

Diplomarbeit

# Struktur schnell rotierender Neutronensterne

Andreas Bauswein

Technische Universität Darmstadt

Februar 2006



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
1.1	Historisches . . . . .	5
1.2	Motivation und Überblick . . . . .	7
1.3	Notation und Konvention . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Stellare Strukturgleichungen bei langsamer Rotation</b>	<b>11</b>
2.1	Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen . . . . .	11
2.2	Frame-dragging und Trägheitsmoment . . . . .	18
2.3	Hartle-Thorne-Methode zweiter Ordnung . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Zustandsgleichungen</b>	<b>25</b>
3.1	Aufbau von Neutronensternen und Zustandsgleichungen . . . . .	25
3.2	Eigenschaften spezieller moderner Zustandsgleichungen . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Eigenschaften langsam rotierender Neutronensterne</b>	<b>35</b>
4.1	Vorbemerkungen und Numerik . . . . .	35
4.2	Ergebnisse, Interpretation, Beobachtung, Stabilität . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Stellare Strukturgleichungen</b>	<b>51</b>
5.1	3+1-Split . . . . .	51
5.2	Herleitung der stellaren Strukturgleichungen . . . . .	54
5.3	Hydrostatisches Gleichgewicht . . . . .	64
5.4	Reduktion auf die Gleichungen der langsamen Rotation . . . . .	65
5.5	Äquivalenz der Gleichungen . . . . .	66
<b>6</b>	<b>Schnell rotierende Neutronensterne</b>	<b>69</b>
6.1	Spektralmethode . . . . .	69
6.2	Eigenschaften schnell rotierender Neutronensterne . . . . .	71
6.2.1	Evolutionsequenzen und Grenzsequenzen . . . . .	72
6.2.2	Neutronensterne der Zustandsgleichung SLy4 . . . . .	73
6.2.3	Neutronensterne der Zustandsgleichungen APR und FPS . . . . .	77
6.2.4	Profile . . . . .	83
6.3	Vergleich mit RNS-Code . . . . .	88

*Inhaltsverzeichnis*

<b>7</b>	<b>Quarksterne</b>	<b>91</b>
7.1	Strange matter hypothesis und Seltsame Sterne . . . . .	91
7.2	Quark-Zustandsgleichung . . . . .	96
7.3	Eigenschaften schnell rotierender Quarksterne . . . . .	101
<b>8</b>	<b>Manko-Lösung</b>	<b>111</b>
8.1	Definition und Problematik . . . . .	111
8.2	Vergleich und Gültigkeitsbereich . . . . .	113
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>123</b>
<b>A</b>	<b>Diverse Rechnungen</b>	<b>127</b>
<b>B</b>	<b>Integration der Gleichungen der langsamen Rotation</b>	<b>131</b>
<b>C</b>	<b>Herleitung des Energie-Impuls-Tensors</b>	<b>133</b>
<b>D</b>	<b>Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts</b>	<b>137</b>
<b>E</b>	<b>Modifikationen in Lorene</b>	<b>139</b>

# 1 Einleitung

Neutronensterne gehören zu den extremsten Objekten im Universum. Zusammen mit Weißen Zwergen und Schwarzen Löchern bilden sie die Klasse der Kompakten Objekte. Unter Neutronensternen versteht man Sterne mit Massen im Bereich von 0,1 bis 2,5 Sonnenmassen und einem Durchmesser von 20 bis 30 Kilometern. Damit verbunden sind Zentraldichten fünf- bis zehnfacher Kerndichte. Diese Sterne können mit Perioden im Millisekunden-Bereich rotieren. Darüber hinaus können Neutronensterne Magnetfelder von bis zu  $10^{15}$  Gauss erreichen und Temperaturen von bis zu  $10^{11}$  Kelvin. Neutronensterne weisen eine komplexe innere Struktur auf. In Neutronensternen findet man Phänomene wie Neutrino-Opazität, Superfluidität und Supraleitung, möglicherweise auch Hyperonenkondensation, Quark-Deconfinement und Farbsupraleitung. Des Weiteren beobachtet man verschiedene Strahlungsphänomene im gesamten elektromagnetischen Spektrum sowie Akkretion.

Bei der theoretischen Untersuchung von Neutronensternen begegnen sich zwei verschiedene physikalische Theorien. Zum einen verlangt die Kompaktheit der Objekte von  $\frac{GM}{c^2 R} \sim 0,1$  (im Vergleich: Kompaktheit der Sonne  $\sim 10^{-6}$ ) eine Behandlung durch die Allgemeine Relativitätstheorie, zum anderen muss Materie unter solch extremen Bedingungen mit Methoden der Kern- und Teilchenphysik beschrieben werden.

## 1.1 Historisches

Zu den wohl spektakulärsten Erscheinungen am Himmel gehören Supernova-Explosionen, bei denen innerhalb weniger Tage ungeheure Mengen an Energie abgestrahlt werden, so dass eine einzige Supernova die Leuchtkraft einer ganzen Galaxie entwickeln kann. Erstmals wurde ein solches Ereignis im Jahr 1054 nach Christus von chinesischen Astronomen beobachtet [50]. Baade und Zwicky spekulierten 1932 nach der Entdeckung des Neutrons durch Chadwick, dass Supernovae den Übergang eines gewöhnlichen Sterns zu einem Neutronenstern, einem äußerst kompakten aus Neutronen bestehenden Objekt, darstellen [37], [11], [12], [10]. Erste theoretische Untersuchungen zu Neutronensternen stammen von Landau [87], der Chandrasekhars Modell von Weißen Zwergen aufnahm [38], [39]. Im Jahr 1939 legten Tolman, Oppenheimer und Volkoff die erste allgemein relativistische Beschreibung von Neutronensternen vor [106], [136]. Dabei leiteten sie im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie die Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts her und lösten diese unter der Annahme, dass Neutronensterne aus einem freien Fermigas von

## 1 Einleitung

Neutronen bestehen. Es stellte sich damals heraus, dass Neutronensterne eine maximale Masse von 0,7 Sonnenmassen haben bei einem Radius von 10 km. Allerdings blieben die Versuche, Neutronensterne zu beobachten, über Jahrzehnte erfolglos. Dennoch wurden weitere theoretische Forschungen angestellt. So wurde die Zustandsgleichung der Neutronensternmaterie verbessert [72], [71] und Versuche unternommen, Neutronensterne mit Röntgenbeobachtungen in Verbindung zu bringen [58], [121]. Aufgrund der fehlenden bzw. spekulativen Beobachtungen blieb die Existenz von Neutronensternen und Schwarzen Löchern, über die mittlerweile auch diskutiert wurde, unter Physikern und Astronomen weiterhin umstritten. Dies änderte sich schlagartig im Jahr 1967 als Hewish und Bell vollkommen regelmäßige Pulse mit Perioden von 3 s im Radiobereich detektierten [80], denn kurze Zeit später erklärte Gold diese sogenannten Pulsare durch magnetisierte rotierende Neutronensterne, die ähnlich einem Leuchtturm Radiowellen abstrahlen [61]. Damit wurden 35 Jahre nach den ersten Vorhersagen Neutronensterne beobachtet. 1969 entdeckten Cocke et al. einen mit 33 ms rotierenden Pulsar im Krebs-Nebel (siehe Abbildung 1.1) und konnten so endgültig den Zusammenhang zwischen Supernova-Explosionen und Neutronensternen herstellen [43], wobei schon seit den 40iger Jahren der Krebs-Nebel als der Überrest der Supernova aus dem Jahr 1054 angesehen wurde [50]. Schließlich gelang es 1971 Neutronensterne auch im Röntgenbereich zu beobachten [59]. Dabei wird die Röntgenstrahlung durch Akkretion von Materie auf einen Neutronenstern erzeugt, die in einem Doppelsternsystem vom Begleitstern „abgesaugt“ wird. Mittlerweile wurden verschiedene andere Effekte in Doppelsternsystemen mit Neutronensternen studiert. Als besonders interessant erwiesen sich dabei die quasi-periodischen Oszillationen bei Röntgenausbrüchen in massearmen Röntgen-Doppelsternsystemen (LMXB), da sich aus deren Power-Spektrum verschiedene Eigenschaften von Neutronensternen ableiten lassen [36]. Aber ebenso wurden auch bei Beobachtungen mit Radioteleskopen große Fortschritte gemacht. So entdeckten 1973 Hulse und Taylor einen Pulsar in einem Doppelsternsystem [81]. Solche Beobachtungsobjekte erwiesen sich als äußerst wertvoll, da sich verschiedenste Vorhersagen der Allgemeinen Relativitätstheorie, wie zum Beispiel die Abstrahlung von Gravitationswellen, testen lassen [143]. Außerdem war es möglich anhand von relativistischen Effekten die Massen der Sterne abzuleiten. Bis heute wurden mehr als 50 weitere solcher Objekte gefunden [92]. Die meisten dieser Systeme haben Weiße Zwerge als Begleiter. Im Jahr 2004 konnte man schließlich ein Doppelpulsar-System identifizieren [93]. Bis heute hat man insgesamt mehr als 1700 Pulsare gefunden, einige davon rotieren mit Perioden im Millisekunden-Bereich. 23 Jahre lang war die kürzeste beobachtete Rotationsperiode eines Pulsars 1,56 ms [13], bis vor wenigen Monaten die Entdeckung eines mit 1,4 ms rotierenden Sterns bekanntgegeben wurde [79]. Auffallend viele Massen von beobachteten Neutronensternen liegen im Bereich von 1,4 Sonnenmassen, wofür es bisher noch keine befriedigende Erklärung gibt [135]. Der schwerste bekannte Neutronenstern hat eine Masse von  $(2,1 \pm 0,2)$  Sonnenmassen [104]. Auf verschiedene andere Beobachtungsergebnisse wird an entsprechenden Stellen dieser Arbeit eingegangen. Darstellungen der historischen Entwicklung auf dem Forschungsgebiet der Neutronensterne findet man unter anderem in [118], [102] und [83].



Abbildung 1.1: Das für Arbeiten über Neutronensterne obligatorische Bild vom Krebs-Nebel M1. Diese Aufnahme des FORS2-Instruments am ESO VLT Kueyen zeigt den Zentralbereich des Supernova-Überrests [145]. Etwa in der Mitte des Bildes ist der „Crab-Pulsar“ links unterhalb eines kleinen hellen Bogens sogar im Optischen zu erkennen. Dieser Neutronenstern entstand bei der Supernova-Explosion im Jahr 1054 nach Christus.

## 1.2 Motivation und Überblick

Die oben beschriebenen extremen Eigenschaften machen Neutronensterne zu einem äußerst interessanten Forschungsgegenstand. Die astrophysikalische Bedeutung wurde im vorigen Kapitel schon angedeutet, besonders auch im Zusammenhang mit Supernovae und Schwarzen Löchern. Es stellt sich weiter allgemein die Frage, ob eine konsistente Beschreibung dieser Objekte im Zusammenspiel zweier verschiedener Theorien möglich ist. Zum einen ist die experimentelle Bestätigung der Allgemeinen Relativitätstheorie noch zu verbessern (siehe [143]). Ebenso sind die Eigenschaften von dichter kalter Materie experimentell nicht zugänglich (siehe Abbildung 1.2).

