Institut für Kernphysik
Technische Universität Darmstadt

Diplomarbeit

Nichtperturbative Behandlung des linearen $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-σ-Modells

Oliver Bohr

November 1997

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

In der Elementarteilchenphysik haben Symmetrien schon immer eine wichtige Rolle gespielt. Vor allen Dingen in der Beschreibung der Wechselwirkungen der Elementarteilchen sind Symmetrien von besonderer Bedeutung. Man unterscheidet heute vier Wechselwirkungen, die elektromagnetische Wechselwirkung, die schwache Wechselwirkung, die starke Wechselwirkung und die Gravitation. Teilchen die der starken Wechselwirkung unterliegen bezeichnet man als Hadronen. Gell-Mann und Zweig [1] postulierten 1963 auf der Basis von Symmetriebetrachtungen wenige elementare Felder, die Quarks, aus denen man heute alle bekannten Hadronen aufbauen kann. Die Hadronen unterteilen sich in zwei Gruppen, die Mesonen, die aus einem Quark und einem Antiquark aufgebaut sind und die Baryonen, die aus jeweils drei Quarks oder drei Antiquarks bestehen. Man unterscheidet die Quarks nach Spin, Flavour und Farbe. Bis heute kennt man sechs Quark-Flavours, up, down, strange, charm, bottom und top, und drei Farbzustände. Die starke Wechselwirkung der die Hadronen unterliegen wird durch die Quantenchromodynamik (QCD) beschrieben. Diese ist eine lokale Eichtheorie, konstruiert nach dem Vorbild der Quantenelektrodynamik (QED). Die entscheidenden Eigenschaften der QCD sind ihre chirale Symmetrie, der Farbeinschluß und die asymptotische Freiheit der Quarks bei hohen Energien. Für den Fall verschwindender Quarkmassen ist die QCD chiral symmetrisch, in diesem Fall entspricht die Chiralität der Helizität masseloser Quarks und die Lagrangedichte der QCD läßt sich in zwei symmetrische Anteile mit verschiedener Helizität aufspalten. Der Farbeinschluß beschreibt die Tatsache, daß in gewöhnlicher Kernmaterie die Quarks in den Hadronen eingeschlossen sind und zwar in solchen Kombinationen, daß die Hadronen nach außen farbneutral erscheinen. Die Eigenschaft der asymptotischen Freiheit der Quarks bei hohen Energien ist verbunden mit einer geringeren Kopplungskonstanten der starken Wechselwirkung, was eine störungstheoretische Behandlung der QCD möglich macht. Im Niederenergiebereich hat die Kopplungskonstante die Größenordnung eins, was die mathematische Behandlung in diesem Bereich sehr schwierig macht. Zur Zeit stellen Gitterrechnungen die einzige Möglichkeit dar, die QCD im Niederenergiebereich zu behandeln. Diese Rechnungen sind bisher jedoch noch sehr limitiert. Aus diesen Gründen wird versucht die Eigenschaften der Hadronen durch effektive Modelle, die man mathematisch handhaben kann, zu beschreiben. In diesen Modellen versucht man, möglichst die gleichen Symmetrien, die die QCD auszeichnen, einzubauen. Das chiral symmetrische lineare σ-Modell, das den Rahmen dieser Arbeit darstellt und auf eine Arbeit von Gell-

Mann und Lévy [2] zurückgeht, stellt ein solches Modell dar. In diesem Modell werden die aus Quarks und Antiquarks aufgebauten Mesonen selbst als fundamentale Teilchen behandelt. Das Modell ist chiral symmetrisch, dabei gibt es zwei Möglichkeiten die chirale Symmetrie des Modells zu realisieren, die Wigner-Weyl-Realisierung und die Goldstone-Realisierung. Diese beiden unterscheiden sich in der Symmetrie des Grundzustands. In der Wigner-Weyl-Realisierung besitzt der Grundzustand die gleiche Symmetrie wie die Lagrangedichte des Modells. In der Goldstone-Realisierung ist dies nicht der Fall, wodurch es zu einer spontanen Symmetriebrechung kommt, welche dem Goldstone-Theorem zufolge mit dem Auftreten von masselosen Bosonen, sogenannten Goldstone-Bosonen, verknüpft ist. In der Natur liegt die chirale Symmetrie in der Goldstone-Realisierung vor, wobei die leichtesten pseudoskalaren Mesonen die Rolle der Goldstone-Bosonen spielen. Neben dieser spontanen Symmetriebrechung ist die chirale Symmetrie in der Natur auch explizit gebrochen, wodurch die Mesonen eine nichtverschwindende Masse erhalten.

Neben der hadronischen Phase in der die Quarks in den Hadronen eingeschlossen sind erwartet man noch eine zweite Phase der Materie, die man als Quark-Gluon-Plasma bezeichnet und die bei hohen Temperaturen bzw. hohen Dichten vorliegt. Im Quark-Gluon-Plasma bewegen sich die Quarks und die Gluonen, das sind die Austauschteilchen der starken Wechselwirkung, frei. Gitterrechnungen deuten daraufhin, daß der Phasenübergang von der hadronischen Phase zum Quark-Gluon-Plasma mit dem chiralen Phasenübergang, von einer Phase mit gebrochener Symmetrie zur chiral symmetrischen Phase, zusammenfällt. Insbesondere zu Untersuchungen in der Nähe der Phasengrenze sind nichtperturbative Methoden erforderlich, da man nicht erwarten kann, daß perturbative Methoden an der Phasengrenze die korrekte Beschreibung liefern. Wichtig ist hierbei, daß die nichtperturbative Behandlung symmetrieerhaltend ist, d.h. daß die gebrochene chirale Symmetrie die Existenz von masselosen Goldstone-Bosonen bedingt. Aus der Vielteilchenphysik ist bekannt, daß die Methode der Quasiteilchen Random Phase Approximation einen symmetrieerhaltenden Zugang darstellt [3]. Z.Aouissat et al. [4,5] haben für das lineare $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$-σ-Modell gezeigt, daß diese Methode die geforderten Eigenschaften besitzt. Die vorliegende Arbeit stellt die Erweiterung dieser Untersuchungen auf die $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-Symmetrie dar, die wesentlichen Aspekte der Arbeit finden sich auch in [6].

Kapitel 2

Formulierung des Modells

In dieser Arbeit wird die Anwendung von nichtperturbativen Methoden aus der Vielteilchenphysik auf die Elementarteilchenphysik im Rahmen des linearen $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ σ-Modells untersucht. Das lineare σ-Modell ist ein feldtheoretisches Modell, das in der $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$-symmetrischen Version von Gell-Mann und Lévy 1960 eingeführt wurde und sowohl chirale Symmetrie aufweißt, als auch der PCAC-Relation genügt.
Das Modell beschreibt in der $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$-Symmetrie ein Fermionen- Dublett, das man mit den up- und down-Quarks identifizieren kann und ein pseudoskalares Mesonen-Triplett, die Pionen. Damit das lineare Modell chirale Symmetrie aufweißt, ist man gezwungen weitere Felder einzuführen. Die einfachste Möglichkeit ist die Einführung eines skalaren Mesons, das in einer Notation von Gell-Mann und Lévy als σ-Meson bezeichnet wird, wonach das Modell seinen Namen erhalten hat. Das derartig erweiterte Modell mit dem skalaren σ-Mesonen besitzt dann die gewünschte chirale $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$-Symmetrie. Lévy [7] hat 1967 das σ-Modell auf die $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-Symmetrie erweitert. Damit beschreibt das Modell ein Triplett von Fermionen, sowie ein Nonett skalarer und ein Nonett pseudoskalarer Mesonen.
In der hier verwendeten Version des σ-Modells sind, im Gegensatz zur ursprünglichen Formulierung von Gell-Mann und Lévy, alle fermionischen Freiheitsgrade zunächst masselos und die mesonischen Freiheitsgrade entartet. Die physikalischen Massen werden dann durch explizite und spontane Symmetriebrechung Rechnung generiert.
In den folgenden Abschnitten sind die wesentlichen Schritte zur Konstruktion des linearen σ-Modells dargestellt. Ausführliche Darstellungen zu diesem Kapitel befinden sich beispielsweise in [8] und [9].

2.1 Der Lagrangedichte Formalismus

In der Elementarteilchenphysik spielen Symmetrien eine entscheidende Rolle zum Verständnis der Eigenschaften und Wechselwirkungen der beobachteten Teilchen. Aus diesem Grund stellt der Lagrangedichte Formalismus eine geeignete Methode zur Entwicklung von Feldtheorien dar, da man im Lagrangedichte Formalismus auf einfache Weise Symmetrien des betrachteten Systems beschreiben kann. Eine Lagrangedichte mit bestimmten Symmetrien führt durch kanonische Quantisierung auf eine Quantenfeldtheorie mit den entsprechenden Symmetrien.

Damit eine Lagrangedichte $\mathcal{L}$ für eine Quantenfeldtheorie geeignet ist, muß sie gewisse Voraussetzungen erfüllen. $\mathcal{L}$ hängt nur von den betrachteten Feldern und ihren Ableitungen ab, eine explizite Abhängigkeit von den Koordinaten x zerstört die Lorentz-Invarianz. Hängt die Lagrangedichte nur von den Feldern und deren ersten Ableitungen ab, so erhält man Bewegungsgleichungen von höchstens zweiter Ordnung. Gilt außerdem

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\phi_i(x), \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x^\mu}\right), \tag{2.1}$$

d.h. hängt $\mathcal{L}$ nur von den Feldern und deren Ableitungen in einer infinitesimalen Umgebung um den Punkt x ab, so bezeichnet man die zugehörige Theorie als eine lokale Theorie.

Ist die Lagrangedichte eines Systems gegeben, so erhält man durch eine Legendre- Transformation daraus die Hamilton-Funktion H des Systems,

$$H = \int -\mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i}\dot{\phi}_i d^3x. \tag{2.2}$$

Aus der Lagrangedichte ergibt sich durch Integration über das Raum-Zeit-Volumen die Wirkung I,

$$I = \int \mathcal{L}\left(\phi_i(x), \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x^\mu}\right) dx. \tag{2.3}$$

Aus dem Variationsprinzip der stationären Wirkung,

$$\delta I = 0 \tag{2.4}$$

erhält man daraus die Euler-Lagrange-Gleichungen,

$$-\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i(x)} + \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\left(\partial_\mu \phi_i(x)\right)} = 0, \tag{2.5}$$

welche die Bewegungsgleichungen des Systems darstellen.

Die Symmetrien eines Systems sind mit Erhaltungsgrößen verknüpft, dieser Zusammenhang zwischen Symmetrie und Erhaltungsgröße findet seinen Ausdruck im Noether- Theorem. Das Noether-Theorem besagt, daß in einem System, das durch eine Lagrangedichte der obigen Form, mit den Euler-Lagrange-Gleichungen als Bewegungsgleichungen, beschrieben wird, für jede kontinuierliche Symmetrietransformation, die die Wirkung I unverändert läßt, ein erhaltener Strom,

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0, \tag{2.6}$$

existiert. Aus der Erhaltung des Stroms folgt, daß die zugehörige verallgemeinerte Ladung,

$$Q = \int J^0(x) d^3x, \tag{2.7}$$

eine Konstante der Bewegung ist:

$$\frac{dQ}{dt} = 0. \tag{2.8}$$

Der Oberflächenterm wird im Unendlichen vernachlässigbar klein:

$$\frac{dQ}{dt} = \int \partial_0 J^0 d^3x = \int \left(\partial_0 J^0 + \vec{\nabla}\vec{J}\right) = \int \partial_\mu J^\mu d^3x = 0. \tag{2.9}$$

Die so definierten verallgemeinerten Ladungen sind die Generatoren der zugehörigen Symmetriegruppe. Beschränkt man sich auf die Behandlung kontinuierlicher Transformationen, so genügt es, infinitesimale Transformationen zu untersuchen. Eine solche Transformation läßt sich allgemein in der folgenden Form schreiben:

$$\phi_i'(x) = \phi_i(x) + \delta\phi_i(x) = \phi_i(x) - \varepsilon_\alpha(x) F_i^\alpha(\phi_i), \tag{2.10}$$

wobei die F_i^α die Generatoren der Transformationsgruppe und die $\varepsilon_\alpha(x)$ die Transformationsparameter bezeichnen. Zu jeder solchen Transformation der Lagrangedichte definiert man einen zugehörigen Strom:

$$J^{\mu\alpha}(x) = -\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\left(\partial_\mu\phi_i\right)} F_i^\alpha. \tag{2.11}$$

Die Aussage des Noether-Theorems ist, daß, im Falle der Invarianz der Lagrangedichte unter der Transformation, dieser Strom eine Erhaltungsgröße ist. Die Variation einer Lagrangedichte vom Typ (2.1) lautet allgemein:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i}\delta\phi_i + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\left(\partial_\mu\phi_i\right)}\partial_\mu\left(\delta\phi_i\right) \tag{2.12}$$

Setzt man die Transformation (2.10) und die Definition des zugehörigen Stroms in diese Variation der Lagrangedichte ein, so erhält man unter Verwendung der Euler-Lagrange-Gleichungen (2.5):

$$\delta\mathcal{L} = \varepsilon_\alpha(x)\partial_\mu J^{\mu\alpha} + \left(\partial_\mu\varepsilon_\alpha(x)\right) J^{\mu\alpha}. \tag{2.13}$$

Daraus ergeben sich die Gell-Mann Lévy Gleichungen,

$$J^{\mu\alpha} = \frac{\partial}{\partial\left(\partial_\mu \varepsilon_\alpha(x)\right)} \delta\mathcal{L} \tag{2.14}$$

$$\partial_\mu J^{\mu\alpha} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_\alpha(x)} \delta\mathcal{L}. \tag{2.15}$$

2.2 Die Gruppen $U(n)$ und $SU(n)$

In der Elementarteilchenphysik sind die Gruppen $U(n)$ und $SU(n)$ von besonderer Bedeutung, so wird beispielsweise die vereinheitlichte elektroschwache Wechselwirkung durch eine $SU(2) \otimes U(1)$-symmetrische Theorie beschrieben. Das in der vorliegenden Arbeit untersuchte lineare σ-Modell ist invariant unter Transformationen der Gruppe $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$. Aufgrund ihrer Wichtigkeit sollen die in dieser Arbeit benötigten Gruppen $SU(n)$ und $U(n)$ hier kurz vorgestellt werden.
$U(n)$ ist die Gruppe der unitären $n \otimes n$-Matrizen:

$$A^\dagger A = A A^\dagger = \mathbb{1}, \quad \forall A \in U(n). \tag{2.16}$$

$SU(n)$ ist die Gruppe der unitären $n \otimes n$-Matrizen mit Determinante eins:

$$B^\dagger B = B B^\dagger = \mathbb{1} \tag{2.17}$$

$$\det B = 1, \quad \forall B \in SU(n). \tag{2.18}$$

Der Zusammenhang zwischen $U(n)$ und $SU(n)$ ist gegeben durch:

$$U(n) = SU(n) \otimes U(1) \tag{2.19}$$

oder direkt mit den Matrizen $A \in U(n)$ und $B \in SU(n)$ ausgedrückt,

$$A = B \cdot e^{i\alpha} \mathbb{1}. \tag{2.20}$$

Jede unitäre Matrix U kann mit einer hermiteschen Matrix H geschrieben werden als:

$$U = e^{iH}, \tag{2.21}$$

Mit der Identität

$$\det(e^A) = e^{Tr A} \tag{2.22}$$

folgt für die Elemente von $SU(n)$:

$$\begin{aligned} 1 = \det U = \det(e^{iH}) &= e^{\mathrm{Tr}iH} \\ \Rightarrow \mathrm{Tr}H &= 0. \end{aligned} \tag{2.23}$$

In einer komplexen $n \otimes n$-Matrix gibt es $2n^2$ freie Parameter. Durch die Bedingung der Unitarität wird diese Anzahl auf n^2 reduziert. Die Forderung $\det U = 1$ führt schließlich zu $n^2 - 1$ freien Parametern und damit $n^2 - 1$ Generatoren der Gruppe SU(n). Man kann daher ein Element der Gruppe $SU(n)$ folgendermaßen darstellen:

$$U = exp\left(i\sum_{a=1}^{n^2-1}\epsilon_a J_a\right), \tag{2.24}$$

wobei die ϵ_a Gruppenparameter und die J_a die Generatoren der Gruppe, repräsentiert durch spurlose, hermitesche Matrizen, sind. Von den $n^2 - 1$ Generatoren sind $n - 1$ diagonal. Man bezeichnet die Gruppe $SU(n)$ daher auch als eine Gruppe vom Rang $n - 1$. Nach dem Racah-Theorem [10] gibt es damit auch $n - 1$ Casimir-Operatoren, das sind Operatoren, die mit allen Generatoren der Gruppe vertauschen.
Für die im weiteren wichtige Gruppe $SU(3)$ wird die auf Gell-Mann [11] zurückgehende Matrix-Darstellung λ_a der Generatoren verwendet, man bezeichnet die Matrizen λ_a daher auch als Gell-Mann Matrizen. Die Gell-Mann Matrizen befinden sich im Anhang A. Sie spielen in der Gruppe $SU(3)$ die gleiche Rolle wie die Pauli Matrizen in der Gruppe $SU(2)$. Für die Gell-Mann Matrizen gilt:

$$\mathrm{Tr}\left[\lambda_a\lambda_b\right] = 2\delta_{ab} \tag{2.25}$$

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}\lambda_c \tag{2.26}$$

$$\{\lambda_a, \lambda_b\} = \frac{4}{3}\delta_{ab}\mathbb{1} + 2d_{abc}\lambda_c. \tag{2.27}$$

Die f_{abc} und d_{abc} sind Strukturkonstanten der Gruppe $SU(3)$, wobei die f_{abc} antisymmetrisch und die Koeffizienten d_{abc} symmetrisch sind, insbesondere gilt $d_{0ij} = \sqrt{\frac{2}{3}}\delta_{ij}$. Die Strukturkonstanten f_{abc} und d_{abc} sind im Anhang A tabelliert. Macht man nun die Identifikation $F_a = \frac{1}{2}\lambda_a$, so folgt aus der Kommutatorrelation, daß die F_a einer Lie-Algebra genügen:

$$[F_a, F_b] = if_{abc}F_c. \tag{2.28}$$

Die beiden Casimir-Operatoren der Gruppe $SU(3)$ ergeben sich damit zu:

$$C_1(F_i) = \sum_{i=1}^{8} F_i^2 = \frac{2i}{\sqrt{3}}\sum_{ijk} f_{ijk}F_iF_jF_k \tag{2.29}$$

$$C_2(F_i) = \sum_{ijk} d_{ijk} F_i F_j F_k. \quad (2.30)$$

im folgenden sind einige wichtige Eigenschaften der Strukturkonstanten f_{abc} und d_{abc} aufgeführt:

$$d_{aac} = 0 \quad (2.31)$$
$$f_{ab0} = 0 \quad (2.32)$$
$$d_{abc} f_{dbc} = 0 \quad (2.33)$$
$$f_{abc} f_{dac} = 3\delta_{ad} \quad (2.34)$$
$$d_{abc} d_{dbc} = \frac{5}{3}\delta_{ad}. \quad (2.35)$$

Weitere Beziehungen finden sich im Anhang A und in [12].

2.3 Chirale Symmetrie

Die chirale Symmetrie, d.h. die Invarianz einer Lagrangedichte unter Transformationen der Gruppe $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ ist äquivalent zur Invarianz unter lokalen $SU(3)$-Flavorrotationen und einer globalen axialen Transformation. Diese Äquivalenz ist besonders einfach am Beispiel eines freien $SU(3)$- Quarkmodells zu sehen. Die Lagrangedichte dieses Modells ist die freie Dirac- Lagrangedichte,

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \bar{\psi} M \psi, \quad (2.36)$$

in welcher sich die Quarkfelder in Triplett-Repräsentation befinden:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \\ s(x) \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

und M die Quarkmassen-Matrix bezeichnet:

$$M = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Wie im folgenden gezeigt werden wird, ist diese Lagrangedichte unter der Annahme entarteter Quarkmassen $SU(3)$-invariant und für verschwindende Quarkmassen invariant unter $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-Transformationen. Im Experiment findet man für die Stromquarkmassen $m_u \approx 4MeV$, $m_d \approx 7MeV$ und $m_s \approx 130MeV$. Das bedeutet, daß in der Natur keine

Entartung der Quarkmassen beobachtet wird und damit die $SU(3)$-Symmetrie gebrochen ist. Man sieht anhand der, im Vergleich mit den up- und down-Quarkmassen großen strange-Quarkmasse, daß die $SU(3)$-Symmetrie stärker gebrochen ist als eine $SU(2)$-Symmetrie im Bereich der up- und down-Quarks. Methoden zur Symmetriebrechung, die diesen Beobachtungen Rechnung tragen, werden im nächsten Abschnitt behandelt.
Da die Gruppe $SU(3)$ eine kontinuierliche Gruppe ist, genügt es infinitesimale Transformationen zu untersuchen, eine infinitesimale $SU(3)$-Flavorrotation ist gegeben durch:

$$\psi \to \psi' = \psi + i\varepsilon_V^a(x)\frac{\lambda^a}{2}\psi, \tag{2.39}$$

dabei bezeichnen die λ^a die im vorigen Abschnitt eingeführten Gell-Mann Matrizen und die $\varepsilon_V^\alpha(x)$ die infinitesimalen Transformationsparameter. Bei dieser Transformation handelt es sich um eine lokale Transformation, da die Parameter $\varepsilon_V^\alpha(x)$ vom Ort x abhängen. Durch Einsetzen dieser Transformationen erhält man mit Hilfe von Gleichung (2.12) für die Variation der Lagrangedichte (2.36):

$$\delta\mathcal{L} = \bar\psi(x)\gamma^\mu\left(\partial_\mu\varepsilon_V^a(x)\right)\frac{\lambda^a}{2}\psi(x) + i\varepsilon_V^a(x)\left(\bar\psi\frac{\lambda^a}{2}M\psi - \bar\psi M\frac{\lambda^a}{2}\psi\right). \tag{2.40}$$

Daraus ergeben sich mittels der Gell-Mann Lévy Gleichungen (2.14) und (2.15) die mit dieser $SU(3)$-Flavorrotation verknüpften Ströme,

$$J_V^{\mu a}(x) = \bar\psi(x)\gamma^\mu\frac{\lambda^a}{2}\psi. \tag{2.41}$$

Weiterhin sieht man, daß im Falle entarteter Quarkmassen diese Ströme erhalten sind:

$$\partial_\mu J_V^{\mu a} = 0 \quad , \quad \text{für } m_u = m_d = m_s. \tag{2.42}$$

Nur in diesem Fall liegt eine exakte $SU(3)$-Symmetrie vor, sind die Quarkmassen, wie in der Natur beobachtet, nicht entartet, so ist die Symmetrie gebrochen.
Die zugehörigen Ladungen,

$$Q_V^a(t) = \int J^{0a}(x)d^3x \tag{2.43}$$

erfüllen die Vertauschungsrelationen der Gruppe $SU(3)$:

$$\left[Q_V^a(t), Q_V^b(t)\right] = if_{abc}Q^c(t) \tag{2.44}$$

und sind damit Generatoren dieser Gruppe. Diese Relationen gelten auch dann, wenn die Symmetrie gebrochen ist und sich die Ladungen mit der Zeit ändern, solange man den Kommutator zu gleichen Zeiten berechnet.

Neben dieser lokalen Symmetrie besitzt die Lagrangedichte dieses Modells im Limes verschwindender Quarkmassen noch eine globale axiale Symmetrie. Die entsprechende infinitesimale Transformation lautet:

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \psi(x) + i\gamma_5 \varepsilon_A^a \frac{\lambda^a}{2}\psi(x). \tag{2.45}$$

Da es sich um eine globale Transformation handelt sind die Parameter ε_A^a nicht vom Ort x abhängig. Analog zu obiger Transformation erhält man durch Einsetzen die Variation der Lagrangedichte,

$$\delta\mathcal{L} = -i\varepsilon_A^a \left(\bar{\psi}(x)\gamma_5\frac{\lambda^a}{2}M\psi(x) + \bar{\psi}(x)M\gamma_5\frac{\lambda^a}{2}\psi(x)\right). \tag{2.46}$$

Für die zugehörigen axialen Ströme ergibt sich:

$$J_A^{\mu a}(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\frac{\lambda^a}{2}\psi(x). \tag{2.47}$$

Mit Hilfe der Gell-Mann Lévy Gleichungen (2.14) und (2.15) sieht man, daß diese axialen Ströme nur im Fall verschwindender Quarkmassen erhalten sind. In jedem Fall kann man jedoch die axialen Ladungen definieren:

$$Q_A^a(t) = \int J_A^{0a}(x)d^3x. \tag{2.48}$$

Diese Axialvektor-Ladungen genügen gemeinsam mit den Vektor-Ladungen den folgenden Vertauschungsrelationen:

$$\left[Q_V^a(t), Q_A^b(t)\right] = if_{abc}Q_A^c(t) \tag{2.49}$$

$$\left[Q_A^a(t), Q_A^b(t)\right] = if_{abc}Q_V^c(t). \tag{2.50}$$

Die angesprochene Verbindung der beschriebenen Transformationen mit der $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-Symmetrie wird sehr deutlich, wenn man zwei neue Felder $\psi_L(x)$ und $\psi_R(x)$ einführt:

$$\psi_L(x) = \begin{pmatrix} u_L(x) \\ d_L(x) \\ s_L(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \\ s(x) \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

$$\psi_R(x) = \begin{pmatrix} u_R(x) \\ d_R(x) \\ s_R(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \\ s(x) \end{pmatrix}. \tag{2.52}$$

Die Felder $\psi_L(x)$ und $\psi_R(x)$ besitzen feste Chiralität, d.h. sie beschreiben linkshändige bzw. rechtshändige Zustände. Es gilt:

$$\psi(x) = \psi_L(x) + \psi_R(x) \quad \text{und} \quad \bar{\psi}(x) = \bar{\psi}_L(x) + \bar{\psi}_R(x). \tag{2.53}$$

Drückt man die Lagrangedichte mittels dieser Felder aus, so ergibt sich:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_L(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L(x) + i\bar{\psi}_R(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R(x) - \left(\bar{\psi}_L(x) + \bar{\psi}_R(x)\right) M \left(\psi_L(x) + \psi_R(x)\right) \tag{2.54}$$

Man erkennt, daß nur der Massenterm die L-Anteile und die R-Anteile aneinander koppelt. Für verschwindende Massen vereinfacht sich die Lagrangedichte zu:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_L(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L(x) + i\bar{\psi}_R(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R(x). \tag{2.55}$$

Die Lagrangedichte spaltet somit in einen L-Anteil und einen R-Anteil auf, die nach dem vorher gesagten unabhängig voneinander invariant sind unter $SU(3)$-Flavorrotationen. Demzufolge ist die Lagrangedichte selbst invariant unter Transformationen der Gruppe $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$. Dabei soll das $_L$ Drehungen im 'L-Flavorraum' und das $_R$ Drehungen im 'R-Flavorraum' andeuten. Dieser Zusammenhang zwischen der $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-Symmetrie und der Invarianz unter einer lokalen $SU(3)$-Flavorrotation und einer globalen axialen Transformation läßt sich auch mit Hilfe der entsprechenden Ladungen darstellen. Analog zu den Ladungen $Q^a(t)$ und $Q^a_A(t)$ berechnet man gemäß (2.43) und (2.48) die Ladungen Q^a_L und Q^a_R. Man findet folgende Beziehungen der Ladungen untereinander:

$$Q^a_L(t) = \frac{1}{2}\left(Q^a_V - Q^a_A\right) \tag{2.56}$$

$$Q^a_R(t) = \frac{1}{2}\left(Q^a_V + Q^a_A\right). \tag{2.57}$$

Die Ladungen Q^a_L und Q^a_R lassen sich durch den Paritätsoperator P ineinander umwandeln:

$$P Q^a_R P^{-1} = Q^a_L \tag{2.58}$$

Mit diesen Ladungen lassen sich die Vertauschungsrelationen der Axialvektor- und Vektor-Ladungen schreiben als:

$$\left[Q^a_R(t), Q^b_R(t)\right] = i f_{abc} Q^c_R(t) \tag{2.59}$$

$$\left[Q^a_L(t), Q^b_L(t)\right] = i f_{abc} Q^c_L(t) \tag{2.60}$$

$$\left[Q^a_R(t), Q^a_L(t)\right] = 0. \tag{2.61}$$

Man sieht, daß die Q_R bzw. Q_L unabhängig voneinander der $SU(3)$-Algebra genügen. Dies macht deutlich, daß die Vertauschungsrelationen der Axialvektor- und Vektor-Ladungen (2.44) - (2.50) einer $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-Algebra entsprechen, was wiederum bedeutet, daß die Lagrangedichte des $SU(3)$-Quarkmodells für verschwindende Quarkmassen eine $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-Symmetrie besitzt.

