) \\ & + \frac{1}{\beta} \ln(1 + \exp(-\beta(E_- + \mu))) \\ & + \frac{1}{\beta} \ln(1 + \exp(-\beta(E_- - \mu)))\Big]\end{aligned} \tag{3.51}$$

3.3.1 Diskussion des thermodynamischen Potentials

Wir bemerken zunächst, daß das Potential Ω nur über $\pi_1^2 + \pi_2^2$ von π_1 und π_2 abhängt. Definieren wir $\pi_\pm := \sqrt{\pi_1^2 + \pi_2^2}$, so hängt Ω von den drei Kondensaten σ, $\pi_0 = \pi_3$ und $\pi_\pm$ ab. Wie die Notation andeutet, interpretieren wir diese wieder als Kondensate von σ-Meson, π_0-Meson und den geladenen π-Mesonen.

Zur Bestimmung des physikalischen Zustands des Systems müssen wir das thermodynamische Potential minimieren. Wir diskutieren im folgenden für $T = 0$ und $\mu = 0$ einige Grenzfälle.

Da ein globales Minimum gleichzeitig lokales Minimum ist, betrachten wir den Gradienten von Ω bezüglich der drei Kondensate. Zunächst haben wir

$$\frac{\partial E_\pm}{\partial \sigma} = \frac{2G(2G\sigma - m)}{E_\pm}(1 \pm f(\sigma, \pi_0)) \tag{3.52}$$

$$\frac{\partial E_\pm}{\partial \pi_0} = \frac{4G^2\pi_0}{E_\pm}(1 \pm f(\sigma, \pi_0)) \tag{3.53}$$

$$\frac{\partial E_\pm}{\partial \pi_\pm} = \frac{4G^2\pi_\pm}{E_\pm} \tag{3.54}$$

mit $f(\sigma, \pi_0) = \frac{\Delta\mu}{\sqrt{p^2+(2G\sigma-m)^2+4G^2\pi_0^2}}$. Also erhalten wir

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = m + (2G\sigma - m)(g_1(\sigma, \pi_0, \pi_\pm) + g_2(\sigma, \pi_0, \pi_\pm)) \tag{3.55}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \pi_0} = 2G\pi_0(g_1(\sigma, \pi_0, \pi_\pm) + g_2(\sigma, \pi_0, \pi_\pm)) \tag{3.56}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \pi_\pm} = 2G\pi_\pm g_1(\sigma, \pi_0, \pi_\pm). \tag{3.57}$$

Dabei haben wir zwei weitere Hilfsfunktionen

$$g_1(\sigma, \pi_0, \pi_\pm) = 1 - \frac{2Gn_c}{\pi^2}\int dpp^2 \left(\frac{1}{E_+} + \frac{1}{E_-}\right) \tag{3.58}$$

$$g_2(\sigma, \pi_0, \pi_\pm) = -\frac{2Gn_c}{\pi^2}\int dpp^2 \left(\left(\frac{1}{E_+} - \frac{1}{E_-}\right) f(\sigma, \pi_0)\right) \tag{3.59}$$

eingeführt. Man beachte, daß $g_2 > 0$.

Einfluß der Stromquarkmasse

Wir können immer $\pi_0 = 0$ annehmen. Ist die Stromquarkmassse m von Null verschieden, so ist, da (3.55) gleich Null gesetzt wird, auch $g_1 + g_2$ von Null verschieden. Dann impliziert (3.56) aber, daß $\pi_0 = 0$. Da der Gradient für $T \neq 0$ und $\mu \neq 0$ die gleiche Struktur hat, verschwindet das Kondensat π_0 immer im Minimum. Die Kondensate σ und $\pi_\pm$ erfüllen dann gekoppelte Gap-Gleichungen. Im Fall verschwindender Quarkmasse m sind σ und π_0 im Grundzustand gleichberechtigt. Wir können daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\pi_0 = 0$.

Aus m $\neq$ 0 und $\Delta\mu = 0$ folgt $\pi_0 = \pi_\pm = 0$. Im Falle verschwindenden Isospin chemischen Potentials, also $\Delta\mu = 0$, ist $f = 0$. Für $m \neq 0$ müssen dann wegen (3.56) und (3.57) die Pion-Kondensate π_0 und $\pi_\pm$ verschwinden. Im Falle $m = 0$ sind alle Kondensate gleichberechtigt.

Aus m $\neq$ 0 folgt $\sigma \neq 0$. Bei endlicher Stromquarkmasse m verschwindet σ nie. Nehmen wir nämlich an, daß $\sigma = 0$, so folgt aus (3.55), daß $g_1 + g_2 = 1$. Wir zeigen im folgenden, daß dies nicht sein kann und erhalten einen Widerspruch, der $\sigma \neq 0$ zeigt. Mit $\sigma = 0$ und $\pi_0 = 0$ vereinfachen sich die obigen Größen zu

$$E_\pm = \sqrt{(\sqrt{p^2+m^2} \pm \Delta\mu)^2 + 4G^2\pi_\pm^2} \tag{3.60}$$

$$f = \frac{\Delta\mu}{\sqrt{p^2+m^2}}. \tag{3.61}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}&\frac{1}{E_+} + \frac{1}{E_-} + (\frac{1}{E_+} - \frac{1}{E_-})f \\ =&\frac{1}{\sqrt{p^2+m^2}}\left(\frac{\sqrt{p^2+m^2}+\Delta\mu}{\sqrt{(\sqrt{p^2+m^2}+\Delta\mu)^2+4G^2\pi_\pm^2}} + \frac{\sqrt{p^2+m^2}-\Delta\mu}{\sqrt{(\sqrt{p^2+m^2}-\Delta\mu)^2+4G^2\pi_\pm^2}}\right).\end{aligned} \tag{3.62}$$

Dieser Ausdruck wird am kleinsten, wenn $\Delta\mu > \sqrt{p^2+m^2}$, also

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{p^2+m^2}}\left(\sqrt{\frac{(\sqrt{p^2+m^2}+\Delta\mu)^2}{(\sqrt{p^2+m^2}+\Delta\mu)^2+4G^2\pi_\pm^2}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{p^2+m^2}-\Delta\mu)^2}{(\sqrt{p^2+m^2}-\Delta\mu)^2+4G^2\pi_\pm^2}}\right) \\ =&\frac{1}{\sqrt{p^2+m^2}}\left(\sqrt{\frac{1}{1+\frac{4G^2\pi_\pm^2}{(\sqrt{p^2+m^2}+\Delta\mu)^2}}} - \sqrt{\frac{1}{1+\frac{4G^2\pi_\pm^2}{(\sqrt{p^2+m^2}-\Delta\mu)^2}}}\right) \geq 0.\end{aligned} \tag{3.63}$$

Also ist $g_1 + g_2 \neq 1$.

Einfluß des Isospin chemischen Potentials

Aus $\mathbf{m = 0}$ und $\Delta\mu \neq \mathbf{0}$ folgt $\sigma = \mathbf{0}$. Wir betrachten nun den Einfluß des Isospin chemischen Potentials im chiralen Limes $m = 0$. Da σ und π_0 gleichberechtigt sind, setzen wir $\pi_0 = 0$. Der Gradient vereinfacht sich dann zu

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma} = 2G\sigma(g_1(\sigma,\pi_\pm) + g_2(\sigma,\pi_\pm)) \tag{3.64}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\pi_\pm} = 2G\pi_\pm g_1(\sigma,\pi_\pm). \tag{3.65}$$

Da für nicht-verschwindendes Isospin chemisches Potential immer $g_2 > 0$ gilt, verschwindet im Minimum zumindest eines der Kondensate.

Wir betrachten nun die zweiten Ableitungen. Diese lassen sich darstellen als

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\sigma^2} = 2G(g_1(\sigma,\pi_\pm) + g_2(\sigma,\pi_\pm)) + \sigma^2 h_1(\sigma,\pi_\pm) \tag{3.66}$$

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\pi_\pm} = 2Gg_1(\sigma,\pi_\pm) + \pi_\pm^2 h_2(\sigma,\pi_\pm) \tag{3.67}$$

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\sigma\partial\pi_\pm} = \sigma\pi_\pm h_3(\sigma,\pi_\pm). \tag{3.68}$$

Die expliziten Ausdrücke für die Funktionen h_1 und h_3 sind dabei uninteressant. Wichtig für die folgende Diskussion ist nur

$$h_2(\sigma, \pi_\pm) = 16G^4 \frac{n_c}{\pi^2} \int dpp^2 \left(\frac{1}{E_+^3} + \frac{1}{E_-^3} \right) > 0. \tag{3.69}$$

Nach dem oben Gesagten ist im Minimum eines der Kondensate gleich Null. Somit ist die Hesse-Matrix diagonal. Wir prüfen nun die beiden Diagonalelemente auf ihr Vorzeichen. Nehmen wir an, daß $\sigma \neq 0$, dann ist nach (3.64) $g_1 + g_2 = 0$, also $g_1 = -g_2 < 0$. Dann impliziert (3.65) aber $\pi_\pm = 0$. Dies führt schließlich wegen (3.67) zu $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \pi_\pm^2} < 0$. Dies ist aber kein Minimum. Also ist $\sigma = 0$. In [50] wurde eine ähnliche Beobachtung für ein mathematisch ähnliches NJL-Modell zur Beschreibung von Diquark-Kondensation genannt.

Zusammenfassung. Kurz zusammengefaßt begünstigt also eine endliche Stromquarkmasse m eine σ-Kondensation, während ein endliches Isospin chemisches Potential $\Delta\mu$ eine $\pi_\pm$-Kondensation begünstigt. Für endliches m würde man also für kleine $\Delta\mu$ erwarten, daß $\pi_\pm = 0$. Für hinreichend großes $\Delta\mu$ sollte aber ein Phasenübergang zu $\pi_\pm \neq 0$ stattfinden. Im folgenden Abschnitt überprüfen wir dies mit numerischen Ergebnissen.

3.3.2 Numerische Ergebnisse

Wir verwenden die gleiche Regularisierung, die gleichen Parameter und die gleichen numerischen Methoden wie oben. Zusätzlich ist $\alpha = \frac{1}{2}$.

Wir betrachten zunächst Abbildung 3.5. Im linken Teil sind die Kondensate σ und $\pi_\pm$ als Funktion von $\Delta\mu$ bei $\mu = 320$ MeV und $T = 0$ dargestellt. Das Pionkondensat verschwindet zunächst, besitzt aber bei $\Delta\mu \approx 70$ MeV einen Phasenübergang zweiter Ordnung und nimmt endliche Werte an. Bei $\mu \approx 107$ MeV gibt es einen Phasenübergang erster Ordnung, bei dem das Pionkondensat wieder verschwindet. Da das σ-Kondensat vom $\pi_\pm$-Kondensat beeinflußt wird, sieht man diese beiden Phasenübergänge auch im σ-Kondensat. Es gibt jedoch einen zusätzlichen Übergang erster Ordnung bei $\Delta\mu \approx 123$ MeV. Wie wir im Phasendiagramm, Abbildung 3.6, erkennen, ist dies die Fortsetzung des bekannten Übergangs erster Ordnung des Quarkkondensats zu endlichen Isospin chemischen Potentialen.