Es sind verschiedene Szenarien denkbar und eine Fülle an möglichen Zustandsgleichun-

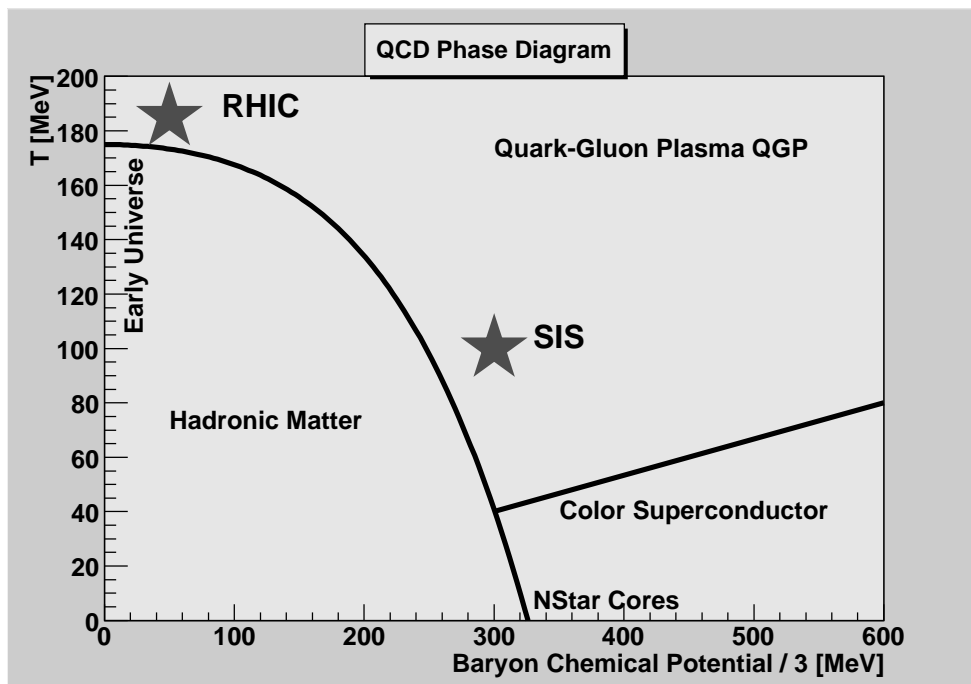


Abbildung 1.2: Im QCD-Phasendiagramm ist die Temperatur über dem chemischen Potential der Baryonen aufgetragen. Im Bild sind verschiedene Zustände von Materie und Beschleunigeranlagen eingetragen. Die Neutronensterne befinden sich bei sehr niedriger Temperatur in der Nähe des Übergangs von der hadronischen Phase zur Quarkmaterie [36], [112].

gen für kalte dichte Materie wurde bisher veröffentlicht. Insbesondere besteht die Möglichkeit von verschiedenen Quarkphasen. Eine besondere Bedeutung kommt dabei der strange matter hypothesis zu, nach der der absolute Grundzustand von Materie durch Quarks gebildet wird, die nicht in Hadronen gebunden sind [25], [144]. Sollte sich diese bewahrheiten, hätte dies enorme Auswirkungen auf große Teile der Physik (Kosmologie, Dark Matter, Teilchenphysik, kosmische Strahlen, ...) [141]. Die einzige Möglichkeit, experimentelle Aussagen über den Zustand von Materie unter solch extremen Bedingungen zu gewinnen, besteht in der Beobachtung von Neutronensternen. Dazu müssen deren Eigenschaften (Masse, Radius, Rotationsperiode, ...) aus den theoretisch gewonnenen Zustandsgleichungen berechnet werden, um mit astrophysikalischen Beobachtungen verglichen zu werden. Dies soll in dieser Arbeit geschehen. Hierzu werden auf verschiedene Weise numerische Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen [51], [52] gewonnen und daraus diverse Eigenschaften rotierender Sterne abgeleitet. Dies geschieht unter Verwendung moderner Zustandsgleichungen, für die teilweise noch keine ähnlichen Ergebnisse vorliegen. So werden beispielsweise auch Lösungen schnell rotierender Quarksterne studiert.

Das Gravitationsfeld schnell rotierender Neutronensterne wird nur unzureichend durch



die von Schwarzschild gefundene Lösung beschrieben [115], [116], da die Sterne aufgrund der Rotation abgeplattet sind und damit nicht mehr sphärisch symmetrisch. Was hierbei schnell bzw. langsam rotierend bedeutet, soll unter anderem in dieser Arbeit geklärt werden. Unter langsamer Rotation wird man dann Sterne verstehen, die sich mit einer Näherungsmethode, das heißt mit einer Entwicklung in der Winkelgeschwindigkeit, beschreiben lassen. Im Jahr 2000 veröffentlichten Manko et al. [98], [99] eine exakte analytische Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen im Außenraum schnell rotierender Neutronensterne. Eine analytische Lösung im Außenraum ist für verschiedene astrophysikalische Probleme von Vorteil (z. B. Akkretion und Gravitationswellen). Diese sogenannte Manko-Lösung läßt sich jedoch nicht kontinuierlich auf die Schwarzschild-Lösung reduzieren, die nicht rotierende bzw. langsam rotierende Sterne korrekt beschreibt. Deshalb ist es ein weiteres Anliegen dieser Arbeit, die „Güte“ und den Gültigkeitsbereich der Manko-Lösung zu untersuchen. Der Anknüpfungspunkt ist auch hier wieder die numerische Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen, die mit der analytischen Lösung verglichen wird. Es wird sich zeigen, dass für den Fall, dass eine Manko-Lösung zu einem entsprechenden Stern existiert, diese eine sehr gute Beschreibung des Gravitationsfeldes liefert. Allerdings werden sich größere Einschränkungen als bisher gedacht ergeben, was die Existenz der Manko-Lösung betrifft.

Wie im historischen Überblick erwähnt, waren Tolman, Oppenheimer und Volkoff 1939 die ersten, die sich mit Neutronensternen im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie beschäftigten. Allerdings konnten nur nicht rotierende Sterne untersucht werden. Diese Arbeiten wurden in den 1960er von Hartle und Thorne [73], [74] weiterentwickelt, indem sie langsame Rotation berücksichtigten. Ein Teil dieser Methoden bildet heute ein Standardverfahren, das routinemäßig bei neuen Zustandsgleichungen angewandt wird. Im ersten Teil dieser Arbeit werden diese Methoden Thema sein. Wenngleich diese seit langem bekannt sind, sollen die Gleichungen und deren Lösungen hier nochmals ausführlich hergeleitet und besprochen werden, weil sich in der Literatur bisher keine zusammenhängende und detaillierte Darstellung findet. Einige Jahre später leiteten Bardeen et al. [15] Strukturgleichungen her, die beliebig schnell rotierende achsensymmetrische Körper beschreiben. In der Folgezeit wurden verschiedene andere Gleichungen veröffentlicht, die dasselbe Problem behandeln. Auch in dieser Arbeit soll ein neuer Satz stellarer Strukturgleichungen hergeleitet werden. Dazu wird die Methode des sogenannten 3+1-Splits verwendet, die sich in den letzten Jahrzehnten als die Standardmethode der Numerischen Relativität etabliert hat. Es wird dabei versucht, Gleichungen zu finden, die numerisch besonders vorteilhaft sind. Denn obwohl sowohl die Verfügbarkeit von leistungsfähigen Computern als auch die Weiterentwicklung numerischer Methoden zur Behandlung partieller Differentialgleichungen große Fortschritte brachte, ist die Lösung der allgemeinen stellaren Strukturgleichungen auch heute noch alles andere als einfach. Stergioulas gibt in [129] einen Überblick über verschiedene Lösungsmethoden der stellaren Strukturgleichungen. Eine Zusammenfassung findet man auch in [111]. Besonders hervorzuheben sind dabei die Ansätze von Butterworth und Ipser, die als erste Lösungen angeben konnten [34]. Auf dieser Relaxationsmethode basierend wurden von anderen Personen weitere Verfahren entwickelt (siehe [129], [111]). Darüber hinaus lösten Komatsu, Eriguchi und

## 1 Einleitung

Hachisu die Feldgleichungen mit einer Greenfunktionen-Methode [85]. Dieses Verfahren wurde von Cook, Shapiro und Teukolsky [44] weiter verbessert und schließlich von Stergioulas und Friedman in einem frei verfügbaren Code implementiert [127], [146]. Dieser RNS-Code wird auch in dieser Arbeit zum Einsatz kommen. Eine andere Entwicklung wurde von Bonazzola et al. [26] angestoßen. Diese Gruppe verwendet eine Spektralmethode zur Lösung partieller Differentialgleichungen. Implementiert wurde dieses Verfahren in den Codes des Software-Pakets Lorene, das ebenfalls frei im Internet verfügbar ist [147]. In dieser Arbeit werden hauptsächlich Programme genutzt, die auf dem Code rotstar dieses Projekts basieren. Die Codes wurden dahingehen verbessert und ausgebaut, dass verschiedenste Größen und Eigenschaften von Neutronensternen berechnet werden und ein höherer Grad an Automatisierung sowie eine größere Vielseitigkeit erreicht wurden. An dieser Stelle ist noch auf die Arbeiten von Ansorg et al. [8] hinzuweisen, in denen eine ähnliche Methode verwandt wird. Referenzen zu all diesen Arbeiten findet man in [129] beziehungsweise werden in der hier vorliegenden Arbeit an den entsprechenden Stellen zitiert.

### 1.3 Notation und Konvention

An dieser Stelle sollen zunächst einige Notationen und Konventionen eingeführt werden, die die gesamte Arbeit betreffen. Es wird die Signatur  $(-+++)$  verwendet. Wenn nicht explizit angegeben, wird  $c = G = 1$  gesetzt. Natürlich wird die Einsteinsche Summenkonvention benutzt, dabei laufen griechische Indizes über  $0,1,2,3$  und lateinische Indizes über  $1,2,3$ . Im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie ist der Begriff der Masse nicht eindeutig definiert. Besonders in den Kapiteln, die sich mit den Ergebnissen und deren Interpretation befassen, wird oftmals nur abkürzend von der Masse eines Sterns gesprochen. In diesen Fällen handelt es sich stets um die gravitative Gesamtmasse (siehe dazu Kapitel 2.1). In manchen Passagen, wenn allgemein von Neutronensternen die Rede ist, ist oftmals eine gesamte Klasse von Objekten gemeint, die sowohl gewöhnliche hadronische Neutronensterne als auch Quarksterne wie Hybrid-Sterne und Seltsame Sterne beinhaltet. Obwohl der Ausdruck „kompakte Sterne“ in diesem Fall treffender wäre, wird in diesem Zusammenhang der in der Literatur übliche Begriff Neutronensterne verwendet. Die im Text erwähnten Programme sind durchweg in C++ geschrieben. Soweit es sich um neu geschriebene Programme handelt, befinden sie sich auf einer CD, die dieser Arbeit beigelegt ist. Entsprechende Beschreibungen findet man ebenfalls auf der CD (readme-Dateien). Teilweise befinden sich einige hilfreiche Erklärungen und Kommentare auch direkt im Quellcode.

## 2 Stellare Strukturgleichungen bei langsamer Rotation

Einen wichtigen Sonderfall bilden langsam rotierende Neutronensterne, da in diesem Fall eine Entwicklung der Feldgleichungen in Ordnungen der Winkelgeschwindigkeit des Sterns  $\Omega$  möglich ist. Dieses Vorgehen führt auf ein mehrdimensionales Anfangswertproblem, was sich verhältnismäßig leicht numerisch lösen lässt. Für eine Entwicklung bis zur ersten Ordnung in  $\Omega$  wird sich zeigen, dass Sterne, die mit einer Frequenz von 1 Hz rotieren noch ohne weiteres mit dieser Näherungsmethode behandelt werden dürfen. Selbst bei Frequenzen von 100 Hz sind die Abweichungen noch gering. Die hier folgende Herleitung orientiert sich im Wesentlichen am Vorgehen von Hartle [73], der zum ersten Mal solche Rechnungen anstellte. Dazu werden als erstes die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen hergeleitet, die sphärisch symmetrische Sterne beschreiben. Danach wird eine zusätzliche Gleichung abgeleitet, die das sogenannte frame-dragging bestimmt. Unter frame-dragging versteht man das Mitrotieren des Lokalen Inertialsystemen in der Nähe von rotierenden Massen. Die Rotation mißt man relativ zu weit entfernten Sternen. Um die Eigenschaften von langsam rotierenden Sternen zu berechnen, ist die Kombination dieser Differentialgleichungen zu lösen.