2.4 Spontane Symmetriebrechung

Das einfache Modell des vorangegangenen Abschnitts war nur unter der Voraussetzung masseloser Teilchen invariant unter $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-Transformationen. Nimmt man nichtverschwindende, aber entartete Massen an, so wird durch den Massenterm in der Lagrangedichte die $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-Symmetrie zur $SU(3)$-Symmetrie hin gebrochen. In diesem Fall wird die Symmetrie durch Einführung eines explizit symmetriebrechenden Terms gebrochen. Neben dieser expliziten Symmetriebrechung gibt es noch die Möglichkeit einer spontanen Symmetriebrechung, welche im hier untersuchten linearen $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-σ-Modell von großer Bedeutung ist.
Grundzustand und Hamilton-Funktion eines Systems müssen nicht notwendigerweise die gleiche Symmetrie besitzen. Bei einer Symmetrie der Hamilton-Funktion sind die mit der Symmetrietransformation verknüpften Ladungen, Q, welche die Gruppengeneratoren repräsentieren, Erhaltungsgrößen und vertauschen folglich mit dem Hamilton-Operator:

$$\frac{dQ}{dt} = i\,[H, Q] = 0. \tag{2.62}$$

Von einer Symmetrie des Grundzustands spricht man, wenn die Ladung Q^a den Grundzustand $|0\rangle$ vernichtet,

$$Q|0\rangle = 0. \tag{2.63}$$

Coleman [13] hat gezeigt, daß ein Generator einer kontinuierlichen Symmetrie, der den Grundzustand vernichtet, mit dem Hamilton-Operator vertauscht. Das bedeutet, daß aus einer kontinuierlichen Grundzustandssymmetrie die Symmetrie der Hamilton-Funktion folgt. Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht. Liegt eine Symmetrie der Hamilton-Funktion vor, so sind die zwei möglichen Fälle

$$Q|0\rangle = 0 \quad \text{oder} \quad Q|0\rangle \neq 0 \tag{2.64}$$

zu unterscheiden. Vernichtet die Ladung den Grundzustand, so besitzen Grundzustand und Hamilton-Funktion die gleiche Symmetrie. Man bezeichnet diesen Fall als Wigner-Weyl-Realisierung. Annihiliert die Ladung den Grundzustand nicht, dann besitzt der Grundzustand nicht die gleiche Symmetrie wie die Hamilton-Funktion, diesen Fall bezeichnet man als Goldstone-Realisierung.

Die Situation, daß der Grundzustand nicht die gleiche Symmetrie besitzt wie der Hamilton-Operator, entspricht einer spontan gebrochenen Symmetrie. Eine spontan gebrochene, kontinuierliche Symmetrie ist nach dem Goldstone-Theorem [14,15] mit dem Auftreten masseloser Bosonen verknüpft, die man Goldstone-Bosonen nennt.

Die folgende Überlegung zeigt, daß eine Beschreibung der Natur durch eine exakte $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-Symmetrie das Auftreten von entarteten Multiplettpartnern mit entgegengesetzter Parität im Hadronenspektrum erfordert. Da man solche Partner im Hadronenspektrum nicht beobeobachtet, muß die $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-Symmetrie, falls sie eine natürliche Symmetrie darstellt, gebrochen sein.
Sei $|\psi\rangle$ ein Energie- und Paritätseigenzustand, dann folgt aus

$$H|\psi\rangle = E_\psi|\psi\rangle, \tag{2.65}$$

daß

$$HQ_{L/R}|\psi\rangle = E_\psi Q_{L/R}|\psi\rangle, \tag{2.66}$$

da die Generatoren mit dem Hamilton-Operator vertauschen. Außerdem ist $|\psi\rangle$ Paritätseigenzustand, daher gilt:

$$PQ_{L/R}|\psi\rangle = PQ_{L/R}P^{-1}P|\psi\rangle = Q_{R/L}|\psi\rangle. \tag{2.67}$$

Daraus folgt, daß für die Zustände

$$|\psi'\rangle \;=\; Q_A^a|\psi\rangle = (Q_R - Q_L)\,|\psi\rangle \tag{2.68}$$
$$|\psi''\rangle \;=\; Q_V^a|\psi\rangle = (Q_R + Q_L)\,|\psi\rangle, \tag{2.69}$$

wobei wieder Q_A^a die Axialvektor-Ladung und Q_V^a die Vektor-Ladung bezeichnet, gilt:

$$P|\psi'\rangle \;=\; -|\psi\rangle \tag{2.70}$$
$$P|\psi''\rangle \;=\; |\psi\rangle. \tag{2.71}$$

Das bedeutet, daß bei ungebrochener Symmetrie die Zustände $|\psi\rangle$ und $|\psi'\rangle$ energetisch entartet sind, aber entgegengesetzte Parität besitzen. Solche Multiplettpartner beobachtet man jedoch nicht im Hadronen-Spektrum. Die $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-Symmetrie muß also, falls sie eine natürliche Symmetrie darstellt, gebrochen sein.
Der vorige Abschnitt hat gezeigt, daß die Transformationen der Gruppe $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ äquivalent sind mit einer lokalen $SU(3)$-Flavorrotation und einer globalen axialen Transformation. Die Invarianz des Grundzustands unter globalen axialen Transformationen,

$Q_A^a|0\rangle = 0$, bedingt in Folge von Gleichung (2.68) und Gleichung (2.70) die Existenz von nicht beobachteten Multiplettpartnern, während die Invarianz des Grundzustands unter lokalen $SU(3)$-Flavorrotationen, $Q^a|0\rangle = 0$, nicht zu solchen Zuständen führt. Dies legt nahe, daß die Symmetrie so gebrochen ist, daß der Grundzustand nicht mehr invariant ist unter globalen axialen Transformationen, aber weiterhin invariant bleibt unter $SU(3)$-Flavorrotationen:

$$Q_A^a|0\rangle \neq 0 \text{ und } Q_V^a|0\rangle = 0. \tag{2.72}$$

Die Modifikation des Grundzustands ändert die Symmetrie des Hamilton-Operators nicht:

$$[H, Q_A^a] = 0 \text{ und } [H, Q^a] = 0. \tag{2.73}$$

Diese Situation entspricht der am Anfang des Abschnitts beschriebenen spontanen Symmetriebrechung, d.h. die Symmetrie ist in der Goldstone-Phase realisiert.
Der hier beschriebene Fall entspricht einer Symmetriebrechung von der $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-Symmetrie hin zur $SU(3)$-Symmetrie. Daneben gibt es noch andere Möglichkeiten der spontanen Symmetriebrechung, beispielsweise hin zur $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$-Symmetrie. Die spontane Symmetriebrechung hin zur $SU(3)$-Symmetrie stellt jedoch den wichtigsten Fall dar, der im weiteren von zentraler Bedeutung ist. Die spontane Symmetriebrechung führt, dem Goldstone-Theorem zufolge, zum Auftreten von masselosen Bosonen. Im linearen $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-σ-Modell treten bei einer spontanen Symmetriebrechung hin zur $SU(3)$-Symmetrie im chiralen Limes, d.h. unter Abwesenheit expliziter Symmetriebrechung, acht masselose pseudoskalare Bosonen auf, die Pionen, die Kaonen und das η-Meson. Den im Experiment gefundenen Massen dieser Mesonen wird dann durch expilizite Symmetriebrechung oder weitere spontane Symmetriebrechung Rechnung getragen.

2.5 Lagrangedichte des linearen $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-σ-Modells

Das lineare $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-σ-Modell geht in seiner hier behandelten Form auf eine Arbeit von M.Lévy [6] aus dem 1967 zurückgeht. Darin wird ein fermionisches Triplett, ψ, an ein Nonett skalarer Mesonen, Σ, und ein Nonett pseudoskalarer Mesonen, P, gekoppelt. Das Fermionen-Triplett besteht aus drei vierkomponentigen Spinorfeldern und die Nonetts sind durch $3 \otimes 3$-Matrizen gegeben:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \Sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda_i \sigma_i\right) \quad , \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda_i p_i\right), \tag{2.74}$$

wobei die σ_i die skalaren und die p_i die pseudoskalaren Mesonenfelder bezeichnen. Ausgedrückt durch kanonische Felder nehmen ψ und P folgende Form an:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \\ s(x) \end{pmatrix} \tag{2.75}$$

(2.76)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_0}{\sqrt{3}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_0}{\sqrt{3}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\eta_8 + \frac{\eta_0}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \tag{2.77}$$

Für Σ ergibt sich formal der zu P analoge Ausdruck, die Zuordnung zu beobachteten skalaren Mesonen ist jedoch nicht gesichert, so daß an dieser Stelle auf eine Zuordnung verzichtet wird. Das Modell stellt somit in dieser Form ein Hybridmodell dar, in welchem sowohl Quarks, als auch Mesonen als Felder auftreten.
Die Lagrangedichte des Modells setzt sich aus vier Anteilen zusammen:

$$\mathcal{L}_L = \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_{int}(\Sigma, P) + \mathcal{L}_M(\Sigma, P) + \mathcal{L}_{MM}(\Sigma, P). \tag{2.78}$$

Der erste Term, $\mathcal{L}_L$, bezeichnet den rein fermionischen Anteil, der sich mit obiger Notation folgendermaßen schreiben läßt:

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi. \tag{2.79}$$

Der Term $\mathcal{L}_{int}$ beschreibt die Kopplung der Mesonen an die Fermionen,

$$\mathcal{L}_{int}(\Sigma, P) = g_{int} \bar{\psi}(i\gamma_5 P + \Sigma)\psi, \tag{2.80}$$

g_{int} bezeichnet die Kopplungskonstante dieser Kopplung. $\mathcal{L}_M$ beinhaltet den nicht wechselwirkenden Anteil der Mesonenfelder, die kinetischen Terme und die Massenterme:

$$\mathcal{L}_M(\Sigma, P) = \frac{1}{2} Tr \left[(\partial_\mu P)^2 + (\partial_\mu \Sigma)^2 - \mu^2 (P^2 + \Sigma^2) \right]. \tag{2.81}$$

Der letzte Term, $\mathcal{L}_{MM}$, schließlich enthält Terme dritter und vierter Ordnung in den Mesonenfeldern und beschreibt die Meson-Meson-Wechselwirkungen,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MM}(\Sigma, P) = \; & f_2 \mathrm{Tr}\left[P^4 + \Sigma^4 + 4\Sigma^2 P^2 - 2\Sigma P \Sigma P\right] + f_1 \left(\mathrm{Tr}\left[P^2 + \Sigma^2\right]\right)^2 \\ & + g' \Big[2\mathrm{Tr}\left[\Sigma^3\right] - 3\mathrm{Tr}\left[\Sigma\right]\mathrm{Tr}\left[\Sigma^2\right] + (\mathrm{Tr}\left[\Sigma\right])^3 \\ & \quad - 6\mathrm{Tr}\left[\Sigma P^2\right] + 6\mathrm{Tr}\left[\Sigma P\right]\mathrm{Tr}\left[P\right] \\ & \quad + 3\mathrm{Tr}\left[\Sigma\right]\mathrm{Tr}\left[P^2\right] - 3\mathrm{Tr}\left[\Sigma\right](\mathrm{Tr}\left[P\right])^2 \Big]. \end{aligned} \tag{2.82}$$

Die Lagrangedichte läßt sich mit Hilfe der Matrix M,

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=0}^{8} \lambda_i \left(\sigma_i + i p_i \right), \tag{2.83}$$

und unter Ausnutzung der Beziehungen

$$\begin{aligned}
3\left(\det M + \det M^\dagger\right) &= 2\mathrm{Tr}\left[\Sigma^3\right] - 3\mathrm{Tr}\left[\Sigma\right]\mathrm{Tr}\left[\Sigma^2\right] + \left(\mathrm{Tr}\left[\Sigma\right]\right)^3 \\
&\quad -6\mathrm{Tr}\left[\Sigma P^2\right] + 6\mathrm{Tr}\left[\Sigma P\right]\mathrm{Tr}\left[P\right] \\
&\quad +3\mathrm{Tr}\left[\Sigma\right]\mathrm{Tr}\left[P^2\right] - 3\mathrm{Tr}\left[\Sigma\right]\left(\mathrm{Tr}\left[P\right]\right)^2 & (2.84) \\
\mathrm{Tr}\left(MM^\dagger MM^\dagger\right) &= \mathrm{Tr}\left[P^4 + \Sigma^4 + 4\Sigma^2 P^2 - 2\Sigma P \Sigma P\right] & (2.85) \\
\mathrm{Tr}\left(MM^\dagger\right) &= \mathrm{Tr}\left[P^2 + \Sigma^2\right] & (2.86) \\
g &= 3g', & (2.87)
\end{aligned}$$

in einer kompakteren Form schreiben:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_s &= \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi + g_{int} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi}(i\gamma_5 \lambda_j p_j + \lambda_j \sigma_j)\psi + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\partial_\mu M \partial_\mu M^\dagger\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\mu^2 \mathrm{Tr}\left(MM^\dagger\right) + f_1\left(\mathrm{Tr} MM^\dagger\right)^2 + f_2 \mathrm{Tr}\left(MM^\dagger MM^\dagger\right) + g\left(det M + det M^\dagger\right).
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Der Index s soll andeuten, daß diese Lagrangedichte $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-symmetrisch ist. Die $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-Invarianten, die man aus M und $M^\dagger$ konstruieren kann sind:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \mathrm{Tr}\left(MM^\dagger\right) & (2.89) \\
I_2 &= \mathrm{Tr}\left(MM^\dagger MM^\dagger\right) & (2.90) \\
I_3 &= \det M & (2.91) \\
I_3^* &= \det M^\dagger. & (2.92)
\end{aligned}$$

Der Nachweis, daß sich alle anderen Invarianten aus diesen zusammensetzen lassen erfolgt über eine verallgemeinerte Burgoyne Identität zwischen Spuren von Produkten von vier Nonetts und zwölf ähnlicher Identitäten, welche sich für Produkte von fünf Nonetts ableiten lassen.

Sieht man von der Möglichkeit weiterer Ableitungsterme ab, so stellt der mesonische Anteil der obigen Lagrangedichte $\mathcal{L}_s$ die allgemeinste Form einer mesonischen Lagrangedichte,

die skalare und pseudoskalare Mesonen-Felder bis zur vierten Ordnung beschreibt und invariant ist unter $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-Transformationen, dar.
Läßt man in der der Lagrangedichte $\mathcal{L}_s$ den t'Hooft-Term,

$$g\left(\det M + \det M^\dagger\right), \tag{2.93}$$

unberücksichtigt, so ist die Lagrangedichte invariant unter der größeren Gruppe $U(3) \otimes U(3)$. In diesem Fall wären jedoch die Pionen und eins der skalaren Mesonen entartet [16], was man experimentell nicht beobachtet.
Wie bereits angedeutet wird im linearen σ-Modell den physikalischen Massen durch spontane und explizite Symmetriebrechung Rechnung getragen. Die explizite Symmetriebrechung wird durch den Term

$$\mathcal{L}_{sb} = -\epsilon_0\sigma_0 - \epsilon_8\sigma_8 \tag{2.94}$$

beschrieben. Damit erhält man für die Lagrangedichte des linearen $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-σ-Modells den Ausdruck

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\sigma \;=\; & \bar{\psi} i\gamma_\mu \partial_\mu \psi + g_{int}\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}(i\gamma_5\lambda_j p_j + \lambda_j\sigma_j)\psi + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\partial_\mu M \partial_\mu M^\dagger\right) \\
& -\frac{1}{2}\mu^2 \mathrm{Tr}\left(MM^\dagger\right) + f_1\left(\mathrm{Tr} MM^\dagger\right)^2 + f_2 \mathrm{Tr}\left(MM^\dagger MM^\dagger\right) \\
& +g\left(\det M + \det M^\dagger\right) - \epsilon_0\sigma_0 - \epsilon_8\sigma_8,
\end{aligned} \tag{2.95}$$

welcher den Ausgangspunkt der folgenden Untersuchungen darstellt.

Kapitel 3

Perturbative Behandlung des Modells

3.1 Tree-Level

Für die folgenden Untersuchungen ist es zweckmäßig die Lagrangedichte in einer kompakteren, auf den Struktur-Tensoren d_{ijk} und f_{ijk} der Gruppe $SU(3)$ basierenden, Form auszudrücken. Die im folgenden verwendete Notation geht auf Arbeiten von Chan und Haymaker [17] zurück, sie stützt sich direkt auf die Felder σ_i und p_i und auf die Struktur-Tensoren. Ausgedrückt in dieser Notation erhält die Lagrangedichte des linearen σ-Modells folgende Form:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\sigma &= \bar{\psi} i\gamma_\mu \partial_\mu \psi + g_{int}\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}(i\gamma_5\lambda_j p_j + \lambda_j\hat{\sigma}_j)\psi + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\hat{\sigma}_i\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu p_i\right)^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}\mu^2\left(\hat{\sigma}_i^2 + p_i^2\right) + G_{ijk}\left(\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}j\hat{\sigma}_k - 3p_ip_j\hat{\sigma}_k\right) + 2\bar{F}_{ijkl}p_ip_j\hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_l \\
&\quad +\frac{1}{3}F_{ijkl}\left(\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_l - p_ip_jp_kp_l\right) - \epsilon_i\hat{\sigma}_i.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Die Tensoren G_{ijk}, F_{ijkl} und $\bar{F}_{ijkl}$ sind gegeben durch:

$$G_{ijk} = g\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2}{3}d_{ijk} - \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\delta_{i0}\delta_{jk} + \delta_{j0}\delta_{ik} + \delta_{k0}\delta_{ij}\right) + \sqrt{6}\delta_{i0}\delta_{j0}\delta_{k0}\right] \tag{3.2}$$

$$F_{ijkl} = f_1\left(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl}\right) + \frac{1}{2}f_2\left(d_{ijn}d_{nkl} + d_{iln}d_{njk} + d_{ikn}d_{njl}\right) \tag{3.3}$$

$$\bar{F}_{ijkl} = f_1\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}f_2\left(d_{ijn}d_{nkl} + f_{ikn}f_{njl} + f_{jkn}f_{nil}\right). \tag{3.4}$$

Die beiden Tensoren G_{ijk} und F_{ijkl} sind symmetrisch in ihren Indizes. $\bar{F}_{ij,kl}$ ist symmetrisch unter Vertauschung von i mit j bzw. k mit l und der Vertauschung der Indexpaare ij und kl. Die Äquivalenz dieser Darstellung zu der vorherigen Darstellung (2.95) erhält man unter Ausnutzung der Beziehungen für die Spur und die Kommutatoren bzw. Antikommutatoren der λ-Matrizen aus den Gleichungen (2.25) - (2.27).

3.2 Symmetrie und Ströme

Läßt man die explizit symmetriebrechenden Terme vorerst außer Acht, so ist die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ invariant unter Transformationen der Gruppe $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ und damit, nach den Ergebnissen des vorigen Kapitels, unter einer $SU(3)$- Flavorrotation und einer axialen Transformation. Die infinitesimalen $SU(3)$- Transformationen der Felder ψ, p_j und σ_j lauten:

$$
\begin{aligned}
\psi' &= \psi + \frac{1}{2} i(\lambda_i \varepsilon_i^V)\psi && (3.5)\\
p_j' &= p_j + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{2}\lambda_j i\varepsilon_i^V \left(\lambda_i P - P\lambda_i\right)\right] && (3.6)\\
\sigma_j' &= \sigma_j + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{2}\lambda_j i\varepsilon_i^V \left(\lambda_i \Sigma - \Sigma\lambda_i\right)\right]. && (3.7)
\end{aligned}
$$

Die ε_i^V bezeichnen die infintesimalen Transformationsparameter. Der zu dieser Transformation zugehörige Vektor-Strom ergibt sich mit (2.11) zu:

$$
\begin{aligned}
J_V^{\mu i} &= \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\lambda_i\psi - \frac{1}{2} i\mathrm{Tr}\left[\lambda_i[P, \partial_\mu P] + \lambda_i[\Sigma, \partial_\mu \Sigma]\right]\\
&= \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\lambda_i\psi + f_{ijk}(p_j\partial_\mu p_k + \sigma_j\partial_\mu\sigma_k). && (3.8)
\end{aligned}
$$

Der Vektor-Strom ist erhalten:

$$
\partial_\mu J_\mu^{Vi} = 0. \tag{3.9}
$$

Die entsprechende Vektor-Ladung lautet:

$$
Q_V^i(t) = \int \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^0\lambda_i\psi + f_{ijk}(p_j\partial_0 p_k + \sigma_j\partial_0\sigma_k)d^3x. \tag{3.10}
$$

Daneben erhält man mit den Transformationen

$$
\begin{aligned}
\psi' &= \psi + \frac{1}{2} i(\lambda_i \epsilon_i^A)\gamma_5\psi && (3.11)\\
p_j' &= p_j - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{2}\lambda_j i\varepsilon_i^A \left(\lambda_i \Sigma + \Sigma\lambda_i\right)\right] && (3.12)\\
\sigma_j' &= \sigma_j + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{2}\lambda_j i\varepsilon_i^A \left(\lambda_i P + P\lambda_i\right)\right], && (3.13)
\end{aligned}
$$

den zugehörigen Axialvektor-Strom:

$$\begin{aligned} J_A^{\mu i} &= \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\lambda_i\psi + \frac{1}{2}i\mathrm{Tr}\left[\partial_\mu P(\lambda_i\Sigma + \Sigma\lambda_i) - \partial_\mu\Sigma(\lambda_i P + P\lambda_i)\right] \\ &= \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\lambda_i\psi + d_{ijk}(\sigma_j\partial_\mu p_k - p_j\partial_\mu\sigma_k). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Auch der Axialvektor-Strom ist erhalten:

$$\partial_\mu J_A^{\mu i} = 0. \tag{3.15}$$

Die Axialvektor-Ladung ergibt sich zu:

$$Q_A^i(t) = \int \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^0\gamma_5\lambda_i\psi + d_{ijk}(\sigma_j\partial_0 p_k - p_j\partial_0\sigma_k)d^3x. \tag{3.16}$$

Bevor die Effekte der spontanen und expliziten Symmetriebrechung näher behandelt werden, wird im folgenden Abschnitt der Grundzustand des Modells in der Tree-Level-Näherung untersucht.

3.3 Grundzustand in der Tree-Level-Näherung

In der Feldtheorie bezeichnet man den Grundzustand als Vakuum und damit die Grundzustandserwartungswerte auch als Vakuumerwartungswerte. In der Tree-Level-Näherung sind diese Vakuumerwartungswerte der Felder gegeben durch den Wert der Felder am Minimum des Potentials. Für das Potential ließt man aus der Lagrangedichte (3.1) ab:

$$\begin{aligned} V &= -\frac{1}{2}\mu^2\left(\hat{\sigma}_i^2 + p_i^2\right) + G_{ijk}\left(\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k - 3p_ip_j\hat{\sigma}_k\right) \\ &\quad + 2\bar{F}_{ijkl}p_ip_j\hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_l + \frac{1}{3}F_{ijkl}\left(\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_l - p_ip_jp_kp_l\right) - \epsilon_i\hat{\sigma}_i. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Daraus erhält man als notwendige Bedingungsgleichungen für das Minimum des Potentials:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial\sigma_i} &= -\mu^2\hat{\sigma}_i + 3G_{ijk}\left(\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k - p_jp_k\right) + 4\bar{F}_{ijkl}p_kp_l\hat{\sigma}_j \\ &\quad + \frac{4}{3}F_{ijkl}\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_l - \epsilon_i \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial p_i} &= -\mu^2 p_i - 6G_{ijk}p_j\hat{\sigma}_k + 4\bar{F}_{ijkl}p_j\hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_l \\
&\quad + \frac{4}{3}F_{ijkl}p_jp_kp_l - \epsilon_i \stackrel{!}{=} 0 \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

Im chiralen Limes, d.h. in Abwesenheit expliziter Symmetriebrechung sind zwei prinzipielle Fälle zu unterscheiden. Die eine Möglichkeit die beiden Bedingungsgleichungen zu erfüllen, ist die verschwindender Vakuumerwartungswerte für alle Felder $\hat{\sigma}_i$ und p_i. Daneben gibt es unendlich viele Kombination nichtverschwindender Vakuumerwartungswerte für bestimmte Felder, die ebenfalls die Gleichungen erfüllen. Sind die Kopplungskonstanten so gewählt, daß erstere Möglichkeit das Minimum des Potentials liefert, so befindet man sich in der Wigner-Weyl-Realisierung,

$$
\begin{aligned}
\langle 0|\hat{\sigma}_i|0\rangle &= 0 \qquad (3.20) \\
\langle 0|p_i|0\rangle &= 0. \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

Das Vakuum besitzt die gleiche $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-Symmetrie wie die Lagrangdichte, es liegt also weder eine explizite noch eine spontane Symmetriebrechung vor. Die Konsequenz daraus ist, daß die Massen der beschriebenen skalaren und pseudoskalaren Mesonen entartet sind, während die Fermionen masselos sind,

$$
\begin{aligned}
m_\psi &= 0 \qquad (3.22) \\
m_{\hat{\sigma}} &= m_p. \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

Die Wigner-Weyl-Realisierung ist nur im chiralen Limes möglich, während die Möglichkeit, die Bedingungsgleichungen (3.18) und (3.19) mit einer Kombination nichtverschwindender Vakuumerwartungswerte bestimmter Felder zu erfüllen, auch bei expliziter Symmetriebrechung gegeben ist. In dieser Arbeit wird der Fall untersucht, daß die Felder $\hat{\sigma}_i$ nichtverschwindende Vakuumerwartungswerte besitzen, während die Vakuumerwartungswerte der Felder p_i verschwinden. Dem Auftreten der nichtverschwindenden Vakuumerwartungswerte wird durch die Einführung der Felder σ_i Rechnung getragen:

$$
\sigma_i = \hat{\sigma}_i - \xi_i, \qquad (3.24)
$$

wobei gilt:

$$
\begin{aligned}
\langle 0|p_i|0\rangle &= 0 \qquad (3.25) \\
\langle 0|\sigma_i|0\rangle &= 0 \qquad (3.26) \\
\langle 0|\hat{\sigma}_i|0\rangle &= \xi_i. \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

Geschrieben in diesen neuen Feldern σ erhält man für die Lagrangedichte den Ausdruck

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi} i\gamma_\mu \partial_\mu \psi + g_{int}\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}(i\gamma_5\lambda_i p_i + \lambda_i\hat{\sigma}_i)\psi + g_{int}\psi\lambda_i\xi_i\bar{\psi} \\ &+\frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma_i)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu p_i)^2 - \frac{1}{2}m^2_{\sigma_{ij}}\sigma_i\sigma_j - \frac{1}{2}m^2_{p_{ij}}p_i p_j + G_{ijk}(\sigma_i\sigma_j\sigma_k - 3p_i p_j\sigma_k) \\ &+4\bar{F}_{ijkl}p_i p_j\sigma_k\xi_l + \frac{4}{3}F_{ijkl}\sigma_i\sigma_j\sigma_k\xi_l + 2\bar{F}_{ijkl}p_i p_j\sigma_k\sigma_l \\ &+\frac{1}{3}F_{ijkl}(\sigma_i\sigma_j\sigma_k\sigma_l - p_i p_j p_k p_l) - E_i\sigma_i - \mathcal{L}_0, \end{aligned} \tag{3.28}$$

mit:

$$m^2_{\sigma_{ij}} = \mu^2\delta_{ij} - 6G_{ijk}\xi_k - 4F_{ijkl}\xi_k\xi_l \tag{3.29}$$

$$m^2_{p_{ij}} = \mu^2\delta_{ij} + 6G_{ijk}\xi_k - 4\bar{F}_{ijkl}\xi_k\xi_l \tag{3.30}$$

$$E_i = \epsilon_i + \mu^2\xi_i - \frac{4}{3}F_{ijkl}\xi_j\xi_k\xi_l - 3G_{ijk}\xi_j\xi_k \tag{3.31}$$

$$\mathcal{L}_0 = \epsilon_i\xi_i + \frac{1}{2}\mu^2\delta_{ij}\xi_i\xi_j - G_{ijk}\xi_i\xi_j\xi_k - \frac{1}{3}F_{ijkl}\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l, \tag{3.32}$$

wobei $m_{\sigma_{ii}}$ die Massen der skalaren und $m_{p_{ii}}$ die Massen der pseudoskalaren Mesonen bezeichnen. Einsetzen der Vakuumerwartungswerte der Felder (3.25) - (3.27) in die Bedingungsgleichungen für die Minimierung des Potentials (3.18) und (3.19) ergibt:

$$\epsilon_i + \mu^2\xi_i - \tfrac{4}{3}F_{ijkl}\xi_j\xi_k\xi_l - 3G_{ijk}\xi_j\xi_k = 0. \tag{3.33}$$

Man erkennt durch Vergleich mit (3.31), daß die Minimierung des Potentials gleichbedeutend ist mit der Forderung, daß die in den Feldern linearen Terme verschwinden:

$$E_i = 0. \tag{3.34}$$

3.4 Spontane Symmetriebrechung im linearen $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-σ-Modell

Das Auftreten nichtverschwindender Vakuumerwartungswerte der Felder $\hat{\sigma}_i$ führt zu spontanen Symmetriebrechungen. Auf welche Art und Weise die Symmetrie des Vakuums dabei gebrochen wird, hängt davon ab welche Felder nichtverschwindende Vakuumerwartungswerte aufweisen. Im weiteren werden nichtverschwindende Vakuumerwartungswerte der Felder σ_0 und σ_8 untersucht, für alle anderen Felder werden verschwindende Vakuumerwartungswerte angenommen. Dem Goldstone-Theorem zufolge sind die spontanen Symmetriebrechungen mit dem Auftreten masseloser Bosonen verknüpft. Die Anzahl der auftretenden masselosen Bosonen ist abhängig davon zu welcher Symmetrie hin die Symmetriebrechung erfolgt und ergibt sich aus der Differenz der Anzahl der Generatoren der Symmetrie der Lagrangedichte und des Grundzustands. im folgenden sind drei Fälle näher untersucht:

1.) $\boldsymbol{\xi_0 = \xi_8 = 0}$

In diesem Fall besitzt das Vakuum die gleiche $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-Symmetrie wie die Lagrangedichte, es kommt zu keiner spontanen Symmetriebrechung und es treten keine masselose Bosonen auf. Die Massen der skalaren und der pseudoskalaren Mesonen sind gemäß den obigen Ausdrücken für $m_{\sigma_{ii}}$ und $m_{p_{ii}}$ entartet,

$$m_{\sigma_i} = m_{p_i} = \mu. \tag{3.35}$$

2.) $\boldsymbol{\sqrt{2}\xi_0 + \xi_8 = 0}$ und $\boldsymbol{\xi \neq 0}$

Hier ist das Vakuum $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$-invariant. Es treten zehn masselose Goldstone-Bosonen auf, die Kaonen, das η-Meson und die entsprechenden skalaren Mesonen:

$$m_K = m_\eta = m_{\sigma_K} = m_{\sigma_\eta} = 0. \tag{3.36}$$

Die Masselosigkeit dieser Mesonen ergibt sich durch Vergleich des Ausdrucks für die Massen,

$$m^2_{p_i} = \mu^2 + 6G_{iik}\xi_k - 4\bar{F}_{iikl}\xi_k\xi_l \qquad i = 4,5,6,7,8 \tag{3.37}$$

$$m^2_{\sigma_i} = \mu^2 - 6G_{iik}\xi_k - 4F_{iikl}\xi_k\xi_l \qquad i = 4,5,6,7,8 \tag{3.38}$$

mit dem Ausdruck $E_8 = 0$, der sich aus der Minimierung des Potentials ergibt,

$$E_8 = 0 = \epsilon_8 + \mu^2\xi_8 - \tfrac{4}{3}F_{8jkl}\xi_j\xi_k\xi_l - 3G_{8jk}\xi_j\xi_k. \tag{3.39}$$

Damit gilt:

$$m^2_K = m^2_\eta = m^2_{\sigma_K} = m^2_{\sigma_\eta} = -\frac{\epsilon_8}{\xi_8}, \tag{3.40}$$

was bedeutet, daß die σ_k-Mesonen im chiralen Limes masselos sind. Die Äquivalenz dieser Ausdrücke ist aufgrund der Tensorformulierung nicht direkt ersichtlich. Weiter unten werden jedoch die Ausdrücke nocheinmal explizit, ohne die Hilfe der Tensoren, angegeben, dort wird die Äquivalenz klar ersichtlich.