Im rechten Teil der Abbildung 3.5 lassen wir $\Delta\mu = 90$ MeV konstant und betrachten verschiedene μ. Wir sehen einen Übergang erster Ordnung im Pionkondensat. Dies entspricht dem oben beobachteten Übergang erster Ordnung. Wir erkennen wieder den zweiten Phasenübergang erster Ordnung im σ-Kondensat. Der Ursprung der Phasenübergänge wird klarer, wenn wir das Phasendiagramm in der $\Delta\mu - \mu$-Ebene, dargestellt in Abbildung 3.6, betrachten. Der Ordnungsparameter ist zunächst das $\pi_\pm$-Kondensat. Ein weiter Ordnungsparameter ist das σ-Kondensat. Die senkrechte gepunktete Linie bei $\Delta \approx 70$ MeV ist ein Phasenübergang zweiter Ordnung, der zu einem Phasenübergang erster Ordnung

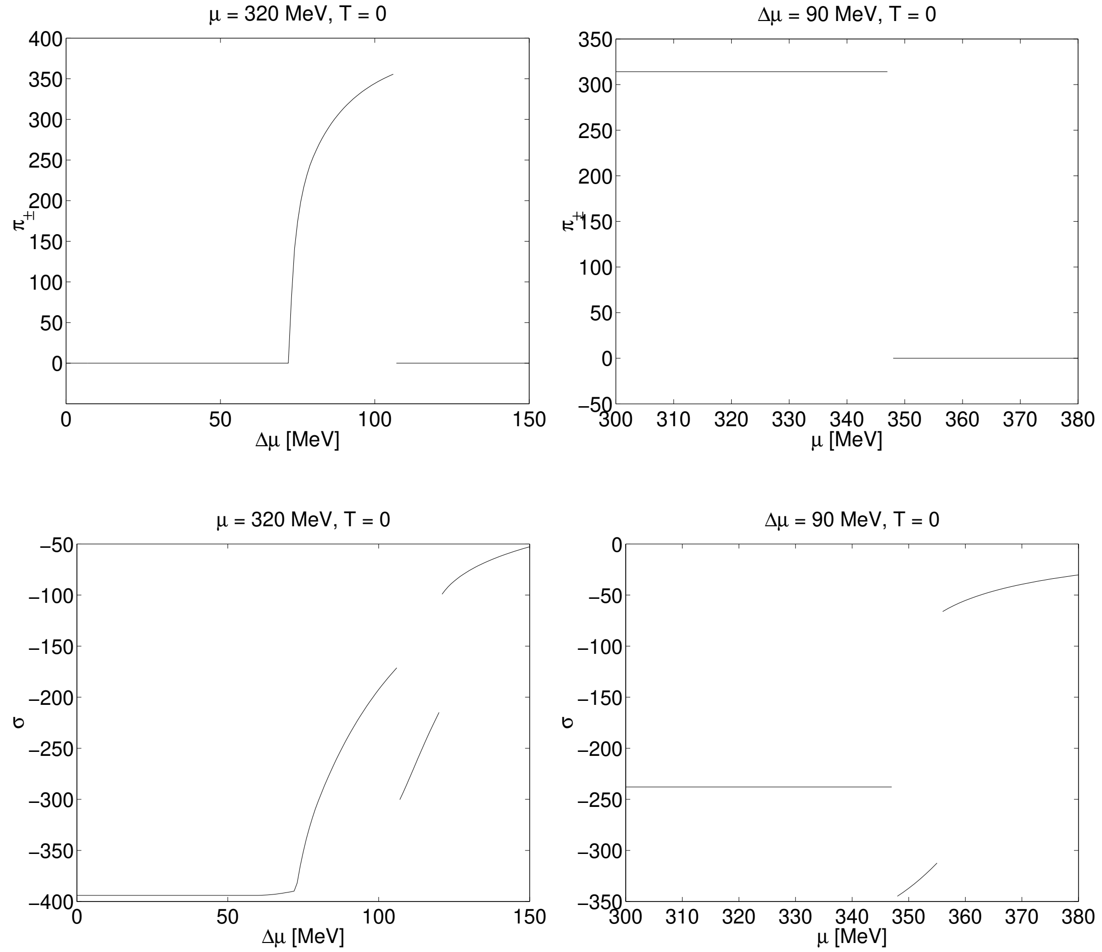

Abbildung 3.5: Kondensate als Funktionen der chemischen Potentiale. $\pi_{\pm}$-Kondensat (links oben) und σ-Kondensat (links unten) bei $\mu = 320$ MeV und $T = 0$. $\pi_{\pm}$-Kondensat (rechts oben) und σ-Kondensat (rechts unten) bei $\Delta\mu = 90$ MeV und $T = 0$.

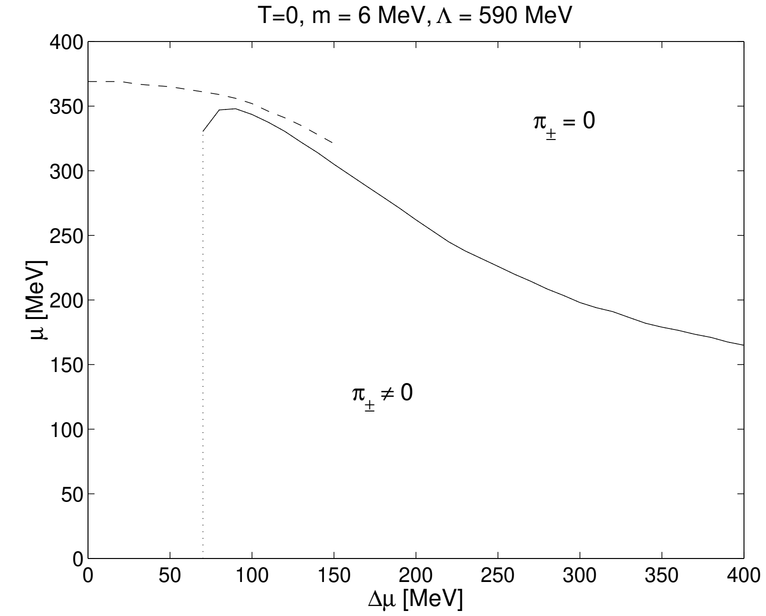

Abbildung 3.6: Phasendiagramm in der $\Delta\mu$-μ-Ebene bei $T = 0$. Das Pionkondensat hat einen Phasenübergang zweiter Ordnung (senkrechte gepunktete Linie), der zu einem Übergang erster Ordnung (durchgezogene Linie) wird. Das σ-Kondensat hat einen Übergang erster Ordnung (gestrichelte Linie).

wird (durchgezogene Linie). Dort haben beide Kondensate Phasenübergänge. Der zusätzliche Übergang erster Ordnung des σ-Kondensats ist durch die gepunktete Linie dargestellt. Die Linie entspringt an der $\Delta\mu = 0$-Achse und ist daher die Fortsetzung des bekannten Phasenübergangs zu endlichen Isospin chemischen Potentialen.

Unser Ergebnis stimmt qualitativ mit dem in [26, 27] mit Hilfe von Gitter-Simulationen erhaltenen Ergebnis überein. Die Autoren finden auch einen Phasenübergang zweiter Ordnung bei $2\Delta\mu = \mu_I \approx m_\pi$. Bei großem μ_I verschwindet das Pionkondensat ebenfalls in einem Übergang erster Ordnung.

Auffallend ist, daß der kritische Wert $\Delta\mu_{\text{crit}} \approx m_\pi/2$ mit der Pion-Masse korreliert ist. Dies bestätigt sich bei anderen Parametersätzen. In Tabelle 3.1 findet man einige Ergebnisse. Dabei haben wir die Stromquarkmasse variiert und jeweils die Pion-Masse m_π und das kritische $\Delta\mu$ bestimmt. Eine physikalische Erklärung ist: Die geladenen Pionen π_+ und π_- spüren jeweils das chemische Potential $\mu_u - \mu_d$ bzw. $\mu_d - \mu_u$. Ist also $|\mu_u - \mu_d| = m_\pi$, so ist eines der chemischen Potentiale groß genug, daß ein Pion im Vakuum erzeugt werden kann.

In Abbildung 3.7 studieren wir die ($\mu = 0$)-Ebene des Phasendiagramms. Damit studieren wir auch die Temperaturabhängigkeit des kritischen Isospin chemischen Potentials. Bei Erhöhung der Temperatur bleibt es etwa im Bereich von 70 MeV. Bei Temperaturen oberhalb von 200 MeV muß ein sehr hohes Isospin chemisches Potential vorliegen, damit ein Pionkondensat existiert. Dies

m [MeV]	m_π [MeV]	$\Delta\mu_{\text{crit}}$ [MeV]
0	0	0.0
2	80.97	40.4
4	114.48	57.2
6	140.18	70.1

Tabelle 3.1: Kritisches Isospin chemisches Potential und Pion-Masse ($\Delta\mu = 0$) für verschiedene Werte der Stromquarkmasse m. Die Parameter sind $\Lambda = 590$ MeV, die Quarkmasse im Vakuum ist $M = 400$ MeV.

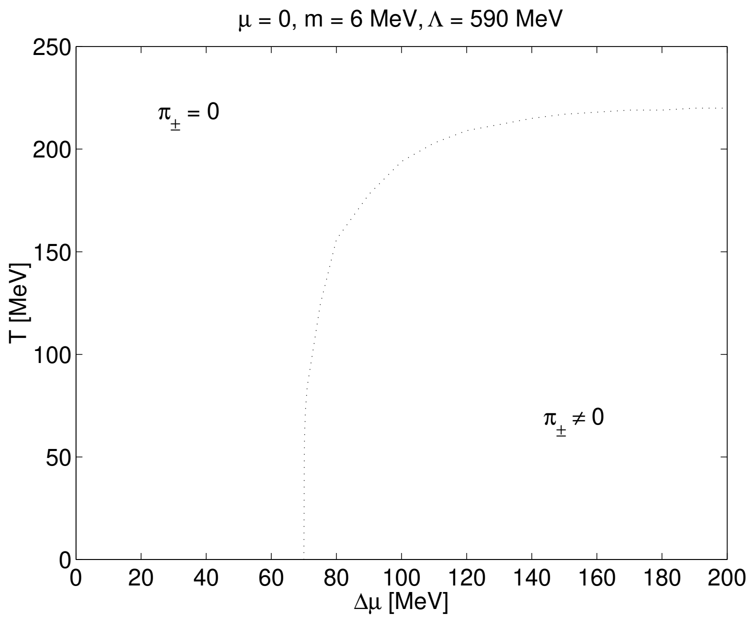

Abbildung 3.7: Phasendiagramm in der T-$\Delta\mu$-Ebene bei $\mu = 0$. Phasenübergang zweiter Ordnung im $\pi_\pm$-Kondensat (gepunktete Linie).