### 2.1 Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen

Den Ausgangspunkt zur Herleitung der Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen bildet eine stationäre kugelsymmetrische Metrik. Diese kann in der Form

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\lambda} dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2] \quad (2.1)$$

geschrieben werden [102], [73]. Dabei verlangen die Symmetrien, dass die metrischen Funktionen  $\nu$  und  $\lambda$  nur von  $r$  abhängen. Um den Einstein-Tensor zu berechnen, wird der Cartan-Formalismus verwendet, der in verschiedenen Lehrbüchern präsentiert wird [102], [117], [36]. Durch das Einführen der Basis-1-Formen

$$\theta^0 = e^\nu dt \quad (2.2)$$

$$\theta^1 = r \sin\theta d\varphi \quad (2.3)$$

$$\theta^2 = e^\lambda dr \quad (2.4)$$

$$\theta^3 = r d\theta \quad (2.5)$$

## 2 Stellare Strukturgleichungen bei langsamer Rotation

nimmt die Metrik die Form  $ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\theta^\alpha \otimes \theta^\beta$  an (mit Minkowski-Tensor  $\eta$ ). Die entsprechende Basis des Tangentialraums ist

$$e_0 = e^{-\nu}\partial_t \quad (2.6)$$

$$e_1 = \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi \quad (2.7)$$

$$e_2 = e^{-\lambda}\partial_r \quad (2.8)$$

$$e_3 = \frac{1}{r}\partial_\theta. \quad (2.9)$$

Die äußere Ableitung ergibt

$$d\theta^0 = \nu'e^\nu dr \wedge dt = \nu'e^{-\lambda}\theta^2 \wedge \theta^0 \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= \sin\theta dr \wedge d\varphi + r\cos\theta d\theta \wedge d\varphi \\ &= \frac{1}{r}e^{-\lambda}\theta^2 \wedge \theta^1 + \frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\theta^3 \wedge \theta^1 \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$d\theta^2 = 0 \quad (2.12)$$

$$d\theta^3 = dr \wedge d\theta = \frac{1}{r}e^{-\lambda}\theta^2 \wedge \theta^3. \quad (2.13)$$

Dabei bedeutet  $f'$  Ableitung nach der Koordinate  $r$ . Jetzt werden mit Hilfe der ersten Cartanschen Strukturgleichung

$$d\theta^\mu = -\omega^\mu{}_\rho \wedge \theta^\rho \quad (2.14)$$

die Zusammenhangsformen bestimmt. Hat man einen Ansatz gefunden, der (2.14) erfüllt, hat man die gesuchten Zusammenhangsformen bestimmt, da die Lösung eindeutig ist (siehe [102]). Man kann leicht durch Einsetzen nachprüfen, dass dies für

$$\omega^0{}_2 = \nu'e^{-\lambda}\theta^0 = \nu'e^{-\lambda+\nu}dt \quad (2.15)$$

$$\omega^1{}_2 = \frac{1}{r}e^{-\lambda}\theta^1 = \sin\theta e^{-\lambda}d\varphi \quad (2.16)$$

$$\omega^1{}_3 = \frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\theta^1 = \cos\theta d\varphi \quad (2.17)$$

$$\omega^2{}_3 = -\frac{1}{r}e^{-\lambda}\theta^3 = -e^{-\lambda}d\theta \quad (2.18)$$

der Fall ist. Die übrigen Zusammenhangsformen verschwinden. Die äußeren Ableitungen dieser Zusammenhangsformen sind

$$\begin{aligned} d\omega^0_2 &= (\nu'' - \nu'\lambda' + (\nu')^2)e^{-\lambda+\nu} dr \wedge dt \\ &= (\nu'' - \nu'\lambda' + (\nu')^2)e^{-2\lambda}\theta^2 \wedge \theta^0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} d\omega^1_2 &= -\sin\theta\lambda'e^{-\lambda} dr \wedge d\varphi + \cos\theta e^{-\lambda} d\theta \wedge d\varphi \\ &= -\frac{1}{r}\lambda'e^{-2\lambda}\theta^2 \wedge \theta^1 + \frac{1}{r^2} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} e^{-\lambda}\theta^3 \wedge \theta^1 \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} d\omega^1_3 &= -\sin\theta d\theta \wedge d\varphi \\ &= -\frac{1}{r^2}\theta^3 \wedge \theta^1 \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} d\omega^2_3 &= \lambda'e^{-\lambda} dr \wedge d\theta \\ &= \frac{1}{r}\lambda'e^{-2\lambda}\theta^2 \wedge \theta^3. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Daraus ergeben sich nach der zweiten Cartanschen Strukturgleichung

$$\Omega^\mu_\rho = d\omega^\mu_\rho + \omega^\mu_\sigma \wedge \omega^\sigma_\rho \quad (2.23)$$

die Krümmungs-2-Formen

$$\Omega^0_1 = -\frac{1}{r}\nu'e^{-2\lambda}\theta^0 \wedge \theta^1 \quad (2.24)$$

$$\Omega^0_2 = -(\nu'' - \nu'\lambda' + (\nu')^2)e^{-2\lambda}\theta^0 \wedge \theta^2 \quad (2.25)$$

$$\Omega^0_3 = -\frac{1}{r}\nu'e^{-2\lambda}\theta^0 \wedge \theta^3 \quad (2.26)$$

$$\Omega^1_2 = \frac{1}{r}\lambda'e^{-2\lambda}\theta^1 \wedge \theta^2 \quad (2.27)$$

$$\Omega^1_3 = \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\lambda})\theta^1 \wedge \theta^3 \quad (2.28)$$

$$\Omega^2_3 = \frac{1}{r}\lambda'e^{-2\lambda}\theta^2 \wedge \theta^3. \quad (2.29)$$

Diese Größen bestimmen den Ricci-Tensor über

$$R_{\mu\rho} = \Omega^\sigma_\mu(e_\sigma, e_\rho). \quad (2.30)$$

Die nicht verschwindenden Komponenten sind

$$R_{00} = \left(\frac{2}{r}\nu' + \nu'' - \nu'\lambda' + (\nu')^2\right)e^{-2\lambda} \quad (2.31)$$

$$R_{11} = \left(-\frac{1}{r}\nu' + \frac{1}{r}\lambda'\right)e^{-2\lambda} + \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\lambda}) \quad (2.32)$$

$$R_{22} = \left(\frac{2}{r}\lambda' - \nu'' + \nu'\lambda' - (\nu')^2\right)e^{-2\lambda} \quad (2.33)$$

$$R_{33} = \left(-\frac{1}{r}\nu' + \frac{1}{r}\lambda'\right)e^{-2\lambda} + \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\lambda}). \quad (2.34)$$

## 2 Stellare Strukturgleichungen bei langsamer Rotation

Durch Kontraktion berechnet man den Ricci-Skalar

$$\begin{aligned} R &= -R_{00} + R_{11} + R_{22} + R_{33} \\ &= -\left(2\nu'' - 2\nu'\lambda' + 2(\nu')^2 + \frac{4}{r}\nu' - \frac{4}{r}\lambda'\right)e^{-2\lambda} + \frac{2}{r^2}(1 - e^{-2\lambda}). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Nun kann der Einstein-Tensor  $G_{\mu\rho} = R_{\mu\rho} - \frac{1}{2}g_{\mu\rho}R$  zusammengesetzt werden. Mit  $g_{\mu\rho} = \eta_{\mu\rho}$  ergibt sich

$$G_{00} = \frac{2}{r}\lambda'e^{-2\lambda} + \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\lambda}) \quad (2.36)$$

$$G_{11} = \left(\nu'' - \nu'\lambda' + (\nu')^2 + \frac{1}{r}\nu' - \frac{1}{r}\lambda'\right)e^{-2\lambda} \quad (2.37)$$

$$G_{22} = \frac{2}{r}\nu'e^{-2\lambda} - \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\lambda}) \quad (2.38)$$

$$G_{33} = \left(\nu'' - \nu'\lambda' + (\nu')^2 + \frac{1}{r}\nu' - \frac{1}{r}\lambda'\right)e^{-2\lambda}. \quad (2.39)$$

Alle anderen Komponenten verschwinden. Die Einsteinschen Feldgleichungen [52] besagen nun, dass dieser Tensor an den Energie-Impuls-Tensor koppelt. Die Materie im Innern eines Sterns soll durch eine ideale Flüssigkeit mit dem Druck  $P$  und der Energiedichte  $\epsilon$  angenähert werden. Deren Energie-Impuls-Tensor ist gegeben durch

$$T_{\mu\rho} = (P + \epsilon)u_\mu u_\rho + P g_{\mu\rho}, \quad (2.40)$$

wobei  $u^\mu$  die Eigengeschwindigkeit des Fluids ist. Der Druck  $P$  und die Energiedichte  $\epsilon$  werden dabei im Eigensystem des Fluids gemessen. Damit hat der Energie-Impuls-Tensor im orthonormierten System die Komponenten

$$T_{00} = \epsilon \quad (2.41)$$

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = P. \quad (2.42)$$

Die nichtdiagonalen Komponenten verschwinden. Demnach erhält man folgende Gleichungen:

$$\frac{2}{r}\lambda'e^{-2\lambda} + \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\lambda}) = 8\pi\epsilon \quad (2.43)$$

$$\left(\nu'' - \nu'\lambda' + (\nu')^2 + \frac{1}{r}\nu' - \frac{1}{r}\lambda'\right)e^{-2\lambda} = 8\pi P \quad (2.44)$$

$$\frac{2}{r}\nu'e^{-2\lambda} - \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\lambda}) = 8\pi P. \quad (2.45)$$

Das Problem besteht nun darin, aus diesen Gleichungen die metrischen Funktionen  $\nu(r)$  und  $\lambda(r)$  sowie  $P(r)$  bzw.  $\epsilon(r)$  zu bestimmen. Dazu definiert man eine Hilfsgröße  $y = re^{-2\lambda}$ . Durch Ableiten folgt

$$y' = (1 - 2r\lambda')e^{-2\lambda}, \quad (2.46)$$

## 2.1 Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen

was man in (2.43) wiederfindet, als  $8\pi r^2 \epsilon = -y' + 1$ . Nach Integration ergibt sich

$$y = r - 8\pi \int_0^r \epsilon(r') r'^2 dr', \quad (2.47)$$

dabei verlangt die Regularität von  $g^{rr} = e^{-2\lambda} = \frac{y}{r}$ , dass  $y = 0$  bei  $r = 0$ , und erklärt damit die untere Integrationsgrenze. Es erscheint demnach sinnvoll, die Größe

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \epsilon(r') r'^2 dr' \quad (2.48)$$

mit

$$e^{2\lambda} = \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right)^{-1} \quad (2.49)$$

zu definieren, die sich außerhalb des Sterns als dessen gravitative Gesamtmasse herausstellt. Statt  $\lambda$  direkt zu bestimmen, hat man jetzt eine Gleichung für  $M(r)$ . Damit ist der räumliche Anteil der Metrik festgelegt. Um das sogenannte Gravitationspotential  $\nu$  zu bestimmen, löst man (2.43) mit Hilfe von (2.49) auf nach

$$\lambda' = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left[4\pi r \epsilon - \frac{M}{r^2}\right]. \quad (2.50)$$

Die Addition der Gleichungen (2.43) und (2.45) liefert

$$(\nu' + \lambda')e^{-2\lambda} = 4\pi r(\epsilon + P). \quad (2.51)$$

Damit ergibt sich durch Einsetzen von (2.50) und wieder mit Hilfe von (2.49)

$$\begin{aligned} \nu' &= 4\pi r(\epsilon + P)e^{2\lambda} - \lambda' \\ &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left[4\pi r P + \frac{M}{r^2}\right]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Jetzt fehlt noch eine Bestimmungsgleichung für den Druck- bzw. Dichteverlauf als Ausdruck des hydrostatischen Gleichgewichts. Den Zusammenhang zwischen Druck und Dichte liefert die Zustandsgleichung  $\epsilon(P)$ . Um eine Gleichung für den Druckgradienten abzuleiten, gibt es zwei Möglichkeiten. Zum einem wurde eine der sogenannten Einstein-Gleichung (2.43) bis (2.45) noch nicht genutzt, nämlich Gleichung (2.44). Durch Ableiten von (2.45) und Einsetzen in (2.44) erhält man eine Gleichung für den Druckgradienten in Abhängigkeit vom Druck, der Dichte und der metrischen Funktionen bzw. deren ersten Ableitungen. Weiteres Anwenden der obigen Gleichungen liefert das aus der Literatur bekannte Ergebnis (siehe z. B. [106]). Schneller gelangt man zu diesem Ziel durch die lokale Energie-Impuls-Erhaltung, das heißt dem Verschwinden der Divergenz des Energie-Impuls-Tensors

$$T^\mu{}_{\rho;\mu} = 0. \quad (2.53)$$

## 2 Stellare Strukturgleichungen bei langsamer Rotation

Die Existenz dieses Erhaltungssatzes ist auf das Engste mit den Einsteinschen Feldgleichungen verknüpft (siehe [102]). Man betrachtet die „r-Komponente“, also  $\rho = 2$ :

$$\begin{aligned} D_\mu T^\mu{}_\rho &= e_0(T^0{}_\rho) - \omega^\rho{}_\rho(e_0)T^0{}_\rho + \omega^0{}_\rho(e_0)T^0{}_\rho \\ &\quad + e_1(T^1{}_\rho) - \omega^\rho{}_\rho(e_1)T^1{}_\rho + \omega^1{}_\rho(e_1)T^1{}_\rho \\ &\quad + e_2(T^2{}_\rho) - \omega^\rho{}_\rho(e_2)T^2{}_\rho + \omega^2{}_\rho(e_2)T^2{}_\rho \\ &\quad + e_3(T^3{}_\rho) - \omega^\rho{}_\rho(e_3)T^3{}_\rho + \omega^3{}_\rho(e_3)T^3{}_\rho \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$= e^{-\lambda}(\partial_r P) + \nu' \epsilon e^{-\lambda} + \nu' P e^{-\lambda} \quad (2.55)$$

$$= 0.$$

Damit nimmt die Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts die Form

$$\frac{dP}{dr} = -(\epsilon + P)\nu' \stackrel{(2.52)}{=} -(\epsilon + P) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left[4\pi r P + \frac{M}{r^2}\right] \quad (2.56)$$

an. Nach Wiedereinführen von  $c$  und  $G$  und Umstellen erhält man schließlich