3.) $\boldsymbol{\xi_0 \neq 0}$ und $\boldsymbol{\xi_8 = 0}$

Diese Wahl der Vakuumerwartungswerte bricht die Symmetrie des Vakuums zur $SU(3)$-Symmetrie hin. Ausgedrückt durch die Vektor- und Axialvektor-Ladungen (3.10) und (3.16) bedeutet dies:

$$Q_V^i|0\rangle = 0 \quad \text{und} \quad Q_A^i|0\rangle \neq 0. \tag{3.41}$$

Es treten acht masselose Goldstone-Bosonen auf, die Pionen, die Kaonen und das η_8-Meson. Die Masselosigkeit der Mesonen ergibt sich wiederum aus dem Vergleich des Ausdrucks für die Massen,

$$m_{p_i}^2 = \mu^2 + 6G_{iik}\xi_k - 4\bar{F}_{iikl}\xi_k\xi_l \qquad i = 1,..,8 \tag{3.42}$$

diesmal mit dem Ausdruck $E_0 = 0$, welcher sich ebenfalls aus der Minimierung des Potentials ergibt,

$$E_0 = 0 = \epsilon_0 + \mu^2\xi_0 - \tfrac{4}{3}F_{0jkl}\xi_j\xi_k\xi_l - 3G_{0jk}\xi_j\xi_k. \tag{3.43}$$

Es gilt somit:

$$m_{p_i}^2 = -\frac{\epsilon_0}{\xi_0} \qquad i = 1,..,8. \tag{3.44}$$

Da der t'Hooft-Term, der Term mit der Tensor G_{ijk} beinhaltet, die Symmetrie der Lagrangedichte von der $U(3)\otimes U(3)$-Symmetrie auf die $SU(3)\otimes SU(3)$-Symmetrie reduziert, wird unter Vernachläßigung dieses Terms die Lagrangedichte $U(3) \otimes U(3)$-symmetrisch. Dies hat zur Folge, daß auch das neunte pseudoskalare Meson η_0 masselos wird. In diesem Fall treten dann neun Goldstone-Bosonen auf und die Symmetrie des Vakuums ist eine $U(3)$-Symmetrie.

3.5 Mischungswinkel und physikalische Massen der Mesonen

Im Gegensatz zu den π^+, π^-, π^0 und K^+, K^-, K^0, $\bar{K}^0$ kommen die Zustände η_0 und η_8 nicht als reine Zustände in der Natur vor. Die beiden im Experiment beobachteten Mesonen η und η' sind Mischungen der Zustände η_0 und η_8. Dieser Tatsache wird durch die folgende Rotation Rechnung getragen:

$$\eta_0 = \eta' cos\alpha - \eta sin\alpha \tag{3.45}$$

$$\eta_8 = \eta' sin\alpha + \eta cos\alpha. \tag{3.46}$$

Für die skalaren Mesonen wird eine analoge Rotation durchgeührt:

$$\sigma_{\eta_0} = \sigma_{\eta'} cos\beta - \sigma_\eta sin\beta \tag{3.47}$$

$$\sigma_{\eta_8} = \sigma_{\eta'} sin\beta + \sigma_\eta cos\beta. \tag{3.48}$$

Die beiden auftretenden Mischungswinkel α und β werden durch die Forderung fixiert, daß im quadratischen Teil der Lagrangedichte (3.28) nach Durchführung obiger Rotationen keine gemischten Terme $\eta\eta'$ bzw. $\sigma_\eta\sigma_{\eta'}$ mehr auftreten. Diese Forderung führt auf zwei Gleichungen, aus welchen man für die Winkel folgende Ausdrücke gewinnt:

$$\alpha = \frac{1}{2} ArcTan\left[\frac{-2\sqrt{3}g\xi_8 - 8f_2\xi_0\xi_8 + 2\sqrt{2}f_2\xi_8^2}{3\sqrt{3}g\xi_0 + \sqrt{6}g\xi_8 - 2\sqrt{2}f_2\xi_0\xi_8 + f_2\xi_8^2}\right] \tag{3.49}$$

$$\beta = \frac{1}{2} ArcTan\left[\frac{-2/\sqrt{3}g\xi_8 + 8(f_1+f_2)\xi_0\xi_8 - 2\sqrt{2}f_2\xi_8^2}{\sqrt{3}g\xi_0 - 4f_1\left(\xi_8^2 - \xi_0^2\right) + \sqrt{2/3}g\xi_8 + 2\sqrt{2}f_2\xi_0\xi_8 - f_2\xi_8^2}\right]. \tag{3.50}$$

Die Massen der Mesonen in der Tree-Level-Näherung sind damit durch die folgenden Gleichungen gegeben:

pseudoskalare Mesonen

$$m_\pi^2 = \mu^2 - 4\xi_0^2 f_1 - 4\xi_8^2 f_1 - \frac{4}{3}\xi_0^2 f_2 - \frac{2}{3}\xi_8^2 f_2 - \frac{4}{3}\sqrt{2}\xi_0\xi_8 f_2 - \frac{2g}{\sqrt{3}}\xi_0 + 2\sqrt{\frac{2}{3}}g\xi_8 \tag{3.51}$$

$$m_K^2 = \mu^2 - 4\xi_0^2 f_1 - 4\xi_8^2 f_1 - \frac{4}{3}\xi_0^2 f_2 - \frac{14}{3}\xi_8^2 f_2 + \frac{2}{3}\sqrt{2}\xi_0\xi_8 f_2 - \frac{2g}{\sqrt{3}}\xi_0 - \sqrt{\frac{2}{3}}g\xi_8 \tag{3.52}$$

$$m_\eta^2 = \mu^2 - 4f_1(\xi_0^2+\xi_8^2) - \frac{4}{3}f_2\xi_0^2 + \sqrt{\frac{1}{3}}g\xi_0 - \frac{5}{3}f_2\xi_8^2 + \frac{2}{3}\sqrt{2}f_2\xi_0\xi_8 - \sqrt{\frac{2}{3}}g\xi_8 + \frac{1}{3}\sqrt{C_1^2+C_2^2} \tag{3.53}$$

$$m_{\eta'}^2 = \mu^2 - 4f_1(\xi_0^2+\xi_8^2) - \frac{4}{3}f_2\xi_0^2 + \sqrt{\frac{1}{3}}g\xi_0 - \frac{5}{3}f_2\xi_8^2 + \frac{2}{3}\sqrt{2}f_2\xi_0\xi_8 - \sqrt{\frac{2}{3}}g\xi_8 - \frac{1}{3}\sqrt{C_1^2+C_2^2} \tag{3.54}$$

mit

$$C_1 = -2\sqrt{3}g\xi_8 - 8f_2\xi_0\xi_8 + 2\sqrt{2}f_2\xi_8^2 \tag{3.55}$$
$$C_2 = -3\sqrt{3}g\xi_0 - \sqrt{6}g\xi_8 + 2\sqrt{2}f_2\xi_0\xi_8 - f_2\xi_8^2 \tag{3.56}$$

skalare Mesonen

$$m_{\sigma_\pi}^2 = +\mu^2 - 4\xi_0^2 f_1 - 4\xi_8^2 f_1 - 4\xi_0^2 f_2 - 2\xi_8^2 f_2 - 4\sqrt{2}\xi_0\xi_8 f_2 - \frac{2g}{\sqrt{3}}\xi_0 + 2\sqrt{\frac{2}{3}}g\xi_8 \tag{3.57}$$

$$m_{\sigma_K}^2 = \mu^2 - 4\xi_0^2 f_1 - 4\xi_8^2 f_1 - 4\xi_0^2 f_2 - 2\xi_8^2 f_2 + 2\sqrt{2}\xi_0\xi_8 f_2 + \frac{2g}{\sqrt{3}}\xi_0 + \sqrt{\frac{2}{3}}g\xi_8 \tag{3.58}$$

$$m_{\sigma_\eta}^2 = \mu^2 - 8f_1(\xi_0^2+\xi_8^2) - 4f_2\xi_0^2 - \sqrt{\frac{1}{3}}g\xi_0 - 5f_2\xi_8^2 + 2\sqrt{2}f_2\xi_0\xi_8 + \sqrt{\frac{2}{3}}g\xi_8 + \sqrt{C'^2_1 + C'^2_2} \tag{3.59}$$

$$m_{\sigma_{\eta'}}^2 = \mu^2 - 8f_1(\xi_0^2+\xi_8^2) - 4f_2\xi_0^2 - \sqrt{\frac{1}{3}}g\xi_0 - 5f_2\xi_8^2 + 2\sqrt{2}f_2\xi_0\xi_8 + \sqrt{\frac{2}{3}}g\xi_8 - \sqrt{C'^2_1 + C'^2_2} \tag{3.60}$$

mit

$$C'_1 = -2/\sqrt{3}g\xi_8 + 8(f_1+f_2)\xi_0\xi_8 - 2\sqrt{2}f_2\xi_8^2 \tag{3.61}$$
$$C'_2 = -\sqrt{3}g\xi_0 + 4f_1(\xi_8^2-\xi_0^2) - \sqrt{2/3}g\xi_8 - 2\sqrt{2}f_2\xi_0\xi_8 + f_2\xi_8^2. \tag{3.62}$$

Die sich aus der Minimierung des Potentials ergebenden Kondensat-Gleichungen (3.34) lauten in dieser Schreibweise:

$$0 = \epsilon_0 + \xi_0 \left(\mu^2 - 4f_1\xi_0^2 - 4f_1\xi_8^2 - \frac{4}{3}f_2\xi_0^2 - 4f_2\xi_8^2 + \frac{2}{3}\sqrt{2}f_2\frac{\xi_8^3}{\xi_0} - \frac{2}{\sqrt{3}}g\xi_0 - \sqrt{\frac{1}{3}}g\frac{\xi_8^2}{\xi_0} \right) \tag{3.63}$$

$$0 = \epsilon_8 + \xi_8 \left(\mu^2 - 4f_1\xi_8^2 - 4f_1\xi_0^2 - 4f_2\xi_0^2 - 2f_2\xi_8^2 + 2\sqrt{2}f_2\xi_0\xi_8 + \frac{2}{\sqrt{3}}g\xi_0 + \sqrt{\frac{2}{3}}g\xi_8 \right). \tag{3.64}$$

Hieran kann man nun, wie oben erwähnt, ablesen, daß im chiralen Limes für den Fall einer spontanen Symmetriebrechung des Vakuums zur $SU(2) \otimes SU(2)$-Symmetrie hin, d.h. für $\xi_8 \neq 0$ und $\sqrt{2}\xi_0 + \xi_8 = 0$, die Kaonen, das η-Meson und die entsprechenden skalaren Mesonen masselos sind. Gilt im chiralen Limes $\xi_8 = 0$ und $\xi_0 \neq 0$, so liest man die Masselosigkeit der Pionen, Kaonen und des η-Mesons ab, während das η'-Meson durch den Einfluß des t'Hooft-Terms massiv bleibt.

3.6 Explizite Symmetriebrechung und PCAC

Durch den Anteil

$$\mathcal{L}_{sb} = -\epsilon_0\sigma_0 - \epsilon_8\sigma_8 \tag{3.65}$$

der Lagrangedichte wird die Symmetrie der Lagrangedichte explizit gebrochen. Dies führt dazu, daß die, durch die spontane Symmetriebrechung auftretenden, Goldstone-Bosonen massiv werden, entsprechend den Werten von ϵ_0 und ϵ_8. Die Symmetriebrechung hat außerdem zur Folge, daß die zu den Transformationen der Gruppe $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ gehörenden Ströme nicht mehr alle erhalten sind. Da die Lagrangedichte abgesehen von obigem Term invariant ist unter Transformationen der Gruppe $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$, genügt es im folgenden, den Einfluß dieses Terms zu untersuchen. Unter einer $SU(3)$-Flavorrotation, (3.5) - (3.7), erhält man für die Variation der Lagrangedichte:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_V &= -\epsilon_k \delta_V \sigma_k \\ &= -\epsilon_k \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{4}\lambda_k \varepsilon_i^V \left(\lambda_i\sigma_j\lambda_j - \sigma_j\lambda_j\lambda_i\right)\right] \\ &= -\epsilon_k \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{2} f_{ijl}\lambda_k\lambda_l\varepsilon_i^V\sigma_j\right] \\ &= -\epsilon_k f_{ijk}\varepsilon_i^V\sigma_j. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Im Fall $\epsilon_8 = 0$ ist diese Variation Null und der Vektorstrom ist erhalten. Im allgemeinen

Fall, $\epsilon_8 \neq 0$ gilt dies nicht mehr. Unter axialer Transformation, (3.11) - (3.13), erhält man für die Variation der Lagrangedichte:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_A &= -\epsilon_k \delta\sigma_k \\
&= -\epsilon_k \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{4}\lambda_k \varepsilon_i^A \left(\lambda_i p_j \lambda_j + p_j \lambda_j \lambda_i\right)\right] \\
&= -\epsilon_k \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{2} d_{ijl}\lambda_k \lambda_l \varepsilon_i^A p_j\right] \\
&= -\epsilon_k d_{ijk} \varepsilon_i^A p_j . \qquad (3.67)
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Gell-Mann Lévy Gleichung für die Divergenz eines Stroms,

$$\partial_\mu J_A^{\mu\alpha} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i^A}\delta\mathcal{L}, \qquad (3.68)$$

erhält man daraus für die Divergenz des Axialvektor-Stroms,

$$\partial_\mu J_A^{\mu i} = -d_{ijk}\epsilon_k p_j . \qquad (3.69)$$

Für die pionische und die kaonische Komponente dieser Divergenz folgt daraus:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu J_A^{\mu\pi} &= -\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\epsilon_0 + \sqrt{\frac{1}{3}}\epsilon_8\right) p_\pi \qquad (3.70) \\
\partial_\mu J_A^{\mu K} &= -\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\epsilon_0 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}\epsilon_8\right) p_K . \qquad (3.71)
\end{aligned}$$

Aus den Ausdrücken für die Massen, (3.51) und (3.52), und den Kondensat-Gleichungen, (3.63) und (3.64), erhält man die Beziehungen

$$\begin{aligned}
-\left(\epsilon_0 + \frac{\epsilon_8}{\sqrt{2}}\right) &= m_\pi^2 \left(\xi_0 + \frac{\xi_8}{\sqrt{2}}\right) \qquad (3.72) \\
-\left(\epsilon_0 - \frac{\epsilon_8}{2\sqrt{2}}\right) &= m_K^2 \left(\xi_0 - \frac{\xi_8}{2\sqrt{2}}\right) . \qquad (3.73)
\end{aligned}$$

Mit diesen Beziehungen ergeben sich für die pionische und die kaonische Komponente der Divergenz des Axialvektor-Stroms:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu J_A^{\mu\pi} &= m_\pi^2 \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\xi_0 + \sqrt{\frac{1}{3}}\xi_8\right) p_\pi \equiv m_\pi^2 f_\pi p_\pi \qquad (3.74) \\
\partial_\mu J_A^{\mu K} &= m_K^2 \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\xi_0 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}\xi_8\right) p_K \equiv m_K^2 f_K p_K \qquad (3.75)
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen bezeichnet man als 'partially conserved axial-vector current' (PCAC) Hypothese. Für die Pion-und die Kaon-Zerfallskonstanten erhält man daraus die folgenden Ausdrücke:

$$
\begin{aligned}
f_\pi &= \sqrt{\frac{2}{3}}\xi_0 + \sqrt{\frac{1}{3}}\xi_8 && (3.76)\\
f_K &= \sqrt{\frac{2}{3}}\xi_0 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}\xi_8, && (3.77)
\end{aligned}
$$

in Abhängigkeit von den Vakuumerwartungswerten der Felder σ_0 und σ_8.

3.7 Numerische Reproduktion der Mesonmassen

Mit den Ausdrücken für die Massen der pseudoskalaren und skalaren Mesonen lassen sich durch geeignete Wahl der Kopplungsparameter f_1, f_2 und g die experimentellen Werte für die Mesonenmassen recht gut reproduzieren. Der Einfluß der expliziten Symmetriebrechung durch ϵ_0 und ϵ_8 auf die Mesonenmassen erfolgt über die beiden Kondensat-Gleichungen (3.63) und (3.64). Mit Hilfe dieser Gleichungen werden die Mesonkondensate ξ_0 und ξ_8 in Abhängigkeit der Kopplungsparameter bestimmt und damit dann die Mesonenmassen nach den Gleichungen (3.51)-(3.60) berechnet.
Um nun die Mesonmassen explizit zu berechnen, muß man zunächst die Parameter der expliziten Symmetriebrechung, ϵ_0 und ϵ_8, festlegen. Dazu verwendet man die Beziehungen (3.72) und (3.73). Unter Ausnutzung der Beziehungen für die Pion- und die Kaon-Zerfallskonstanten (3.77) und (3.77) erhält man, unter Verwendung der experimentellen Werte für diese, daraus:

$$
\begin{aligned}
\epsilon_0 &= -\sqrt{\frac{1}{6}}\left(m_\pi^2 f_\pi + 2m_K^2 f_K\right) \approx -18.6 \cdot 10^6 MeV^3 && (3.78)\\
\epsilon_8 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(m_K^2 f_K - m_\pi^2 f_\pi\right) \approx 23.1 \cdot 10^6 MeV^3. && (3.79)
\end{aligned}
$$

Die damit ermittelten Mesonenmassen und die verwendeten Kopplungsparameter befinden sich in den folgenden Tabellen unter der Bezeichnung 'Satz 1'. Daneben befinden sich in diesen Tabellen die Ergebnisse einer Arbeit von Meyer-Ortmanns und Schaefer [18] (siehe dazu auch [19]-[21]) unter der Bezeichnung 'Satz 2', die sich mit dem angegebenen Parametersatz ebenfalls reproduzieren lassen:

	$\mu[MeV]$	f_1	f_2	$g[MeV]$	$\epsilon_0[GeV^3]$	$\epsilon_0[GeV^3]$
$Satz\ 1$	140.0	1.0	26.8	-2150	0.0186	-0.0231
$Satz\ 2$	244.1	4.17	4.48	-1812	0.0272	-0.0352

Tabelle 1: Tree-Level-Parametrisierung des linearen $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-σ-Modells.

	m_π	m_K	m_η	$m_{\eta'}$	m_{a_0}	$m_{K_0^*}$	$m_{f_0(1476)}$	$m_{f_0(975)}$
$Satz\ 1$	154.8	495.5	534.2	970.7	1113.8	1241.0	1346.5	786.6
$Satz\ 2$	136.4	495.7	549.7	1049.6	1006.4	1036.1	1205.4	753.4
$Experiment$	138.0	495.7	547.5	957.8	980	1322	1476	975

Tabelle 2: Numerische Reproduktion der Mesonmassen in MeV.

Die Identifikation der skalaren Massen ist nicht so eindeutig wie die der pseudoskalaren Mesonen, sie ist mit größerer Unsicherheit behaftet und sollte als eine mögliche Identifikation betrachtet werden.

Kapitel 4

Nichtperturbative Methoden

Die im vorigen Kapitel vorgestellte Methode behandelt das lineare $SU(3)$-σ-Modell perturbativ in der Tree-Level-Näherung. Chan und Haymaker [17] haben die perturbative Behandlung bis zu Schleifendiagrammen zweiter Ordnung erweitert. Man kann jedoch nicht erwarten, daß eine perturbative Behandlung in der Nähe des chiralen Phasenübergangs verläßliche Ergebnisse liefert. Es ist daher geboten, nichtperturbative Methoden anzuwenden. In dieser Arbeit wird ein nichtperturbativer Zugang mittels der Quasiteilchen-RPA zur Behandlung des linearen σ-Modells vorgestellt. Diese Methode besteht im wesentlichen aus zwei Schritten. Im ersten Schritt wird der Hamilton-Operator des Modells mittels des Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB) Formalismus auf eine Quasiteilchen-Basis transformiert, bevor dann im zweiten Schritt eine Behandlung im Rahmen der Random Phase Approximation (RPA) erfolgt. Aus der Vielteilchen-Physik ist bekannt, daß die RPA auf der Basis eines HFB-Feldes einen symmetrieerhaltenden Zugang liefert, was bedeutet, daß im chiralen Limes in der Goldstone-Realisierung Null-Lösungen der RPA-Gleichungen, die masselosen Bosonen entsprechen, auftreten.
In den beiden folgenden Abschnitten werden zunächst der HFB-Formalismus und die RPA formal dargestellt. Im nächsten Kapitel wird dann konkret das lineare $SU(3)$-σ-Modell mittels dieses Zugangs bearbeitet.