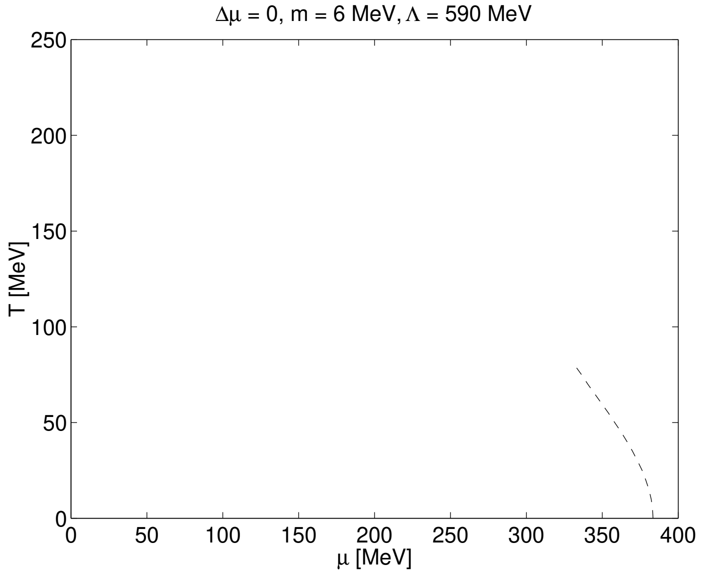

Abbildung 3.8: Phasendiagramm in der μ-T-Ebene für $\Delta\mu = 0$. Phasenübergang erster Ordnung im σ-Kondensat (gestrichelte Linie).

zeigt sich auch in den Abbildungen 3.8-3.11. Wir zeigen jeweils das Phasendiagramm in der μ-T-Ebene für verschiedene $\Delta\mu$. Für $\Delta\mu < 70$ MeV liegt natürlich kein Pionkondensat vor. Es ist nur der bekannte Übergang erster Ordnung des Quark-/σ-Kondensates zu erkennen (gestrichelte Linie). Bei Erhöhung des Isospin chemischen Potentials verschwindet der Phasenübergang erster Ordnung langsam und wird ein Crossover. Dieses Ergebnis stimmt qualitativ mit dem Ergebnis aus [20] überein. Dort wird hergeleitet, daß die kritische Temperatur monoton mit μ_I abnimmt.

Für $\Delta\mu > 70$ MeV tritt bei kleinen Temperaturen und Baryon chemischen Potentialen ein Pionkondensat auf. Erhöht man jedoch Temperatur oder Baryon chemisches Potential, so gibt es einen Phasenübergang erster Ordnung, bei dem das Pionkondensat verschwindet. Bei Erhöhung von $\Delta\mu$ wird die kritische Temperatur höher, während das kritische Baryon chemische Potential eher kleiner wird. Diese Trends werden aus den vorher diskutierten Abbildungen 3.6 und 3.7 klar.

3.4 Noch mehr Kondensate?

Die allgemeine Lagrangedichte, ausgedrückt in u und d Feldern,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& \bar{u}(i\partial\!\!\!/ - m_u)u + \bar{d}(i\partial\!\!\!/ - m_d)d \\ &+ 2G_1\left[(\bar{u}u)^2 + (\bar{d}d)^2 + 2(\bar{u}d)(\bar{d}u) + (\bar{u}i\gamma_5 u)^2 + (\bar{d}i\gamma_5 d)^2 + 2(\bar{u}i\gamma_5 d)(\bar{d}i\gamma_5 u)\right] \\ &+ 4G_2\left[(\bar{u}u)(\bar{d}d) - (\bar{u}d)(\bar{d}u) - (\bar{u}i\gamma_5 u)(\bar{d}i\gamma_5 d) + (\bar{u}i\gamma_5 d)(\bar{d}i\gamma_5 u)\right],\end{aligned} \tag{3.70}$$

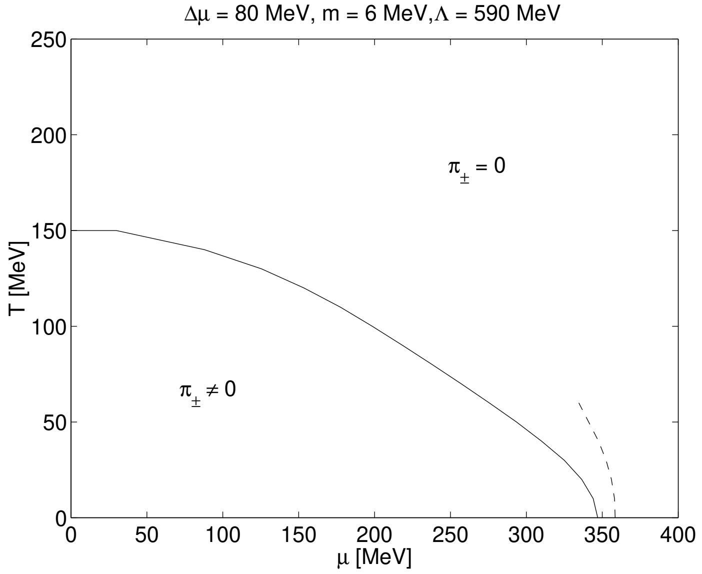

Abbildung 3.9: Phasendiagramm in der $\mu - T$-Ebene für $\Delta\mu = 80$ MeV. Phasenübergang erster Ordnung im σ-Kondensat (gestrichelte Linie). Phasenübergang erster Ordnung im $\pi_{\pm}$-Kondensat (durchgezogene Linie).

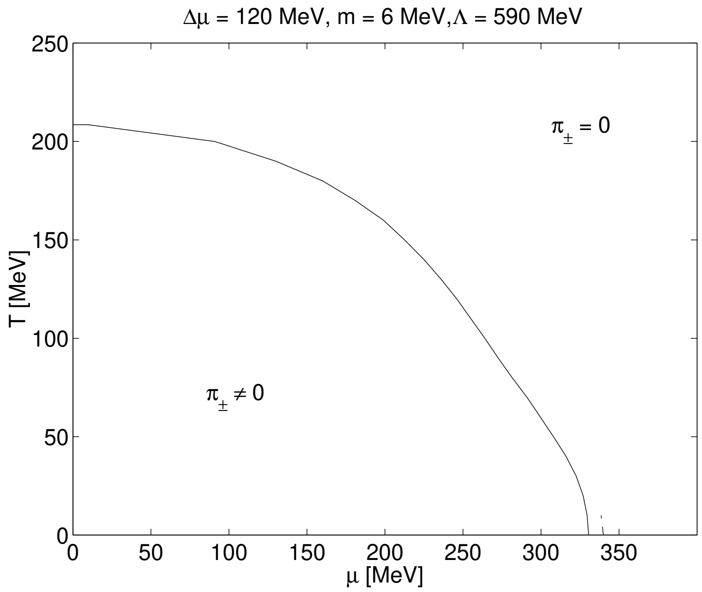

Abbildung 3.10: Phasendiagramm in der $\mu - T$-Ebene für $\Delta\mu = 120$ MeV. Phasenübergang erster Ordnung im σ-Kondensat (gestrichelte Linie). Phasenübergang erster Ordnung im $\pi_{\pm}$-Kondensat (durchgezogene Linie).

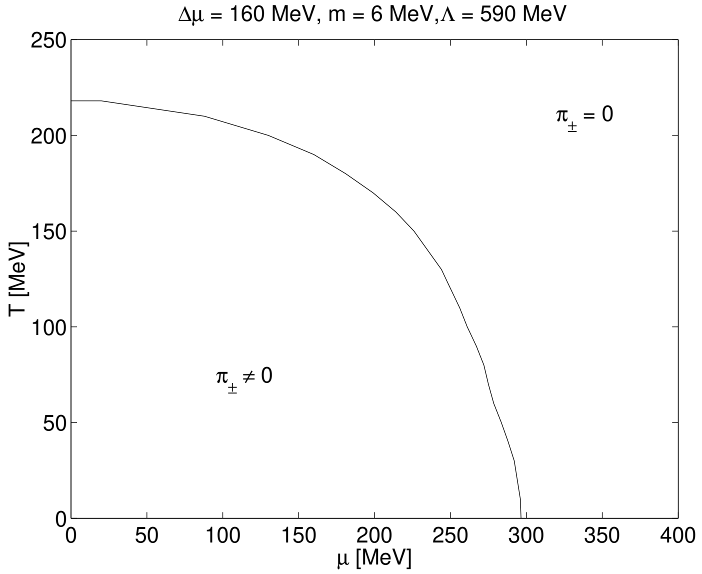

Abbildung 3.11: Phasendiagramm in der $\mu - T$-Ebene für $\Delta\mu = 160$ MeV. Phasenübergang erster Ordnung im σ-Kondensat (gestrichelte Linie). Phasenübergang erster Ordnung im $\pi_{\pm}$-Kondensat (durchgezogene Linie).

enthält viele Wechselwirkungsterme, die einen endlichen Erwartungswert haben könnten,

$$\langle \bar{u}u \rangle = \sigma_u, \qquad \langle \bar{u}i\gamma_5 u \rangle = \pi_u^0 \tag{3.71}$$

$$\langle \bar{d}d \rangle = \sigma_d, \qquad \langle \bar{d}i\gamma_5 d \rangle = \pi_d^0 \tag{3.72}$$

$$\langle \bar{u}d \rangle = \sigma^+, \qquad \langle \bar{u}i\gamma_5 d \rangle = \pi^+ \tag{3.73}$$

$$\langle \bar{d}u \rangle = \sigma^-, \qquad \langle \bar{d}i\gamma_5 u \rangle = \pi^-. \tag{3.74}$$

Wir haben zunächst in Abschnitt 3.2 um σ_u und σ_d entwickelt. Dann haben wir in Abschnitt 3.3 die Pionkondensate hinzugenommen, allerdings nur für $G_1 = G_2$. Wir haben diese Spezialfälle gewählt, um explizite Ausdrücke für das thermodynamische Potential herleiten zu können. Für mehr Kondensate bzw. $G_1 \neq G_2$ ist es uns nicht gelungen, eine explizite Formel für das thermodynamische Potential herzuleiten.

Nimmt man zum Beispiel die Erwartungswerte σ_u, σ_d, σ^+ und σ^- mit, und zerlegt die Zustandssumme wie oben in Dirac- und Wechselwirkungsanteil, so erhält man

$$\begin{aligned} \det D_0 = \Big[& \vec{p}^4 - \vec{p}^2 (32 (G_1 - G_2)^2 \sigma^+ \sigma^- + \alpha_u^2 + \alpha_d^2) \\ & + (\alpha_u \alpha_d - 16 (G_1 - G_2)^2 \sigma^+ \sigma^-)^2 \Big]^2 \end{aligned} \tag{3.75}$$

mit

$$\alpha_u = (-i\omega_n + \mu_u) - (m_u - 4G_1\sigma_u - 4G_2\sigma_d) \tag{3.76}$$

$$\alpha_d = (-i\omega_n + \mu_d) - (m_d - 4G_1\sigma_d - 4G_2\sigma_u). \tag{3.77}$$

Man benötigt nun die Nullstellen dieses Ausdrucks bezüglich ω_n, müßte dann die unendliche Summe über alle Matsubara-Frequenzen durchführen, und schließlich über alle Impulse integrieren.