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon \quad (2.57)$$

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{GM}{c^2 r^2} \left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{Mc^2}\right) \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \quad (2.58)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\epsilon}{r^2} \left(1 + \frac{P}{\epsilon c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{Mc^2}\right) \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}. \quad (2.59)$$

Damit hat man ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung, das die Struktur des Sterns und des Gravitationsfeldes bestimmt. Die obigen Gleichungen werden Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen genannt [106], [136]. Sie lassen sich numerisch leicht lösen, wenn man eine Zustandsgleichung  $\epsilon(P)$  spezifiziert hat. Dies soll in Kapitel 4 geschehen. Die Lösung dieses Systems hat bestimmte Bedingungen zu erfüllen. Der Anfangswert für  $P$  ist ein beliebig gewählter Zentraldruck  $P(0) = P_C$ . Der Sternradius  $R$  ist durch die Bedingung  $P(R) = 0$  definiert. Oben wurde schon gezeigt, dass  $M(0) = 0$  gelten muss, was bei der Interpretation der Größe  $M$  als Masse auch sinnvoll erscheint. Nach dem Birkhoff-Theorem (siehe z. B. [102]) wird der Außenraum jeder kugelsymmetrischen Massenverteilung durch die Schwarzschild-Metrik

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.60)$$

beschrieben, wobei  $m$  die Gesamtmasse der Quellverteilung ist. Deshalb muss für  $r > R$  ( $R$  Sternradius)  $e^\nu = 1 - \frac{2Gm}{rc^2}$  gelten. Man erkennt, dass für  $r \rightarrow \infty$   $\nu$  verschwindet, die Metrik demnach weit entfernt vom Stern einen flachen Raum beschreibt. Das Birkhoff-Theorem klärt auch die physikalische Bedeutung der Größe  $M$ . Durch Vergleich sieht man nämlich, dass  $M = m$  in der Tat die gravitative Gesamtmasse des Sterns im Außenraum



## 2.1 Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen

darstellt.

Die Interpretation von  $M = 4\pi \int_0^r \epsilon(r') r'^2 dr'$  als Gesamtmasse ist keineswegs so offensichtlich, wie es auf den ersten Blick scheinen mag. Denn das dreidimensionale Eigen-Volumenelement der Metrik (2.1) ist für eine Kugelschale durch  $4\pi r^2 e^\lambda dr$  gegeben. Damit ergibt sich eine Eigenmasse von

$$M_P = 4\pi \int_0^R \epsilon(r) r^2 \left[ 1 - \frac{2M(r)}{r} \right]^{-\frac{1}{2}} dr. \quad (2.61)$$

Diese unterscheidet sich offensichtlich von der gravitativen Gesamtmasse mit  $M_P > M$ . Den Unterschied bildet die Gravitations-Bindungsenergie. Aber auch  $M_P$  unterscheidet sich noch von der Ruhemasse, durch die Verwendung der Energiedichte im Integranden von (2.61). Die Ruhemasse des Sterns ist nämlich gegeben durch

$$M_0 = 4\pi m_B \int_0^R n(r) r^2 \left[ 1 - \frac{2M(r)}{r} \right]^{-\frac{1}{2}} dr, \quad (2.62)$$

wobei  $n(r)$  die Baryonenzahldichte und  $m_B$  die Baryonenruhemasse ist. Diese Größe bestimmt die Anzahl der Baryonen und multipliziert mit deren Ruhemasse, es werden also die den Stern zusammensetzenden Einzelmassen aufaddiert. Die Baryonenzahldichte ist durch die Zustandsgleichung gegeben.

Es ist interessant zu sehen, welche Form die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen im Newtonschen Limit annehmen, das heißt, wenn  $\frac{P}{\epsilon c^2} \ll 1$ ,  $\frac{4\pi r^3 P}{M c^2} \ll 1$  und  $\frac{2GM}{c^2 r} \ll 1$  gilt. Dann reduzieren sich die Gleichungen (2.57) bis (2.59) auf

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon_0 \quad (2.63)$$

$$c^2 \frac{d\nu}{dr} = \frac{GM}{r^2} \equiv \frac{d\Phi}{dr} \quad (2.64)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\epsilon_0}{r^2}. \quad (2.65)$$

Dabei ist  $\epsilon_0$  die Massendichte der Newtonschen Theorie. (Allgemein ist  $\epsilon = \epsilon_0(1 + \frac{U}{c^2 \epsilon_0})$  mit der Inneren Energie  $U$ ). Demnach ist  $M$  die Masse einer Kugel mit der Dichte  $\epsilon_0(r)$ . Außerdem findet man, dass  $\nu$  bis auf einen Faktor  $c^2$  mit dem Newtonschen Gravitationspotential übereinstimmt. Dies rechtfertigt die obige Bezeichnung von  $\nu$  als Gravitationspotential. Und schließlich in der letzten Gleichung erkennt man den Newtonschen Ausdruck des hydrostatischen Gleichgewichts. Die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen bilden deshalb die relativistische Verallgemeinerung der Gleichungen, die den Sternaufbau in der Newtonschen Theorie bestimmen, wo der Gravitationsdruck dem Gas-, Strahlungs- bzw. Entartungsdruck entgegenwirkt. Im Vergleich zum Newtonschen Fall werden allgemein relativistische Sterne instabiler, was man am zweifachen Auftreten des Drucks  $P$  in Gleichung (2.59) erkennt. Nach dieser Gleichung erzeugt Druck noch mehr Druck.

## 2.2 Frame-dragging und Trägheitsmoment

Wie in der Einleitung dieses Kapitels erwähnt, tritt bei rotierenden Sternen der Effekt des frame-draggings auf. Begründet liegt dies im nicht verschwindenden Term  $g_{\varphi t}$  des metrischen Tensors. Dieser Effekt äußert sich darin, dass ein Probekörper beziehungsweise Beobachter, der, weit entfernt von einem rotierenden Stern startend und anfangs in Bezug auf die Fixsterne nicht rotierend, in der Äquatorebene frei auf den Stern zu fällt, beginnt, sich um diesen zu drehen. Diese Ablenkung wird durch das Rotieren des Lokalen Inertialsystems hervorgerufen. In der Newtonschen Theorie wird dieses Verhalten nicht beobachtet.

An dieser Stelle soll eine Gleichung abgeleitet werden, die das frame-dragging langsam rotierender Sterne beschreibt. Ausgehend von dieser Gleichung wird eine allgemein relativistische Formel für das Trägheitsmoment der Sterne berechnet. Die Rotation soll dabei als Störung behandelt werden. Deshalb werden die metrischen Koeffizienten nach dem Störparameter, der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  des Fluids, entwickelt. In dieser Herleitung sollen Störungen bis zur ersten Ordnung in  $\Omega$  berücksichtigt werden. Es wird eine starre Rotation der Materie vorausgesetzt, so dass die Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  konstant ist. Die Annahme homogener Rotation ist durch die (Rest-)Viskosität der Materie gerechtfertigt, da sich eine mögliche differentielle Rotation in kurzer Zeit (wenige Tage) abschwächt [75]. Im Energie-Impuls-Tensor wird diese Viskosität jedoch vernachlässigt, wenn man eine ideale Flüssigkeit annimmt. Eine stationäre achsensymmetrische Konfiguration befindet sich im Gleichgewicht, in diesem Fall können aufgrund des fehlenden zeitabhängigen Massenquadrupolmoments keine Gravitationswellen emittiert werden. Weiterhin wird Symmetrie bezüglich einer Ebene senkrecht zur Rotationsachse angenommen. Ein passender Ansatz der Metrik für diesen Fall ist

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\lambda} dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \sin^2\theta (d\varphi - L dt)^2] \quad (2.66)$$

(für weitere Informationen siehe z. B. [73], [138], [102], [82]). Bei den angenommenen Symmetrien, Achsensymmetrie und Stationarität, sind die metrischen Funktionen im Allgemeinen Funktionen von  $r$  und  $\theta$ . Diese Metrik sollte sich unter einer Zeitumkehrtransformation genau so verhalten wie unter der Umkehr der Rotationsrichtung. Aus diesem Grund können die Funktionen  $e^{2\nu}$  und  $e^{2\lambda}$  in einer Entwicklung nur gerade Ordnungen der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  enthalten, während  $L$  nur ungerade Potenzen enthält. Bei einer Entwicklung bis zur linearen Ordnung in der Winkelgeschwindigkeit wird demnach allein  $L$  von der Rotation beeinflusst. Deshalb müssen die metrischen Funktionen  $e^{2\nu}$  und  $e^{2\lambda}$  sphärisch symmetrisch sein. Dies erscheint auch dahingehend sinnvoll, als dass die Zentrifugalkraft in der Newtonschen Theorie erst in zweiter Ordnung in der Winkelgeschwindigkeit auftritt. Der Stern wird also in dieser Ordnung nicht verformt, und die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen bleiben in dieser Entwicklung gültig.  $L$  ist die Winkelgeschwindigkeit des Lokalen Inertialsystems gegenüber den weit entfernten Fixsternen. Man setzt die Entwicklung

$$L(r, \theta) \equiv \omega(r, \theta) + O(\Omega^3) \quad (2.67)$$

an. Um eine Bestimmungsgleichung für  $\omega$  zu erhalten, wird die Komponente

$$R_\varphi{}^t = 8\pi T_\varphi{}^t \quad (2.68)$$

der Einsteinschen Feldgleichungen in einer Entwicklung nach  $\Omega$  betrachtet. Es wird in der Koordinaten-Basis gerechnet, um die Identität

$$\sqrt{-g}R_\varphi{}^t = \partial_\rho [\sqrt{-g}g^{t\mu}\Gamma_{\varphi\mu}{}^\rho] \quad (2.69)$$

auszunutzen (mit der Determinante  $g$  des metrischen Tensors). Diese Beziehung wird in Anhang A bewiesen. Eine explizite Herleitung dieser Komponente des Ricci-Tensors mit Hilfe des 3+1-Splits wird in Kapitel 5.4 vorgestellt. Einsetzen der nicht verschwindenden Christoffelsymbole  $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\eta}(\partial_\rho g_{\sigma\eta} + \partial_\sigma g_{\rho\eta} - \partial_\eta g_{\rho\sigma})$  liefert

$$\sqrt{-g}R_\varphi{}^t = \partial_\mu [\sqrt{-g}(g^{tt}\Gamma_{\varphi t}^\mu + g^{t\varphi}\Gamma_{\varphi\varphi}^\mu)] \quad (2.70)$$

$$= -\frac{1}{2}\partial_\mu \left[ \sqrt{-g}g^{\rho\mu} \left( g^{t\varphi} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial x^\rho} + g^{tt} \frac{\partial g_{\varphi t}}{\partial x^\rho} \right) \right]. \quad (2.71)$$

Die Invertierung des metrischen Tensors lautet

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{-2\nu} & 0 & 0 & -\omega e^{-2\nu} \\ 0 & e^{-2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 & 0 \\ -\omega e^{-2\nu} & 0 & 0 & -\omega^2 e^{-2\nu} + 1/r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (2.72)$$

Außerdem berechnet man für die Determinante

$$\sqrt{-g} = e^{\nu+\lambda} r^2 \sin\theta. \quad (2.73)$$

Letztlich ergibt sich für Gleichung (2.71) in linearer Ordnung durch Einsetzen der Komponenten des metrischen Tensors

$$-2e^{\nu+\lambda} r^2 \sin\theta R_\varphi{}^t = \partial_r [e^{-\nu-\lambda} r^4 \sin^3\theta (\partial_r \omega)] + \partial_\theta [e^{\lambda-\nu} \sin^3\theta r^2 (\partial_\theta \omega)] + O(\Omega^3). \quad (2.74)$$