4.1 Hartree-Fock-Bogoliubov Formalismus

Die wesentlichen Schritte des HFB-Formalismus bestehen darin den exakten Grundzustand des Hamilton-Operators durch einen Quasiteilchengrundzustand zu nähern und diesen dann durch Variation zu bestimmen. Dies führt auf Gleichungen die es erlauben die Bogoliubov-Faktoren, welche die Transformation von der Teilchen- in die Quasiteilchen-Basis definieren, zu ermitteln und damit den gesuchten Grundzustand zu bestimmen. Die folgende Darstellung des HFB-Formalismus für Bosonen folgt der entsprechenden Arbeit von Ring und Schuck [22] für Fermionen.
Ausgangspunkt dieser Darstellung ist der Vielteilchen-Hamilton-Operator in zweiter Quantisierung:

$$H = \sum_{ij} \mu_{ij} a_i^\dagger a_j + \frac{1}{4} \sum_{ijkl} \lambda_{ijkl} a_i^\dagger a_j^\dagger a_k a_l. \tag{4.1}$$

Das Teilchen-Vakuum ist durch den Zustand $|0\rangle$ gegeben,

$$a_i |0\rangle = 0. \tag{4.2}$$

Der erste Schritt des HFB-Formalismus besteht im Übergang von der Teilchen-Basis in die Quasiteilchen-Basis. Dieser erfolgt durch eine Bogoliubov-Transformation. Die allgemeinste Form einer linearen Transformation von den Teilchen-Operatoren $a, a^\dagger$ zu den Quasiteilchen-Operatoren $\alpha, \alpha^\dagger$ ist gegeben durch:

$$\alpha_j^\dagger = \sum_i U_{ij}^T a_i^\dagger - V_{ij}^T a_i, \tag{4.3}$$

oder in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^\dagger & -V^\dagger \\ -V^T & U^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix} = \mathcal{B} \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Die Wahl der Matrizen U und V ist nicht völlig willkürlich, sie müssen so beschaffen sein, daß die Quasiteilchen-Operatoren den gleichen Boson-Vertauschungsrelationen genügen wie die Teilchen-Operatoren. Dies erfordert, daß:

$$\mathcal{B} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathcal{B}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Einem Theorem von Bloch und Messiah [23,24] zufolge kann man die Transformation $\mathcal{B}$ in drei Transformationen aufspalten:

$$\mathcal{B} = \mathcal{D}\bar{\mathcal{B}}\mathcal{C}. \tag{4.6}$$

Die Transformation $\mathcal{D}$ stellt eine unitäre Transformation der Teilchen-Operatoren untereinander dar:

$$b_j^\dagger = \sum_i \mathcal{D}_{ij} a_j^\dagger. \tag{4.7}$$

Sie definiert eine kanonische Basis, in der die Dichte-Matrix diagonal ist. Die Transformation $\bar{\mathcal{B}}$ bezeichnet eine spezielle Bogoliubov-Transformation,

$$\beta_j^\dagger = u_j b_j^\dagger - v_j b_j, \tag{4.8}$$

wobei die u_j und die v_j gemäß (4.5) der Relation

$$u_j^2 - v_j^2 = 1 \tag{4.9}$$

genügen. Die Transformation $\mathcal{C}$ entspricht einer unitären Transformation der Quasiteilchen-Operatoren untereinander,

$$\alpha_j^\dagger = \sum_i \mathcal{C}_{ij} \beta_j^\dagger \tag{4.10}$$

Dies zeigt, daß die Bogoliubov-Transformation $\mathcal{B}$ eine BCS-Transformation in der kanonischen Basis darstellt. Das Theorem von Thouless [25,26] besagt für Bosonen, daß ausgehend von einer allgemeinen Produktwellenfunktion $|\Phi_0\rangle$, welche das Vakuum der Quasiteilchen-Operatoren α_i darstellt, sich jede andere allgemeine Produktwellenfunktion $|\Phi_1\rangle$, welche nicht orthogonal zu $|\Phi_0\rangle$ ist, schreiben läßt als:

$$|\Phi_1\rangle = \langle\Phi_0|\Phi_1\rangle exp\left[\frac{1}{2}\sum_{ij} Z_{ij}\alpha_i^\dagger \alpha_j^\dagger\right]|\Phi_0\rangle, \tag{4.11}$$

mit

$$Z = \left[\left(U_0^T V_1 - V_0^T U_1\right)\left(U_0^\dagger U_1 - V_0^\dagger V_1\right)^{-1}\right]^*. \tag{4.12}$$

Das Vakuum der durch die Bogoliubov-Transformation definierten Quasiteilchen ist nicht mehr das Teilchen-Vakuum $|0\rangle$, sondern der Zustand $|\Phi\rangle$,

$$\alpha_j|\Phi\rangle = 0. \tag{4.13}$$

Aus dem Thouless Theorem folgt, daß man diese Zustände $|\Phi\rangle$ mit Hilfe der Teilchen-Operatoren schreiben kann als

$$|\Phi\rangle = exp\left[\frac{1}{2}\sum_{ij} Z_{ij} a_i^\dagger a_j^\dagger\right]|0\rangle, \tag{4.14}$$

mit

$$Z = \left[VU^{-1}\right]^*. \tag{4.15}$$

Es gibt viele Zustände $|\Phi\rangle$, die diese Bedingung erfüllen. Die beste Näherung für den exakten Grundzustand des Hamilton-Operators (4.1) ist der Zustand, der den Grundzustandserwartungswert des Hamilton-Operators minimiert,

$$\delta\frac{\langle\Phi|H|\Phi\rangle}{\langle\Phi|\Phi\rangle} = 0. \tag{4.16}$$

Für Fermionen verletzen die Wellenfunktionen $|\Phi\rangle$ die Teilchenzahlerhaltung, daher wird für Fermionen die obige Variation durch die Bedingung eingeschränkt, daß die Teilchenzahl den richtigen Wert behält,

$$\langle\Phi|\hat{N}|\Phi\rangle = N, \tag{4.17}$$

dabei bezeichnet $\hat{N}$ den Teilchenzahloperator und N die Teilchenzahl. Diese Bedingung wird durch Hinzufügen von $-\lambda\hat{N}$ zum Hamilton-Operator berücksichtigt:

$$H' = H - \lambda\hat{N} \tag{4.18}$$

Der Lagrange-Multiplikator λ ist das chemische Potential und wird durch die Bedingung (4.17) fixiert. Für H' ergibt sich somit

$$H' = \sum_{ij}(\mu_{ij} - \lambda)\, a_i^\dagger a_j + \frac{1}{4}\sum_{ijkl}\lambda_{ijkl} a_i^\dagger a_j^\dagger a_k a_l. \tag{4.19}$$

Für Bosonen gibt es keine Teilchenzahlerhaltung, daher ist das chemische Potential für Bosonen null. Im weiteren wird nur der mesonische Anteil des linearen $SU(3)$-σ-Modells untersucht, so daß man weiterhin mit der Lagrangedichte (4.1) arbeiten kann. Nach Durchführung einer Bogoliubov-Transformation auf den Operatoren $a_i, a_i^\dagger$ kann man für den Hamilton-Operator in der Quasiteilchen-Basis formal

$$H = H^0 + \sum_{ij} H_{ij}^{11}\alpha_i^\dagger\alpha_j + \frac{1}{2}\sum_{ij}\left(H_{ij}^{20}\alpha_i^\dagger\alpha_j^\dagger + H_{ji}^{20^*}\alpha_j\alpha_i\right) + H_{int} \tag{4.20}$$

schreiben. Zur Durchführung der Variation (4.16), des Hamilton-Operators, betrachtet man kleine Abweichungen von $|\Phi\rangle$,

$$\begin{aligned} |\Phi'\rangle &= |\Phi\rangle + |\delta\Phi\rangle \\ &= |\Phi\rangle + \frac{1}{2}\sum_{kl} Z_{kl}\alpha_k^\dagger\alpha_l^\dagger|\Phi\rangle + \frac{1}{8}\left(\sum_{kl} Z_{kl}\alpha_k^\dagger\alpha_l^\dagger\right)^2|\Phi\rangle. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Durch Einsetzen der Wellenfunktion (4.21) und des Hamilton-Operators in der Quasiteilchen-Basis (4.20) in die Variation (4.16) erhält man:

$$\frac{\langle\Phi'|H|\Phi'\rangle}{\langle\Phi'|\Phi'\rangle} = H^0 + \frac{1}{2}\sum_{k<l} Z_{kl}^* H_{kl}^{20} + \frac{1}{2}\sum_{k<l} Z_{kl} H_{kl}^{20^*} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix} Z^* & Z \end{pmatrix}\mathcal{K}\begin{pmatrix} Z \\ Z^* \end{pmatrix}, \tag{4.22}$$

wobei $\mathcal{K}$ den Krümmungstensor bezeichnet. Es gilt:

$$H^0 = \langle\Phi|H|\Phi\rangle \tag{4.23}$$
$$H_{kl}^{20} = \langle\Phi|\left[\alpha_l\alpha_k, H\right]|\Phi\rangle \tag{4.24}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}^{11}_{klk'l'} &= \langle\Phi|\left[\alpha_l\alpha_k,\left[H,\alpha^\dagger_{k'}\alpha^\dagger_{l'}\right]\right]|\Phi\rangle & (4.25)\\
\mathcal{K}^{12}_{klk'l'} &= \langle\Phi|\left[\alpha_l\alpha_k,\left[H,\alpha_{k'}\alpha_{l'}\right]\right]|\Phi\rangle & (4.26)\\
\mathcal{K}^{21}_{klk'l'} &= \mathcal{K}^{12}_{klk'l'}{}^{*} & (4.27)\\
\mathcal{K}^{22}_{klk'l'} &= \mathcal{K}^{11}_{klk'l'}{}^{*}. & (4.28)
\end{aligned}
$$

Die Variation bezüglich Z_{kl}, Z^*_{kl} führt auf die Bedingungen

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial Z_{kl}}\left.\frac{\langle\Phi'|H'|\Phi'\rangle}{\langle\Phi'|\Phi'\rangle}\right|_{Z=0} &= H^{20*}_{kl}=0 & (4.29)\\
\frac{\partial}{\partial Z^*_{kl}}\left.\frac{\langle\Phi'|H'|\Phi'\rangle}{\langle\Phi|\Phi'\rangle}\right|_{Z=0} &= H^{20}_{kl}=0. & (4.30)
\end{aligned}
$$

Diese Bedingungen liefern ein Minimum, falls der Krümmungstensor $\mathcal{K}$ positiv definit ist. Die Gleichungen sind von einer Transformation $\mathcal{C}$ der Quasiteilchen-Operatoren untereinander nicht beeinflußt. Man kann daher die dritte Transformation, $\mathcal{C}$, der allgemeinen Bogoliubov-Transformation dadurch festlegen, daß man den Anteil H^{11} des Hamilton-Operators diagonalisiert. Dies bedeutet, daß die Minimierung des Grundzustanderwartungswerts des Hamilton-Operators zur Bestimmung der Bogoliubov-Faktoren äquivalent ist mit der Diagonalisierung der Supermatrix

$$
\begin{pmatrix} H^{11} & H^{20} \\ -H^{20*} & -H^{11*} \end{pmatrix}. \tag{4.31}
$$

Die Ausdrücke für H^{11} und H^{20} erhält man, indem man den Hamilton-Operator in der Quasiteilchen-Basis schreibt und dann mit Hilfe des Wick-Theorems den Hamilton-Operator in Normalordnung bringt. Aus den Bedingungen

$$
H^{20}_{kl}=0 \quad \text{und} \quad H^{20*}_{kl}=0 \tag{4.32}
$$

gewinnt man Gleichungen zur Bestimmung der Bogoliubov-Faktoren, wodurch das Quasiteilchen-Vakuum bestimmt und die Bogoliubov-Transformation festgelegt wird. Die Diagonalisierung läßt sich auch als Eigenwertproblem formulieren. Sei:

$$
\mathcal{M}=\mathcal{B}\begin{pmatrix} H^{11} & H^{20} \\ -H^{20*} & -H^{11*} \end{pmatrix}\mathcal{B}^\dagger, \tag{4.33}
$$

damit gilt:

$$
\mathcal{M}\begin{pmatrix} U_j \\ V_j \end{pmatrix} = \varepsilon_j \begin{pmatrix} U_j \\ V_j \end{pmatrix}, \tag{4.34}
$$

wobei U_j, V_j die Spalten der Matrizen U und V aus (4.3) darstellen. Diese Gleichungen bezeichnet man als die HFB-Gleichungen. Der Hamilton-Operator (4.20) wird damit zu:

$$H = H_0 + \sum_j \varepsilon_j \alpha_j^\dagger \alpha_j + H_{int}. \tag{4.35}$$

4.2 Random Phase Approximation (RPA)

Die folgende Ableitung der RPA-Gleichungen folgt der Methode der Bewegungsgleichungen von Rowe [27]. Ausgangspunkt dieser Ableitung ist die Schrödinger-Gleichung,

$$H|\nu\rangle = E_\nu|\nu\rangle. \tag{4.36}$$

Die Zustände $|\nu\rangle$ sind die Eigenzustände des Hamilton-Operators. Die Anregungsoperatoren $Q_\nu^\dagger$ dieser Zustände werden durch die folgenden Gleichungen definiert:

$$Q_\nu^\dagger|0\rangle = |\nu\rangle \tag{4.37}$$

$$Q_\nu^\dagger|\nu\rangle = \sqrt{\nu+1}|\nu+1\rangle \tag{4.38}$$

$$Q_\nu|0\rangle = 0 \tag{4.39}$$

Damit läßt sich die Schrödinger-Gleichung (4.36) schreiben als:

$$HQ_\nu^\dagger|0\rangle = E_\nu Q_\nu^\dagger|0\rangle. \tag{4.40}$$

Daneben gilt für den Grundzustand:

$$H|0\rangle = E_0|0\rangle, \tag{4.41}$$

woraus folgt, daß:

$$Q_\nu^\dagger H|0\rangle = Q_\nu^\dagger E_0|0\rangle. \tag{4.42}$$

Gleichung (4.41) subtrahiert von Gleichung (4.40) ergibt unter Verwendung der Kommutator-Schreibweise:

$$\left[H, Q_\nu^\dagger\right]|0\rangle = (E_\nu - E_0)\, Q_\nu^\dagger|0\rangle, \tag{4.43}$$

die Bewegungsgleichungen des Systems. Mit den Definitionen aus (4.37)-(4.39) gilt außerdem:

$$\langle 0| \left[H, Q_\nu^\dagger\right] = \langle 0| (E_\nu - E_0) Q_\nu^\dagger = 0. \tag{4.44}$$

Durch Multiplikation der Bewegungsgleichungen mit einem beliebigen Zustand $\langle 0|\delta Q_\nu$ bzw. der Gleichung (4.44) mit $\delta Q_\nu|0\rangle$ und anschließende Subtraktion der beiden so gewonnen Ausdrücke erhält man:

$$\langle 0| \left[\delta Q_\nu, \left[H, Q_\nu^\dagger\right]\right] |0\rangle = (E_\nu - E_0) \langle 0| \left[\delta Q_\nu, Q_\nu^\dagger\right] |0\rangle. \tag{4.45}$$

Bis hierher sind die Gleichungen exakt. Die exakten Operatoren $Q_\nu^\dagger$ sind jedoch komplizierte Vielteilchenoperatoren, dies macht es im Allgemeinen praktisch unmöglich, die Gleichungen (4.45) exakt zu lösen. Man ist daher zu Näherungen gezwungen. Dazu schränkt man die Operatoren $Q_\nu^\dagger, Q_\nu$ auf einen Teilraum des Fock-Raums ein. Dabei ist drauf zu achten, daß auch die δQ_ν dieser Einschränkung unterliegen.
Die Näherung der RPA besteht darin, die Operatoren Q_ν auf Ein- und Zwei-Quasiteilchen-Operatoren zu beschränken. Das Vakuum dieser Operatoren ist der RPA-Grundzustand $|RPA\rangle$,

$$Q_\nu |RPA\rangle = 0. \tag{4.46}$$

Er stellt eine Näherung des exakten Grundzustands $|0\rangle$ dar. Damit erhält man (4.45) die RPA-Gleichungen:

$$\langle RPA| \left[\delta Q_\nu, \left[H, Q_\nu^\dagger\right]\right] |RPA\rangle = \Omega_\nu \langle RPA| \left[\delta Q_\nu, Q_\nu^\dagger\right] |RPA\rangle, \tag{4.47}$$

wobei Ω_ν die Energiedifferenz zum Grundzustand bezeichnet,

$$\Omega_\nu = E_\nu - E_0. \tag{4.48}$$

Die Verbindung der RPA-Gleichungen zum HFB-Feld wird durch Ausdrücken der RPA-Gleichungen in der Quasiteilchen-Basis und die Quasi-Boson-Approximation hergestellt. In dieser Näherung ersetzt man den RPA-Grundzustand $|RPA\rangle$ durch den HFB-Grundzustand $|HFB\rangle$. Die RPA-Gleichungen lauten in der Quasi-Boson-Approximation:

$$\langle HFB| \left[\delta Q_\nu, \left[H, Q_\nu^\dagger\right]\right] |HFB\rangle = \Omega_\nu \langle HFB| \left[\delta Q_\nu, Q_\nu^\dagger\right] |HFB\rangle. \tag{4.49}$$

4.3 Symmetrieerhaltung

Die Kombination der beiden, in den vorangegangen Abschnitten vorgestellten, nichtperturbativen Methoden, HFB und RPA, wird im nächsten Kapitel zur Behandlung des linearen $SU(3)$-σ-Modells eingesetzt. Die Begründung für den Einsatz der selbstkonsistenten Quasiteilchen-RPA liegt in der Tatsache, daß diese einen symmetrieerhaltenden Zugang darstellt. Dies ist aus der Vielteilchenphysik bekannt. Im Rahmen dieser Arbeit soll die Quasiteilchen-RPA auf die Feldtheorie übertragen und ihre symmetrieerhaltende Eigenschaft nachgewiesen werden. Der Zugang über den HFB-Formalismus allein ist nicht symmetrieerhaltend. Konkret kommt es zu einer Verletzung des Goldstone-Theorems, d.h. im chiralen Limes treten trotz spontaner Symmetriebrechung, durch die Existenz nichtverschwindender Vakuumerwartungswerte bestimmter Felder, keine masselosen Bosonen auf. Diese Symmetrie wird durch Übergang zur RPA wiederhergestellt, d.h. es treten in den RPA-Gleichungen Null-Lösungen auf, die den masselosen Goldstone-Bosonen entsprechen. Dazu ist notwendig, daß die RPA auf der Basis eines HFB-Feldes aufbaut. Die Diagonalisierung der HFB-Supermatrix (4.31) stellt sicher, daß der quadratische Anteil des Hamilton-Operators in der Quasiteilchen-Basis diagonal ist. Diese Eigenschaft des Hamilton-Operators in der Quasiteilchen-Basis ermöglicht, den RPA-Operator, $Q_\nu^\dagger$, in der Quasiteilchen-Basis so zu wählen, daß er den vollen Symmetrie-Generator $Q_A^\dagger$ der axialen Symmetrie enthält. Da $Q_A^\dagger$ ein Symmetrieoperator ist, vertauscht er mit dem Hamilton-Operator,

$$\left[H, Q_A^\dagger\right] = 0. \tag{4.50}$$

Dies hat zur Folge, daß im Fall $Q_\nu^\dagger \to Q_A^\dagger$ die linke Seite der RPA-Gleichung (4.49) zu Null wird, da damit

$$\left[H, Q_\nu^\dagger\right] = 0. \tag{4.51}$$

In diesem Fall bleibt der Erwartungswert des Kommutators auf der rechten Seite normierbar, d.h. es gilt:

$$\langle HFB| \left[\delta Q_\nu, Q_\nu^\dagger\right] |HFB\rangle \neq 0, \tag{4.52}$$

daher wird die rechte Seite von (4.49) nur dann null und damit die Gleichung erfüllt, wenn gilt:

$$\Omega_\nu = 0, \tag{4.53}$$

d.h. wenn spuriose Lösungen existieren. Die Existenz dieser spuriosen Lösungen wird im nächsten Kapitel nachgewiesen und damit gezeigt, daß die selbstkonsistente Quasiteilchen-RPA einen symmetrieerhaltenden Zugang zur Behandlung des linearen $SU(3)$-σ-Modells darstellt.

Kapitel 5

Lineares $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-σ-Modell in der Quasiteilchen-RPA

Die im vorigen Kapitel formal vorgestellte selbstkonsistente Methode der Quasiteilchen-RPA wird im folgenden zur nichtperturbativen Behandlung des linearen $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-σ-Modells verwendet. Da sich die weiteren Ausführungen nur noch auf den mesonischen Sektor des Modells beziehen wird im folgenden nur der mesonische Anteil des Hamilton-Operators behandelt werden. Für diesen ergibt sich aus (3.28):

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \Big[\dot{\sigma}_i^2 + \dot{p}_i^2 - \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \sigma_i\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\partial_\mu p_i\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} m^2_{\sigma_{ij}} \sigma_i \sigma_j + \frac{1}{2} m^2_{p_{ij}} p_i p_j - G_{ijk} \left(\sigma_i \sigma_j \sigma_k - 3 p_i p_j \sigma_k\right) \\ &\quad - 4 \bar{F}_{ij,kl} p_i p_j \sigma_k \xi_l - \frac{4}{3} F_{ijkl} \sigma_i \sigma_j \sigma_k \xi_l - 2 \bar{F}_{ij,kl} p_i p_j \sigma_k \sigma_l \\ &\quad - \frac{1}{3} F_{ijkl} \left(\sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l - p_i p_j p_k p_l\right) + E_i \sigma_i + \mathcal{H}_0 \Big] . \end{aligned} \tag{5.1}$$

Darin sind die Tensoren G_{ijk}, F_{ijkl} und $\bar{F}_{ijkl}$ durch (3.2) - (3.4) gegeben, die Ausdrücke für $m^2_{\sigma_{ij}}$, $m^2_{p_{ij}}$ und E_i finden sich in (3.29) - (3.31) und $\mathcal{H}_0$ bezeichnet den Vakuumerwartungswert des Hamilton-Operators,

$$\mathcal{H}_0 = \langle 0 | H | 0 \rangle . \tag{5.2}$$

5.1 Bogoliubov-Transformation

Zur konkreten Anwendung des Hartree-Fock-Bogoliubov Formalismus im Rahmen des linearen $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-σ-Modells drückt man in einem ersten Schritt sämtliche Felder durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aus:

$$
\begin{aligned}
p_j(x) &= \int \frac{d^3\vec{q}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_q}} \left(a_j(\vec{q}) e^{iqx} + a_j^\dagger(\vec{q}) e^{-iqx} \right) && (5.3) \\
\sigma_j(x) &= \int \frac{d^3\vec{q}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_q}} \left(b_j(\vec{q}) e^{iqx} + b_j^\dagger(\vec{q}) e^{-iqx} \right). && (5.4)
\end{aligned}
$$

Die den Feldern gemeinsame Frequenz ω_q ist gegeben durch:

$$\omega_q = \sqrt{\mu^2 + q^2}. \tag{5.5}$$

Diese Felder werden in die Quasiteilchen-Basis transformiert, indem man auf der Basis der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a_j, a_j^\dagger$ bzw. $b_j, b_j^\dagger$ eine Bogoliubov-Transformation durchführt. Diese Bogoliubov-Transformation erfolgt gemäß (4.8) durch Einführung neuer Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:

$$
\begin{aligned}
\alpha_j^\dagger(q) &= u_j(q) a_j^\dagger(q) - v_j(q) a_j(-q) && (5.6) \\
\alpha_j(q) &= u_j(q) a_j(q) - v_j(q) a_j^\dagger(-q) && (5.7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_j^\dagger(q) &= x_j(q) b_j^\dagger(q) - y_j(q) b_j(-q) - w_j(q)\delta(\vec{q}) && (5.8) \\
\beta_j(q) &= x_j(q) b_j(q) - y_j(q) b_j^\dagger(-q) - w_j^*(q)\delta(\vec{q}) && (5.9)
\end{aligned}
$$

Darin sind $u_j(q)$, $v_j(q)$, $x_j(q)$ und $y_j(q)$ gerade Funktionen ihres Arguments und die $w_j(q)$ komplexe Zahlen. Die beiden ersten Gleichungen stellen eine im Sinn von (4.8) eine spezielle Bogoliubov-Transformation dar. In den Gleichungen der skalaren Mesonen erscheint zusätzlich eine Verschiebung $w_j(q)$, welche dem Auftreten von Kondensaten skalarer Mesonen ξ_j Rechnung trägt,

$$w_j(q) = w_0(q)\delta_{j0} + w_8(q)\delta_{j8}. \tag{5.10}$$

Damit es sich bei der Transformation um eine kanonische Transformation handelt, müssen die Bogoliubov-Faktoren analog zu (4.9) folgende Randbedingungen erfüllen:

$$u_j^2(q) - v_j^2(q) = 1 \quad , \quad x_j^2(q) - y_j^2(q) = 1. \tag{5.11}$$

Dies stellt sicher, daß die so eingeführten neuen Quasiteilchen-Erzeuger und -Vernichter den gleichen Vertauschungsrelationen genügen wie die ursprünglichen Teilchen-Erzeuger und -Vernichter:

$$
\begin{aligned}
[\alpha_p, \alpha_q] &= \left[\alpha_p^\dagger, \alpha_q^\dagger\right] = 0 && (5.12)\\
\left[\alpha_p, \alpha_q^\dagger\right] &= \delta(\vec{p} - \vec{q}). && (5.13)
\end{aligned}
$$

Die Bogoliubov-Transformation überführt die Operatoren in die oben definierte Quasi-Bosonen Basis. Die Felder lassen sich in den neuen Quasiteilchen-Erzeugern und -Vernichtern schreiben, indem man die ursprünglichen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren durch die Umkehrtransformation zu (5.6)-(5.9),

$$
\begin{aligned}
a_j^\dagger(q) &= u_j(q)\alpha_j^\dagger(q) + v_j(q)\alpha_j(-q) && (5.14)\\
a_j(-q) &= v_j(q)\alpha_j^\dagger(q) + u_j(q)\alpha_j(-q) && (5.15)\\
& && (5.16)\\
b_j^\dagger(q) &= x(q)\left(\beta_j^\dagger(q) + \omega(q)\delta(\vec{q})\right) + y(q)\left(\beta(-q) + \omega_j^*(q)\delta(\vec{q})\right)\\
b_j(-q) &= y(q)\left(\beta_j^\dagger(q) + \omega(q)\delta(\vec{q})\right) + x(q)\left(\beta(-q) + \omega_j^*(q)\delta(\vec{q})\right), && (5.17)
\end{aligned}
$$

ausdrückt und in die Felder einsetzt. Man erhält:

$$
\begin{aligned}
p_j(x) &= \int \frac{d^3\vec{q}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_q}} \left(u_j(q) + v_j(q)\right)\left(\alpha_j(\vec{q})e^{iqx} + \alpha_j^\dagger(\vec{q})e^{-iqx}\right) && (5.18)\\
\dot{p}_j(x) &= \int \frac{d^3\vec{q}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_q}} (-i\omega_q)\left(u_j(q) - v_j(q)\right)\left(\alpha_j(\vec{q})e^{iqx} - \alpha_j^\dagger(\vec{q})e^{-iqx}\right) && (5.19)\\
\partial_{\vec{x}} p_j(x) &= \int \frac{d^3\vec{q}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_q}} (i\vec{q})\left(u_j(q) + v_j(q)\right)\left(\alpha_j(\vec{q})e^{iqx} - \alpha_j^\dagger(\vec{q})e^{-iqx}\right) && (5.20)\\
\sigma_j(x) &= \int \frac{d^3\vec{q}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_q}} \left(x_j(q) + y_j(q)\right)\left(\beta_j(\vec{q})e^{iqx} + \beta_j^\dagger(\vec{q})e^{-iqx}\right) && (5.21)\\
\dot{\sigma}_j(x) &= \int \frac{d^3\vec{q}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_q}} (-i\omega_q)\left(x_j(q) - y_j(q)\right)\left(\beta_j(\vec{q})e^{iqx} - \beta_j^\dagger(\vec{q})e^{-iqx}\right) && (5.22)\\
\partial_{\vec{x}} \sigma_j(x) &= \int \frac{d^3\vec{q}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_q}} (i\vec{q})\left(x_j(q) + y_j(q)\right)\left(\beta_j(\vec{q})e^{iqx} - \beta_j^\dagger(\vec{q})e^{-iqx}\right). && (5.23)
\end{aligned}
$$

Das Quasi-Bosonen-Vakuum $|\Phi\rangle$ der durch die Bogoliubov-Transformation eingeführten Quasiteilchen ist, entsprechend zu (4.14), durch den 'squeezed state',

$$
|\Phi\rangle = \exp\left[\frac{1}{2}\sum_q z_j^p(q) a_j^\dagger(q) a_j^\dagger(-q) + z_j^\sigma(q) b_j^\dagger(q) b_j^\dagger(-q) + \frac{w_0(0)}{x_0} b_0^\dagger(0) + \frac{w_8(0)}{x_8} b_8^\dagger(0)\right]|0\rangle, \tag{5.24}
$$

gegeben, wobei $|0\rangle$ das Vakuum der ursprünglichen Basis bezeichnet und die Faktoren z_j^p und z_j^σ durch

$$z_j^p = \frac{v_j}{u_j} \quad , \quad z_j^\sigma = \frac{y_j}{x_j} \tag{5.25}$$

gegeben sind. Es gilt folglich:

$$\alpha_j|\Phi\rangle = 0 \;\; \text{und} \;\; \beta_j|\Phi\rangle = 0. \tag{5.26}$$

Der Zustand (5.24) ist das Vakuum der durch die spezielle Bogoliubov-Transformation (5.6)-(5.9) definierten Quasiteilchen. Da, wie bereits auf dem Tree-Level gesehen, nicht alle dieser Quasiteilchen-Zustände als reine Zustände vorkommen, sondern als Mischungen, muß man eine Rotation dieser Zustände durchführen. Dies geschieht in Abschnitt 5.2.6 und hat zur Folge, daß sich auch das Vakuum $|\Phi\rangle$ entsprechend der Rotation ändert.

5.2 Gap-Gleichungen

5.2.1 Normalgeordneter Hamilton-Operator

Mit Hilfe des Wick-Theorems läßt sich der Hamilton-Operator in normalgeordneten (: :) Feldern schreiben. Nach Durchführung der Bogoliubov-Transformation und der Normalordnung erhält man für den Hamilton-Operator formal:

$$\begin{aligned} H \;=\; & \int d^3x \Big[:\dot{\sigma}_i^2: + :\dot{p}_i^2: - \frac{1}{2} :(\partial_\mu \sigma_i)^2: - \frac{1}{2} :(\partial_\mu p_i)^2: + \frac{1}{2} m_{\sigma_{ij}}^2 :\sigma_i \sigma_j: + \frac{1}{2} m_{p_{ij}}^2 :p_i p_j: \\ & - G_{ijk} (:\sigma_i \sigma_j \sigma_k: - 3 :p_i p_j \sigma_k:) - 4\bar{F}_{ijkl} :p_i p_j \sigma_k: \xi_l - \frac{4}{3} F_{ijkl} :\sigma_i \sigma_j \sigma_k: \xi_l \\ & - 2\bar{F}_{ijkl} :p_i p_j \sigma_k \sigma_l: - \frac{1}{3} F_{ijkl} (:\sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l: - :p_i p_j p_k p_l:) + E_i :\sigma_i: + \mathcal{H}_0 \Big], \end{aligned} \tag{5.27}$$

mit

$$m_{\sigma_{ij}}^2 = \mu^2 \delta_{ij} - 6G_{ijk}\xi_k - 4F_{ijkl}\xi_k\xi_l - 4\bar{F}_{ijkl}\delta_{kl}I_{kl}^p - 4F_{ijkl}\delta_{kl}I_{kl}^\sigma \tag{5.28}$$

$$m_{p_{ij}}^2 = \mu^2 \delta_{ij} + 6G_{ijk}\xi_k - 4\bar{F}_{ijkl}\xi_k\xi_l - 4\bar{F}_{ijkl}\delta_{kl}I_{kl}^\sigma - 4F_{ijkl}\delta_{kl}I_{kl}^p \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned} E_i \;=\; & \epsilon_i + \mu^2 \xi_i - \tfrac{4}{3} F_{ijkl}\xi_j\xi_k\xi_l - 3G_{ijk}\xi_j\xi_k + 3G_{ijk}\delta_{jk}I_{jk}^\sigma \\ & - 3G_{ijk}\delta_{jk}I_{jk}^p + 4\bar{F}_{ijkl}\delta_{kl}I_{kl}^p\xi_j - 4F_{ijkl}\delta_{kl}I_{kl}^\sigma\xi_l \end{aligned} \tag{5.30}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_0 \;=\;& \epsilon_i\xi_i + \frac{1}{2}\mu^2\xi_i^2 - G_{ijk}\xi_i\xi_j\xi_k - \frac{1}{3}F_{ijkl}\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l \\
& - \left(2F_{ijkl}\xi_k\xi_l + 3G_{ijk}\xi_k\right)\delta_{ij}I^\sigma_{ij} - \left(2\bar{F}_{ijkl}\xi_k\xi_l - 3G_{ijk}\xi_k\right)\delta_{ij}I^p_{ij} \\
& - F_{ijkl}\left(\delta_{ij}I^p_{ij}\delta_{kl}I^p_{kl} + \delta_{ij}I^\sigma_{ij}\delta_{kl}I^\sigma_{kl}\right) - 2\bar{F}_{ijkl}\delta_{ij}I^p_{ij}\delta_{kl}I^\sigma_{kl} \\
& + \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\omega_q \sum_{j=0}^{8}\left(u_j^2(q) + v_j^2(q) + x_j^2(q) + y_j^2(q)\right). \qquad (5.31)
\end{aligned}
$$

Die I_{JJ} bezeichnen quadratisch die divergenten Integrale

$$
I^p_{jj} = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3}\frac{\left(u_j(q)+v_j(q)\right)^2}{2\omega_q} \qquad (5.32)
$$

$$
I^\sigma_{jj} = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3}\frac{\left(x_j(q)+y_j(q)\right)^2}{2\omega_q}, \qquad (5.33)
$$

die für Selbstenergie Tadpole Schleifen stehen. Um diese Divergenzen zu vermeiden, regularisiert man die Ausdrücke.