Vernachlässigt man σ^+ und σ^-, berücksichtigt aber alle Pionkondensate und betrachtet den allgemeinen Fall $G_1 \neq G_2$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\det D_0 = \Big[&(\vec{p}^2 + 4(G_1+G_2)^2\pi^2 + (M_u M_d - \omega_u\omega_d))^2 \\
&+ \vec{p}^2(4(G_1+G_2)^2(\pi_u^0 + \pi_d^0)^2 - (\omega_u - \omega_d)^2 + (M_u - M_d)^2) \\
&+ 4(G_1+G_2)^2(M_d(G_1\pi_u^0 + G_2\pi_d^0) + M_u(G_1\pi_d^0 + G_2\pi_u^0))^2 \\
&- 4(G_1+G_2)^2(\omega_d(G_1\pi_u^0 + G_2\pi_d^0) + \omega_u(G_1\pi_d^0 + G_2\pi_u^0))^2 \\
&- (M_u\omega_d - M_d\omega_u)^2\Big]^2,
\end{aligned} \tag{3.78}$$

wobei

$$M_u = 4(G_1\sigma_u + G_2\sigma_d) \tag{3.79}$$

$$M_d = 4(G_1\sigma_d + G_2\sigma_u) \tag{3.80}$$

und

$$\pi^2 = (\pi^+)^2 + (\pi^-)^2 + ((1-\alpha)\pi_u^0 + \alpha\pi_d^0)((1-\alpha)\pi_d^0 + \alpha\pi_u^0). \tag{3.81}$$

Man müßte wie oben vorgehen, um das thermodynamische Potential zu erhalten. Das Verhalten der verschiedenen Kondensate könnte hier sehr komplex sein. Es wäre sicher interessant, dies genauer zu studieren. Die einfachste und naheliegendste Erweiterung wäre sicherlich, die Erwartungswerte

$$\sigma_u,\ \sigma_d,\ \pi^+,\ \pi^- \tag{3.82}$$

mitzunehmen.

Kapitel 4

RPA Mesonen bei endlicher Isospindichte

4.1 Grundlagen

In diesem Kapitel untersuchen wir die Eigenschaften der Mesonen. Genauer studieren wir die Massen des σ-Mesons und der π-Mesonen bei endlicher Isospindichte. Ein einfacher Formalismus zur Beschreibung von Mesonen ist die Random Phase Approximation (RPA). Die Idee ist, ein Meson als unendliche Summe von Quark-Antiquark-Loops darzustellen. Mit Hilfe der geometrischen Reihe, oder besser gesagt Neumann-Reihe, erhält man dann die Bethe-Salpeter-Gleichung zur Bestimmung der Mesonenpropagatoren. Dies ist dargestellt in Abbildung 4.1.

Die Bethe-Salpeter-Gleichung für die Propagatoren der RPA Mesonen läßt sich schreiben als

$$t^{(M)}(q) = 2G + 2GJ^{(M)}(q)t^{(M)}(q). \tag{4.1}$$

Wir haben hier die einfache Lagrangedichte zugrundegelegt. Dabei bezeichnet $t^{(M)}(q)$ den Mesonpropagator und

$$J^{(M)}(q) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[\Gamma^{(M)} S(k+q) \Gamma^{(M)} S(k)\right] \tag{4.2}$$

wird als Polarisationsfunktion bezeichnet. Die Spur wird über Farb-, Flavor- und Dirac-Indizes gebildet. Dabei betrachten wir die Kanäle

$$\Gamma^{(\sigma)} = \mathbf{11}_f \mathbf{1}_c \quad \text{und} \quad \Gamma^{(\pi^a)} = i\gamma_5 \tau^a \mathbf{1}_c \tag{4.3}$$

mit den Pauli-Matrizen τ^a. Mit der Hilfe der Polarisationsfunktion schreibt sich der Mesonpropagator als

$$t^{(M)}(q) = \frac{-2G}{1 - 2GJ^{(M)}(q)}. \tag{4.4}$$

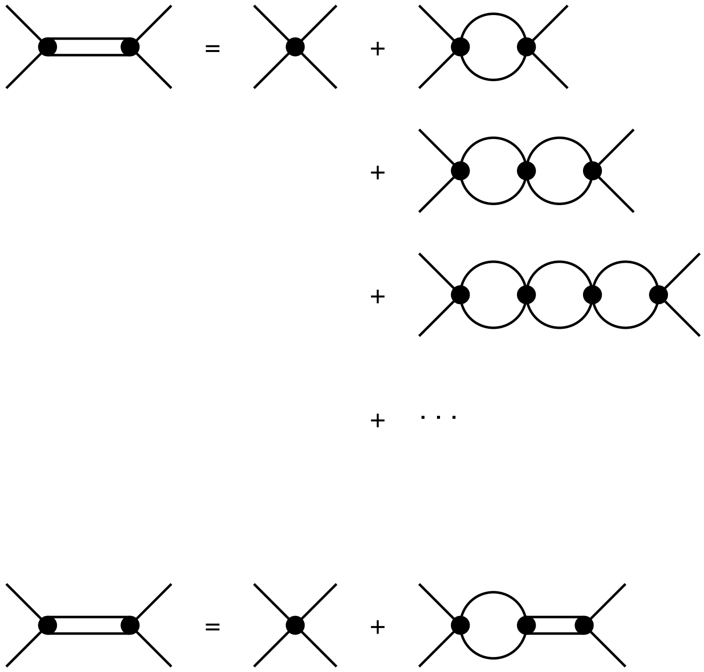

Abbildung 4.1: Meson als Summe über alle Quark-Antiquark-Loops und Bethe-Salpeter-Gleichung. Quark-Propagatoren sind durch durchgezogene Linien dargestellt, Meson-Propagatoren durch Doppellinien. Die Summe über unendlich viele Quark-loops führt zur Bethe-Salpeter-Gleichung.

Um die Polarisationsfunktionen besser mit Teilchen in Verbindung zu bringen, teilen wir das Tensorprodukt $\vec{\tau} \otimes \vec{\tau}$ anders auf,

$$\begin{aligned} \tau^1 \otimes \tau^1 + &\tau^2 \otimes \tau^2 + \tau^3 \otimes \tau^3 \\ &= (\sqrt{2}\tau^+)) \otimes (\sqrt{2}\tau^-) + (\sqrt{2}\tau^-)) \otimes (\sqrt{2}\tau^+) + \tau^3 \otimes \tau^3. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Wie üblich, benutzen wir $\tau^\pm = \frac{1}{2}(\tau_1 \pm i\tau_2)$. Die Polarisationsfunktion des π^+ ist also zum Beispiel

$$J^{(\pi^+)}(q) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[\sqrt{2}\tau^- S(k+q)\sqrt{2}\tau^+ S(k)\right]. \tag{4.6}$$

Wir definieren nun die Mesonenmasse m_M als Pol des Propagators im Ruhesystem, genauer als Nullstelle des Realteils des inversen Propagators,

$$\mathrm{Re}(t^{(M)})^{-1}(q_0 = m_M, \vec{q} = 0) = 0. \tag{4.7}$$

Wir wählen den Realteil, da Mesonen die zerfallen können, komplexe Propagatoren besitzen.

4.2 RPA Mesonen bei endlicher Isospindichte

Um die Propagatoren zu berechnen, müssen wir die Polarisationsloops,

$$J^{(M)}(q) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[\Gamma^{(M)} S(k+q) \Gamma^{(M)} S(k)\right] \tag{4.8}$$

auswerten. Dazu schreiben wir den Quarkpropagator als

$$S(p) = \begin{bmatrix} (\not{p}_u - M_u)^{-1} & \\ & (\not{p}_d - M_d)^{-1} \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

Wir unterscheiden $\not{p}_u$ und $\not{p}_d$, da diese bei endlicher Temperatur und bei endlichen chemischen Potentialen durch $i\omega_n + \mu_u$ bzw. $i\omega_n + \mu_d$ ersetzt werden.

Bei σ und π_0 mischen die beiden Flavors nicht, d.h. die Matrix in der Spur ist diagonal im Flavor-Raum. Wir erhalten

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}\left[\Gamma^{(\sigma)} S(k+q) \Gamma^{(\sigma)} S(k)\right] \\ =& 4n_c \sum_{f=u,d} \frac{k_f^2 + k_f q + M_f^2}{[(k_f+q)^2 + M_f^2][k_f^2 + M_f^2]} \\ =& \sum_{f=u,d} \left(4n_c \frac{1}{k_f^2 + M_f^2} - 2n_c(q^2 - 4M_f^2) \frac{1}{[(k_f+q)^2 - M_f^2][k_f^2 - M_f^2]}\right). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Definieren wir die elementaren Integrale

$$I_1^f = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M_f^2} \tag{4.11}$$

$$I_2^f(q) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+q)^2 - M_f^2][k^2 - M_f^2]}, \tag{4.12}$$

so läßt sich die σ-Polarisationsfunktion einfach darstellen als

$$J^{(\sigma)}(q) = \sum_{f=u,d} \left(4in_c I_1^f - (q^2 - 4M_f^2) 2in_c I_2^f(q)\right). \tag{4.13}$$

Auch beim π_0 ist die in der Spur vorkommende Matrix diagonal im Flavor-Raum. Wir erhalten durch eine analoge Rechnung

$$J^{(\pi^0)}(q) = \sum_{f=u,d} \left(4in_c I_1^f - q^2 2in_c I_2^f(q)\right). \tag{4.14}$$

Für das π^- ergibt sich die Spur zu

$$\mathrm{Tr}\left[(i\gamma_5\sqrt{2}\tau^+\mathbf{1}_c)S(k+q)(i\gamma_5\sqrt{2}\tau^-\mathbf{1}_c)S(k)\right] \tag{4.15}$$

$$=8n_c\frac{k_u k_d + k_u q - M_u M_d}{[(k_d+q)^2 - M_d^2][k_u^2 - M_u^2]} \tag{4.16}$$

$$=4n_c\Big(\frac{1}{k_u^2 - M_u^2} + \frac{1}{(k_d+q)^2 - m_d^2} + ((M_u - M_d)^2 - (k_u - k_d - q)^2)\frac{1}{[(k_d+q)^2 - M_d^2][k_u^2 - M_u^2]}\Big). \tag{4.17}$$

Beachten wir, daß selbst im Falle $T \neq 0$, $\mu_u, \mu_d \neq 0$

$$k_u - k_d = (i\omega_n + \mu_u - i\omega_n - \mu_d, \vec{k} - \vec{k}) = (\mu_u - \mu_d, 0) \tag{4.18}$$

konstant ist, so läßt sich auch die π^--Polarisationsfunktion wieder mit Hilfe elementarer Integrale schreiben,

$$J^{(\pi^-)}(q) = 4in_c(I_1^u + I_1^d + ((M_u - M_d)^2 - (k_u - k_d - q)^2)I_2^-(q)), \tag{4.19}$$

wobei

$$I_2^-(q) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{[(k_d+q)^2 - M_d^2][k_u^2 - M_u^2]}. \tag{4.20}$$

Die π^+-Polarisationsfunktion erhalten wir, indem wir im Ergebnis für die π^--Polarisationsfunktion die Rollen von u und d vertauschen,

$$J^{(\pi^+)}(q) = 4in_c(I_1^u + I_1^d + ((M_u - M_d)^2 - (k_u - k_d - q)^2)I_2^+(q)) \tag{4.21}$$

mit

$$I_2^+(q) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{[(k_u+q)^2 - M_u^2][k_d^2 - M_d^2]}. \tag{4.22}$$

4.3 Endliche Temperatur und endliche Isospindichte

Mit Hilfe des Matsubara-Formalismus (siehe zum Beispiel [49]) erweitern wir die Polarisationsfunktionen auf endliche Temperaturen bzw. endliche chemische Potentiale. Wir ersetzen k_f durch $(i\omega_n + \mu_f, \vec{k})$ und q durch $(i\omega_m, \vec{q})$. Dabei sind $\omega_n = (2n+1)\pi T$ fermionische und $\omega_m = 2m\pi T$ bosonische Matsubarafrequenzen.