Nun fehlt noch die Komponente  $T_\varphi{}^t = (\epsilon + P)u_\varphi u^t$  des Energie-Impuls-Tensors mit der Eigengeschwindigkeit  $u^\mu$  des Fluids. Per Definition ist

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\frac{d\varphi}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}}, \quad (2.75)$$

woraus

$$u^\varphi = \Omega u^t \quad (2.76)$$

folgt. Die anderen Komponenten der Eigengeschwindigkeit verschwinden aufgrund der Symmetrien des Problems. Aus der Normierungsbedingung  $u^\mu u_\mu = -1$  ergibt sich mit (2.76)

$$u^t = (-g_{tt} - 2\Omega g_{\varphi t} + \Omega^2 g_{\varphi\varphi})^{-\frac{1}{2}} \quad (2.77)$$

$$= (e^{2\nu} + 2\Omega\omega r^2 \sin^2\theta + \Omega^2 r^2 \sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.78)$$

## 2 Stellare Strukturgleichungen bei langsamer Rotation

Nach Entwicklung wird  $T_\varphi^t$  zu

$$T_\varphi^t = (\epsilon + P)(u^t)(u_\varphi) \quad (2.79)$$

$$= (\epsilon + P)(u^t)^2(g_{t\varphi} + \Omega g_{\varphi\varphi}) \quad (2.80)$$

$$= (\epsilon + P)e^{-2\nu}(\Omega - \omega)r^2 \sin^2\theta + O(\Omega^3), \quad (2.81)$$

wobei es reicht, die nullte Ordnung in  $\Omega$  von  $u^t$  zu verwenden. Deshalb definiert man

$$\varpi \equiv \Omega - \omega, \quad (2.82)$$

was als Winkelgeschwindigkeit des Fluids relativ zum Lokalen Inertialsystem zu interpretieren ist (gemessen im Unendlichen). Damit liefert (2.68)

$$\begin{aligned} 16\pi(\epsilon + P)e^{\lambda-\nu}\varpi r^4 \sin^3\theta &= \partial_r[e^{-\nu-\lambda}r^4 \sin^3\theta(\partial_r\omega)] + \partial_\theta[e^{\lambda-\nu}\sin^3\theta r^2(\partial_\theta\omega)] \\ \Rightarrow 0 &= \frac{1}{r^4}\partial_r[e^{-\nu-\lambda}\theta(\partial_r\varpi)] + \frac{e^{\lambda-\nu}}{r^2 \sin^3\theta}\partial_\theta[\sin^3\theta(\partial_\theta\varpi)] - 16\pi(\epsilon + P)e^{\lambda-\nu}\varpi \end{aligned} \quad (2.83)$$

als Entwicklung der Einstein-Gleichungen in linearer Ordnung. Die thermodynamischen Größen  $\epsilon$  und  $P$  können nun mit Hilfe der Gleichungen nullter Ordnung aus Kapitel 2.1 eliminiert werden. Indem man

$$j(r) = e^{-\nu-\lambda} \Rightarrow \frac{dj}{dr} = -(\nu' + \lambda')e^{-\nu-\lambda} \quad (2.84)$$

definiert, kann man den Quellterm von Gleichung (2.83) unter Zuhilfenahme von Gleichung (2.51) schreiben als

$$-16\pi(\epsilon + P)e^{\lambda-\nu}\varpi = -\frac{4}{r}(\nu' + \lambda')e^{-\nu-\lambda}\varpi \quad (2.85)$$

$$= \frac{4}{r} \frac{dj}{dr} \varpi. \quad (2.86)$$

Damit hängt die Bestimmungsgleichung für  $\varpi$

$$\frac{1}{r^4}\partial_r[r^4 j(r)(\partial_r\varpi)] + \frac{4}{r} \frac{dj}{dr} \varpi + \frac{e^{\lambda-\nu}}{r^2 \sin^3\theta}\partial_\theta[\sin^3\theta(\partial_\theta\varpi)] = 0 \quad (2.87)$$

nur von der ungestörten Metrik ab. Nun ist ein Ansatz für  $\varpi$  zu wählen, der Gleichung (2.87) separiert. In Anhang A wird gezeigt, dass Vektor-Harmonische diese Forderung erfüllen. Der Ansatz lautet

$$\varpi(r, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} \varpi_l(r) \left( -\frac{1}{\sin\theta} \frac{dP_l}{d\theta} \right). \quad (2.88)$$

$P_l$  sind dabei Legendre-Polynome. Schließlich ergibt sich für den radialen Anteil von Gleichung (2.87)

$$\frac{1}{r^4} \frac{d}{dr} \left[ r^4 j(r) \frac{d\varpi_l}{dr} \right] + \left[ \frac{4}{r} \frac{dj}{dr} - e^{\lambda-\nu} \frac{l(l+1) - 2}{r^2} \right] \varpi_l = 0 \quad (2.89)$$

(siehe Anhang A). Durch Untersuchungen des Verhaltens von  $\varpi_l(r)$  für große und kleine  $r$  kann man zeigen, dass einzig der Ansatz mit  $l = 1$  alle Erfordernisse erfüllt. Demnach ist  $\varpi$  eine Funktion von  $r$  allein und erfüllt die Differentialgleichung

$$\boxed{\frac{1}{r^4} \frac{d}{dr} \left[ r^4 j(r) \frac{d\varpi}{dr} \right] + \frac{4}{r} \frac{dj}{dr} \varpi = 0.} \quad (2.90)$$

Am Ursprung  $r = 0$  sollte  $\varpi$  aus Symmetriegründen konstant sein, das heißt  $\frac{d\varpi}{dr} = 0$ . Außerhalb des Sterns gilt  $j(r) = 1$  (siehe Kapitel 2.1), und man zeigt leicht, dass damit  $\varpi(r)$  im Außenraum die Form

$$\varpi(r, \theta) = c_1 + \frac{c_2}{r^3} \quad (2.91)$$

annehmen muss ( $c_1$  und  $c_2$  Konstanten). Da  $\omega$  im Unendlichen verschwindet, muss nach (2.82)  $c_1 = \Omega$  sein. Außerdem wählt man  $c_2 = -2J$ , wobei sich  $J$  durch Vergleich mit der analytischen Metrik des Außenraums (siehe [102], [82], [74]) als Drehimpuls herausstellt, und man schreibt Gleichung (2.91) als

$$\varpi(r) = \Omega - \frac{2J}{r^3}. \quad (2.92)$$

Damit wird nach Definition (2.82)  $\omega = \frac{2J}{r^3}$  für  $r > R$ . Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  wurde als der in  $\Omega$  lineare Anteil der metrischen Funktion  $L(r, \theta)$  definiert. Es bietet sich deshalb an, den Drehimpuls als

$$J = I\Omega \quad (2.93)$$

zu schreiben, und dabei  $I$  als die relativistische Verallgemeinerung des Trägheitsmomentes zu deuten. Das Trägheitsmoment läßt sich durch die metrischen Funktionen ausdrücken. Dazu wird Gleichung (2.90) geschrieben als

$$\frac{d}{dr} \left[ r^4 j(r) \frac{d\varpi}{dr} \right] = -4r^3 \frac{dj}{dr} \varpi \quad (2.94)$$

und von  $r = 0$  bis  $r = R$  integriert. Dann folgt aus

$$-4 \int_0^R r^3 \frac{dj}{dr} \varpi dr = r^4 j(r) \frac{d\varpi}{dr} \Big|_0^R \stackrel{(2.92)}{=} R^4 j(R) 3 \frac{2J}{R^4} - 0 \stackrel{j(R)=1}{=} 6I\Omega, \quad (2.95)$$

dass mit wiedereingeführten Konstanten  $G$  und  $c$  für das Trägheitsmoment

$$\frac{GI}{c^2} = -\frac{2}{3} \int_0^R r^3 \frac{dj}{dr} \frac{\varpi}{\Omega} dr \quad (2.96)$$

gilt.

Setzt man in Ausdruck (2.96) für das Trägheitsmoment explizit  $\frac{dj}{dr}$  ein (Gleichung (2.51)), erhält man

$$\boxed{I = \frac{8\pi c^2}{3G} \int_0^R r^4 \frac{\epsilon + P/c^2}{\sqrt{1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}}} \frac{\Omega - \omega(r)}{\Omega} e^{-\nu} dr.} \quad (2.97)$$

## 2 Stellare Strukturgleichungen bei langsamer Rotation

Bemerkenswert an diesem Ausdruck ist der Faktor  $(\Omega - \omega)e^{-\nu}$ . Die Differenz  $\Omega - \omega$  gibt die Winkelgeschwindigkeit des Fluids relativ zum Lokalen Inertialsystem an (gemessen weit entfernt vom Stern). Der Faktor  $e^{-\nu}$  bestimmt, wie groß diese Differenz im Lokalen Inertialsystem erscheint.

Ebenso läßt sich aus der obigen Darstellung leicht der Newtonsche Grenzfall ableiten. Zum einen gibt es im Newtonschen Bild kein frame-dragging. Nutzt man zum anderen die in Kapitel 2.1 gemachten Annahmen zu diesem Grenzfall, reduziert sich (2.97) auf den bekannten Ausdruck

$$I = \frac{8\pi}{3} \int_0^R r^4 \epsilon_0(r) dr. \quad (2.98)$$

### 2.3 Hartle-Thorne-Methode zweiter Ordnung

Die obige Herleitung der stellaren Strukturgleichungen beschränkt sich auf Effekte linear in der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$ . Hartle und Thorne, auf die diese Herleitung zurückgeht, entwickelten ebenso ein Verfahren, das Störungen bis zur quadratischen Ordnung behandelt [74]. In diesem Fall beeinflusst die Rotation auch die Struktur des Sterns und führt beispielsweise zur Abplattung, was gleichbedeutend mit einem nicht verschwindenden Quadrupolmoment ist.

Eine stationäre und achsensymmetrische Metrik ist im Allgemeinen gegeben durch

$$ds^2 = -e^{2\nu(r,\theta)} dt^2 + e^{2\lambda(r,\theta)} dr^2 + e^{2\Psi(r,\theta)} [r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta (d\varphi - L(r,\theta) dt)^2]. \quad (2.99)$$

Aufgrund der in Kapitel 2.2 dargelegten Symmetrieüberlegungen (bezüglich Zeitumkehr und Umkehr der Rotationsrichtung) spezifizierten Hartle und Thorne die Metrik (2.99) durch den Ansatz

$$e^{2\nu(r,\theta)} = e^{2\nu} [1 + 2(h_0 + h_2 P_2(\cos\theta))] \quad (2.100)$$

$$e^{2\lambda(r,\theta)} = e^{2\lambda} \left[ 1 + 2 \frac{1 + 2(m_0 + m_2 P_2(\cos\theta))/(r - 2M)}{1 - 2M/r} \right] \quad (2.101)$$

$$e^{2\Psi(r,\theta)} = 1 + 2(v_2 - h_2) P_2(\cos\theta) \quad (2.102)$$

$$L = \omega. \quad (2.103)$$

Dabei wurden Terme der Ordnung  $\Omega^3$  und höher vernachlässigt. Die Größen  $e^{2\nu}$ ,  $e^{2\lambda}$ ,  $M$  und  $\omega$  der rechten Seite sind identisch mit den in den Kapitel 2.1 und 2.2 eingeführten metrischen Funktionen und erfüllen dieselben Differentialgleichungen. Sie beschreiben bekanntlich einen langsam rotierenden sphärisch symmetrischen Stern.  $P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$  ist das Legendre-Polynom zweiter Ordnung. Die übrigen Funktionen  $m_0$ ,  $m_2$ ,  $h_0$ ,  $h_2$  und  $v_2$  sind proportional zu  $\Omega^2$  und nur von  $r$  abhängig. Die Funktionen mit Index 0 beschreiben die Monopol-Korrektur und die Funktionen mit Index 2 die Quadrupol-Korrektur zu den kugelsymmetrischen Lösungen hervorgerufen durch die Rotation. Ähnliche Ansätze macht man für die thermodynamischen Größen und berechnet

Korrekturen zu den Größen nullter Ordnung. Die oben dargelegten Symmetrieüberlegungen zeigen weiterhin, dass die Gleichungen des frame-draggings in dieser Ordnung keine Änderungen gegenüber denen im vorigen Kapitel erfahren.