5.2.2 Regularisierung der Tadpole-Integrale

Es gibt verschiedene Verfahren, um die obigen quadratisch divergenten Integrale zu regularisieren. Im folgenden wird eine kovariante Regularisierung, die auf eine Arbeit von Pauli und Villars zurückgeht, angewandt. Unter Vorwegnahme eines Ergebnises des nächsten Abschnitts läßt sich ein Integral vom Typ (5.32) unter Verwendung von (5.11) schreiben als:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3}\frac{\left(u(q)+v(q)\right)^2}{2\omega_q} \\
&= \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_q\left(u(q)-v(q)\right)^2} \\
&= \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\varepsilon\left(\vec{q}\right)}. \qquad (5.34)
\end{aligned}
$$

Unter Verwendung von

$$
\varepsilon(\vec{q}) = \sqrt{\vec{q}^2 + m^2} \qquad (5.35)
$$

und der Beziehung

$$
\begin{aligned}
\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{i}{q^2-m^2+i\eta} &= \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^4}\int dq_0 \frac{i}{(q_0-\varepsilon(\vec{q}))\,(q_0+\varepsilon(\vec{q}))+i\eta} \\
&= \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^4}\frac{(-2\pi i)i}{\varepsilon(\vec{q})+\varepsilon(\vec{q})} \\
&= \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\varepsilon(\vec{q})}, \qquad (5.36)
\end{aligned}
$$

welche sich mit Hilfe des Residuensatzes ergibt, erhält man daraus

$$
I = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{i}{q^2-m^2+i\eta}. \qquad (5.37)
$$

Die Regularisierung diese Integrals findet sich in Anhang B. Es ergibt sich schließlich für die auftretenden quadratisch divergenten Integrale:

$$
\begin{aligned}
I^p_{jj} &= \frac{1}{16\pi^2}\left[\Lambda^2 - m^2_{p_{jj}}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2_{p_{jj}}}\right] \qquad (5.38)\\
I^\sigma_{jj} &= \frac{1}{16\pi^2}\left[\Lambda^2 - m^2_{\sigma_{jj}}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2_{\sigma_{jj}}}\right], \qquad (5.39)
\end{aligned}
$$

wobei Λ einen universalen Abschneide-Parameter darstellt.

5.2.3 Quadratischer Anteil des Hamilton-Operators

Zur Bestimmung der Bogoliubov-Faktoren und der Massen der Quasi-Bosonen ist der quadratische Anteil des Hamilton-Operators von entscheidender Bedeutung, daher soll er hier noch einmal explizit dargestellt werden. Der quadratische Anteil des normalgeordneten Hamilton-Operators ausgedrückt durch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren der Quasi-Bosonen-Basis lautet:

$$
\begin{aligned}
H_2 &= \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3}\varepsilon^p_j(q)\left[\alpha^\dagger_j(q)\alpha_j(q)\right] + \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3}C^p_j(q)\left[\alpha^\dagger_j(q)\alpha^\dagger_j(-q)+\alpha_j(q)\alpha_j(-q)\right] \\
&+ \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3}\varepsilon^\sigma_j(q)\left[\beta^\dagger_j(q)\beta_j(q)\right] + \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3}C^\sigma_j(q)\left[\beta^\dagger_j(q)\beta^\dagger_j(-q)+\beta_j(q)\beta_j(-q)\right]. \qquad (5.40)
\end{aligned}
$$

Dabei bezeichnen:

$$
\varepsilon^p_j(q) = \omega_q\left(u^2_j(q)+v^2_j(q)\right) + (u_j(q)+v_j(q))^2\,\Delta^p_j \qquad (5.41)
$$

$$\varepsilon_j^\sigma(q) = \omega_q \left(x_j^2(q) + y_j^2(q)\right) + \left(x_j(q) + y_j(q)\right)^2 \Delta_j^\sigma \tag{5.42}$$

$$C_j^p = \omega_q \left(u_j(q) v_j(q)\right) + \tfrac{1}{2} \left(u_j(q) + v_j(q)\right)^2 \Delta_j^p \tag{5.43}$$

$$C_j^\sigma = \omega_q \left(x_j(q) y_j(q)\right) + \tfrac{1}{2} \left(x_j(q) + y_j(q)\right)^2 \Delta_j^\sigma \tag{5.44}$$

wobei wiederum gilt:

$$\begin{aligned} 2\omega_q \Delta_\pi &= -4\xi_0^2 f_1 - 4\xi_8^2 f_1 - \frac{4}{3}\xi_0^2 f_2 - \frac{2}{3}\xi_8^2 f_2 - \frac{4}{3}\sqrt{2}\xi_0\xi_8 f_2 - \frac{2g}{\sqrt{3}}\xi_0 + 2\sqrt{\frac{2}{3}} g\xi_8 \\ &\quad -4f_1\left(5I_\pi + 4I_K + I_{\eta_0} + I_{\eta_8} + 3I_{\sigma_\pi} + 4I_{\sigma_K} + I_{\sigma_{\eta_0}} + I_{\sigma_{\eta_8}}\right) \\ &\quad -2f_2\left(5I_\pi + 4I_K + 2I_{\eta_0} + I_{\eta_8} + 7I_{\sigma_\pi} + 4I_{\sigma_K} + \frac{2}{3}I_{\sigma_{\eta_0}} + \frac{1}{3}I_{\sigma_{\eta_8}}\right) \end{aligned} \tag{5.45}$$

$$\begin{aligned} 2\omega_q \Delta_K &= -4\xi_0^2 f_1 - 4\xi_8^2 f_1 - \frac{4}{3}\xi_0^2 f_2 - \frac{14}{3}\xi_8^2 f_2 + \frac{2}{3}\sqrt{2} f_2 \xi_0\xi_8 - \frac{2g}{\sqrt{3}}\xi_0 - \sqrt{\frac{2}{3}} g\xi_8 \\ &\quad -4f_1\left(3I_\pi + 6I_K + I_{\eta_0} + I_{\eta_8} + 3I_{\sigma_\pi} + 4I_{\sigma_K} + I_{\sigma_{\eta_0}} + I_{\sigma_{\eta_8}}\right) \\ &\quad -2f_2\left(3I_\pi + 6I_K + 2I_{\eta_0} + I_{\eta_8} + 3I_{\sigma_\pi} + 6I_{\sigma_K} + \frac{2}{3}I_{\sigma_{\eta_0}} + \frac{7}{3}I_{\sigma_{\eta_8}}\right) \end{aligned} \tag{5.46}$$

$$\begin{aligned} 2\omega_q \Delta_{\eta_8} &= -4\xi_0^2 f_1 - 4\xi_8^2 f_1 - \frac{4}{3}\xi_0^2 f_2 - 2\xi_8^2 f_2 + \frac{4}{3}\sqrt{2}\xi_0\xi_8 f_2 - \frac{2g}{\sqrt{3}}\xi_0 - 2\sqrt{\frac{2}{3}} g\xi_8 \\ &\quad -4f_1\left(3I_\pi + 4I_K + I_{\eta_0} + 3I_{\eta_8} + 3I_{\sigma_\pi} + 4I_{\sigma_K} + I_{\sigma_{\eta_0}} + I_{\sigma_{\eta_8}}\right) \\ &\quad -2f_2\left(3I_\pi + 4I_K + 2I_{\eta_0} + 3I_{\eta_8} + I_{\sigma_\pi} + \frac{28}{3}I_{\sigma_K} + \frac{2}{3}I_{\sigma_{\eta_0}} + I_{\sigma_{\eta_8}}\right) \end{aligned} \tag{5.47}$$

$$\begin{aligned} 2\omega_q \Delta_{\eta_0} &= -4\xi_0^2 f_1 - 4\xi_8^2 f_1 - \frac{4}{3}\xi_0^2 f_2 - \frac{4}{3}\xi_8^2 f_2 + \frac{4g}{\sqrt{3}}\xi_0 \\ &\quad -4f_1\left(3I_\pi + 4I_K + 3I_{\eta_0} + I_{\eta_8} + 3I_{\sigma_\pi} + 4I_{\sigma_K} + I_{\sigma_{\eta_0}} + I_{\sigma_{\eta_8}}\right) \\ &\quad -4f_2\left(3I_\pi + 4I_K + I_{\eta_0} + I_{\eta_8} + I_{\sigma_\pi} + \frac{4}{3}I_{\sigma_K} + \frac{1}{3}I_{\sigma_{\eta_0}} + \frac{1}{3}I_{\sigma_{\eta_8}}\right) \end{aligned} \tag{5.48}$$

$$\begin{aligned} 2\omega_q \Delta_{\sigma_\pi} &= -4\xi_0^2 f_1 - 4\xi_8^2 f_1 - 4\xi_0^2 f_2 - 2\xi_8^2 f_2 - 4\sqrt{2}\xi_0\xi_8 f_2 + \frac{2g}{\sqrt{3}}\xi_0 - 2\sqrt{\frac{2}{3}} g\xi_8 \\ &\quad -4f_1\left(3I_\pi + 4I_K + I_{\eta_0} + I_{\eta_8} + 5I_{\sigma_\pi} + 4I_{\sigma_K} + I_{\sigma_{\eta_0}} + I_{\sigma_{\eta_8}}\right) \\ &\quad -2f_2\left(7I_\pi + 4I_K + \frac{2}{3}I_{\eta_0} + I_{\eta_8} + 5I_{\sigma_\pi} + 4I_{\sigma_K} + 2I_{\sigma_{\eta_0}} + I_{\sigma_{\eta_8}}\right) \end{aligned} \tag{5.49}$$

$$2\omega_q \Delta_{\sigma_K} = -4\xi_0^2 f_1 - 4\xi_8^2 f_2 - 4\xi_0^2 f_2 - 2\xi_8^2 f_2 + 2\sqrt{2}\xi_0\xi_8 f_2 + \frac{2g}{\sqrt{3}}\xi_0 + \sqrt{\frac{2}{3}} g\xi_8$$

$$
\begin{aligned}
& -4f_1\left(3I_\pi + 4I_K + I_{\eta_0} + I_{\eta_8} + 3I_{\sigma_\pi} + 6I_{\sigma_K} + I_{\sigma_{\eta_0}} + I_{\sigma_{\eta_8}}\right) \\
& -2f_2\left(3I_\pi + 6I_K + \frac{2}{3}I_{\eta_0} + \frac{7}{3}I_{\eta_8} + 3I_{\sigma_\pi} + 6I_{\sigma_K} + 2I_{\sigma_{\eta_0}} + I_{\sigma_{\eta_8}}\right) \qquad (5.50)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\omega_q\Delta_{\sigma_{\eta_8}} &= -4\xi_0^2 f_1 - 12\xi_8^2 f_1 - 4\xi_0^2 f_2 - 6\xi_8^2 f_2 + 4\sqrt{2}\xi_0\xi_8 f_2 + \frac{2g}{\sqrt{3}}\xi_0 + 2\sqrt{\frac{2}{3}}g\xi_8 \\
& -4f_1\left(3I_\pi + 4I_K + I_{\eta_0} + I_{\eta_8} + 3I_{\sigma_\pi} + 4I_{\sigma_K} + I_{\sigma_{\eta_0}} + 3I_{\sigma_{\eta_8}}\right) \\
& -2f_2\left(I_\pi + \frac{28}{3}I_K + \frac{2}{3}I_{\eta_0} + I_{\eta_8} + 3I_{\sigma_\pi} + 4I_{\sigma_K} + 2I_{\sigma_{\eta_0}} + 3I_{\sigma_{\eta_8}}\right) \qquad (5.51)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\omega_q\Delta_{\sigma_{\eta_0}} &= -12\xi_0^2 f_1 - 4\xi_8^2 f_1 - 4\xi_0^2 f_2 - 4\xi_8^2 f_2 - \frac{4g}{\sqrt{3}}\xi_0 \\
& -4f_1\left(3I_\pi + 4I_K + I_{\eta_0} + I_{\eta_8} + 3I_{\sigma_\pi} + 4I_{\sigma_K} + 3I_{\sigma_{\eta_0}} + I_{\sigma_{\eta_8}}\right) \\
& -4f_2\left(I_\pi + \frac{4}{3}I_K + \frac{1}{3}I_{\eta_0} + \frac{1}{3}I_{\eta_8} + 3I_{\sigma_\pi} + 4I_{\sigma_K} + I_{\sigma_{\eta_0}} + I_{\sigma_{\eta_8}}\right) \qquad (5.52)
\end{aligned}
$$

5.2.4 Bestimmung der Bogoliubov-Faktoren

Die Bogoliubov-Faktoren u_i, v_i und x_i, y_i sowie die Mesonkondensate ξ_0 und ξ_8 werden durch Minimieren des Grundzustanderwartungswerts des Hamilton-Operators,

$$
\frac{\langle\Phi|H|\Phi\rangle}{\langle\Phi|\Phi\rangle}, \qquad (5.53)
$$

bezüglich dieser Faktoren bestimmt. Die Minimierung erfolgt über das Ritz'sche Variationsprinzip. Analog zur Situation in der Tree-Level-Näherung entspricht dem Minimieren bezüglich der Vakuumerwartungswerte der skalaren Felder die Forderung, daß der in den Feldern lineare Anteil im Hamilton-Operator verschwindet. Daneben führt, aufgrund der Bogoliubov-Transformation, ein Minimieren bezüglich der Bogoliubov-Faktoren zu der Forderung, daß der Einteilchen-Anteil des Hamilton-Operators diagonal wird. In Formeln ausgedrückt bedeutet dies:

$$
C_j^\sigma = 0 \quad , \quad C_j^p = 0 \quad , \quad E_i = 0. \qquad (5.54)
$$

Die letzte Bedingung führt auf zwei Gleichungen zur Bestimmung der Meson-Kondensate ξ_0 und ξ_8:

$$
\begin{aligned}
0 &= \epsilon_0 + \mu^2\xi_0 - \frac{4}{3}F_{0jkl}\xi_j\xi_k\xi_l - 3G_{0jk}\xi_j\xi_k - 3G_{0jk}\delta_{jk}I_{jk}^\sigma \\
& +3G_{0jk}\delta_{jk}I_{jk}^p - 4\bar{F}_{0jkl}\delta_{kl}I_{kl}^p\xi_j - 4F_{0jkl}\delta_{kl}I_{kl}^\sigma\xi_l \qquad (5.55)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \epsilon_8 + \mu^2 \xi_8 - \frac{4}{3} F_{8jkl} \xi_j \xi_k \xi_l - 3G_{8jk} \xi_j \xi_k - 3G_{8jk} \delta_{jk} I^{\sigma}_{jk} \\
&\quad + 3G_{8jk} \delta_{jk} I^{p}_{jk} - 4\bar{F}_{8jkl} \delta_{kl} I^{p}_{kl} \xi_j - 4F_{8jkl} \delta_{kl} I^{\sigma}_{kl} \xi_l
\end{aligned} \tag{5.56}
$$

Die beiden anderen Bedingungen aus (5.54) lassen sich mit

$$
e^p_j = \omega_q + \Delta^p_j \quad , \quad e^\sigma_j = \omega_q + \Delta^\sigma_j, \tag{5.57}
$$

schreiben als:

$$
C^p_j = u_j(q) v_j(q) e^p_j + \frac{1}{2} \left(u^2_j(q) + v^2_j(q) \right) \Delta^p_j = 0 \tag{5.58}
$$

$$
C^\sigma_j = x_j(q) y_j(q) e^\sigma_j \frac{1}{2} \left(x^2_j(q) + y^2_j(q) \right) \Delta^\sigma_j = 0. \tag{5.59}
$$

Unter Ausnutzung der an die Bogoliubov-Faktoren gestellten Randbedingung (5.11) lassen sich die obigen Gleichungen selbstkonsistent nach den Bogoliubov-Faktoren auflösen. Man erhält:

$$
u^2_j = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{e^p_j}{\sqrt{e^{p\,2}_j - \Delta^{p\,2}_j}} \right) \quad , \quad v^2_j = \frac{1}{2} \left(-1 \pm \frac{e^p_j}{\sqrt{e^{p\,2}_j - \Delta^{p\,2}_j}} \right) \tag{5.60}
$$

$$
x^2_j = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{e^\sigma_j}{\sqrt{e^{\sigma\,2}_j - \Delta^{\sigma\,2}_j}} \right) \quad , \quad y^2_j = \frac{1}{2} \left(-1 \pm \frac{e^\sigma_j}{\sqrt{e^{\sigma\,2}_j - \Delta^{\sigma\,2}_j}} \right). \tag{5.61}
$$

5.2.5 Teilchenenergien und Gap-Gleichungen

Mit Hilfe der Definitionen (5.57) für $e^{p,\sigma}_j$ und den $\Delta^{p,\sigma}_j$ lassen sich die Teilchenenergien (5.41) und (5.42) ausdrücken als:

$$
\varepsilon^p_j(q) = \left(u^2_j(q) + v^2_j(q) \right) e^p_j + 2u_j(q) v_j(q) \Delta^p_j \tag{5.62}
$$

$$
\varepsilon^\sigma_j(q) = \left(x^2_j(q) + y^2_j(q) \right) e^\sigma_j + 2x_j(q) y_j(q) \Delta^\sigma_j. \tag{5.63}
$$

Unter Verwendung der Beziehungen $C^{p,\sigma}_j = 0$ in der Form

$$
\varepsilon^{p,\sigma}_j = \varepsilon^{p,\sigma}_j - 2C^{p,\sigma}_j, \tag{5.64}
$$

ergibt sich für die Teilchenenergien:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_j^p(q) &= (u_j(q) - v_j(q))^2\, \omega_q = \sqrt{q^2 + m_j^{p\,2}} && (5.65)\\
\varepsilon_j^\sigma(q) &= (x_j(q) - y_j(q))^2\, \omega_q = \sqrt{q^2 + m_j^{\sigma\,2}}. && (5.66)
\end{aligned}
$$

Mit diesen Ausdrücken und denen für die Teilchenenergien aus (5.62) und (5.63) kann man schreiben:

$$
\begin{aligned}
q^2 + m_{p_j}^2 &= (u_j(q) - v_j(q))^2\, \omega_q \left[\left(u_j^2(q) + v_j^2(q)\right) e_j^p + 2u_j(q)v_j(q)\Delta_j^p\right] && (5.67)\\
q^2 + m_{\sigma_j}^2 &= (x_j(q) - y_j(q))^2\, \omega_q \left[\left(x_j^2(q) + y_j^2(q)\right) e_j^\sigma + 2x_j(q)y_j(q)\Delta_j^\sigma\right]. && (5.68)
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen lassen sich direkt nach den Quasiteilchenmassen auflösen und unter Ausnutzung von (5.11) vereinfachen. Man erhält daraus die BCS Gap-Gleichungen ausgedrückt durch die Massen der Quasi-Mesonen:

$$
\begin{aligned}
m_{p_j}^2 &= \mu^2 + 2\omega\Delta_j^p && (5.69)\\
m_{\sigma_j}^2 &= \mu^2 + 2\omega\Delta_j^\sigma. && (5.70)
\end{aligned}
$$

5.2.6 Mischung der Zustände η_0 und η_8

Die Massen der Quasi-Mesonen entsprechen den Ausdrücken $m_{\sigma_{ij}}^2$ und $m_{p_{ij}}^2$ im Hamilton-Operator. Wie bereits in der Tree-Level-Näherung angesprochen, kommen die Zustände η_0 und η_8 nicht als reine Zustände in der Natur vor, sondern als Mischungen in den Mesonen η und η'. Um dieser Tatsache Rechnung zu tragen, muß man die gleiche Rotation (3.45)-(3.48) wie in der Tree-Level-Näherung durchführen:

$$
\begin{aligned}
\eta_0 &= \eta' cos\theta_p - \eta sin\theta_p && (5.71)\\
\eta_8 &= \eta' sin\theta_p + \eta cos\theta_p && (5.72)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\eta_0} &= \sigma_{\eta'} cos\theta_\sigma - \sigma_\eta sin\theta_\sigma && (5.73)\\
\sigma_{\eta_8} &= \sigma_{\eta'} sin\theta_\sigma + \sigma_\eta cos\theta_\sigma && (5.74)
\end{aligned}
$$

Für die selbstkonsistenten Massen der Quasi-Mesonen ergibt sich damit für die reinen Zustände $\bar{i} = 1 - 7$:

$$m^2_{p_{\bar{i}j}} = \mu^2 \delta_{\bar{i}j} + 6G_{\bar{i}jk}\xi_k - 4\bar{F}_{\bar{i}jkl}\xi_k\xi_l - 4\bar{F}_{\bar{i}jkl}\delta_{kl}I^\sigma_{kl} - 4F_{\bar{i}jkl}\delta_{kl}I^p_{kl} \tag{5.75}$$
$$m^2_{\sigma_{\bar{i}j}} = \mu^2 \delta_{\bar{i}j} - 6G_{\bar{i}jk}\xi_k - 4F_{\bar{i}jkl}\xi_k\xi_l - 4\bar{F}_{\bar{i}jkl}\delta_{kl}I^p_{kl} - 4F_{\bar{i}jkl}\delta_{kl}I^\sigma_{kl} \tag{5.76}$$

und für die gemischten Zustände:

$$m^2_\eta = m^2_{p_{88}}\cos^2\theta_p + m^2_{p_{00}}\sin^2\theta_p - 2m^2_{p_{08}}\sin\theta_p\cos\theta_p \tag{5.77}$$
$$m^2_{\eta'} = m^2_{p_{88}}\sin^2\theta_p + m^2_{p_{00}}\cos^2\theta_p + 2m^2_{p_{08}}\sin\theta_p\cos\theta_p \tag{5.78}$$
$$m^2_{\sigma_\eta} = m^2_{\sigma_{88}}\cos^2\theta_\sigma + m^2_{\sigma_{00}}\sin^2\theta_\sigma - 2m^2_{\sigma_{08}}\sin\theta_\sigma\cos\theta_\sigma \tag{5.79}$$
$$m^2_{\sigma_{\eta'}} = m^2_{\sigma_{88}}\sin^2\theta_\sigma + m^2_{\sigma_{00}}\cos^2\theta_\sigma + 2m^2_{\sigma_{08}}\sin\theta_\sigma\cos\theta_\sigma . \tag{5.80}$$

Die beiden Mischungswinkel werden, wie in der Tree-Level-Näherung, über die Forderung, daß im quadratischen Anteil der Hamiltonfunktion keine $\eta\eta'$- bzw. $\sigma_\eta\sigma_{\eta'}$-Terme auftreten, bestimmt. Es ergeben sich folgende Bedingungsgleichungen:

$$0 = 2m_{\eta_{08}}\cos 2\theta_p - (m_{\eta_0} - m_{\eta_8})\sin 2\theta_p \tag{5.81}$$
$$0 = 2m_{\sigma_{\eta_{08}}}\cos 2\theta_\sigma - \left(m_{\sigma_{\eta_0}} - m_{\sigma_{\eta_8}}\right)\sin 2\theta_\sigma . \tag{5.82}$$

Daraus erhält man die beiden Mischungs-Winkel

$$\theta_p = \frac{1}{2}\mathrm{ArcTan}\frac{2m_{\eta_{08}}}{m_{\eta_0} - m_{\eta_8}} \tag{5.83}$$
$$\theta_\sigma = \frac{1}{2}\mathrm{ArcTan}\frac{2m_{\sigma_{\eta_{08}}}}{m_{\sigma_{\eta_0}} - m_{\sigma_{\eta_8}}} . \tag{5.84}$$

Da die Massen der Mesonen auch in den Tadpole-Integralen auftreten muß auch dort der Mischung der Zustände Rechnung getragen werden, dies führt auf:

$$\begin{aligned} I^p_{ij} = {} & \delta_{i\bar{i}}\delta_{ij}I^p_{\bar{i}} + (\delta_{i8}\cos\theta_p - \delta_{i0}\sin\theta_p)(\delta_{j8}\cos\theta_p - \delta_{j0}\sin\theta_p)\, I_\eta \\ & + (\delta_{i8}\sin\theta_p + \delta_{i0}\cos\theta_p)(\delta_{j8}\sin\theta_p + \delta_{j0}\cos\theta_p)\, I_{\eta'} \end{aligned} \tag{5.85}$$

$$\begin{aligned} I^\sigma_{ij} = {} & \delta_{i\bar{i}}\delta_{ij}I^\sigma_{\bar{i}} + (\delta_{i8}\cos\theta_\sigma - \delta_{i0}\sin\theta_\sigma)(\delta_{j8}\cos\theta_\sigma - \delta_{j0}\sin\theta_\sigma)\, I_{\sigma_\eta} \\ & + (\delta_{i8}\sin\theta_\sigma + \delta_{i0}\cos\theta_\sigma)(\delta_{j8}\sin\theta_\sigma + \delta_{j0}\cos\theta_\sigma)\, I_{\sigma_{\eta'}}, \end{aligned} \tag{5.86}$$

mit $\bar{i} = 1, .., 7$.

Im Sinne von Gleichung (4.8) stellt die Bogoliubov-Transformation in Gleichung (5.6)-(5.9) eine spezielle Bogoliubov-Transformation dar. Man kann diese spezielle Bogoliubov-Transformation mit der Rotation aus Gleichung (5.71)-(5.74) zusammenfassen zu einer allgemeineren Bogoliubov-Transformation,

$$\begin{aligned} \alpha_i^\dagger(q) &= U_{ji}^p(\theta_p)\left[u_j(q)a_j^\dagger(q) - v_j(q)a_j(-q)\right] && (5.87)\\ \beta_i^\dagger(q) &= U_{ji}^\sigma(\theta_\sigma)\left[x_j(q)b_j^\dagger(q) - y_j(q)b_j(-q) - w_j(q)\delta(\vec{q})\right], && (5.88)\end{aligned}$$

wobei gilt:

$$U^{p,\sigma} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{p,\sigma} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\theta_{p,\sigma} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_{p,\sigma} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta_{p,\sigma} \end{pmatrix}. \quad (5.89)$$

Diese Bogoliubov-Transformation, (5.87)-(5.88), bewirkt somit eine Transformation in die Quasiteilchen-Basis unter Berücksichtigung der Mischung der Zustände η und η' bzw. σ_η und $\sigma_{\eta'}$.
Die Quasiteilchen-Massen aller Mesonen besitzen im chiralen Limes auch bei spontaner Symmetriebrechung nichtverschwindende Werte, d.h. es treten keine masselosen Bosonen auf. Dies bedeutet eine Verletzung des Goldstone-Theorems in der HFB-Näherung. Um diese Symmetrie wiederherzustellen, muß der Übergang zur RPA erfolgen, dies ist Inhalt des folgenden Abschnitts.