Die elementaren Integrale I_1^f und I_2^f können wie im Falle verschwindenden Isospins berechnet werden [51]. Wir geben die Ergebnisse an dieser Stelle nur an und erläutern die einzelnen Rechenschritte später am elementaren Integral I_2^+. Wir erhalten

$$iI_1^f = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{k},f}}(1 - n_{\vec{k},f} - \bar{n}_{\vec{k},f}) \tag{4.23}$$

und

$$iI_2^f(i\omega_m,\vec{q}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\Big(\frac{1}{E_{\vec{k},f}}\frac{1}{(i\omega_m)^2-(E_{\vec{k}+\vec{q},f}+E_{\vec{k},f})^2} - \frac{n_{\vec{k},f}+\bar{n}_{\vec{k},f}}{2E_{\vec{k}+\vec{q},f}E_{\vec{k},f}}\cdot\frac{E_{\vec{k}+\vec{q},f}+E_{\vec{k},f}}{(i\omega_m)^2-(E_{\vec{k}+\vec{q},f}+E_{\vec{k},f})^2} - \frac{n_{\vec{k},f}+\bar{n}_{\vec{k},f}}{2E_{\vec{k}+\vec{q},f}E_{\vec{k},f}}\cdot\frac{E_{\vec{k}+\vec{q},f}-E_{\vec{k},f}}{(i\omega_m)^2-(E_{\vec{k}+\vec{q},f}-E_{\vec{k},f})^2}\Big). \quad (4.24)$$

Es verwundert nicht, daß σ und π^0 wie im Falle verschwindender Isospindichte beschrieben werden können und daß beide das Isospin chemische Potential nicht spüren. Das einzig Neue ist, daß über beide Quark-Flavors summiert wird.

Wir betrachten jetzt die geladenen Pionen. Wir nehmen an, daß $m_u = m_d$, also $E_{\vec{k},u} = E_{\vec{k},d}$. Dann erhalten wir

$$J^{(\pi^+)}(i\omega_m+\mu_u-\mu_d,\vec{q}) = 4n_c\big(iI_1^u+iI_1^d-((i\omega_m+\mu_u-\mu_d)^2-\vec{q}^2)iI_2^+(i\omega_m+\mu_u-\mu_d,\vec{q})\big) \quad (4.25)$$

mit

$$iI_2^+(i\omega_m+\mu_u-\mu_d,\vec{q}) = -T\sum_n\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{[(i\omega_m+i\omega_n+\mu_u)^2-E^2_{\vec{k}+\vec{q},f}][(i\omega_n+\mu_d)^2-E^2_{\vec{k},f}]}. \quad (4.26)$$

Bei der Berechnung von I_2^+ müssen wir beachten, daß wir nicht einfach $i\omega_m + \mu_u - \mu_d$ in das Ergebnis für $iI_2^f(i\omega_m,\vec{q})$ einsetzen können. In der Herleitung wurde nämlich ausgenutzt, daß $e^{i\omega_m T} = 1$. Zur Berechnung der Frequenzsumme zerlegen wir den Integranden mittels Partialbruchzerlegung,

$$iI_2^+(i\omega_m+\mu_u-\mu_d,\vec{q}) = -T\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{4E_{\vec{k}+\vec{q},f}E_{\vec{k},f}}\sum_n\Big(\frac{1}{i\omega_n+i\omega_m+\mu_u-E_{\vec{k}+\vec{q},f}}\cdot\frac{1}{i\omega_n-\mu_d-E_{\vec{k},f}} - \frac{1}{i\omega_n+i\omega_m+\mu_u-E_{\vec{k}+\vec{q},f}}\cdot\frac{1}{i\omega_n-\mu_d+E_{\vec{k},f}} - \frac{1}{i\omega_n+i\omega_m+\mu_u+E_{\vec{k}+\vec{q},f}}\cdot\frac{1}{i\omega_n-\mu_d-E_{\vec{k},f}} + \frac{1}{i\omega_n+i\omega_m+\mu_u+E_{\vec{k}+\vec{q},f}}\cdot\frac{1}{i\omega_n-\mu_d+E_{\vec{k},f}}\Big), \quad (4.27)$$

und schreiben die Frequenzsumme mittels des Residuensatzes als Kurveninte-

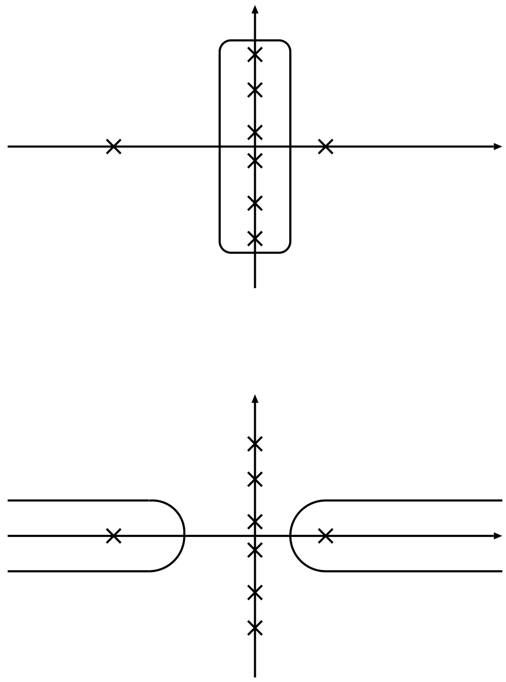

Abbildung 4.2: Kurven in der komplexen Ebene und schematische Darstellung der Pole.

gral in der komplexen Ebene,

$$
\begin{aligned}
&iI_2^+(i\omega_m + \mu_u - \mu_d, \vec{q}) = \\
&\quad -T \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{4E_{\vec{k}+\vec{q},f} E_{\vec{k},f}} \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \frac{1}{e^{\beta z}+1} \\
&\times \Big\{ \frac{1}{-E_{\vec{k},f} - i\omega_m - \mu_u + \mu_d + E_{\vec{k}+\vec{q},f}} \Big(\frac{1}{z + i\omega_m + \mu_u - E_{\vec{k}+\vec{q},f}} - \frac{1}{z - \mu_d - E_{\vec{k},f}} \Big) \\
&\quad - \frac{1}{E_{\vec{k},f} - i\omega_m - \mu_u + \mu_d + E_{\vec{k}+\vec{q},f}} \Big(\frac{1}{z + i\omega_m + \mu_u - E_{\vec{k}+\vec{q},f}} - \frac{1}{z - \mu_d + E_{\vec{k},f}} \Big) \\
&\quad - \frac{1}{-E_{\vec{k},f} - i\omega_m - \mu_u + \mu_d - E_{\vec{k}+\vec{q},f}} \Big(\frac{1}{z + i\omega_m + \mu_u + E_{\vec{k}+\vec{q},f}} - \frac{1}{z - \mu_d - E_{\vec{k},f}} \Big) \\
&\quad + \frac{1}{-E_{\vec{k},f} - i\omega_m - \mu_u + \mu_d + E_{\vec{k}+\vec{q},f}} \Big(\frac{1}{z + i\omega_m + \mu_u + E_{\vec{k}+\vec{q},f}} - \frac{1}{z - \mu_d + E_{\vec{k},f}} \Big) \Big\}.
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

Die Kurve C, dargestellt in Abbildung 4.3, wird stetig deformiert. Wir wenden wieder den Residuensatz an und erhalten

$$
\begin{aligned}
&iI_2^+(i\omega_m+\mu_u-\mu_d,\vec{q}) = \\
&\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{4E_{\vec{k}+\vec{q},f}E_{\vec{k},f}}\Big\{\frac{1}{e^{\beta(E_{\vec{k},f}-i\omega_m-\mu_u)}+1}\cdot\frac{1}{i\omega_m+\mu_u-\mu_d+E_{\vec{k}+\vec{q},f}-E_{\vec{k},f}} \\
&\qquad -\frac{1}{e^{\beta(E_{\vec{k},f}-i\omega_m-\mu_u)}+1}\cdot\frac{1}{i\omega_m+\mu_u-\mu_d-E_{\vec{k}+\vec{q},f}-E_{\vec{k},f}} \\
&\qquad +\frac{1}{e^{-\beta(E_{\vec{k},f}+i\omega_m+\mu_u)}+1}\cdot\frac{1}{i\omega_m+\mu_u-\mu_d-E_{\vec{k}+\vec{q},f}+E_{\vec{k},f}} \\
&\qquad -\frac{1}{e^{-\beta(E_{\vec{k},f}+i\omega_m+\mu_u)}+1}\cdot\frac{1}{i\omega_m+\mu_u-\mu_d+E_{\vec{k}+\vec{q},f}+E_{\vec{k},f}} \\
&\qquad +\frac{1}{e^{\beta(E_{\vec{k},f}-\mu_d)}+1}\cdot\frac{1}{i\omega_m+\mu_u-\mu_d+E_{\vec{k}+\vec{q},f}+E_{\vec{k},f}} \\
&\qquad -\frac{1}{e^{\beta(E_{\vec{k},f}-\mu_d)}+1}\cdot\frac{1}{i\omega_m+\mu_u-\mu_d-E_{\vec{k}+\vec{q},f}+E_{\vec{k},f}} \\
&\qquad +\frac{1}{e^{-\beta(E_{\vec{k},f}+\mu_d)}+1}\cdot\frac{1}{i\omega_m+\mu_u-\mu_d-E_{\vec{k}+\vec{q},f}-E_{\vec{k},f}} \\
&\qquad -\frac{1}{e^{-\beta(E_{\vec{k},f}+\mu_d)}+1}\cdot\frac{1}{i\omega_m+\mu_u-\mu_d+E_{\vec{k}+\vec{q},f}-E_{\vec{k},f}}\Big\}
\end{aligned} \tag{4.29}
$$