Die Einsteinschen Feldgleichungen liefern nun ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung. Dieses System ist in [74] oder auch in [132] zu finden, eine analoge Darstellung wird in [1] gegeben. In diesen Referenzen werden auch die Randbedingungen beschrieben. Auf kleinere Rechenfehler in diesen Veröffentlichungen wird in [24] hingewiesen. Es ergibt sich schließlich ein mehrdimensionales Anfangswertproblem. Die Integration stellt kein Problem dar. Mit einem Iterationsverfahren (z. B. Runge-Kutta-Methode) kann man diese Aufgabe lösen, startend im Ursprung (Zentrum des Sterns) wird bis zur Oberfläche integriert.

Das Lösen dieses Systems liefert verschiedene physikalische Größen. Neben der Gesamtmasse, dem Drehimpuls, dem Trägheitsmoment und dem Radius werden mit diesem Verfahren beispielsweise auch das Quadrupolmoment und die Elliptizität des Sterns bestimmt. Die Metrik des Außenraums wird allein durch die Gesamtmasse, den Drehimpuls und das Quadrupolmoment festgelegt (siehe [74]).

Um die Güte dieser sogenannten Hartle-Thorne-Methode zu bestimmen, wurden in [24] die Ergebnisse dieses Verfahren mit den numerischen Ergebnissen des RNS-Codes verglichen. Der RNS-Code wird in Kapitel 6.3 vorgestellt und benutzt. Im Allgemeinen bilden die Lösungen der Einstein-Gleichungen eine zweiparametrische Schar, zum Beispiel in Abhängigkeit der Zentraldichte und des Drehimpulses. Um Resultate der verschiedenen Verfahren zu vergleichen, müssen demnach zwei unabhängige Parameter der jeweiligen Lösungen übereinstimmen. Berti et al. benutzen die Gesamtmasse sowie den Drehimpuls, um dann das Quadrupolmoment zu vergleichen. Sie untersuchten für verschiedene Zustandsgleichungen  $\epsilon(P)$  das Verhalten einer Sequenz mit konstanter Ruhemasse und einer Sequenz von Sternen, die alle die maximale Masse der nicht rotierenden Konfigurationen haben. Unter der Annahme, dass der RNS-Code die exakte (wahre) Lösung liefert, fanden sie für die Hartle-Thorne-Methode Abweichungen im Quadrupolmoment von ungefähr 20% für einen mit 1,5 ms rotierenden Neutronenstern. Die Ergebnisse waren nicht sehr sensitiv gegenüber der gewählten Zustandsgleichung. Außerdem wurden die Abweichungen der innersten stabilen Kreisbahn (ISCO) untersucht. Innerhalb dieses Abstandes vom Zentrum des Sterns sind keine stabilen runden Umlaufbahnen möglich. Für dieselbe Rotationsperiode von 1,5 ms sind die Abweichungen für diese astrophysikalisch äußerst relevante Größe nur im Bereich von 1%.

## 2 *Stellare Strukturgleichungen bei langsamer Rotation*



## 3 Zustandsgleichungen

Bevor die in Kapitel 2 abgeleiteten Gleichungen für die Struktur langsam rotierender Neutronensterne numerisch gelöst werden können, muss zuvor eine Zustandsgleichung  $\epsilon(P)$  angegeben werden. Neutronensterne bestehen aus kalter entarteter Materie im thermodynamischen Gleichgewicht, da die Fermi-Energie von mehreren 10 MeV bei typischen Temperaturen im Bereich von KeV bei weitem dominiert, so dass man die Temperatur  $T = 0$  setzen kann [77]. Man betrachtet also den Grundzustand der Materie. Diese Annahme wird eine Grundvoraussetzung bei allen hier behandelten Zustandsgleichungen sein. Damit ist die Energiedichte tatsächlich allein eine Funktion von  $P$ . Die exakte Form dieser Zustandsgleichung für kalte dichte Materie ist unbekannt, und eine große Anzahl an Zustandsgleichungen wurde bisher veröffentlicht, die mit den derzeitigen Beobachtungen in Einklang stehen. Wie man an den Gleichungen (2.57) bis (2.59) und (2.97) sieht, bestimmt die Zustandsgleichung wesentlich das Verhalten der Lösung und damit die makroskopischen Eigenschaften von Neutronensternen.

$$\epsilon(P) \xrightarrow{TOV-Gl.} M, R, I, \dots$$

Die in den folgenden Kapiteln dargestellten Ergebnisse beziehen sich deshalb jeweils auf eine spezielle Zustandsgleichung. Welche dieser Zustandsgleichungen das Verhalten kalter dichter Materie korrekt wiedergibt, kann möglicherweise durch weitere astrophysikalische Beobachtungen geklärt werden. Somit ergibt sich die außergewöhnliche Möglichkeit Effekte der Mikrophysik an astronomischen Objekten zu studieren und entsprechende Rückschlüsse zu ziehen.

In diesem Kapitel werden zuerst der Aufbau von Neutronensternen sowie die Eigenschaften von Zustandsgleichungen im Allgemeinen diskutiert, um danach die in dieser Arbeit verwendeten Zustandsgleichungen im Einzelnen vorzustellen. Dabei handelt es sich ausschließlich um sogenannte hadronische Zustandsgleichungen, bei denen kein Quark-Deconfinement auftritt. Eine besondere Klasse von Zustandsgleichungen, die Quarkmaterie beschreiben, wird in Kapitel 7 behandelt.

### 3.1 Aufbau von Neutronensternen und Zustandsgleichungen

In einem Neutronenstern können im Wesentlichen 4 Regionen, abhängig von der Dichte, unterschieden werden. Diese sind in Abbildung 3.1 gezeigt. An der Oberfläche befindet sich die wenige Zentimeter dicke Atmosphäre. Sie besteht hauptsächlich aus Wasserstoff

### 3 Zustandsgleichungen

und Helium mit einer geringen Beimischung schwerer Elemente. In dieser Schicht entsteht thermische Strahlung, die mit Röntgenteleskopen beobachtet werden kann, weshalb diese Region auch Photosphäre genannt wird. Die sich anschließende äußere Kruste wird aus einem Kristallgitter von Atomkernen gebildet, das in einem relativistischen Elektronengas eingebettet ist. Das Äußere dieser Kruste besteht aus Eisen, dem stabilsten Element. Mit steigender Dichte erhöht sich die Fermi-Energie der Elektronen, so dass der inverse  $\beta$ -Zerfall

$$p + e^- \longrightarrow n + \nu_e \quad (3.1)$$

möglich wird. Das führt zu einer Anreicherung der Atomkerne mit Neutronen, da die Umkehrreaktion aufgrund des Pauli-Prinzips verboten ist. Die äußere Kruste erstreckt sich über einen Bereich von ungefähr 300 m bis zu einer Dichte von  $4,3 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$ . Bei dieser sogenannten neutron drip Dichte ist es für schwach gebundene Neutronen im Atomkern energetisch günstiger, den Atomkern zu verlassen und freie Zustände außerhalb zu bevölkern. Dieser Punkt markiert den Übergang zur inneren Kruste, die folglich aus einem Gitter von neutronenreichen Atomkernen, einem Elektronengas und einem Neutronengas besteht. Die innere Kruste setzt sich bis zu einer Dichte von ungefähr  $1,7 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$  (60 % der Kerndichte) fort, was grob einer Ausdehnung von 600 m entspricht. Die räumliche Größe der einzelnen Regionen ist stark vom konkret betrachteten Neutronenstern abhängig. Die hier angegebenen Werte sollen nur einen groben Überblick vermitteln. Im Innern der Kruste schließt sich die Kern-Region an. Hier haben sich die Atomkerne vollkommen aufgelöst, um eine homogene Neutronen-Flüssigkeit zu bilden. Ein kleiner Anteil von Protonen und Elektronen ist weiterhin vorhanden, um die Bedingung des Beta-Gleichgewichts (siehe unten) und der Ladungsneutralität zu erfüllen. Erreicht die Fermi-Energie der Elektronen die Ruhemasse des Myons von 105,7 MeV, werden energiereiche Elektronen durch Myonen ersetzt, um die Energie des Systems zu minimieren. Solch eine Reaktion führt zum Aufweichen der Zustandsgleichung, das heißt einem weniger steilen Anstieg des Drucks, da Elektronen mit hohem Impuls durch Myonen mit niedrigem Impuls ersetzt werden. Diese sogenannte  $npe\mu$ -Materie muss sich weiterhin im Beta-Gleichgewicht befinden und Ladungsneutralität erfüllen. Unter Vernachlässigung der Neutrinos, die den Stern verlassen, schreiben sich diese Bedingungen als

$$n \leftrightarrow p + e^-, \quad n \leftrightarrow p + \mu^- \quad (3.2)$$

oder unter Verwendung der jeweiligen chemischen Potentiale

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e, \quad \mu_e = \mu_\mu. \quad (3.3)$$

Dabei gilt  $\mu_i = \frac{\partial \epsilon}{\partial n_i}$ , mit der Teilchenzahldichte  $n_i$  einer Spezies von Teilchen ( $i = n, p, e^-, \mu^-$ ). Die Bedingung der Ladungsneutralität verlangt

$$n_p = n_e + n_\mu. \quad (3.4)$$

Diese Anforderungen legen das Verhältnis der verschiedenen Teilchensorten fest. Über das Vorkommen dieser Teilchen in Neutronensternen herrscht in der Literatur Einigkeit [140], [60], sofern es sich bei Neutronensternen tatsächlich um Neutronensterne

### 3.1 Aufbau von Neutronensternen und Zustandsgleichungen

handelt und nicht um Seltsame Sterne, die in Kapitel 7.1 besprochen werden. Darüber hinaus sagen verschiedene Modelle bei höheren Dichten weitere Konstituenten voraus (siehe Abbildung 3.1). Im einzelnen wird über ein Pionen- oder Kaonenkondensat spekuliert. Ebenso könnte es Neutronensterne mit Hyperonen im Innern geben (sogenannte Hyperonensterne). Das Erscheinen von Hyperonen verläuft analog zum Auftreten von Myonen. Durch schwache Wechselwirkungsprozesse können sich Nukleonen in Hyperonen (Baryonen mit strange-Quark) verwandeln. Wieder werden die Zustände mit hohem Impuls durch Zustände mit niedrigem Impuls ersetzt, was zu einem weniger steilen Anstieg des Drucks führt. Auch verschiedenste Quarkphasen kommen in Betracht. Auf diese Möglichkeit wird in Kapitel 7 eingegangen.

Die Zentraldichte im Innern des Kerns erreicht ein Mehrfaches der Kerndichte ( $2,7 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$ ).

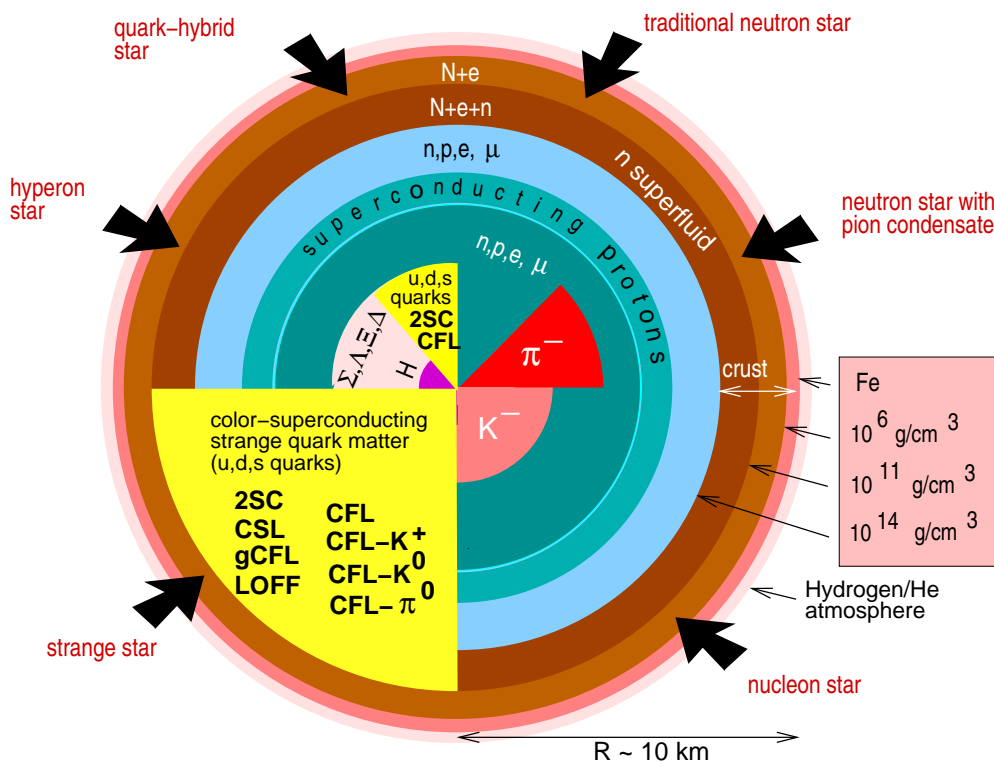


Abbildung 3.1: Aufbau und Zusammensetzung von Neutronensternen (aus [140]).