5.3 Der RPA-Operator

Die RPA-Gleichungen wie sie im letzten Kapitel abgeleitet wurden lauten in der Quasi-Boson-Approximation:

$$\langle HFB| \left[\delta Q_\nu, \left[H, Q_\nu^\dagger\right]\right] |HFB\rangle = \Omega_\nu \langle HFB| \left[\delta Q_\nu, Q_\nu^\dagger\right] |HFB\rangle. \quad (5.90)$$

Der allgemeine Ansatz für den RPA-Operator $Q_\nu^\dagger$ muß die Symmetrieoperatoren ${Q_A^i}^\dagger$

enthalten, damit Null-Lösungen dieser Gleichungen existieren. Die Q_A^i sind Axialvektor-Ladungen, die man durch Integration über die Zeitkomponente des Axialvektor-Stroms erhält. Dieser lautet gemäß Gleichung (3.14) für das lineare $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-σ-Modell:

$$J_A^{\mu i} = d_{ijk} \left(\hat{\sigma}_j \partial_\mu p_k - p_j \partial_\mu \hat{\sigma}_k \right) \tag{5.91}$$

mit

$$\hat{\sigma}_i = \sigma_i + \xi_i . \tag{5.92}$$

Daraus erhält man in der selbstkonsistenten Quasiteilchen-Basis für die Axialvektor-Ladung:

$$\begin{aligned} Q_A^i \;\; = \;\; & d_{ijk} \sum_q i \frac{\varepsilon_{p_k}(q) - \varepsilon_{\sigma_j}(q)}{\sqrt{4\varepsilon_{p_k}(q)\varepsilon_{\sigma_j}(q)}} \left(\beta_j^\dagger(-q)\alpha_k^\dagger(q) - \beta_j(q)\alpha_k(-q) \right) \\ & + d_{ijk} \sum_q i \frac{\varepsilon_{p_k}(q) + \varepsilon_{\sigma_j}(q)}{\sqrt{4\varepsilon_{p_k}(q)\varepsilon_{\sigma_j}(q)}} \left(\beta_j(q)\alpha_k^\dagger(q) - \beta_j^\dagger(-q)\alpha_k(-q) \right) \\ & + d_{ijk} \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{2\varepsilon_{p_k}(0)}} i \xi_j \varepsilon_{p_k}(0) \left(\alpha_k^\dagger(0) - \alpha_k(0) \right) . \end{aligned} \tag{5.93}$$

Durch Anwendung dieses Operators auf das Quasiteilchen-Vakuum $|\Phi\rangle$ können einzelne pseudoskalare Mesonen und Paare aus skalaren und pseudoskalaren Mesonen angeregt werden. Drückt man die Axialvektor-Ladung in der ursprünglichen Teilchen-Basis aus, so erhält man formal den gleichen Ausdruck wie in Gleichung (5.93), wobei die Quasiteilchen-Massen ε_{p_k} und ε_{σ_k} durch die Tree-Level-Massen m_{p_k} und m_{σ_k} ersetzt werden. Man erhält somit die gleichen Anregungen. Im Unterschied zur ursprünglichen Teilchen-Basis, in welcher im chiralen Limes aufgrund der verschwindenden Tree-Level-Massen keine einzelnen pseudoskalaren Mesonenanregungen existieren, sind diese jedoch in der Quasiteilchen-Basis weiterhin vorhanden, da wegen der Symmetrieverletzung in der HFB-Näherung die Quasiteilchen-Massen im chiralen Limes endlich bleiben.
Die gemischten Terme $b_j(q)a_k^\dagger(q)$ und $b_j^\dagger(-q)a_k(-q)$ in der Teilchen-Basis verhindern, daß der Operator ${Q_A^i}^\dagger$ eine Lösung der RPA-Gleichungen (5.90) ist. In der Quasiteilchen-Basis tragen die gemischten Terme $\beta_j(q)\alpha_k^\dagger(q)$ und $\beta_j^\dagger(-q)\alpha_k(-q)$ jedoch nicht zu den RPA-Gleichungen bei, da der quadratische Anteil des Hamilton-Operators in der Quasiteilchen-Basis diagonal ist. Es gilt:

$$\langle HFB| \left[\delta Q_\nu, \left[H, \left(\beta_j(q)\alpha_k^\dagger(q) - \beta_j^\dagger(-q)\alpha_k(-q) \right) \right] \right] |HFB\rangle \;\; = \;\; 0 \tag{5.94}$$

$$\Omega_\nu \langle HFB| \left[\delta Q_\nu, \left(\beta_j(q)\alpha_k^\dagger(q) - \beta_j^\dagger(-q)\alpha_k(-q) \right) \right] |HFB\rangle \;\; = \;\; 0. \tag{5.95}$$

Diese Terme werden erst im Fall endlicher Temperatur, der im nächsten Kapitel behandelt wird, wichtig. Daher kann man hier folgenden Ansatz für den RPA-Operator wählen:

$$
\begin{aligned}
Q_\nu^{i\,\dagger} &= d_{ijk}\left(X_\nu^{jk}\alpha_k^\dagger(0) - Y_\nu^{jk}\alpha_k(0)\right)\\
&\quad + d_{ijk}\sum_q\left(U_\nu^{jk}(q)\beta_j^\dagger(-q)\alpha_k^\dagger(q) - V_\nu^{jk}(q)\beta_j(q)\alpha_k(-q)\right)
\end{aligned}
\tag{5.96}
$$

Dieser Ansatz genügt den RPA-Gleichungen (5.90) und beinhaltet alle relevanten Terme des Symmetrieoperators Q_A^i.

5.4 Die RPA-Gleichungen

Die Variationen δQ_ν sind auf den gleichen Teilraum des Fock-Raums beschränkt wie die RPA-Anregungsoperatoren $Q_\nu^\dagger$. Unter Verwendung des Ansatzes für die $Q_\nu^\dagger$ und den Beziehungen (5.94) und (5.95) lassen sich damit die RPA-Gleichungen (5.90) schreiben als:

$$
\langle HFB|\left[\alpha_{k'}(0),\left[H,Q_\nu^{i\,\dagger}\right]\right]|HFB\rangle = \Omega_\nu^i\langle HFB|\left[\alpha_{k'}(0),Q_\nu^{i\,\dagger}\right]|HFB\rangle \tag{5.97}
$$

$$
\langle HFB|\left[\alpha_{k'}^\dagger(0),\left[H,Q_\nu^{i\,\dagger}\right]\right]|HFB\rangle = \Omega_\nu^i\langle HFB|\left[\alpha_{k'}^\dagger(0),Q_\nu^{i\,\dagger}\right]|HFB\rangle \tag{5.98}
$$

$$
\langle HFB|\left[\alpha_{k'}(-q')\beta_{j'}(q'),\left[H,Q_\nu^{i\,\dagger}\right]\right]|HFB\rangle = \Omega_\nu^i\langle HFB|\left[\alpha_{k'}(-q')\beta_{j'}(q'),Q_\nu^{i\,\dagger}\right]|HFB\rangle \tag{5.99}
$$

$$
\langle HFB|\left[\alpha_{k'}^\dagger(q')\beta_{j'}^\dagger(-q'),\left[H,Q_\nu^{i\,\dagger}\right]\right]|HFB\rangle = \Omega_\nu^i\langle HFB|\left[\alpha_{k'}^\dagger(q')\beta_{j'}^\dagger(-q'),Q_\nu^{i\,\dagger}\right]|HFB\rangle. \tag{5.100}
$$

Führt man die Kommutatoren aus so erhält man die folgenden Gleichungen

$$
\Omega_\nu^i\sum_{jk}\delta_{kk'}d_{ijk}X_\nu^{jk} = \sum_{jk}\delta_{kk'}\varepsilon_{p_k}d_{ijk}X_\nu^{jk} - \frac{(2\pi)^3\sum_{jk}d_{ijk}Q_{kk'j}\Pi_\nu^{jk}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\varepsilon_{p_{k'}}(0)}} \tag{5.101}
$$

$$
\Omega_\nu^i\sum_{jk}\delta_{kk'}d_{ijk}Y_\nu^{jk} = -\sum_{jk}\delta_{kk'}\varepsilon_{p_k}d_{ijk}Y_\nu^{jk} + \frac{(2\pi)^3\sum_{jk}d_{ijk}Q_{kk'j}\Pi_\nu^{jk}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\varepsilon_{p_{k'}}(0)}} \tag{5.102}
$$

$$
\Omega_\nu^i\sum_{jk}\delta_{kk'}\delta_{jj'}d_{ijk}U_\nu^{jk}(q') = -\frac{\sum_{jk}d_{ijk}Q_{kk'j}\left[X_\nu^{jk}+Y_\nu^{jk}\right]}{\sqrt{(2\pi)^3 8\varepsilon_{p_k}(0)\varepsilon_{\sigma_{j'}}(q')\varepsilon_{p_{k'}}(q')}} - \frac{\sum_{jk}d_{ijk}8\bar{F}_{jj'kk'}\Pi_\nu^{jk}}{\sqrt{16\varepsilon_{p_{k'}}(q')\varepsilon_{\sigma_{j'}}(q')}}
$$

$$+\left(\varepsilon_{p_k}(q')+\varepsilon_{\sigma_j}(q')\right)\delta_{jj'}\delta_{kk'}d_{ijk}U_\nu^{jk}(q') \tag{5.103}$$

$$\begin{aligned}\Omega_\nu^i\sum_{jk}\delta_{kk'}\delta_{jj'}d_{ijk}V_\nu^{jk}(q') &= \frac{\sum_{jk}d_{ijk}Q_{kk'j}\left[X_\nu^{jk}+Y_\nu^{jk}\right]}{\sqrt{(2\pi)^3 8\varepsilon_{p_k}(0)\varepsilon_{\sigma_{j'}}(q')\varepsilon_{p_{k'}}(q')}}+\frac{\sum_{jk}d_{ijk}8\bar{F}_{jj'kk'}\Pi_\nu^{jk}}{\sqrt{16\varepsilon_{p_{k'}}(q')\varepsilon_{\sigma_{j'}}(q')}}\\ &\quad-\left(\varepsilon_{p_k}(q')+\varepsilon_{\sigma_j}(q')\right)\delta_{jj'}\delta_{kk'}d_{ijk}V_\nu^{jk}(q'),\end{aligned} \tag{5.104}$$

dabei bezeichnen

$$Q_{kk'j'} = 6G_{kk'j'}-8\bar{F}_{kk'j'l}\xi_l \tag{5.105}$$

$$\Pi_\nu^{jk} = \int\frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3}\frac{\left[U_\nu^{jk}(q)+V_\nu^{jk}(q)\right]}{\sqrt{4\varepsilon_{\sigma_j}(q)\varepsilon_{p_k}(q)}}. \tag{5.106}$$

Ziel der Berechnungen des nächsten Abschnitts sind die RPA-Energien (Massen) Ω_ν^i der pseudoskalaren Mesonen. Dazu ist es zweckmäßig, die RPA-Gleichungen zusammenzufassen und weiter zu vereinfachen. Durch Multiplikation der beiden ersten Gleichungen (5.101) und (5.102) mit

$$\left(\Omega_\nu^i+\varepsilon_{p_{k'}}\right)\quad\text{bzw.}\quad\left(\Omega_\nu^i-\varepsilon_{p_{k'}}\right) \tag{5.107}$$

und anschließender Addition der beiden Gleichungen erhält man

$$\sum_j d_{ijk'}\left[X_\nu^{jk'}+Y_\nu^{jk'}\right]\left[{\Omega_\nu^i}^2-\varepsilon_{p_{k'}}^2(0)\right]=-\sqrt{(2\pi)^3 2\varepsilon_{p_{k'}}(0)}\sum_{jk}d_{ijk}Q_{kk'j}\Pi_\nu^{jk}. \tag{5.108}$$

Umbenennung des Index k' zu m, Multiplikation mit $Q_{mk'j'}$ und anschließende Summation über m erzeugt daraus

$$\sum_{jm}\frac{d_{ijm}Q_{mk'j'}\left[X_\nu^{jm}+Y_\nu^{jm}\right]}{\sqrt{(2\pi)^3 2\varepsilon_{p_m}(0)}}=-\sum_{jk}\sum_m\frac{Q_{mk'j'}Q_{kmj}d_{ijk}\Pi_\nu^{jk}}{{\Omega_\nu^i}^2-\varepsilon_{p_m}^2}. \tag{5.109}$$

Eine Division der beiden Gleichungen (5.103) und (5.104) durch $(2\pi)^2\sqrt{4\varepsilon_{\sigma_{j'}}(q')\varepsilon_{p_{k'}}(q')}$, anschließende Integration der Gleichungen über q' und danach Addition der beiden Gleichungen ergibt

$$\sum_{jk}d_{ijk}\Pi_\nu^{jk}\delta_{jj'}\delta_{kk'} = -\left[\frac{\sum_{jk}d_{ijk}Q_{kk'j'}\left[X_\nu^{jk}+X_\nu^{jk}\right]}{\sqrt{(2\pi)^3 2\varepsilon_{p_k}(0)}}+\sum_{jk}d_{ijk}8\bar{F}_{jj'kk'}\Pi_\nu^{jk}\right]\Sigma_{\sigma_{j'}p_{k'}}(\Omega_\nu^i),$$

(5.110)

dabei steht $\Sigma_{\sigma_{j'} p_{k'}}(\Omega^i_\nu)$ für eine Blase aus einem pseudoskalaren und einem skalaren Quasi-Meson

$$\Sigma_{\sigma_{j'} p_{k'}}(\Omega^i_\nu) = \int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} \frac{\varepsilon_{\sigma_{j'}}(q') + \varepsilon_{p_{k'}}(q')}{2\varepsilon_{\sigma_{j'}}(q')\varepsilon_{p_{k'}}(q')} \frac{1}{{\Omega^i_\nu}^2 - \left(\varepsilon_{\sigma_{j'}}(q') + \varepsilon_{p_{k'}}(q')\right)^2} \tag{5.111}$$

Durch Kombination der beiden Gleichungen (5.109) und (5.110) ergibt sich schließlich

$$\sum_{jk} \left[\delta_{jj'}\delta_{kk'} + \left[8\bar{F}_{jj'kk'} - \sum_m \frac{Q_{mk'j'}Q_{mkj}}{{\Omega^i_\nu}^2 - \varepsilon^2_{p_m}} \right] \Sigma_{\sigma_{j'} p_{k'}}(\Omega^i_\nu) \right] d_{ijk}\Pi^{jk}_\nu = 0. \tag{5.112}$$

Damit reduziert sich das Eigenwertproblem der RPA-Gleichungen zu

$$\det \left[M_{jkj'k'}(\Omega^i_\nu) \right] = 0, \tag{5.113}$$

mit

$$M_{jkj'k'} = \left[\delta_{jj'}\delta_{kk'} + \left[8\bar{F}_{jj'kk'} - \sum_m \frac{Q_{mk'j'}Q_{mkj}}{{\Omega^i_\nu}^2 - \varepsilon^2_{p_m}} \right] \Sigma_{\sigma_{j'} p_{k'}}({\Omega^i_\nu}^2) \right] d_{ijk} \tag{5.114}$$

Durch Transformation mit den U-Matrizen (5.89) wird einer Mischung von Zuständen Rechnung getragen. Nach Durchführung der Transformation ergibt sich für das Eigenwert-Problem der RPA-Gleichungen:

$$\det \left[M_{\mu\rho\lambda\eta}(\Omega^\iota_\nu) \right] = 0, \tag{5.115}$$

mit

$$M_{\mu\rho\lambda\eta} = \left[\delta_{\mu\rho}\delta_{\lambda\eta} + U^\sigma_{j\mu}U^\sigma_{j'\rho} \left[8\bar{F}_{jj'kk'} - \sum_\kappa \frac{Q_{\kappa k'j'}Q_{\kappa kj}}{{\Omega^\iota_\nu}^2 - \varepsilon^2_{p_\kappa}} \right] U^p_{k\lambda}U^p_{k'\eta}\Sigma_{\sigma\lambda p_\eta}({\Omega^\iota_\nu}^2) \right] d_{\iota\mu\eta} \tag{5.116}$$

Diese Gleichung stellt den Ausgangspunkt für numerische Rechnungen und für den Nachweis der Existenz von Null-Lösungen der RPA-Gleichungen im folgenden Abschnitt dar.

5.5 Nachweis der masselosen Goldstone-Bosonen

Ziel dieses Abschnitts ist der Nachweis der Existenz von Lösungen der RPA-Gleichungen, die im chiralen Limes verschwindende Energien besitzen. Dies entspricht der Existenz von masselosen Goldstone-Bosonen und stellt somit sicher, daß die Quasiteilchen-RPA einen symmetrieerhaltenden Zugang darstellt. Der chirale Limes bedeutet, daß keine explizite Symmetriebrechung vorliegt, d.h.

$$\epsilon_j = 0 \quad \forall j. \tag{5.117}$$

Insbesondere soll hier der physikalisch interessante Fall

$$\xi_0 \neq 0 \quad \text{und} \quad \xi_j = 0 \quad \forall j \neq 0 \tag{5.118}$$

untersucht werden, der einer Symmetriebrechung von der $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-Symmetrie zur $SU(3)$-Symmetrie entspricht. Diese Situation ist mit dem Auftreten von acht pseudoskalaren Goldstone-Bosonen verbunden, den drei Pionen, den vier Kaonen und dem η-Meson. Das η'-Meson bleibt massiv. Aus den Gleichungen (5.83) und (5.84) folgt, daß für den hier vorliegenden Fall der Symmetriebrechung zur $SU(3)$-Symmetrie die Mischungswinkel θ_p und θ_σ null sind. Das bedeutet, daß die U-Matrizen zu Einheitsmatrizen werden, was zur Folge hat, daß die Ausdrücke (5.114) und (5.116) identisch sind und damit die Matrix (5.114) als Ausgangspunkt der weiteren Betrachtung dienen kann.
Die HFB-Kondensat-Gleichung (5.56) lautet im Fall der Symmetriebrechung hin zur $SU(3)$-Symmetrie:

$$0 = \sum_i \left[3G_{ii8}\left(I_i^\sigma - I_i^p\right) + 2f_2\xi_0\left(d_{iim}d_{08m} + 2d_{i8m}d_{i0m}\right)I_i^\sigma + 2f_2\xi_0 d_{iim}d_{08m}I_i^p\right]. \tag{5.119}$$

Die Bedingung

$$I_i^p = I_j^\sigma \quad \forall i, j \neq 0 \tag{5.120}$$

erfüllt diese Gleichung, sie stellt die voll symmetrische Wigner-Weyl-Realisierung dar. Diese Bedingung ist jedoch nicht notwendig, da bereits die schwächere Forderung

$$\begin{aligned} I_i^p &= I_j^p \quad \forall i, j \neq 0 \\ I_i^\sigma &= I_j^\sigma \quad \forall i, j \neq 0, \end{aligned} \tag{5.121}$$

der Gleichung genügt und die hier zu untersuchende Goldstone-Realisierung darstellt. Die Bedingung (5.121) ist gleichbedeutend mit der Forderung, daß die Pionen, Kaonen und das η-Meson eine entartete Masse besitzen und ebenso die entsprechenden skalaren Mesonen entartet sind:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{p_i} &= \varepsilon_{p_j} \quad \forall i,j > 0 && (5.122) \\ \varepsilon_{\sigma_i} &= \varepsilon_{\sigma_j} \quad \forall i,j > 0. && (5.123) \end{aligned}$$

Falls eine Null-Mode existiert, so muß gelten:

$$\det\left[M_{jkj'k'}(0)\right] = 0. \tag{5.124}$$

Unter Berücksichtigung obiger Entartung und der Bedingungen (5.121) vereinfacht sich die Matrix aus Gleichung (5.114) und läßt sich diagonalisieren. Für $i \neq 0$ erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - A_i + 8f_2 B \\ &+ 8f_2 C \left[-\frac{8f_2}{3} \frac{\Sigma_{\sigma_0 p_i}}{E\left(2\sqrt{2}g - 4f_2\xi_0\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(1 + 8f_1\Sigma_{\sigma_0 p_i}\right)} \right] \\ &+ 8f_2 D \left[-\frac{8f_2}{3} \frac{\Sigma_{\sigma_i p_0}}{E\left(2\sqrt{2}g - 4f_2\xi_0\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(1 + 8f_1\Sigma_{\sigma_i p_0}\right)} \right] \\ &+ \frac{16f_2}{3E\left({\Omega_\nu^i}^2 - \varepsilon_{p_i}^2\right)} C \frac{\Sigma_{\sigma_0 p_i}}{\left(1 + 8f_1\Sigma_{\sigma_0 p_i}\right)} \\ &\times \left(-\sqrt{2}g - 4f_2\xi_0\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{6}f_1\xi_0 - \frac{8f_2}{3} \frac{\Sigma_{\sigma_i p_0}}{\left(1 + 8f_1\Sigma_{\sigma_i p_0}\right)} \frac{36 f_1 g \xi_0}{\sqrt{6}g - 2f_2\xi_0\sqrt{2}} \right) \\ &+ \frac{16f_2}{3E\left({\Omega_\nu^i}^2 - \varepsilon_{p_i}^2\right)} D \frac{\Sigma_{\sigma_i p_0}}{\left(1 + 8f_1\Sigma_{\sigma_i p_0}\right)} \\ &\times \left(-\sqrt{2}g - 4f_2\xi_0\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{8f_2}{3} \frac{\Sigma_{\sigma_0 p_i}}{\left(1 + 8f_1\Sigma_{\sigma_0 p_i}\right)} \frac{36 f_1 g\xi_0 + 48\sqrt{3}f_1^2\xi_0^2}{\sqrt{6}g - 2f_2\xi_0\sqrt{2}} \right), \end{aligned} \tag{5.125}$$

wobei folgende Bezeichnungen verwendet wurden:

$$A_i = \frac{4}{9\left({\Omega^i_\nu}^2 - \varepsilon^2_{p_i}\right)} \left[\left(30g^2 - 40\sqrt{3}f_2 g\xi_0 + 40f_2^2\xi_0^2\right)\frac{\Sigma_{\sigma_i p_i}}{(1+8f_1\Sigma_{\sigma_i p_i})}\right.$$
$$+\left(3g^2 + 24\sqrt{3}f_1 g\xi_0 + 8\sqrt{3}f_2 g\xi_0 + 144 f_1^2\xi_0^2 + 96 f_1 f_2\xi_0^2 + 16 f_2^2\xi_0^2\right)\frac{\Sigma_{\sigma_0 p_i}}{(1+8f_1\Sigma_{\sigma_0 p_i})}$$
$$\left.+\left(3g^2 + 8\sqrt{3}f_2 g\xi_0 + 16f_2^2\xi_0^2\right)\frac{\Sigma_{\sigma_i p_0}}{(1+8f_1\Sigma_{\sigma_i p_0})}\right] \tag{5.126}$$

$$B = \frac{1}{6\left(2\sqrt{3}f_2\xi_0 - 3g\right)}\left[\left(12g - 8\sqrt{3}f_2\xi_0\right)\frac{\Sigma_{\sigma_i p_i}}{(1+8f_1\Sigma_{\sigma_i p_i})}\right.$$
$$\left.\left(3g + 12\sqrt{3}f_1\xi_0 + 4\sqrt{3}f_2\xi_0\right)\frac{\Sigma_{\sigma_0 p_i}}{(1+8f_1\Sigma_{\sigma_0 p_i})}\left(3g + 4\sqrt{3}f_2\xi_0\right)\frac{\Sigma_{\sigma_i p_0}}{(1+8f_1\Sigma_{\sigma_i p_0})}\right] \tag{5.127}$$

$$C = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(3g + 12\sqrt{3}f_1\xi_0 + 4\sqrt{3}f_2\xi_0\right)\frac{\Sigma_{\sigma_i p_i}}{(1+8f_1\Sigma_{\sigma_i p_i})}$$
$$+\frac{3g + 4\sqrt{3}f_1\xi_0}{\sqrt{2}\left(6\sqrt{3}f_2\xi_0 - 9g\right)}\left[\left(10\sqrt{3}f_2\xi_0 - 15g\right)\frac{\Sigma_{\sigma_i p_i}}{(1+8f_1\Sigma_{\sigma_i p_i})}\right.$$
$$\left.\left(3g + 12\sqrt{3}f_1\xi_0 + 4\sqrt{3}f_2\xi_0\right)\frac{\Sigma_{\sigma_0 p_i}}{(1+8f_1\Sigma_{\sigma_0 p_i})} + \left(3g + 4\sqrt{3}f_2\xi_0\right)\right] \tag{5.128}$$

$$D = \frac{1}{2\sqrt{6}f_2\xi_0 - 3\sqrt{2}g}\left[\left(16\sqrt{3}f_2 g\xi_0 - 6g^2 - 24f_2^2\xi_0^2\right)\frac{\Sigma_{\sigma_i p_i}}{(1+8f_1\Sigma_{\sigma_i p_i})}\right.$$
$$\left.+\left(3g^2 + 12\sqrt{3}f_1 g\xi_0 + 4\sqrt{3}f_2 g\xi_0\right)\frac{\Sigma_{\sigma_0 p_i}}{(1+8f_1\Sigma_{\sigma_0 p_i})} + \left(3g^2 + 4\sqrt{3}f_2 g\xi_0\right)\right] \tag{5.129}$$

$$E = 1 + \frac{4f_2}{3g - 2\sqrt{2}f_2\xi_0}\left[3g\frac{\Sigma_{\sigma_i p_0}}{(1+8f_1\Sigma_{\sigma_i p_0})} + \left(3g + 4\sqrt{3}f_1\xi_0\right)\frac{\Sigma_{\sigma_0 p_i}}{(1+8f_1\Sigma_{\sigma_0 p_i})}\right] \tag{5.130}$$

Die Gleichung (5.125) läßt sich nach ${\Omega^i_\nu}^2$ auflösen. Mit den Abkürzungen

$$N(\Omega^i_\nu) = \frac{5}{3}\left(8g + \frac{32}{3}f_2^2\xi_0^2 - \frac{32}{\sqrt{3}}f_2 g\xi_0\right)\frac{\Sigma_{\sigma_i p_i}}{(1+8f_1\Sigma_{\sigma_i p_i})}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{2}{3}\Big(2g^2+\frac{32}{3}f_2^2\xi_0^2+96f_1^2\xi_0^2+\frac{16}{\sqrt{3}}f_2g\xi_0+16\sqrt{3}f_1g\xi_0\\
&\qquad+64f_1f_2\xi_0^2\Big)\frac{\Sigma_{\sigma_0 p_i}}{(1+8f_1\Sigma_{\sigma_0 p_i})}\\
&+\frac{2}{3}\left(8g^2+\frac{32}{3}f_2^2\xi_0^2+\frac{32}{\sqrt{3}}gf_2\xi_0\right)\frac{\Sigma_{\sigma_i p_0}}{(1+8f_1\Sigma_{\sigma_i p_0})}\\
&+\frac{64}{3}f_2\Big(3g^2+4\sqrt{3}f_1g\xi_0-2\sqrt{3}f_2g\xi_0-16f_1^2\xi_0^2\\
&\qquad-24f_1f_2\xi_0^2-4f_2^2\xi_0^2\Big)\frac{\Sigma_{\sigma_i p_i}\Sigma_{\sigma_0 p_i}}{(1+8f_1\Sigma_{\sigma_i p_i})(1+8f_1\Sigma_{\sigma_0 p_i})}\\
&+\frac{64}{3}f_2\left(3g^2-2\sqrt{3}f_2g\xi_0-4f_2^2\xi_0^2\right)\frac{\Sigma_{\sigma_i p_i}\Sigma_{\sigma_i p_0}}{(1+8f_1\Sigma_{\sigma_i p_i})(1+8f_1\Sigma_{\sigma_i p_0})}\\
&+\frac{512}{3}f_1^2f_2\xi_0^2\frac{\Sigma_{\sigma_0 p_i}\Sigma_{\sigma_i p_0}}{(1+8f_1\Sigma_{\sigma_0 p_i})(1+8f_1\Sigma_{\sigma_i p_0})}\\
&-2048f_1^2f_2^2\xi_0^2\frac{\Sigma_{\sigma_0 p_i}\Sigma_{\sigma_i p_0}\Sigma_{\sigma_i p_i}}{(1+8f_1\Sigma_{\sigma_i p_i})(1+8f_1\Sigma_{\sigma_0 p_i})(1+8f_1\Sigma_{\sigma_i p_0})}
\end{aligned}
\tag{5.131}
$$

$$
\begin{aligned}
D(\Omega_\nu^i) &= 1-\frac{8}{3}f_2\left[\frac{2\Sigma_{\sigma_i p_i}}{(1+8f_1\Sigma_{\sigma_i p_i})}-\frac{\Sigma_{\sigma_i p_0}}{(1+8f_1\Sigma_{\sigma_i p_0})}-\frac{\Sigma_{\sigma_0 p_i}}{(1+8f_1\Sigma_{\sigma_0 p_i})}\right]\\
&\quad-32f_2^2\left[\frac{\Sigma_{\sigma_i p_i}\Sigma_{\sigma_i p_0}}{(1+8f_1\Sigma_{\sigma_i p_i})(1+8f_1\Sigma_{\sigma_i p_0})}+\frac{\Sigma_{\sigma_i p_i}\Sigma_{\sigma_0 p_i}}{(1+8f_1\Sigma_{\sigma_i p_i})(1+8f_1\Sigma_{\sigma_0 p_i})}\right]
\end{aligned}
\tag{5.132}
$$

läßt sich folgender Ausdruck für die RPA-Massen der pseudoskalaren Mesonen im chiralen Limes gewinnen:

$$
{\Omega_\nu^i}^2=\varepsilon_{p_i}^2+\frac{N(\Omega_\nu^i)}{D(\Omega_\nu^i)}\qquad\forall i\neq 0. \tag{5.133}
$$

Für $\Omega_\nu^i=0$ vereinfacht sich der Ausdruck für die Blase aus einem pseudoskalaren und einem skalaren Quasi-Meson (5.111):

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{\sigma_i p_j}(0) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\varepsilon_{\sigma_i}(q)+\varepsilon_{p_j}(q)}{2\varepsilon_{\sigma_i}(q)\varepsilon_{p_j}(q)} \frac{1}{-\left(\varepsilon_{\sigma_i}(q)+\varepsilon_{p_j}(q)\right)^2} \\
&= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\varepsilon_{\sigma_i}(q)\left(\varepsilon^2_{\sigma_i}(q)-\varepsilon^2_{p_j}(q)\right)} - \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\varepsilon_{p_j}(q)\left(\varepsilon^2_{\sigma_i}(q)-\varepsilon^2_{p_j}(q)\right)} \\
&= \frac{I^\sigma_i - I^p_j}{m^2_{\sigma_i} - m^2_{p_j}}.
\end{aligned}
\tag{5.134}
$$

Unter Ausnutzung dieser Beziehung lassen sich die HFB-Massen der Quasi-Mesonen durch diese Blasen ausdrücken. Da im hier untersuchten Fall die Massen wie oben beschrieben entartet sind erhält man daraus ein lineares Gleichungssystem aus vier Gleichungen, woraus sich nach einigen algebraischen Umformungen folgender Ausdruck für $\varepsilon^2_{p_i}$ ergibt:

$$
\varepsilon^2_{p_i} = -\frac{N(0)}{D(0)} \quad \forall i \neq 0. \tag{5.135}
$$

Gemeinsam mit Gleichung (5.133) erhält man daraus

$$
{\Omega^i_\nu}^2 = -\frac{N(0)}{D(0)} + \frac{N(\Omega^i_\nu)}{D(\Omega^i_\nu)} \quad \forall i \neq 0. \tag{5.136}
$$

An diesem Ausdruck läßt sich die spuriose Lösung $\Omega^i_\nu = 0$ direkt ablesen. Das bedeutet, daß das Goldstone-Theorem erfüllt ist und damit die selbstkonsistente Quasiteilchen-RPA einen symmetrieerhaltenden Zugang zur Behandlung des linearen $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-σ-Modells darstellt.