Dabei haben wir in einem Teil des Integranden die Substitution $\vec{k}\to-\vec{k}-\vec{q}$ benutzt. Verwenden wir, daß $e^{\beta i\omega_m}=1$ und führen Besetzungszahlen ein, so läßt sich iI_2^+ schreiben als

$$
\begin{aligned}
&iI_2^+(i\omega_m+\mu_u-\mu_d,\vec{q}) = \int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{4E_{\vec{k}+\vec{q},f}E_{\vec{k},f}} \\
&\times\Big\{n_{\vec{k},u}\Big(\frac{1}{i\omega_m+\mu_u-\mu_d+E_{\vec{k}+\vec{q},f}-E_{\vec{k},f}}-\frac{1}{i\omega_m+\mu_u-\mu_d-E_{\vec{k}+\vec{q},f}-E_{\vec{k},f}}\Big) \\
&\quad +(1-\bar{n}_{\vec{k},u})\Big(\frac{1}{i\omega_m+\mu_u-\mu_d-E_{\vec{k}+\vec{q},f}+E_{\vec{k},f}}-\frac{1}{i\omega_m+\mu_u-\mu_d+E_{\vec{k}+\vec{q},f}+E_{\vec{k},f}}\Big) \\
&\quad +n_{\vec{k},d}\Big(\frac{1}{i\omega_m+\mu_u-\mu_d+E_{\vec{k}+\vec{q},f}+E_{\vec{k},f}}-\frac{1}{i\omega_m+\mu_u-\mu_d-E_{\vec{k}+\vec{q},f}+E_{\vec{k},f}}\Big) \\
&\quad +(1-\bar{n}_{\vec{k},d})\Big(\frac{1}{i\omega_m+\mu_u-\mu_d-E_{\vec{k}+\vec{q},f}-E_{\vec{k},f}}-\frac{1}{i\omega_m+\mu_u-\mu_d+E_{\vec{k}+\vec{q},f}-E_{\vec{k},f}}\Big)\Big\}
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

Wir fassen nun zusammen und wenden an geeigneter Stelle wieder die Substitution $\vec{k}\to-\vec{k}-\vec{q}$ an, um das Ergebnis

$$
\begin{aligned}
iI_2^+(i\omega_m+\mu_u-\mu_d,\vec{q}) = \int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{k},f}}\Big(&\frac{2}{(i\omega_m+\mu_u-\mu_d)^2-(E_{\vec{k}+\vec{q},f}+E_{\vec{k},f})^2} \\
&-\frac{(n_{\vec{k},u}+\bar{n}_{\vec{k},d})}{(i\omega_m+\mu_u-\mu_d-E_{\vec{k},f})^2-E^2_{\vec{k}+\vec{q},f}} \\
&-\frac{(n_{\vec{k},d}+\bar{n}_{\vec{k},u})}{(i\omega_m+\mu_u-\mu_d+E_{\vec{k},f})^2-E^2_{\vec{k}+\vec{q},f}}\Big)
\end{aligned} \tag{4.31}
$$

zu erhalten. Wir erkennen, daß dieser Ausdruck nur von $\mu_u - \mu_d$ abhängt. Das π^+ spürt also das Isospin chemische Potential. Dies war auch zu erwarten, da das π^+ aus u und $\bar{d}$-Quark besteht. Es ist nun möglich, diesen Ausdruck rein formal analytisch fortzusetzen, indem wir $i\omega_m + \mu_u - \mu_d$ durch q_0 ersetzen,

$$\begin{aligned} iI_2^+(q_0,\vec{q}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{k},f}}\Big(&\frac{2}{q_0^2-(E_{\vec{k}+\vec{q},f}+E_{\vec{k},f})^2} \\ &- (n_{\vec{k},u}+\bar{n}_{\vec{k},d})\frac{1}{(q_0-E_{\vec{k},f})^2-E^2_{\vec{k}+\vec{q},f}} \\ &- (n_{\vec{k},d}+\bar{n}_{\vec{k},u})\frac{1}{(q_0+E_{\vec{k},f})^2-E^2_{\vec{k}+\vec{q},f}}\Big). \end{aligned} \tag{4.32}$$

Analog erhalten wir

$$\begin{aligned} iI_2^-(q_0,\vec{q}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{k},f}}\Big(&\frac{2}{q_0^2-(E_{\vec{k}+\vec{q},f}+E_{\vec{k},f})^2} \\ &- (n_{\vec{k},d}+\bar{n}_{\vec{k},u})\frac{1}{(q_0-E_{\vec{k},f})^2-E^2_{\vec{k}+\vec{q},f}} \\ &- (n_{\vec{k},u}+\bar{n}_{\vec{k},d})\frac{1}{(q_0+E_{\vec{k},f})^2-E^2_{\vec{k}+\vec{q},f}}\Big). \end{aligned} \tag{4.33}$$

Zusammenfassend ergeben sich die Polarisationsfunktionen

$$J^{(\sigma)}(q_0,\vec{q}) = \sum_{f=u,d}\Big(4in_cI_1^f - (q_0^2-\vec{q}^2-4m_f^2)2in_cI_2^f(q_0,\vec{q})\Big) \tag{4.34}$$

$$J^{(\pi^0)}(q_0,\vec{q}) = \sum_{f=u,d}\Big(4in_cI_1^f - (q_0^2-\vec{q}^2)2in_cI_2^f(q_0,\vec{q})\Big) \tag{4.35}$$

$$J^{(\pi^+)}(q_0,\vec{q}) = 4n_c\Big(iI_1^u + iI_1^d - (q_0^2-\vec{q}^2)iI^+(q_0,\vec{q})\Big) \tag{4.36}$$

$$J^{(\pi^-)}(q_0,\vec{q}) = 4n_c\Big(iI_1^u + iI_1^d - (q_0^2-\vec{q}^2)iI^-(q_0,\vec{q})\Big)\,. \tag{4.37}$$

4.4 Numerische Ergebnisse

Um aus den obigen Überlegungen quantitative Aussagen über die Mesonenmassen zu erhalten, müssen wir erst die vorkommenden Integrale regularisieren. Da wir die Mesonen als Summe über Quark-Antiquark-Loops beschreiben, sollte es nicht verwundern, daß divergente Integrale auftauchen. In Anlehnung an [51] benutzen wir hier die Pauli-Villars-Regularisierung. Wichtig ist, daß die Gap-Gleichung und die Polarisationsfunktionen mit dem gleichen Schema regularisiert werden. Da wir relativistische Teilchen beschreiben wollen, wählen wir die Pauli-Villars-Regularisierung, die Lorentz-kovariant ist. Es wäre jedoch auch möglich, einen einfachen $\mathcal{O}(3)$-Cutoff zu wählen. Für einen Integranden

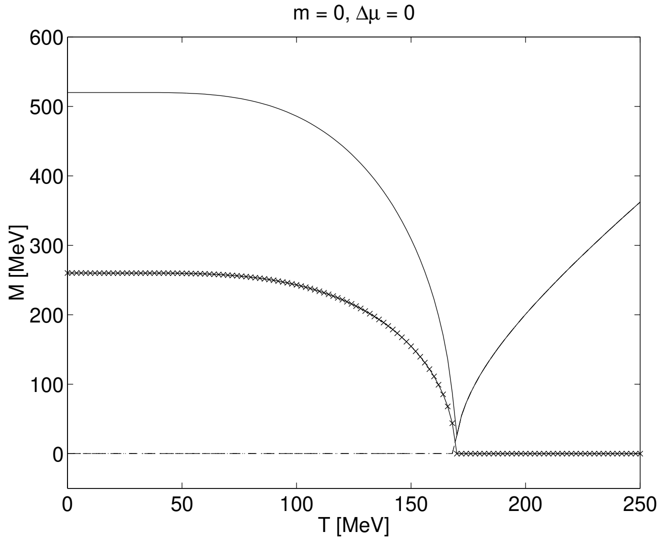

Abbildung 4.3: Quarkmasse (durchgezogene Linie mit Kreuzen), σ-Massse (durchgezogen) und Pionenmassen (gestrichpunktet) als Funktion der Temperatur für $m = 0$ und $\Delta\mu = 0$.

$f(k, m^2)$ modifizieren wir das vierdimensionale Integral durch

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k, m^2) \quad \longrightarrow \quad \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sum_{j=0}^{n} c_j f(k, m^2 + j\Lambda^2). \tag{4.38}$$

Die dreidimensionalen Integrale werden analog modifiziert. Um I_1^f zu regularisieren, müssen wir $n = 2$ wählen. Dabei sind $c_0 = 1$, $c_1 = -2$, $c_2 = 1$.

Da sich die Gleichungen für die Massen nicht explizit lösen lassen, sind wir auf numerische Näherungen angewiesen. Die halbunendlichen Integrale lassen sich mit Hilfe der Substitution $k \to \frac{t}{1-t}$ auf das Intervall $[0, 1]$ transformieren. Zur numerischen Approximation der Integrale verwenden wir die `quadl`-Routine aus `matlab`, eine adaptive zusammengesetzte Lobatto-Quadratur. Die Nullstellengleichungen für die Massen lassen sich einfach und robust mit Hilfe beschleunigter Bisektionsverfahren lösen, da man im betrachteten Parameterbereich einfache untere und obere Schranken für die Massen hat.

In den Abbildungen 4.3-4.4 sind die Mesonenmassen im chiralen Limes, d.h. bei $m = 0$ und verschiedenen Isospin chemischen Potentialen $\Delta\mu$ dargestellt. Die Abbildungen 4.5-4.6 zeigen die entsprechenden Ergebnisse für $m = 6.13$ MeV. Der Cutoff-Parameter ist $\Lambda = 800$ MeV. Die Kopplungskonstante G wurde so gewählt, daß sich im Vakuum eine Quarkmasse von 260 MeV ergibt. Das sind gerade die Parameter aus [51]. Diese Parameter ergeben realistische Werte für die Pionmasse, $m_\pi = 140$ MeV, und die Pion-Zerfallskonstante, $f_\pi = 93.6$ MeV.