Aufgrund der niedrigen Temperatur in Neutronensternen ist davon auszugehen, dass man Phasen supraleitender Protonen und suprafluiden Neutronen im Innern findet (siehe dazu beispielsweise [140]).

Wie in der Einleitung dieses Kapitels schon dargelegt, ist die Zustandsgleichung die

### 3 Zustandsgleichungen

entscheidende Zutat für die Lösung der Einstein-Gleichungen, in diesem Fall die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen.

Die Modellierung der Atmosphäre ist von äußerster Wichtigkeit für die Beobachtung von Neutronensternen. Hinweise hierzu findet man unter anderem in [120], [96], [101]. Sie hat aber keinen Einfluß auf die Struktur von Neutronensternen.

Wie der oben beschriebene Aufbau deutlich macht, entfällt jedoch auf die Kruste ein signifikanter Anteil der Neutronensternmaterie von ungefähr 2%. Die Zustandsgleichung der äußeren Kruste gilt als etabliert. Sie beschreibt das Verhalten der Materie bis zur neutron drip Dichte. Meist wird das Modell von Baym, Pethick und Sutherland (BPS) [18] verwendet, in das experimentelle Daten von Massen von Atomkernen im Grundzustand eingehen. Dieses Modell wurde von Haensel und Pichon [67] verbessert und neueren experimentellen Ergebnissen angepaßt. Die innere Kruste wird üblicherweise durch die Zustandsgleichung von Baym, Bethe und Pethick (BBP) beschrieben [17]. Zur Herleitung wird das sogenannte compressible liquid drop model (CLDM) verwendet [69]. In diesem Modell werden Energiebeiträge verschiedener physikalischer Effekte pro Einheitszelle aufaddiert. Im Einzelnen tragen Volumen- und Oberflächenterme der Nukleonen, Coulomb-Wechselwirkungen und die als Fermi-Gas angenommenen Elektronen bei. Der Effekt des Neutronengases außerhalb der Kerne geht in die ersten beiden Terme ein. Diese Terme sind außerdem von der Form der Kerne abhängig. Die Parameter des Modells werden durch Vielteilchen-Modelle bestimmt, die auf einer effektiven Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung basieren. In diesem Sinne ist es möglich, sogenannte vereinigte Zustandsgleichungen herzuleiten, die sowohl für die innere Kruste als auch den Kern das gleiche Modell verwenden. Insbesondere wurde mit den unten vorgestellten Modellen FPS [91] und SLy4 [47] die Zustandsgleichung der inneren Kruste berechnet.

Der Übergang von der inneren Kruste zum flüssigen Kern verläuft wahrscheinlich über verschiedene Zwischenstadien [91], [47], [110]. Zuerst bilden sich Tropfen aus Neutronenflüssigkeit. Diese formen mit wachsender Dichte seilartige Strukturen. Aus diesen bilden sich schließlich Platten. Für noch höhere Dichten verläuft diese Entwicklung umgekehrt mit vertauschten Rollen der Neutronenflüssigkeit und des Kristallgitters. Aufgrund dieser Formen (Spaghetti, Lasagne) wird auch von den Pasta-Phasen gesprochen. Diese Strukturen haben Auswirkungen auf Transportphänomene und die Elastizität der Materie, beeinflussen die Zustandsgleichung aber nur wenig [68].

Die Zustandsgleichung des Kerns ist mit großen Unsicherheiten behaftet, nicht zuletzt weil sich diese Form von Materie vollkommen der experimentellen Beobachtung entzieht. Einerseits betrachtet man Materie bei mehrfacher Kerndichte und andererseits verlangt man eine geringe Temperatur. Diese Bedingungen sind in Beschleuniger-Experimenten nicht gegeben (siehe Abbildung 1.2). Entsprechend viele verschiedene Ansätze wurden vorgeschlagen (siehe nächster Abschnitt). Wie oben schon erwähnt werden zwei Standardannahmen für Neutronensternmaterie gemacht, nämlich Neutrino-Transparenz und Vernachlässigung thermischer Effekte. Es gibt im Wesentlichen zwei verschiedene Verfahren zur Berechnung der Zustandsgleichung. Entweder verwendet man die nicht-relativistische Vielteilchen-Theorie oder eine relativistische Mean-Field-Theorie.

Die nicht-relativistische Vielteilchen-Theorie betrachtet eine Ansammlung von punktförmigen Nukleonen mit der Masse  $m$  und dem Impuls  $p_i$ , deren Dynamik durch den

### 3.1 Aufbau von Neutronensternen und Zustandsgleichungen

Hamiltonian

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{j>i} v_{ij} + \sum_{k>j>i} V_{ijk} \quad (3.5)$$

gegeben ist. Dabei beschreibt  $v_{ij}$  die Zwei-Nukleonen-Wechselwirkung und  $V_{ijk}$  die Drei-Nukleonen-Wechselwirkung. In der Zwei-Nukleonen-Wechselwirkung werden Daten aus NN-Streuxperimenten einbezogen. Insbesondere ist der Pionenaustausch enthalten, der dem Yukawa-Potential entspricht. Modelle, die die Nijmegen Datenbank benutzen, werden „modern“ genannt. Es werden teilweise auch relativistische Korrekturen zur Zwei-Nukleonen-Wechselwirkung addiert. Der weit schwächere Term der Drei-Nukleonen-Wechselwirkung wird eingeführt, um die Eigenschaften gebundener Drei-Nukleonensysteme zu reproduzieren. Die Schrödinger-Gleichung des Hamiltonian (3.5) wird mit verschiedenen Verfahren gelöst (siehe z. B. [77], [22]) und liefert die gesuchte Zustandsgleichung. Ein Nachteil dieser Klasse von Zustandsgleichungen besteht darin, dass die Schallgeschwindigkeit  $v_S = \sqrt{dP/d\epsilon}$  die Lichtgeschwindigkeit übersteigen kann, was aus Gründen der Kausalität verboten ist.

Im Gegensatz zu diesen akausalen Zustandsgleichungen ist die andere Klasse von Zustandsgleichungen nach Konstruktion kausal, da sie im Rahmen einer relativistischen Mean-Field-Theorie abgeleitet werden. Den Ausgangspunkt bildet grundsätzlich eine Lagrange-Dichte, die alle beteiligten Teilchen und deren Wechselwirkungen enthält. Die daraus abgeleiteten Bewegungsgleichungen werden durch die Annahme eines Mean-Fields gelöst. Freie Parameter, wie zum Beispiel Kopplungskonstanten, bestimmt man durch die Anpassung an empirische Daten gewöhnlicher Kernmaterie wie Bindungsenergie und Kompressibilität. Dieser sehr elegante Formalismus wurde erstmals von Walecka im  $\sigma - \omega$ -Modell [139] angewendet und ist beispielsweise auch in Glendenning's Buch dargestellt [60]. Der Lagrangian dieses Modells

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{int} \quad (3.6)$$

setzt sich aus drei Einzeltermen für die Nukleonen, die Mesonen und deren Wechselwirkung zusammen. Insgesamt schreibt sich der Lagrangian als

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & \bar{\psi}_N(x)(i\cancel{\partial} - m)\psi_N(x) \\ & - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu(x)\omega^\mu(x) \\ & + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{1}{2}m_\sigma^2\phi^2(x) \\ & + g_\sigma\phi(x)\bar{\psi}_N(x)\psi_N(x) - g_\omega\omega_\mu\bar{\psi}_N(x)\gamma^\mu\psi_N(x) \end{aligned} \quad (3.7)$$

mit  $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\nu\omega_\mu(x) - \partial_\mu\omega_\nu(x)$ . Dabei repräsentiert  $\bar{\psi}_N(x)$  das Isospin-Dublett, das die Protonen und Neutronen beschreibt,  $\omega_\mu(x)$  das Vektor-Mesonen-Feld und  $\phi(x)$  das skalare Mesonen-Feld. Man identifiziert in der ersten Zeile den kinetischen Term und den Massenterm eines Dirac-Feldes. In der zweiten Zeile findet man den Feldstärke-Tensor und den Massenterm des  $\omega$ -Vektor-Mesons. Die nächste Zeile beschreibt ein skalares Feld, das  $\sigma$ -Meson. Die letzte Zeile enthält die Wechselwirkungen mit den Kopplungskonstanten  $g_\omega$  und  $g_\sigma$ .  $\gamma^\mu$  sind die  $\gamma$ -Matrizen, die auch den Feynman-Slash  $\cancel{\partial} = \gamma^\mu\partial_\mu$  definieren

### 3 Zustandsgleichungen

(siehe beliebiges Buch zur Quantenfeldtheorie z. B. [97]). Die Bewegungsgleichungen dieser Lagrange-Dichte werden mit Hilfe der Mean-Field-Näherung gelöst, indem man für die Felder  $\sigma$  und  $\omega_\mu$  deren Erwartungswert annimmt. Da man uniforme statische Materie annimmt, werden die Nukleonen durch Impuls-Eigenzustände beschrieben. Schließlich kann man nach einiger Rechenarbeit (siehe [60]) aus dem Energie-Impuls-Tensor der Quantenfeldtheorie die Zustandsgleichung ablesen.

Verfeinerte Modelle dieser Art berücksichtigen auch Selbstwechselwirkungen, Isospin-Kopplungen bzw. Wechselwirkungen des  $\rho$ -Vektor-Meson, Leptonen und Anregungen des gesamten Baryonen-Oktetts. Einen Lagrangian dieser Art findet man zum Beispiel in [141].

Diese relativistische Mean-Field-Theorie ist intrinsisch kausal, da Lorentz-invariant. Man könnte jedoch fragen, inwieweit eine speziell relativistische Theorie Materie bei starker Raumzeitkrümmung, wie sie in Neutronensternen vorliegt, korrekt beschreibt. Es zeigt sich jedoch, dass die Krümmung auf Skalen, die für die oben beschriebene Theorie relevant sind, vernachlässigbar klein ist (siehe [60], [140]).

Eine charakterisierende Eigenschaft von Zustandsgleichungen ist ihre sogenannte Steifheit, die angibt, wie sich der Druck mit der Energiedichte ändert. Diese Eigenschaft kann zum Beispiel durch die Schallgeschwindigkeit  $v_S = \sqrt{dP/d\epsilon}$  beschrieben werden. In diesem Zusammenhang spricht man auch von weichen (flacher Anstieg der Schallgeschwindigkeit) und harten (steiler Anstieg der Schallgeschwindigkeit) Zustandsgleichungen. Die Begriffe „weich“ und „hart“ behalten also ihre anschauliche Bedeutung. Eine weitere wichtige Größe, die die Steifheit einer Zustandsgleichung widerspiegelt, ist der dimensionslose Adiabaten-Index

$$\Gamma = \frac{n_B}{P} \frac{dP}{dn_B} = \frac{\epsilon + P/c^2}{P} \frac{dP}{d\epsilon}. \quad (3.8)$$

Der Adiabaten-Index ist mit dem Polytropen-Exponent identisch, der das Verhalten der analytischen Zustandsgleichung  $P = K\rho^\Gamma$  bestimmt (mit  $\rho = m_N n_B$  Ruhemassendichte). Diese sogenannten Polytropen wurden in früheren Rechnungen oft als Zustandsgleichung verwendet und finden auch teilweise heute noch aufgrund ihrer Einfachheit Anwendung. Der Adiabaten-Index und die Schallgeschwindigkeit einer in tabellierter Form vorliegenden Zustandsgleichung kann mit dem Programm gamma auf der beigefügten CD berechnet werden (siehe Abbildung 3.3).

Die für die Stabilität bzw. Bindung eines Neutronensterns entscheidende Wechselwirkung ist die Gravitation. Das Bild eines übergroßen Atomkerns, wie es oft in der populärwissenschaftlichen Literatur verwendet wird, ist demnach nicht korrekt. Die einzigen Ausnahmen bilden die von Witten [144] und Bodmer [25] postulierten Seltsamen Sterne, die als der absolute Grundzustand der Materie selbstgebundene Systeme darstellen. Diese Hypothese sowie andere mögliche Quarkphasen werden in Kapitel 7 diskutiert, ebenso wie die Beschreibung von Phasenübergängen.