Kapitel 6

Lineares $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-σ-Modell bei endlicher Temperatur

In diesem Kapitel wird der bisher beschriebene Formalismus der Quasiteilchen-RPA auf den Fall endliche Temperatur ausgedehnt, um damit eine nichtperturbative Behandlung des chiralen Phasenübergangs zu ermöglichen. In einem ersten Abschnitt werden kurz die thermodynamischen Grundlagen behandelt.

6.1 Thermodynamische Grundlagen

Die pseudoskalaren und die skalaren Mesonen sind Bosonen. Daher stellt ein Gas aus diesen Mesonen ein Bose-Gas dar. Sind in einem solchen Gas die möglichen Teilchenenergien ε_i und der Erwartungswert $\mathcal{H}_0 = \langle \hat{H} \rangle$ der inneren Energie bekannt, so läßt sich das System als einer großkanonischen Gesamtheit zugehörig charakterisieren und entsprechend behandeln, d.h. alle Erwartungswerte werden sind als großkanonische Erwartungswerte zu bilden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sei der Hamilton-Operator in diesem Abschnitt gegeben durch

$$\hat{H} = \mathcal{H}_0 + \sum_i \varepsilon_i \hat{N}_i, \tag{6.1}$$

nur dieser Anteil ist hier von Bedeutung. Für den Besetzungszahl-Operator gilt

$$\hat{N}_i |n_i\rangle = f_i |n_i\rangle. \tag{6.2}$$

Die großkanonische Zustandssumme eines solchen Systems lautet

$$Z = \mathrm{Tr}\left[e^{-\beta\left(\sum_i \varepsilon_i \hat{N}_i - \mu \hat{N}\right)} \right], \tag{6.3}$$

wobei μ das chemische Potential bezeichnet und $\beta = \frac{1}{k_B T}$ gilt. Da für die Bosonen keine

Teilchenzahlerhaltung gilt, ist das chemische Potential null und wird im folgenden vernachlässigt. Für den Dichteoperator $\hat{\rho}$ erhält man mit Gleichung (6.3):

$$\hat{\rho} = Z^{-1} e^{-\beta\left(\sum_i \varepsilon_i \hat{N}_i\right)}, \tag{6.4}$$

welcher außerdem die Eigenschaft

$$\mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}\right] = 1 \tag{6.5}$$

besitzt. Der großkanonische Erwartungswert eines Operator $\hat{X}$ ergibt sich mit dem Dichteoperator zu

$$\langle \hat{X} \rangle = \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}\hat{X}\right]. \tag{6.6}$$

Insbesondere erhält man für die großkanonischen Erwartungswerte der Entropie S und der Besetzungszahlen f_i:

$$\begin{aligned} S &= \langle -k \ln \hat{\rho} \rangle = -k \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho} \ln \hat{\rho}\right] & (6.7) \\ f_i &= \langle \hat{N}_i \rangle = \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}\hat{N}_i\right]. & (6.8) \end{aligned}$$

Für den hier vorliegenden Fall eines Bose-Gases erhält man explizit:

$$\begin{aligned} f_i &= \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}\hat{N}_i\right] \\ &= \frac{\mathrm{Tr}\left[\hat{N}_i e^{-\beta\left(\sum_i \varepsilon_i \hat{N}_i - \mu \hat{N}\right)}\right]}{\mathrm{Tr}\left[e^{-\beta\left(\sum_i \varepsilon_i \hat{N}_i - \mu \hat{N}\right)}\right]} \\ &= \frac{\sum_i \langle n_i | \hat{N}_i e^{-\beta\left(\sum_i \varepsilon_i \hat{N}_i - \mu \hat{N}\right)} | n_i \rangle}{\sum_i \langle n_i | e^{-\beta\left(\sum_i \varepsilon_i \hat{N}_i - \mu \hat{N}\right)} | n_i \rangle} \\ &= \frac{\sum_i f_i \left(e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}\right)^{f_i}}{\sum_i \left(e^{-\beta\left(\varepsilon_i - \mu \hat{N}\right)}\right)^{f_i}} \\ &= \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Die Gleichgewichtsverteilungsfunktion eines großkanonischen Ensembles fester Temperatur ist durch die Verteilung gegeben, die die Entropie maximiert. Die Entropie ergibt sich in diesem Fall zu:

$$S = k_B \sum_i \left[(1 + f_i) \ln(1 + f_i) - f_i \ln f_i\right], \tag{6.10}$$

wobei die Summe sowohl über den Impuls, als auch über die Teilchensorten läuft. Die Forderung nach maximaler Entropie entspricht der Forderung nach einer minimalen Freien Energie Ω, wobei Ω gegeben ist durch:

$$\Omega = \langle \hat{H} \rangle - TS. \tag{6.11}$$

Die Entropie und der Druck lassen sich durch Differentiation aus der Freien Energie gewinnen:

$$\begin{aligned} S &= -\left.\frac{\partial \Omega}{\partial T}\right|_V && (6.12)\\ P &= -\left.\frac{\partial \Omega}{\partial V}\right|_T . && (6.13) \end{aligned}$$

Im nächsten Abschnitt wird die thermodynamische Beschreibung auf das HFB-Meanfield angewendet.

6.2 HFB-Näherung bei endlicher Temperatur

Die Vorgehensweise ist hier ganz analog zu der im Fall verschwindender Temperatur in den Kapiteln zuvor. Der erste Schritt ist wiederum die Felder durch Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren auszudrücken und dann die Teilchenoperatoren durch eine, jetzt temperaturabhängige, Bogoliubov-Transformation in die Quasiteilchen-Basis zu überführen. Die Bogoliubov-Transformation lautet gemäß (5.87) und (5.88):

$$\begin{aligned} \alpha^\dagger_{T,\mu}(q) &= U^p_{j\mu}(\theta_p)\left[u_{T,j}(q)a^\dagger_{T,j}(q) - v_{T,j}(q)a_{T,j}(-q)\right] && (6.14)\\ \alpha_\mu(q) &= U^p_{j\mu}(\theta_p)\left[u_{T,j}(q)a_{T,j}(q) - v_{T,j}(q)a^\dagger_{T,j}(-q)\right] && (6.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta^\dagger_{T,\mu}(q) &= U^\sigma_{ji}(\theta_\sigma)\left[x_{T,j}(q)b^\dagger_{T,j}(q) - y_{T,j}(q)b_{T,j}(-q) - \frac{\omega_{T,j}(q)}{x_{T,j}}\delta(\vec{q})\right] && (6.16)\\ \beta_{T,\mu}(q) &= U^\sigma_{ji}(\theta_\sigma)\left[x_{T,j}(q)b_j(q) - y_{T,j}(q)b^\dagger_{T,j}(-q) - \frac{\omega^*_{T,i}(q)}{x_{T,j}}\delta(\vec{q})\right], && (6.17) \end{aligned}$$

hierbei ist $U^{p,\sigma}$ entsprechend Gleichung (5.89) gegeben durch:

$$U^{p,\sigma}_{j\mu} = \delta_{j\mu}\delta_{j\bar{j}} + (\delta_{j8}\delta_{\mu 8} + \delta_{j0}\delta_{\mu 0})\cos\theta_{p,\sigma} + (\delta_{j8}\delta_{\mu 0} - \delta_{j0}\delta_{\mu 8})\sin\theta_{p,\sigma}, \tag{6.18}$$

dabei läuft $\bar{j}$ von eins bis sieben. Die griechischen Symbole kennzeichnen Zustände, die

Eigenmoden des quadratischen Anteils des Hamilton-Operators sind, die lateinischen Symbole kennzeichnen die Zustände, die dies nicht sind. Die Bogoliubov-Faktoren unterliegen wie im Fall $T = 0$ den Bedingungen

$$\begin{aligned} u_{T,j}^2(q) - v_{T,j}^2(q) &= 1 \\ x_{T,j}^2(q) - v_{T,j}^2(q) &= 1, \end{aligned} \tag{6.19}$$

um sicherzustellen, daß die durch die Bogoliubov-Transformation definierten Quasiteilchenoperatoren den gleichen Vertauschungsrelationen genügen wie die Teilchenoperatoren:

$$[\alpha_{T,p}, \alpha_{T,q}] = \left[\alpha_{T,p}^\dagger, \alpha_{T,q}^\dagger\right] = 0 \tag{6.20}$$

$$\left[\alpha_{T,p}, \alpha_{T,q}^\dagger\right] = \delta(\vec{p} - \vec{q}). \tag{6.21}$$

Der Hamilton-Operator bei endlicher Temperatur entspricht formal dem bei $T = 0$:

$$\begin{aligned} H^T = \int d^3x \Big[& \dot{\sigma}_{T,i}^2 + \dot{p}_{T,i}^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma_{T,i})^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu p_{T,i})^2 \\ & + \frac{1}{2} {m_{\sigma_{ij}}^T}^2 \sigma_{T,i}\sigma_{T,j} + \frac{1}{2} {m_{p_{ij}}^T}^2 p_{T,i} p_{T,j} - G_{ijk}(\sigma_{T,i}\sigma_{T,j}\sigma_{T,k} - 3 p_{T,i} p_{T,j} \sigma_{T,k}) \\ & - 4\bar{F}_{ij,kl} p_i p_j \sigma_{T,k} \xi_l^T - \frac{4}{3} F_{ijkl} \sigma_{T,i}\sigma_{T,j}\sigma_{T,k}\xi_l^T - 2\bar{F}_{ij,kl} p_{T,i} p_{T,j} \sigma_{T,k}\sigma_{T,l} \\ & - \frac{1}{3} F_{ijkl}(\sigma_{T,i}\sigma_{T,j}\sigma_{T,k}\sigma_{T,l} - p_{T,i}p_{T,j}p_{T,k}p_{T,l}) + E_i^T \sigma_{T,i} + \mathcal{H}_0^T \Big]. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Darin sind die Tensoren G_{ijk}, F_{ijkl} und $\bar{F}_{ij,kl}$ durch (3.2) - (3.4) gegeben, die Ausdrücke für ${m_{\sigma_{ij}}^T}^2$, ${m_{p_{ij}}^T}^2$ und E_i^T finden sich in (3.29) - (3.31) und $\mathcal{H}_0^T$ bezeichnet den großkanonischen Erwartungswert des Hamilton-Operators,

$$\mathcal{H}_0^T = \langle H^T \rangle. \tag{6.23}$$

Die innere Energie ergibt sich als der großkanonische Erwartungswert des Hamilton-Operators. Bei $T = 0$ berechnet man den Erwartungswert indem man durch Anwendung des Wick-Theorems den Hamilton-Operator normalordnet. Bei endlicher Temperatur erhält man ein statistisches Ensemble von Quasiteilchen-Anregungen, sodaß das Quasiteilchen-Vakuum nicht länger als Referenzzustand für Normalprodukte dienen kann. Dies bedeutet, daß das Wick-Theorem hier nicht auf die Operatoren angewendet werden kann. Das Theorem von Bloch und De Dominicis [28] besagt jedoch, daß das Wick-Theorem für die Ensemble-Mittelwerte der Operatoren gültig bleibt. Damit erhält man für den großkanonischen Erwartungswert des Hamilton-Operators:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_0^T \;=\;& \epsilon_i \xi_i^T + \frac{1}{2}\mu^2 \xi_i^{T\,2} - G_{ijk}\xi_i^T \xi_j^T \xi_k^T - \frac{1}{3}F_{ijkl}\xi_i^T \xi_j^T \xi_k^T \xi_l^T \\
& - \left(2F_{ijkl}\xi_k^T \xi_l^T + 3G_{ijk}\xi_k^T\right)\delta_{ij} I^T_{\sigma_{ij}} - \left(2\bar{F}_{ijkl}\xi_k^T \xi_l^T - 3G_{ijk}\xi_k^T\right)\delta_{ij} I^T_{p_{ij}} \\
& - F_{ijkl}\left(\delta_{ij} I^T_{p_{ij}} \delta_{kl} I^T_{p_{kl}} + \delta_{ij} I^T_{\sigma_{ij}} \delta_{kl} I^T_{\sigma_{kl}}\right) - 2\bar{F}_{ijkl}\delta_{ij} I^T_{p_{ij}} \delta_{kl} I^T_{\sigma_{kl}} \\
& + \int d^3 q\, \omega_{T,q}\left[(1+2f_i^p(q))\left(u^2_{T,i}(q) + v^2_{T,i}(q)\right) + (1+2f_i^\sigma(q))\left(x^2_{T,i}(q) + y^2_{T,i}(q)\right)\right].
\end{aligned} \tag{6.24}
$$

$I^T_{p_{ij}}$ und $I^T_{\sigma_{ij}}$ sind thermische Erwartungswerte von Bilinearformen skalarer und pseudoskalarer Felder:

$$
I^T_{p_{ij}} = \int dx \langle p_i(x) p_j(x) \rangle \tag{6.25}
$$

$$
I^T_{\sigma_{ij}} = \int dx \langle \sigma_i(x) \sigma_j(x) \rangle. \tag{6.26}
$$

Im Minimum der freien Energie kann man diese Bilinearformen explizit mit Hilfe der U-Matrizen ausdrücken:

$$
I^T_{p_{ij}} = U^p_{i\mu} U^p_{j\mu} I^T_{p_\mu} \tag{6.27}
$$

$$
I^T_{\sigma_{ij}} = U^\sigma_{i\mu} U^\sigma_{j\mu} I^T_{\sigma_\mu}, \tag{6.28}
$$

$$
\tag{6.29}
$$

wobei die $I^T_{p_\mu}$ und $I^T_{\sigma_\mu}$ die temperaturabhängigen Tadpole-Integrale, gegeben durch die Bose-Faktoren und die selbstkonsistenten Quasiteilchen-Energien, bezeichnen:

$$
I^T_{p_\mu} = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1 + 2f_{p_\mu}(q)}{2\varepsilon^T_{p_\mu}(q)} \tag{6.30}
$$

$$
I^T_{\sigma_\mu} = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1 + 2f_{\sigma_\mu}(q)}{2\varepsilon^T_{\sigma_\mu}(q)}. \tag{6.31}
$$

Unter Verwendung der Beziehung für die innere Energie ergibt sich für die freie Energie

$$
\Omega = \mathcal{H}_0^T - TS, \tag{6.32}
$$

wobei die Entropie S durch Gleichung (6.10) gegeben ist. An die Stelle der Minimierung des Vakuumerwartungswerts des Hamilton-Operators bezüglich der Bogoliubov-Faktoren u_j, v_j, x_j, y_j und der Mesonkondensate ξ_0, ξ_8 im Fall $T = 0$ tritt bei endlicher Temperatur die Minimierung der freien Energie Ω bezüglich $u_{T,j}, v_{T,j}, x_{T,j}, y_{T,j}$ und ξ_0^T, ξ_8^T. Die Minimierung der freien Energie erfolgt nach dem Ritz'schen Variationsprinzip und liefert für eine Minimierung bezüglich der Mesonkondensate:

$$
\begin{aligned}
0 &= \epsilon_0 + \mu^2 \xi_0 - \frac{4}{3} F_{0jkl} \xi_j^T \xi_k^T \xi_l^T - 3G_{0jk} \xi_j^T \xi_k^T - 3G_{0jk} I_{\sigma_{jk}}^T \\
&\quad + 3G_{0jk} I_{p_{jk}}^T - 4\bar{F}_{0jkl} I_{p_{kl}}^T \xi_j^T - 4F_{0jkl} I_{\sigma_{kl}}^T \xi_j^T \qquad (6.33)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \epsilon_8 + \mu^2 \xi_8^T - \frac{4}{3} F_{8jkl} \xi_j^T \xi_k^T \xi_l^T - 3G_{8jk} \xi_j^T \xi_k^T - 3G_{8jk} I_{\sigma_{jk}}^T \\
&\quad + 3G_{8jk} I_{p_{jk}}^T - 4\bar{F}_{8jkl} I_{p_{kl}}^T \xi_j^T - 4F_{8jkl} I_{\sigma_{kl}}^T \xi_j^T . \qquad (6.34)
\end{aligned}
$$

Aus der Minimierung der Freien Energie bezüglich der Bogoliubov-Faktoren erhält man:

$$
\begin{aligned}
C_{p_j}^T &= \omega(q) \left(u_{T,j}(q) v_{T,j}(q) \right) + \frac{1}{2} \left(u_{T,j}(q) + v_{T,j}(q) \right)^2 \delta_{ij} \Delta_{p_{ij}}^T = 0 \qquad (6.35) \\
C_{\sigma_j}^T &= \omega(q) \left(x_{T,j}(q) y_{T,j}(q) \right) + \frac{1}{2} \left(x_{T,j}(q) + y_{T,j}(q) \right)^2 \delta_{ij} \Delta_{\sigma_{ij}}^T = 0, \qquad (6.36)
\end{aligned}
$$

wobei gilt:

$$
\begin{aligned}
\Delta_{p_{ij}}^T &= 6G_{ijk} \xi_k^T - 4\bar{F}_{ijkl} \xi_k^T \xi_l^T - 4\bar{F}_{ijkl} I_{\sigma_{kl}}^T - 4F_{ijkl} I_{p_{kl}}^T \qquad (6.37) \\
\Delta_{\sigma_{ij}}^T &= -6G_{ijk} \xi_k^T - 4F_{ijkl} \xi_k^T \xi_l^T - 4\bar{F}_{ijkl} I_{p_{kl}}^T - 4F_{ijkl} I_{\sigma_{kl}}^T . \qquad (6.38)
\end{aligned}
$$

Daneben erhält man aus dem quadratischen Anteil des Hamilton-Operators in Analogie zum Fall $T = 0$ die Quasiteilchen-Energien:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{p_j}^T(q) &= \omega(q) \left(u_{T,j}^2(q) + v_{T,j}^2(q) \right) + \left(u_{T,j}(q) + v_{T,j}(q) \right)^2 \delta_{ij} \Delta_{p_{ij}}^T \qquad (6.39) \\
\varepsilon_{\sigma_j}^T(q) &= \omega(q) \left(x_{T,j}^2(q) + y_{T,j}^2(q) \right) + \left(x_{T,j}(q) + y_{T,j}(q) \right)^2 \delta_{ij} \Delta_{\sigma_{ij}}^T . \qquad (6.40)
\end{aligned}
$$

Mittels der U-Matrizen lassen sich die Quasiteilchen-Energien schreiben als:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{p_\mu}^T(q) &= \omega^2(q) - \Delta_{p_{ij}}^T U_{i\mu}^p U_{j\mu}^p \qquad (6.41) \\
\varepsilon_{\sigma_\mu}^T(q) &= \omega^2(q) - \Delta_{\sigma_{ij}}^T U_{i\mu}^\sigma U_{j\mu}^\sigma . \qquad (6.42)
\end{aligned}
$$

Dies sind die selbstkonsistenten BCS-Gapgleichungen bei endlicher Temperatur, wobei die Selbstkonsistenz direkt aus dem Ritz'schen Variationsprinzip folgt. Die Mischungswinkel

θ_p und θ_σ werden durch folgende Beziehung festgelegt:

$$\tan 2\theta_p = \frac{\Delta^T_{p_{ij}} \left[\delta_{i0}\delta_{j8} + \delta_{i8}\delta_{j0}\right]}{\Delta^T_{p_{ij}} \left[\delta_{i0}\delta_{j0} - \delta_{i8}\delta_{j8}\right]} \tag{6.43}$$

$$\tan 2\theta_\sigma = \frac{\Delta^T_{\sigma_{ij}} \left[\delta_{i0}\delta_{j8} + \delta_{i8}\delta_{j0}\right]}{\Delta^T_{\sigma_{ij}} \left[\delta_{i0}\delta_{j0} - \delta_{i8}\delta_{j8}\right]}. \tag{6.44}$$

Aus den BCS-Gapgleichungen ergeben sich wiederum folgende Ausdrücke für die Massen der Quasiteilchen:

$$\varepsilon^T_{p_\mu}(q) = \mu^2 - \Delta^T_{p_{ij}} U^p_{i\mu} U^p_{j\mu} \tag{6.45}$$

$$\varepsilon^T_{\sigma_\mu}(q) = \mu^2 - \Delta^T_{\sigma_{ij}} U^\sigma_{i\mu} U^\sigma_{j\mu}. \tag{6.46}$$

Für die einzelnen Quasi-Mesonen lauten die Ausdrücke folgendermaßen:

$$m^2_{\pi,T} = \mu^2 + \Delta^T_\pi \tag{6.47}$$

$$m^2_{K,T} = \mu^2 + \Delta^T_k \tag{6.48}$$

$$m^2_{\eta,T} = \mu^2 + \Delta^T_{p_{ij}} \left[-\delta_{i0}\delta_{j0}\sin^2\theta_p + \delta_{i8}\delta_{j8}\cos^2\theta_p\right] (\cos 2\theta_p)^{-1} \tag{6.49}$$

$$m^2_{\eta',T} = \mu^2 + \Delta^T_{p_{ij}} \left[\delta_{i0}\delta_{j0}\cos^2\theta_p - \delta_{i8}\delta_{j8}\sin^2\theta_p\right] (\cos 2\theta_p)^{-1} \tag{6.50}$$

$$m^2_{\sigma_\pi,T} = \mu^2 + \Delta^T_{\sigma_\pi} \tag{6.51}$$

$$m^2_{\sigma_K,T} = \mu^2 + \Delta^T_{\sigma_k} \tag{6.52}$$

$$m^2_{\sigma_\eta,T} = \mu^2 + \Delta^T_{\sigma_{ij}} \left[-\delta_{i0}\delta_{j0}\sin^2\theta_\sigma + \delta_{i8}\delta_{j8}\cos^2\theta_\sigma\right] (\cos 2\theta_\sigma)^{-1} \tag{6.53}$$

$$m^2_{\sigma_{\eta'},T} = \mu^2 + \Delta^T_{\sigma_{ij}} \left[\delta_{i0}\delta_{j0}\cos^2\theta_\sigma - \delta_{i8}\delta_{j8}\sin^2\theta_\sigma\right] (\cos 2\theta_\sigma)^{-1} \tag{6.54}$$

Diese acht Gleichungen für die Massen der Quasiteilchen gemeinsam mit den beiden Kondensat-Gleichungen und den beiden Mischungswinkel-Gleichungen ergeben einen Satz von zwölf gekoppelten, voll selbstkonsistenten Gleichungen, die das mittlere Feld bestimmen.
Auch bei endlicher Temperatur ist in der HFB-Näherung das Goldstone-Theorem verletzt, es treten keine masselosen Bosonen auf. Zur Wiederherstellung der Symmetrie und des Goldstone-Theorems muß wie bei $T = 0$ der Übergang zur RPA erfolgen.