Bei verschwindendem chemischen Potential, $\mu_u = 0$ und $\mu_d = 0$, stimmen unsere Ergebnisse mit den Ergebnissen aus [51] überein. Wir benutzen auch die

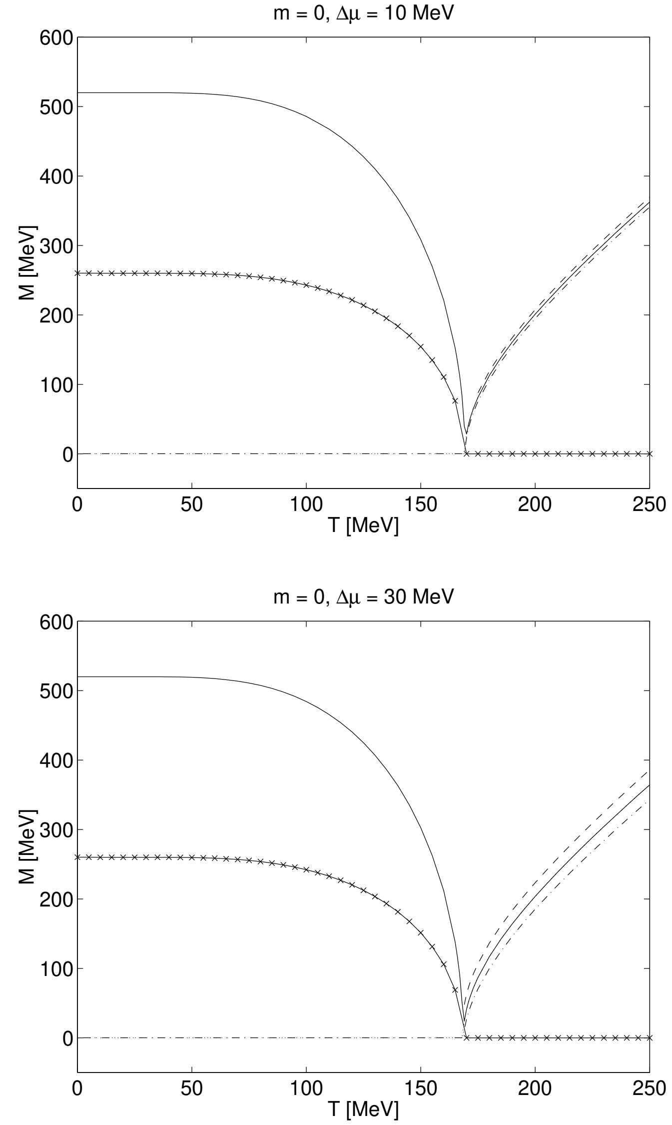

Abbildung 4.4: Quarkmasse (durchgezogen mit Kreuzen), σ-Masse (durchgezogen), π^0-Masse (gepunktet), π^+-Masse (gestrichelt) und π^--Masse (gestrichpunktet) als Funktion der Temperatur für $m = 0$ und $\Delta\mu = 10$ MeV (oben) sowie $\Delta\mu = 30$ MeV (unten).

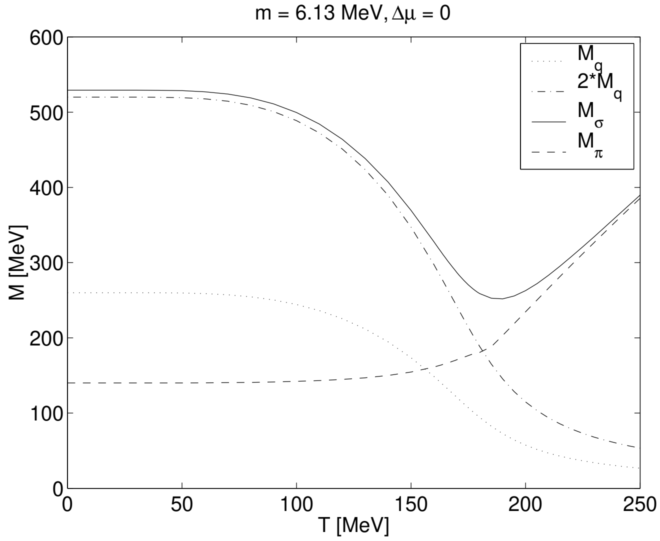

Abbildung 4.5: Quarkmasse (gepunktet), doppelte Quarkmasse (gestrichpunktet), σ-Masse (durchgezogen) und π-Massen (gestrichelt) als Funktion der Temperatur für $m = 6.13$ MeV und $\Delta\mu = 0$.

Quarkmasse als Ordnungsparameter. Im chiralen Limes gibt es bei einer Temperatur von etwa 164.4 MeV einen Phasenübergang zweiter Ordnung. Das σ besitzt bis zum Phasenübergang die doppelte Quarkmasse. Die Pionen sind bis zum Phasenübergang masselos. Nach dem Phasenübergang haben alle Mesonen die gleiche endliche Masse. Bei $m = 6.13$ MeV wird aus dem Phasenübergang zweiter Ordnung ein Crossover.

Wir betrachten weiterhin ein verschwindendes Baryon chemisches Potential $\mu_B = 0$ aber ein endliches Isospin chemisches Potential. Abbildung 4.4 zeigt die Mesonenmassen im chiralen Limes bei $\Delta\mu = 10$ MeV und $\Delta\mu = 30$ MeV. Im chiralen Limes beobachten wir unverändert einen Phasenübergang zweiter Ordnung bei $T = 164.4$ MeV. Bis zum Phasenübergang ist die chirale Symmetrie spontan gebrochen. Die Pionen sind die Goldstone-Bosonen dieser Symmetriebrechung und deshalb masselos. Nach dem Phasenübergang bewirkt das Isospin chemische Potential eine Aufspaltung der Massen der geladenen Pionen. Bei positivem $\Delta\mu$, also $\mu_u = \Delta\mu$ und $\mu_d = -\Delta\mu$, besitzt das π^+ eine höhere Masse als das π^0. Das π^- besitzt dagegen eine niedrigere Masse als das π^0. Erwartungsgemäß werden π^0 und σ nicht vom Isospin chemischen Potential beeinflußt.

Ist die chirale Symmetrie durch die Stromquarkmasse explizit gebrochen, bleibt das Bild qualitativ erhalten. Die Massen der geladenen Pionen spalten jedoch schon bei kleineren Temperaturen auf.

Auffallend ist, daß bei $m = 6.13$ MeV alle Kurven für die π-Mesonenmassen einen Knick aufweisen. Zur Erklärung haben wir in Abbildung 4.5 zusätzlich die doppelte Quarkmasse eingezeichnet. Man erkennt, daß die Kurve der Pionmas-

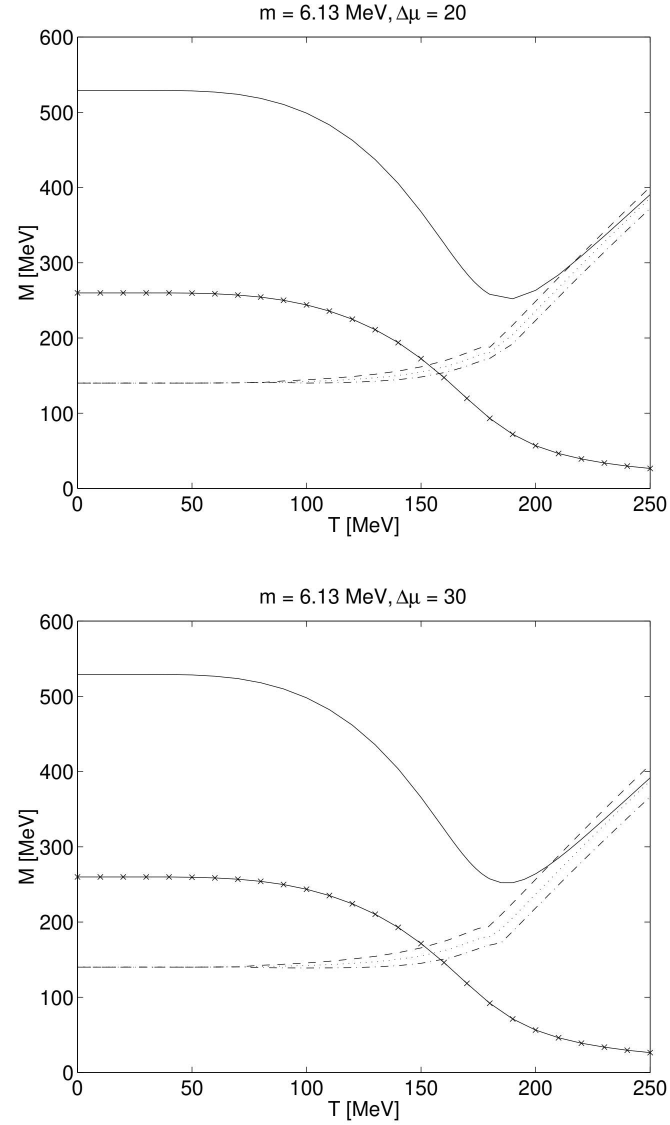

Abbildung 4.6: Quarkmasse (durchgezogen mit Kreuzen), σ-Masse, π^0-Masse (gepunktet), π^+-Masse (gestrichelt) und π^--Masse (gestrichpunktet) als Funktion der Temperatur für $m = 6.13$ MeV und $\Delta\mu = 20$ MeV (oben) sowie $\Delta\mu = 30$ MeV (unten).

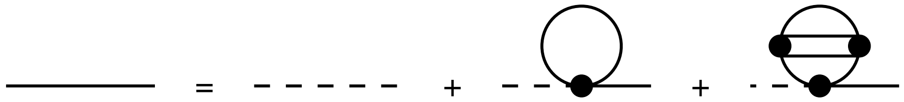

Abbildung 4.7: MLA Gap-Gleichung.

sen genau da abknickt, wo sie die Kurve der doppelten Quarkmasse schneidet. Dann überschreiten die Pionen eine Zerfallsbarriere und die Propagatoren werden komplex. Da wir die Massen aber als Nullstellen der Realteile der inversen Propagatoren definiert haben, sieht man in den Kurven Knicke.

4.5 Einfluß auf die Quarkmasse?

Obwohl im einfachen NJL-Modell die beiden Quarkmassen bzw. Quarkkondensate entartet sind, spalten die Mesonenmassen bei endlichem Isospin chemischen Potential auf, im chiralen Limes nach dem Phasenübergang, bei explizit gebrochener chiraler Symmetrie schon bei kleineren Temperaturen. Da die Mesonen mit den Quarks wechselwirken, beeinflussen sie auch die dynamisch generierte Konstituentenquarkmasse. Eine Möglichkeit, den Einfluß der Mesonen auf die Quarkmasse selbstkonsistent zu beschreiben, ist die One Meson Loop Approximation (MLA), die zuerst in [52] verwendet und später systematischer in [53] hergeleitet wurde. Die Gap-Gleichung wird, wie in Abbildung 4.7 gezeigt, um einen Term erweitert bei dem ein Meson in den Quark-Loop eingefügt wird. Da wir ein Meson als unendliche Summe über Quark-Loops dargestellt haben, entspricht diese Modifikation hier in Wahrheit auch einer Summe über unendlich viele Quark-Loops.

Bezeichnet man den neuen Quark-Meson-Loop als $\delta\Sigma$, so lautet die MLA Gap-Gleichung

$$M = m + \Sigma(M) + \delta\Sigma(M). \tag{4.39}$$

Dabei läßt sich $\delta\Sigma$ schreiben als

$$\delta\Sigma = 2G \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sum_M (-it^{(M)}(k)) \mathrm{Tr}\left[iS(p)\Gamma^{(M)} iS(p+k)\Gamma^{(M)} iS(p)\right] \tag{4.40}$$

Dies kann man auf endliches Isospin chemisches Potential erweitern und mit

Hilfe elementarer Integrale schreiben

$$\delta\Sigma = -8Gn_cM \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \Big\{ t^{(\sigma)}(q) \sum_f \Big[I_2^f(0) + 2I_2^f(q) - (q^2 - 4M^2)K^{ff}(q) \Big] + t^{(\pi^0)}(q) \sum_f \Big[I_2^f(0) - q^2 K^{ff}(q) \Big] + 2t^{(\pi^+)}(q) \sum_f \Big[I_2^d(0) - (p_u - p_d + q)^2 K^{ud}(q) \Big] + 2t^{(\pi^-)}(q) \sum_f \Big[I_2^u(0) - (p_u - p_d + q)^2 K^{du}(q) \Big] \Big\}, \tag{4.41}$$

wobei

$$iK^{fg}(q) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p_f+q)^2 - M_f^2][p_g^2 - M_g^2]^2}. \tag{4.42}$$

Dabei haben wir $m_u = m_d$ angenommen.

Die Berechnung numerischer Ergebnisse ist aber schon im Fall $\mu = \Delta\mu = 0$ mit mehreren Näherungsschemata und großem Aufwand verbunden [51]. Es wäre aber interessant, die Rückkopplung der Mesonen zu betrachten und deren Einfluß auf die Phasendiagramme und insbesondere die Ordnung der Phasenübergänge zu untersuchen.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit war es, das QCD-Phasendiagramm bei endlicher Isospindichte zu studieren. Insbesondere wollten wir den Einfluß des Isospin chemischen Potentials auf den kritischen Endpunkt untersuchen. Weiterhin wollten wir die Eigenschaften der Pionen betrachten. Wir haben uns speziell für Pionkondensation interessiert. Da mit Gittersimulationen bis jetzt ein endliches Baryon chemisches Potential nicht (zuverlässig) simuliert werden kann, wohl aber ein endliches Isospin chemisches Potential, waren wir an allgemeinen Aussagen über das Phasendiagramm bei $\mu_I \neq 0$ interessiert.

Wir haben diese Fragestellungen zunächst mit Hilfe einer verallgemeinerten NJL-Lagrangedichte untersucht. Dabei haben wir zwei Wechselwirkungsterme mit unterschiedlichen Kopplungskonstanten eingeführt, von denen einer aus einem die $U_A(1)$-Symmetrie brechenden 6-Punkt-Vertex hergeleitet werden kann. Bei verschiedenen Kopplungskonstanten und verschiedenen Werten für das Isospin chemische Potential beobachten wir einen oder zwei kritische Punkte im Phasendiagramm. Wir haben jedoch argumentiert, daß bei realistischen physikalischen Parametern, zum Beispiel in Schwerionenstößen, nur ein Phasenübergang zu sehen sein wird. Der interessante Effekt von zwei Phasenübergängen, der in [43, 44] vorhergesagt wurde, wird schon durch eine relativ kleine $U_A(1)$-brechende Wechselwirkung zunichte gemacht.

Als nächstes haben wir Pionkondensation im NJL-Modell untersucht. Wir haben herausgefunden, daß bei einem kritischen Isospin chemischen Potential im Bereich der Pionmasse ein Kondensat der geladenen Pionen auftritt. Da die geladenen Pionen die chemischen Potentiale $\mu_u - \mu_d$ bzw. $\mu_d - \mu_u$ spüren, ist eines dieser Potentiale bei $|\mu_u - \mu_d| = m_\pi$ groß genug, so daß Pionen im Vakuum erzeugt werden können. Ähnliche Ergebnisse sind aus anderen effektiven QCD-Theorien bekannt, siehe [43, 26, 27, 20] und darin enthaltene Referenzen. In unserem Modell entsteht das Pionkondensat in einem Phasenübergang zweiter Ordnung und „verdampft" bei weiterer Erhöhung in einem Phasenübergang erster Ordnung. Dieses Resultat stimmt mit Gitter-Simulationen [26, 27] überein.

Eine Kombination der beiden letztgenannten Ansätze, nämlich die erweiterte Wechselwirkung in der Lagrangedichte sowie die Linearisierung um die Erwartungswerte aller vorkommenden Wechselwirkungsterme, wäre ein Ansatzpunkt für weitergehende Untersuchungen. Außerdem könnte man unsere Ansätze auf Farbsupraleitung anwenden, d.h. Diquark-Kondensate betrachten.

Die Mesonenmassen haben wir in der Random Phase Approximation studiert. Im chiralen Limes und bei endlichem μ_I spalten die Massen nach dem Phasenübergang des Quark-/σ-Kondensats auf, bei expliziter Brechung der chiralen Symmetrie schon bei kleineren Temperaturen. Verschiedene Erweiterungen des RPA-Schemas wären interessant. Wie oben könnte man zum einen die erweiterte Lagrangedichte betrachten und Pionkondensation miteinbeziehen. Zum anderen haben wir bisher die Rückkopplung der Mesonen an die Quarks vernachlässigt. Die starke Wechselwirkung zwischen den Nukleonen geschieht bekanntlich durch Austausch virtueller Pionen. Eine Möglichkeit zur selbstkonsistenten Beschreibung von Quarks und Mesonen in höherer Ordnung ist die MLA, für die wir erste Teilergebnisse angegeben haben.

Zuletzt müssen wir natürlich die Grenzen unseres Modells nennen (siehe auch [54]). Wie bereits erwähnt, bildet das NJL-Modell nur einige Eigenschaften der QCD ab. Unter anderem beinhaltet unser Modell kein Confinement. Die relevanten Freiheitsgrade bestehen aus freien Quarks und Pionen. Dies ist sicher eine unzureichende Beschreibung. Im Quark-Gluon-Plasma sind die dominanten Freiheitsgrade Quarks und Gluonen, in der hadronischen Phase sind die Quarks unter anderem in Protonen, Neutronen und Pionen gebunden. Dementsprechend sind auch die quantitativen Vorhersagen unseres Modells mit Vorsicht zu genießen. Vorhergesagte Temperatur und chemisches Potential des kritischen Punktes weichen mit $T \approx 65$ MeV und $\mu \approx 345$ MeV weit von den ersten Ergebnissen aus Gitter-Simulationen [48], $T = 160 \pm 3.5$ MeV und $\mu = 240 \pm 15$ ab. Unsere Ergebnisse sollten jedoch eine qualitative Vorstellung vom QCD-Phasendiagramm und dem Einfluß endlicher Isospindichte geben.

Die Erforschung des QCD-Phasendiagramms bleibt jetzt und in Zukunft hochinteressant. Besonders hervorzuheben sind im theoretischen Bereich die Verbesserungen der Gitter-QCD-Rechnungen, die schon kleine endliche chemische Potentiale erlauben [43, 28] und im experimentellen Bereich die bereits genannten ersten Anzeichen auf ein Quark-Gluon-Plasma [19]. Die theoretischen und experimentellen Entwicklungen in diesem Feld sind sehr vielversprechend.

Literaturverzeichnis

[1] K. Rajagopal, Acta Phys.Polon. 31 (2000) 3021.

[2] A.A. Khan et al., hep-lat/0008011.

[3] S. Gottlieb et al., Phys. Rev. D 55 (1997) 6852.

[4] F. Karsch, hep-lat/9909006.

[5] R.N. Boyd and T. Kajino, Ap. J. 336 (1989) L55.

[6] R.A. Maloney and W.A. Fowler, Ap. J. 345 (1989) L5.

[7] H. Karttunen et al., Fundamental Astronomy (Springer-Verlag, 2003).

[8] N.K. Glendenning, Compact Stars (Springer-Verlag, 1996).

[9] D.B. Kaplan and A. Nelson, Phys. Lett. B 175 ((1986) 57.

[10] G.E. Brown and H.A. Bethe, Astrophys. J. 423 (1994) 659.

[11] K. Rajagopal and F. Wilczek, hep-ph/0011333.

[12] M. Alford, K. Rajagopal and F. Wilczek, Nucl. Phys. B 537 (1999) 443.

[13] R. Rapp et al., Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 53.

[14] M. Stephanov, Phys. Rev. Lett. 76 (1996) 4472.

[15] J. Berges and K. Rajagopal, Nucl. Phys. B 538 (1999) 215.

[16] M.A. Halasz et al., Phys. Rev. D 58 (1998) 096007.

[17] M. Stephanov, K. Rajagopal and E. Shuryak, Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 4816.

[18] M. Stephanov, K. Rajagopal and E. Shuryak, Phys. Rev. D 60 (1999) 114028.

[19] Brookhaven National Laboratory, Pressemitteilung 03-49, http://www.bnl.gov/bnlweb/pubaf/pr/2003/bnlpr061103.htm.

[20] D.T. Son and M.A. Stephanov, Phys. Rev. Lett. 86 (2001) 592.

[21] O. Kiriyama, S. Yasui and H. Toki, Int. J. Mod. Phys. E 10 (2002) 501.

[22] H. Müther and A. Sedrakian, hep-ph/0212317.

[23] M.G. Alford, J.A. Bowers and K. Rajagopal, Phys. Rev. D 63 (2001) 074016.

[24] P.F. Bedaque, Nucl. Phys. A 697 (2002) 569.

[25] P. Braun-Munzinger, I. Heppe and J. Stachel, Phys. Lett. B 465 (1999) 15.

[26] J.B. Kogut and D.K. Sinclair, Phys. Rev. D 66 (2002) 014508.

[27] J.B. Kogut and D.K. Sinclair, Phys. Rev. D 66 (2002) 034505.

[28] S.P. Klevansky, Lecture notes in physics 516 (1998) 113.

[29] C. Itzykson and J.B. Zuber, Quantum Field Theory (McGraw-Hill, 1980).

[30] J. Goldstone, Nuovo Cimento 19 (1961) 154.

[31] G. 't Hooft, Phys. Rev. D 14 (1976) 3432.

[32] G. 't Hooft, Phys. Rep. 142 (1986) 357.

[33] K. Hagiwara et al., Phys. Rev. D 66 (2002).

[34] D. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1343.

[35] H. Politzer, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1346.

[36] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122 (1961) 345.

[37] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 124 (1961) 246.

[38] S.P. Klevansky, Rev. Mod. Phys. 64 (1992) 3.

[39] T. Hatsuda and T. Kunihiro, Phys.Rept. 247 (1994) 221.

[40] U. Vogl and W. Weise, Prog. Part. and Nucl. Phys. 27 (1991) 195.

[41] M. Asakawa and K. Yazaki, Nucl. Phys. A 504 (1989) 668.

[42] J. Bardeen, L.N. Cooper and J.R. Schrieffer, Phys. Rev. 106 (1957) 162.

[43] B. Klein, D. Toublan and J.J. Verbaarschot, hep-ph/0301143.

[44] D. Toublan and J.B. Kogut, hep-ph/0301183.

[45] M. Frank, M. Buballa and M. Oertel, Phys. Lett. B 562 (2003) 221.

[46] P. Rehberg, S.P. Klevansky and J. Hüfner, Phys. Rev. C 53 (1996) 410.

[47] T. Kunihiro, Phys. Lett. B 219 (1989) 363.

[48] Z. Fodor and S.D. Katz, JHEP 0203 (2002) 014.

[49] J.I. Kapusta, Finite-temperature Field Theory (Cambridge University Press, 1993).

[50] B. Vanderheyden and A.D. Jackson, Phys. Rev. D 64 (2001) 074016.

[51] M. Oertel, Investigation of meson loop effects in the Nambu-Jona-Lasinio model, Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2000.

[52] V. Dmitrasinovic et al., Ann. Phys. (NY) 238 (1995) 332.

[53] E.N. Nikolov et al., Nucl. Phys. A 608 (1996) 411.

[54] M. Buballa, Nucl. Phys. A 611 (1996) 393.