6.3 RPA bei endlicher Temperatur

Der RPA-Operator wurde im Fall $T = 0$ so gewählt, daß er den Symmetrieoperator ${Q^i_A}^\dagger$ enthält. Dies ist auch hier der Fall, im Unterschied zur Situation bei $T = 0$ tragen jetzt jedoch alle Terme bei, da hier keine Erwartungswerte mit dem Quasiteilchen-Vakuum gebildet werden, sondern großkanonische Erwartungswerte. Man macht daher folgenden Ansatz für den RPA-Operator:

$$\begin{aligned} Q^\dagger_\nu &= d_{\nu\mu\rho}\left(X_1^{\mu\rho}\alpha^\dagger_\rho(0) - Y_1^{\mu\rho}\alpha_\rho(0)\right) \\ &\quad + d_{\nu\mu\rho}\sum_q \left(X_2^{\mu\rho}(q)\beta^\dagger_\mu(q)\alpha^\dagger_\rho(-q) - Y_2^{\mu\rho}(q)\beta_\mu(q)\alpha_\rho(-q)\right) \\ &\quad + d_{\nu\mu\rho}\sum_q \left(X_3^{\mu\rho}(q)\beta_\mu(q)\alpha^\dagger_\rho(q) - Y_3^{\mu\rho}(q)\beta^\dagger_\mu(q)\alpha_\rho(q)\right). \end{aligned} \tag{6.55}$$

Die Ableitung der RPA-Gleichungen im Fall endlicher Temperatur entspricht im wesentlichen der bei verschwindender Temperatur aus dem vierten Kapitel und findet sich auch in [29,30]. Die RPA-Gleichungen bei endlicher Temperatur lauten:

$$\langle\left[\delta Q_\nu, \left[H, Q^\dagger_\nu\right]\right]\rangle = \Omega^T_\nu \langle\left[\delta Q_\nu, Q^\dagger_\nu\right]\rangle. \tag{6.56}$$

Auch hier, sowie im folgenden, ist der großkanonische Erwartungswert zu bilden. Die Variationen δQ_ν sind wiederum auf den gleichen Teilraum des Fock-Raums eingeschränkt wie die RPA-Anregungsoperatoren $Q^\dagger_\nu$. Die RPA-Gleichungen lauten somit:

$$\langle\left[\alpha_\eta(0), \left[H, Q^\dagger_\nu\right]\right]\rangle = \Omega^i_{T,\nu}\langle\left[\alpha_\eta(0), Q^\dagger_\nu\right]\rangle \tag{6.57}$$

$$\langle\left[\alpha^\dagger_\eta(0), \left[H, Q^\dagger_\nu\right]\right]\rangle = \Omega^i_{T,\nu}\langle\left[\alpha^\dagger_\eta(0), Q^\dagger_\nu\right]\rangle \tag{6.58}$$

$$\langle\left[\alpha_\eta(-q')\beta_\lambda(q'), \left[H, Q^\dagger_\nu\right]\right]\rangle = \Omega^i_{T,\nu}\langle\left[\alpha_\eta(-q')\beta_\lambda(q'), Q^\dagger_\nu\right]\rangle \tag{6.59}$$

$$\langle\left[\alpha^\dagger_\eta(-q')\beta^\dagger_\lambda(q'), \left[H, Q^\dagger_\nu\right]\right]\rangle = \Omega^i_{T,\nu}\langle\left[\alpha^\dagger_\eta(-q')\beta^\dagger_\lambda(q'), Q^\dagger_\nu\right]\rangle \tag{6.60}$$

$$\langle\left[\alpha^\dagger_\eta(q')\beta_\lambda(q'), \left[H, Q^\dagger_\nu\right]\right]\rangle = \Omega^i_{T,\nu}\langle\left[\alpha^\dagger_\eta(q')\beta_\lambda(q'), Q^\dagger_\nu\right]\rangle \tag{6.61}$$

$$\langle\left[\alpha_\eta(q')\beta^\dagger_\lambda(q'), \left[H, Q^\dagger_\nu\right]\right]\rangle = \Omega^i_{T,\nu}\langle\left[\alpha_\eta(q')\beta^\dagger_\lambda(q'), Q^\dagger_\nu\right]\rangle. \tag{6.62}$$

Diese sechs Gleichungen können in kompakter Form als Matrix-Gleichung geschrieben werden:

$$\int d^3q \mathcal{M}_{ij}(q', q)\mathcal{X}_j(q) = \Omega^T_\nu \mathcal{N}_{ij}(q')\mathcal{X}_j(q'), \tag{6.63}$$

wobei $\mathcal{M}(q', q)$ die RPA-Matrix bezeichnet, Ω^T_ν die Eigenwerte, $\vec{\mathcal{X}}(q)$ die Eigenvektoren und $\mathcal{N}(q')$ die diagonale Matrix-Norm, für die gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{11}(q') &= -\mathcal{N}_{22}(q') = 1 \\
\mathcal{N}_{33}(q') &= -\mathcal{N}_{44}(q') = 1 + f_{p_\nu}(q') + f_{\sigma_\nu}(q') \\
\mathcal{N}_{55}(q') &= -\mathcal{N}_{66}(q') = 0 + f_{\sigma_\nu}(q') - f_{p_\nu}(q')
\end{aligned} \tag{6.64}$$

Die Normierungsbedingung für den Eigenvektor lautet:

$$\begin{aligned}
\left\langle \left[Q_\nu, Q^\dagger_{\nu'}\right]\right\rangle &= \left[|X_{1,\nu}X_{1,\nu'}| - |Y_{1,\nu}Y_{1,\nu'}|\right] \\
&\quad + \sum_{q'} \left(1 + f_{p_\nu}(q') + f_{\sigma_\nu}(q')\right)\left[|X_{2,\nu}(q')X_{2,\nu'}(q')| - |Y_{2,\nu}(q')Y_{2,\nu'}(q')|\right] \\
&\quad + \sum_{q'} \left(f_{\sigma_\nu}(q') - f_{p_\nu}(q')\right)\left[|X_{3,\nu}(q')X_{3,\nu'}(q')| - |Y_{3,\nu}(q')Y_{3,\nu'}(q')|\right] \\
&= \delta_{\nu\nu'}.
\end{aligned} \tag{6.65}$$

Auf formal gleiche Art und Weise wie bei $T = 0$ läßt sich das Eigenwertproblem aus Gleichung (6.63) zusammenfassen und vereinfachen. Man erhält analog zu Gleichung (5.112):

$$\sum_{\mu\rho} \left[\delta_{\mu\rho}\delta_{\lambda\eta} + U^\sigma_{j\mu}U^\sigma_{j'\rho}\left[8\bar{F}_{jj'kk'} - \sum_\kappa \frac{Q_{\kappa k' j'}Q_{\kappa kj}}{\Omega^2_\nu - \varepsilon^2_{p_\kappa}}\right] U^p_{k\lambda}U^p_{k'\eta}\Sigma_{\sigma_\lambda p_\eta}(\Omega^2_\nu)\right] d_{\nu\mu\eta}\Pi^{\mu\rho}_\nu = 0. \tag{6.66}$$

Der Vektor Π_ν stellt den zu (5.106) analogen Eigenvektor dar. Der Ausdruck für die Blase aus einem skalaren und einem pseudoskalarem Quasi-Meson lautet bei endlicher Temperatur:

$$\begin{aligned}
\Sigma^T_{\sigma_\lambda p_\eta}(\Omega^T_\nu) &= \int \frac{d^3\vec{q}'}{(2\pi)^3}\left[\frac{\varepsilon_{\sigma_\lambda}(q') + \varepsilon_{p_\eta}(q')}{2\varepsilon_{\sigma_\lambda}(q')\varepsilon_{p_\eta}(q')} \frac{1 + f_{p_\eta}(q') + f_{\sigma_\lambda}(q')}{\Omega^2_\nu - \left(\varepsilon_{\sigma_\lambda}(q') + \varepsilon_{p_\eta}(q')\right)^2}\right. \\
&\quad \left. + \frac{\varepsilon_{p_\eta}(q') - \varepsilon_{\sigma_\lambda}(q')}{2\varepsilon_{\sigma_\lambda}(q')\varepsilon_{p_\eta}(q')} \frac{f_{\sigma_\lambda}(q') - f_{p_\eta}(q')}{\Omega^2_\nu - \left(\varepsilon_{p_\eta}(q') - \varepsilon_{\sigma_\lambda}(q')\right)^2}\right].
\end{aligned} \tag{6.67}$$

Das Eigenwertproblem läßt sich schließlich wieder als Determinante formulieren:

$$\det\left[M_{\mu\rho\lambda\eta}(\Omega^T_\nu)\right] = 0, \tag{6.68}$$

mit:

$$M_{\mu\rho\lambda\eta} = \left[\delta_{\mu\rho}\delta_{\lambda\eta} + U^{\sigma}_{j\mu}U^{\sigma}_{j'\rho}\left[8\bar{F}_{jj'kk'} - \sum_{\kappa}\frac{Q_{\kappa k'j'}Q_{\kappa kj}}{\Omega^2_{\nu} - \varepsilon^2_{p_\kappa}}\right]U^{p}_{k\lambda}U^{p}_{k'\eta}\Sigma_{\sigma\lambda p_\eta}(\Omega^2_\nu)\right] d_{\nu\mu\eta}. \tag{6.69}$$

Wie bereits im letzten Kapitel angedeutet stellt Gleichung (6.68) den Ausgangspunkt für numerische Untersuchungen und den Nachweis der Existenz von spuriosen Lösungen der RPA-Gleichungen dar.

6.4 Chiraler Phasenübergang

Der chirale Phasenübergang ist der Übergang von einer Phase spontan gebrochener $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-Symmetrie zu einer Phase mit exakter $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-Symmetrie. Dies entspricht dem Übergang von der Goldstone-Realisierung zur Wigner-Weyl-Realisierung. Im folgenden soll gezeigt werden, daß das Modell in der Quasiteilchen-RPA beide Realisierungen mit den richtigen Eigenschaften bei endlicher Temperatur zu beschreiben vermag. Das bedeutet, daß in der Goldstone-Realisierung, bei spontaner Symmetriebrechung, masselose Bosonen existieren, die in der Wigner-Weyl-Realisierung verschwinden. Die Existenz von Null-Lösungen der RPA-Gleichungen in der Goldstone-Realisierung wurde im letzten Kapitel bei $T = 0$ nachgewiesen. Dieser Nachweis wird nun für den Fall endlicher Temperatur geführt. Dazu werde auch hier wieder der Fall der Symmetriebrechung hin zur $SU(3)$-Symmetrie untersucht:

$$\xi_0 \neq 0 \quad \text{und} \quad \xi_j = 0 \quad \forall j \neq 0, \tag{6.70}$$

außerdem erfolgt die Untersuchung ebenfalls wieder im chiralen Limes:

$$\epsilon_j = 0 \quad \forall j. \tag{6.71}$$

In dieser Situation verschwinden die Mischungswinkel θ_p und θ_σ, wodurch die Transformationsmatrizen U zu Einheitsmatrizen werden und damit die Unterscheidung zwischen griechischen und lateinischen Indizes überflüssig wird. Die gleiche Rechnung wie bei $T = 0$ führt schließlich auf die zu (5.133) analoge Lösung:

$$\Omega^{T\,2}_{\nu} = \varepsilon^2_{T,p_\nu} + \frac{N(\Omega^T_\nu)}{D(\Omega^T_\nu)} \quad \forall \nu \neq 0. \tag{6.72}$$

Dabei wurden die folgenden Bezeichnungen verwendet:

$$\begin{aligned}N(\Omega_\nu^T) \;=\;& \frac{5}{3}u^2\overline{\Sigma}_{\sigma_\nu p_\nu}(\Omega_\nu^T) + \frac{2}{3}(u+w)^2\,\overline{\Sigma}_{\sigma_0 p_\nu}(\Omega_\nu^T) + \frac{2}{3}(u+v)^2\,\overline{\Sigma}_{\sigma_\nu p_0}(\Omega_\nu^T)\\ &+8f_2\left[\frac{5}{9}w^2-(u+w)^2\right]\overline{\Sigma}_{\sigma_\nu p_\nu}(\Omega_\nu^T)\overline{\Sigma}_{\sigma_0 p_\nu}(\Omega_\nu^T)\\ &+8f_2\left[\frac{5}{9}v^2-(u+v)^2\right]\overline{\Sigma}_{\sigma_\nu p_\nu}(\Omega_\nu^T)\overline{\Sigma}_{\sigma_\nu p_0}(\Omega_\nu^T)\\ &+\frac{16}{9}f_2\,(v-w)^2\,\overline{\Sigma}_{\sigma_0 p_\nu}(\Omega_\nu^T)\overline{\Sigma}_{\sigma_\nu p_0}(\Omega_\nu^T)\\ &-\frac{64}{3}f_2^2\,(v-w)^2\,\overline{\Sigma}_{\sigma_\nu p_\nu}(\Omega_\nu^T)\overline{\Sigma}_{\sigma_\nu p_0}(\Omega_\nu^T)\overline{\Sigma}_{\sigma_0 p_\nu}(\Omega_\nu^T)\end{aligned} \tag{6.73}$$

$$\begin{aligned}D(\Omega_\nu^T) \;=\;& 1-\frac{8}{3}f_2\left[2\overline{\Sigma}_{\sigma_\nu p_\nu}(\Omega_\nu^T)-\overline{\Sigma}_{\sigma_0 p_\nu}(\Omega_\nu^T)-\overline{\Sigma}_{\sigma_\nu p_0}(\Omega_\nu^T)\right]\\ &-32f_2^2\overline{\Sigma}_{\sigma_\nu p_\nu}(\Omega_\nu^T)\left[\overline{\Sigma}_{\sigma_0 p_\nu}(\Omega_\nu^T)+\overline{\Sigma}_{\sigma_\nu p_0}(\Omega_\nu^T)\right],\end{aligned} \tag{6.74}$$

wobei wiederum gilt:

$$u = 2\sqrt{2}g - 4\sqrt{\frac{2}{3}}f_2\xi_0 \tag{6.75}$$

$$v = -3\sqrt{2}g \tag{6.76}$$

$$w = -3\sqrt{2}g - 4\sqrt{6}f_1\xi_0. \tag{6.77}$$

Die $\overline{\Sigma}_{\sigma_\lambda p_\eta}(\Omega_\nu^T)$ sind renormierte thermische RPA-Blasen, sie sind gegeben durch:

$$\overline{\Sigma}_{\sigma_\lambda p_\eta}(\Omega_\nu^T) = \frac{\Sigma_{\sigma_\lambda p_\eta}(\Omega_\nu^T)}{1+8f_1\Sigma_{\sigma_\lambda p_\eta}(\Omega_\nu^T)}. \tag{6.78}$$

Für $\Omega_\nu^T = 0$ vereinfacht sich wie bei $T = 0$ der Ausdruck für die Blase aus einem pseudoskalaren und einem skalaren Quasi-Meson:

$$\Sigma^T_{\sigma_\lambda p_\eta}(0) = \frac{I^T_{\sigma_\lambda} - I^T_{p_\eta}}{m^2_{T,\sigma_\lambda} - m^2_{T,p_\eta}}. \tag{6.79}$$

Unter Ausnutzung dieser Beziehung lassen sich wiederum die HFB-Massen der Quasi-Mesonen durch diese Blasen ausdrücken:

$$\varepsilon^2_{T,p_\nu} = -\frac{N(0)}{D(0)} \quad \forall\nu \neq 0. \tag{6.80}$$

Gemeinsam mit Gleichung (6.72) erhält man daraus

$$\Omega_\nu^{T\,2} = -\frac{N(0)}{D(0)} + \frac{N(\Omega_\nu^T)}{D(\Omega_\nu^T)} \qquad \forall \nu \neq 0, \tag{6.81}$$

wodurch die Existenz der spuriosen Lösung in der Goldstone-Realisierung offensichtlich wird.

In diesem Nachweis der Existenz der Goldstone-Phase wird beim Ausdrücken der Quasiteilchenenergien ε_{T,p_ν} durch die Blasen $\Sigma^T_{\sigma_\lambda p_\eta}(0)$ die Bedingung $\xi_0^T \neq 0$, daß das Mesonkondensat des skalaren Meson σ_0 einen nichtverschwindenden Wert besitzt, ausgenutzt. Dies ist jedoch keine notwendige Bedingung, die HFB-Kondensat-Gleichungen lassen sich auch mit verschwindenden Vakuumerwartungswerten der Quasiteilchen erfüllen,

$$\xi_i^T = 0 \qquad \forall i. \tag{6.82}$$

In diesem Fall erfordern die HFB-Kondensat-Gleichungen, daß die Massen der Quasiteilchen entartet sind,

$$\varepsilon_{T,p_\nu} = \varepsilon_{T,\sigma_\lambda}. \tag{6.83}$$

Da in dieser Situation alle Mesonkondensate verschwinden, kommt es zu keiner spontanen Symmetriebrechung, daher besitzen alle Mesonen auch in der RPA nichtverschwindende Massen. Dies ist keine Verletzung des Goldstone-Theorems, da dieses die Existenz von Null-Lösungen mit einer spontanen Symmetriebrechung verknüpft, in dieser Phase, der Wigner-Weyl-Realisierung, aber keine spontane Symmetriebrechung vorliegt. In der Wigner-Weyl-Realisierung besitzt sowohl die Lagrangedichte als auch das Vakuum eine $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-Symmetrie. Zu einem chiralen Phasenübergang von der Goldstone-Realisierung, welche bei $T = 0$ vorliegt, zur Wigner-Weyl-Realisierung exakter $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-Symmetrie kommt es, sobald bei einer bestimmten Temperatur das Mesonkondensat ξ_0^T verschwindet. Ist einmal die Wigner-Weyl-Realisierung erreicht, verschwinden die Null-Lösungen aus den RPA-Gleichungen, da sich der zugehörige Eigenvektor dann nicht mehr renormieren läßt.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war der Nachweis, daß die auf der selbstkonsistenten HFB-Näherung basierende Quasiteilchen-RPA eine symmetrieerhaltende Methode zur Behandlung des linearen $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-σ-Modells darstellt.
Zu Beginn wurden die Grundlagen des Modells diskutiert und seine Lagrangedichte formuliert. Im nächsten Teil wurde dann die Methode der Quasiteilchen-RPA vorgestellt und schließlich auf das lineare $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-σ-Modell angewendet. Der Nachweis, daß es sich dabei um eine symmetrieerhaltende Methode handelt, wurde für den Fall einer $SU(3)$-Symmetrie des Vakuums analytisch durchgeführt. Der allgemeine Fall beliebiger Vakuumsymmetrie läßt sich nur numerisch untersuchen.
Die RPA stellt die in der HFB-Näherung gebrochene Symmetrie, dort ist das Goldstone-Theorem verletzt, wieder her und sorgt dafür, daß, auch bei endlicher Temperatur, in der Goldstone-Realisierung masselose Goldstone-Bosonen existieren. Hierbei ist entscheidend, daß die RPA auf der Basis des HFB-Feldes durchgefürt wird, da sie sonst nicht die gewünschten Eigenschaften besitzt. Für sich allein genommen stellt weder die HFB-Näherung noch die RPA einen symmetrieerhaltenden Zugang dar. Erst die Kombination der beiden Methoden leistet dies. Das Modell ist in der Lage, sowohl die chiral symmetrische Wigner-Weyl-Realisierung als auch die Goldstone-Realisierung richtig zu beschreiben, d.h. es treten in der Goldstone-Realisierung masselose Bosonen auf, die verschwinden sobald die Wigner-Weyl-Realisierung erreicht wird. Befindet sich das System bei Temperatur null in der Goldstone-Realisierung, so kommt es zu einem chiralen Phasenübergang hin zur Wigner-Weyl-Realisierung, sobald bei einer bestimmten Temperatur alle Mesonkondensate verschwinden. Die Lage und die Existenz eines solchen chiralen Phasenübergangs sind von der Wahl der Parameterdes Modells abhängig. Eine quantitaive numerische Untersuchung hierzu ist noch nicht abgeschlossen.
Untersuchungen des linearen $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$-σ-Modells in der Quasiteilchen-RPA [4] führen zu einem Phasenübergang erster Ordnung, während Untersuchungen des linearen σ-Modells auf dem Gitter [31,32] einen Phasenübergang zweiter Ordnung ergeben. Um die richtige Ordnung des Phasenübergangs zu erhalten, ist eine Erweiterung der Methode notwendig. Eine Möglichkeit ist die Erweiterung der Methode auf Vier-Quasiteilchen-Operatoren in der Second RPA. Die Second RPA ist jedoch problematisch bezüglich der

Symmetrieerhaltung [33]. Vielversprechender sind Erweiterungen der Quasiteilchen-RPA die in der Verringerung der Einschräkungen durch die Quasi-Boson-Approximation bestehen. Hierzu sind aus der Kernphysik einige Methoden bekannt.

Anhang A
Die Gruppe $SU(3)$

Im folgenden sind die Generatoren der Gruppe $SU(3)$ in der auf Gell-Mann zurückgehenden Form aufgelistet:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\
\lambda_0 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Die Strukturkonstanten f_{ijk} der Gruppe $SU(3)$ sind antisymmetrisch unter Vertauschung zweier Indizes, die Strukturkonstanten d_{ijk} sind symmertrisch unter Vertauschung zweier

Indizes. Ihre Werte sind in den folgenden Tabellen aufgelistet:

ijk	f_{ijk}
123	1
147	$1/2$
156	$-1/2$
246	$1/2$
257	$1/2$
345	$1/2$
367	$-1/2$
458	$\sqrt{3}/2$
678	$\sqrt{3}/2$

ijk	d_{ijk}
118	$1/\sqrt{3}$
146	$1/2$
157	$1/2$
228	$1/\sqrt{3}$
247	$-1/2$
256	$1/2$
338	$1/\sqrt{3}$
344	$1/2$
355	$1/2$
366	$-1/2$
377	$-1/2$
448	$-1/2\sqrt{3}$
558	$-1/2\sqrt{3}$
668	$-1/2\sqrt{3}$
778	$-1/2\sqrt{3}$
888	$-1/\sqrt{3}$
$ij0$	$\sqrt{2/3}\delta_{ij}$

Einige Eigenschaften der Strukturkonstanten f_{ijk} und d_{ijk}:

$$
\begin{aligned}
f_{ilm}f_{mjk} + f_{jlm}f_{imk} + f_{klm}f_{ijm} &= 0 \\
f_{ilm}d_{mjk} + f_{jlm}d_{imk} + f_{klm}d_{ijm} &= 0 \\
f_{ijm}f_{klm} &= \frac{2}{n}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}\right) + \left(d_{ikm}d_{jlm} - d_{jkm}d_{ilm}\right) \\
f_{piq}f_{qir}f_{rkp} &= -\frac{3}{2}f_{ijk} \\
d_{piq}f_{qir}f_{rkp} &= -\frac{3}{2}d_{ijk} \\
d_{piq}d_{qir}f_{rkp} &= \frac{5}{6}f_{ijk} \\
d_{piq}d_{qir}d_{rkp} &= -\frac{1}{2}d_{ijk}.
\end{aligned}
$$

Anhang B
Regularisierung der Tadpole-Integrale

Die hier auftretenden quadratisch divergenten Tadpole-Integrale werden mit Hilfe der Pauli-Villars-Regularisierung regularisiert. Die Tadpole-Integrale lassen sich schreiben als:

$$I = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\eta}.$$

Die Pauli-Villars-Regularisierung besteht nun in folgender Modifikation

$$\frac{i}{q^2 - m^2 + i\eta} \to \frac{i}{q^2 - m^2 + i\eta} + \Sigma \frac{a_i}{q^2 - \Lambda_i^2 + i\eta},$$

wobei die Λ_i Abschneide-Parameter bezeichnen. Konkret werden hier zwei Terme addiert, unter der Randbedingung, daß der Ausdruck im Limes $q^2 \to \infty$ ein $1/q^6$-Verhalten zeigt. Die Terme a_1 und a_2 erfüllen diese Bedingung,

$$a_1 = \frac{m^2 - \Lambda_2^2}{\Lambda_2^2 - \Lambda_1^2} \quad , \quad a_2 = \frac{\Lambda_1^2 - m^2}{\Lambda_2^2 - \Lambda_1^2}.$$

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} & \frac{i}{q^2 - m^2 + i\eta} + \frac{m^2 - \Lambda_2^2}{(q^2 - \Lambda_i^2 + i\eta)(\Lambda_2^2 - \Lambda_1^2)} + \frac{\Lambda_1^2 - m^2}{(q^2 - \Lambda_i^2 + i\eta)(\Lambda_2^2 - \Lambda_1^2)} \\ = \; & \frac{(\Lambda_1^2 - m^2)(\Lambda_2^2 - m^2)}{(q^2 - m^2 + i\eta)(q^2 - \Lambda_1^2 + i\eta)(q^2 - \Lambda_2^2 + i\eta)}. \end{aligned}$$

Damit erhält man für das Tadpole-Integral:

$$\begin{aligned} I &= i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(\Lambda_1^2 - m^2)(\Lambda_2^2 - m^2)}{(q^2 - m^2 + i\eta)(q^2 - \Lambda_1^2 + i\eta)(q^2 - \Lambda_2^2 + i\eta)} \\ \overset{\Lambda_1, \Lambda_2 \to \Lambda}{\Rightarrow} \quad &= i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(\Lambda^2 - m^2)^2}{(q^2 - m^2 + i\eta)(q^2 - \Lambda^2 + i\eta)^2} \end{aligned}$$

$$\overset{\Lambda \gg m}{\Rightarrow} \quad = \quad i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\Lambda^4}{(q^2 - m^2 + i\eta)\,(q^2 - \Lambda^2 + i\eta)^2}.$$

An dieser Stelle wendet man einen Trick von Feynman an:

$$\frac{1}{a_1^2 a_2} = 2! \int_0^1 \frac{z_1 dz_1 dz_2}{(a_1 z_1 + a_2 z_2)^{2+1}} \delta\,(1 - z_1 - z_2)\,,$$

damit folgt:

$$\begin{aligned} I &= \frac{i\Lambda^4}{16\pi^4} \int d^4 q 2! \int_0^1 \frac{z_1 dz_1 dz_2}{((q^2 - \Lambda^2 + i\eta)\, z_1 + (q^2 - m^2 + i\eta)\, z_2)^3} \delta\,(1 - z_1 - z_2) \\ &= \frac{i\Lambda^4}{16\pi^4} \int_0^1 2 z_1 dz_1 \int d^4 q \frac{1}{(q^2 - m^2 - (\Lambda^2 - m^2)\, z_1 + i\eta)^3}. \end{aligned}$$

Die Integration über die imaginäre Koordinate q_0 im Impulsintegral wird durch eine Wick-Rotation in eine Integration über eine reale Koordinate q_4 verwandelt. Dadurch läßt sich das Integral durch den Übergang zu Polarkoordinaten im vierdimensionalen euklidischen Impulsraum lösen. Man erhält:

$$i \int d^4 q \frac{1}{(q^2 - m^2 - (\Lambda^2 - m^2)\, z_1 + i\eta)^3} = \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{m^2 + (\Lambda^2 - m^2)\, z_1 - i\eta}.$$

Daraus folgt für das Tadpole-Integral:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\Lambda^4}{16\pi^4} \int_0^1 2 z_1 dz_1 \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{m^2 + (\Lambda^2 - m^2)\, z_1 - i\eta} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right]. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich schließlich für die auftretenden quadratisch divergenten Integrale:

$$\begin{aligned} I_{jj}^p &= \frac{1}{16\pi^2} \left[\Lambda^2 - m_{p_{jj}}^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m_{p_{jj}}^2} \right] \\ I_{jj}^\sigma &= \frac{1}{16\pi^2} \left[\Lambda^2 - m_{\sigma_{jj}}^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m_{\sigma_{jj}}^2} \right], \end{aligned}$$

wobei Λ einen universalen Cutoff-Parameter darstellt.

Anhang C
Notation

Die Lichtgeschwindigkeit und das Planck'sche Wirkungsquantum werden gleich eins gesetzt:

$$c = \hbar = 1. \tag{7.1}$$

Es wird die Summenkonvention benutzt, über zweifach vorkommende Indizes wird summiert:

$$G_{ijk}\xi_k = \sum_k G_{ijk}\xi_k, \tag{7.2}$$

dies gilt jedoch nicht für die Indizes von Indizes:

$$\Sigma_{\sigma_i p_i} \neq \sum_i \Sigma_{\sigma_i p_i}, \tag{7.3}$$

hier tragen die unterschiedlichen Indizes σ und p den gleichen Index i und stellen damit zwei unterschiedliche Indizes σ_i und p_1 dar.

Die Dirac-Matrizen lauten:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \gamma_5$$

Literaturverzeichnis

[1] M.Gell-Mann, Phys. Lett. 8 (1963) 214.

[2] M.Gell-Mann and M.Lévy, Nuovo Cimento 16 (1960) 705.

[3] E.R.Marshalek, Nucl. Phys. A 224 (1974) 221.

[4] Z.Aouissat, G.Chanfray, P.Schuck and J.Wambach,
Nucl. Phys. A 603 (1996) 458.

[5] Z.Aouissat, P.Schuck and J.Wambach,
Nucl. Phys. A 618 (1997) 402.

[6] Z.Aouissat, O.Bohr, J.Wambach, IKDA 97/31, hep-ph 9710419.

[7] M.Lévy, Nuovo Cimento (1967).

[8] R.K.Bhaduri, Models of the Nucleon,
Lecture Notes and Supplements in Physics.

[9] Cheng and Li, Gauge theory of elementary particle physics,
Oxford University Press (1996).

[10] G.Racah, Group Theory and Spectroscopy, Princton Lectures.

[11] M.Gell-Mann and Y.Ne'eman, The Eightfold Way,
New York: Benjamin Inc. 1964.

[12] A.J.Macfarlane, A.Sudbery and P.H.Weisz,
Commun. Math. Phys. 11, 77-90 (1968).

[13] S.Coleman, J. Math. Phys. 7 (1966) 787.

[14] J.Goldstone, Nuovo Cimento 19 (1961) 154.

[15] J.Goldstone, A.Salam and S.Weinberg, Phys. Rev. 127 (1962) 965.

[16] S.Gasiorowicz and D.A.Geffen, Rev. Mod. Phys. 41 (1969) 531.

[17] L.-H.Chan and R.W.Haymaker, Phys. Rev. D 7 (1973) 402 415.

[18] H.Meyer-Ortmanns and B.J.Schaefer, HD-TVP-94-16, hep-ph 9409430.

[19] H.Meyer-Ortmanns, H.J.Pirner and A.Patkós, Phys. Lett. B295 (1992) 255; Int. J. Mod. Phys. C3 (1992) 993.

[20] Z.Frei and A.Patkós, Phys. Lett. 247B (1990) 381.

[21] D.Metzger, H.Meyer-Ortmanns and H.J.Pirner, Phys. Lett B321 (1994) 66 .

[22] P.Ring and P.Schuck, The nuclear many-body problem, Springer, Berlin 1980.

[23] C.Bloch and A.Messiah, Nucl. Phys. 39 (1962) 95.

[24] B.Zumino,J. Math. Phys. 3 (1962) 1055.

[25] H.J.Mang and H.A.Weidenmüller, Ann. Rev. Nucl. Sci., 18 (1968) 253.

[26] H.J.Mang, Phys. Rep. 18C (1975) 325.

[27] D.J.Rowe, Rev. Mod. Phys. 40 (1968) 153.

[28] C.Bloch and C.De Dominicis, Nucl. Phys. 7 (1956) 459; 10 (1959) 181, 509.

[29] A.L.Goodman, Nucl. Phys. A 352 (1981) 30.

[30] H.M.Sommermann, Ann. Phys. 151 (1983) 163.

[31] A.Ukawa, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 53 (1997) 106-119.

[32] K.Kanaya, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 47 (1996) 144-159.

[33] M.Oertel, Diplomarbeit, TU-Darmstadt (1997), Erweiterung der Random-Phase-Approximation am Beispiel des Nambu-Jona-Lasinio-Modells.