### 3.2 Eigenschaften spezieller moderner Zustandsgleichungen

An dieser Stelle sollen einige moderne hadronische Zustandsgleichungen besprochen werden, für die im nächsten Kapitel Lösungen der Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen bestimmt werden. In Tabelle 3.1 ist eine Auswahl an verfügbaren Zustandsgleichungen aufgelistet. Die Tabelle ist nach Steifheit geordnet mit der weichesten Zustandsgleichung beginnend.

EOS	composition and model	reference
BPAL12	$npe\mu$ , effective nucleon energy functional	Bombaci et al. 1995
BGN1H1	$np\Sigma\Lambda\Xi e\mu$ , effective baryon energy functional	Balberg et al. 1999
BBB1	$npe\mu$ , Brueckner theory, Argonne NN plus Urbana NNN potentials	Baldo et al. 1997
FPS	$npe\mu$ , effective nucleon energy functional	Pandharipande and Ravenhall 1989
BGN2H1	$np\Sigma\Lambda\Xi e\mu$ , effective baryon energy functional	Balberg et al. 1999
BBB2	$npe\mu$ , Brueckner theory, Paris NN plus Urbana NNN potentials	Baldo et al. 1997
SLy	$npe\mu$ , effective nucleon energy functional	Douchin and Haensel 2001
BGN1	$npe\mu$ , effective baryon energy functional	Balberg et al. 1999
APR	$npe\mu$ , variational theory, Nijmegen NN plus Urbana NNN potentials	Akmal et al. 1998
BGN2	$npe\mu$ , effective nucleon energy functional	Balberg et al. 1999

Tabelle 3.1: Verschiedene Zustandsgleichungen geordnet nach Steifheit (aus [68]).

Die Zustandsgleichungen BPAL12 und BGN2 sollten bezüglich der Steifheit jeweils als Extremfall betrachtet werden [68]. Deshalb werden im folgenden die Zustandsgleichungen FPS, SLy4 und APR verwendet, deren Verlauf in Abbildung 3.2 dargestellt ist.

Die Zustandsgleichung FPS ist eine verbesserte Version der Zustandsgleichung von Friedman und Pandharipande [56], [109]. Die Zwei-Nukleonen-Wechselwirkung wird durch das Urbana  $UV_{14}$  Potential beschrieben zusammen mit einer phänomenologischen Drei-Nukleonen-Wechselwirkung. Für die FPS-Zustandsgleichung wurde ein Skyrme-Modell verwendet. Diese Zustandsgleichung für den Kern und die innere Kruste wird mit der Zustandsgleichung BPS für die äußere Kruste kombiniert.

### 3 Zustandsgleichungen

Auch die SLy4-Zustandsgleichung verwendet eine Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung des Skyrme-Typs. Es werden experimentelle Daten von besonders neutronenreichen Kernen verwendet. Auch diese Zustandsgleichung ist eine vereinigte Zustandsgleichung, die sowohl den Kern als auch die innere Kruste innerhalb desselben Modells beschreibt [47]. Als Zustandsgleichung für die äußere Kruste wird die von Haensel und Pichon verbesserte Version der BPS-Zustandsgleichung genutzt [67].

Für die APR-Zustandsgleichung werden variational chain summation Methoden verwendet, die in [2] vorgestellt werden. Die Zwei-Nukleonen-Wechselwirkung wird durch das Argonne  $v_{18}$  Potential beschrieben. Ebenso werden relativistische Korrekturen und Drei-Nukleonen-Wechselwirkungen (Urbana model IX) berücksichtigt [3]. In [3] werden verschiedene Stufen des Modells diskutiert. In der hier vorliegenden Arbeit soll ausschließlich das mit A18+ $\delta v$ +UIX\* bezeichnete Modell verwendet werden, das alle Korrekturen einschließt. Einzelheiten sind in [3] zu finden. Die äußere Kruste wird durch die verbesserte BPS-Zustandsgleichung [67] beschrieben, für die innere Kruste wird die SLy4-Zustandsgleichung benutzt.

Man erkennt in Abbildung 3.3, dass die Zustandsgleichung APR im Bereich hoher Dich-

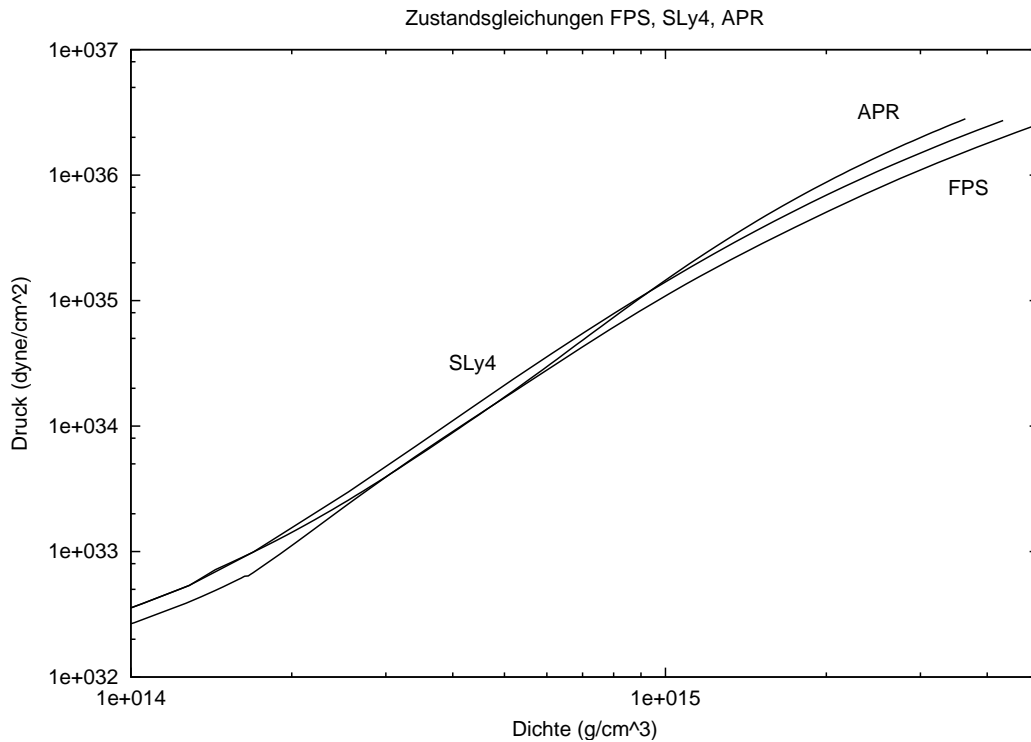


Abbildung 3.2: Die im folgenden benutzten Zustandsgleichungen FPS, SLy4 und APR.

ten (über  $7 \cdot 10^{14} \text{g/cm}^3$ ) die härteste Zustandsgleichung ist, die bei einer Dichte von  $1,8 \cdot 10^{15} \text{g/cm}^3$  akausal wird. Die Schallgeschwindigkeit der Zustandsgleichung SLy4



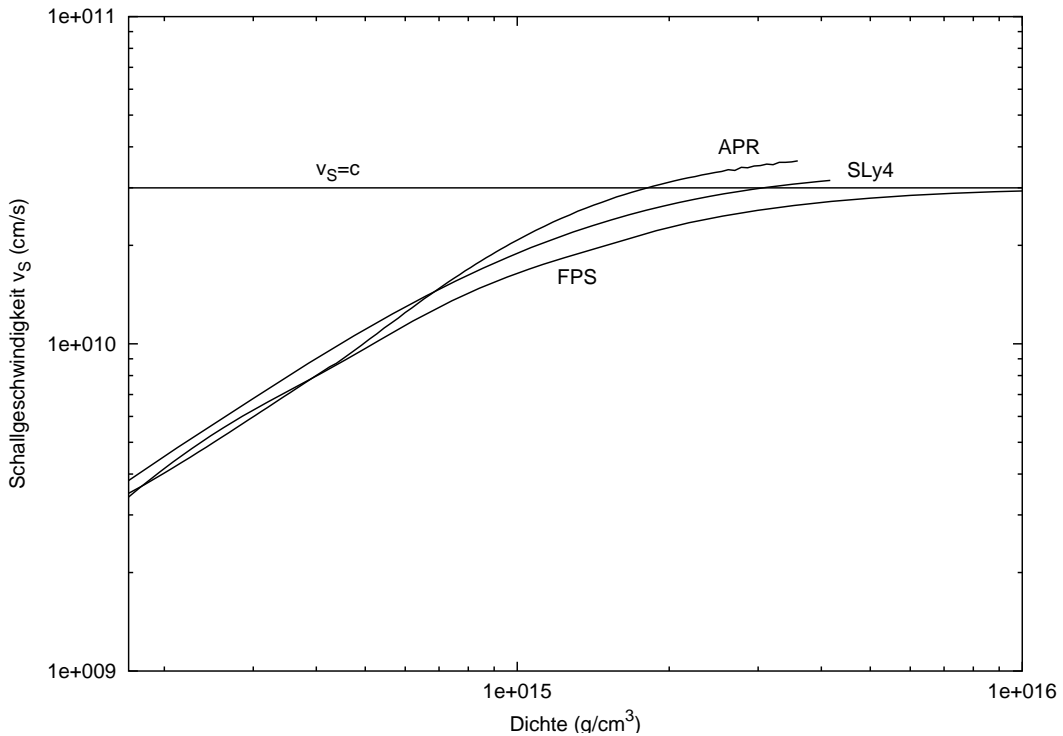


Abbildung 3.3: Schallgeschwindigkeit für die Zustandsgleichungen FPS, SLy4 und APR. Die Horizontale entspricht einer Schallgeschwindigkeit von  $3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$  (Lichtgeschwindigkeit). Oberhalb dieser Grenze werden die Zustandsgleichungen akausal.

überschreitet erst bei einer Dichte von  $3,1 \cdot 10^{15} \text{ g/cm}^3$  die Lichtgeschwindigkeit. Die weiche Zustandsgleichung FPS wird nicht akausal. All diese Zustandsgleichungen sind zum Beispiel im Software-Paket Lorene enthalten und unter [www.lorene.obspm.fr](http://www.lorene.obspm.fr) abrufbar. Wenn im folgenden von einer Zustandsgleichung FPS, SLy4 oder APR die Rede ist, so ist stets das eben beschriebene Modell inklusive der angegebenen Zustandsgleichung für die Kruste gemeint.

Beschreibungen weiterer Zustandsgleichungen finden sich beispielsweise in [111], [105] und den darin aufgeführten Referenzen oder auch in den Büchern von Weber [140] und Glendenning [60].

Eine analytische Darstellung von Zustandsgleichungen ist von großem Vorteil, da eine in tabellierter Form gegebene Zustandsgleichung interpoliert werden muss, was eventuell zu numerischen Problemen führt. Deshalb wurden in den letzten Jahren analytische Darstellungen von modernen Zustandsgleichungen entwickelt. In [70] werden die beiden vereinigten Zustandsgleichungen FPS und SLy4 auf verschiedene Weise analytisch repräsentiert, wobei bis zu 18 verschiedene Parameter angepaßt werden müssen. Der typische Interpolationsfehler für  $P(\epsilon)$  beträgt 1-2%. Außerdem wird eine thermodynamisch konsis-

### 3 Zustandsgleichungen

tente Darstellung der Zustandsgleichungen mit Hilfe der sogenannten Pseudo-Enthalpie (siehe Kapitel 6.1) angegeben, die sich besonders bei der Berechnung von rotierenden Konfigurationen als hilfreich erweist. Die typischen Fehler bewegen sich ebenfalls im Bereich von 1-2%. Einzelheiten dieser Modelle findet man in [70]. Programmcodes, die diese analytischen Funktionen enthalten, sind unter [www.ioffe.ru/astro/NSG/NSEOS/](http://www.ioffe.ru/astro/NSG/NSEOS/) erhältlich.

# 4 Eigenschaften langsam rotierender Neutronensterne

## 4.1 Vorbemerkungen und Numerik

Um die Eigenschaften langsam rotierender Neutronensterne zu bestimmen, müssen die in Kapitel 2 hergeleiteten Differentialgleichungen für  $P$ ,  $M$ ,  $\nu$  und  $\varpi$  mit den entsprechenden Randbedingungen gelöst werden. Mit der Definition  $z := \frac{d\varpi}{dr}$  ergibt sich das fünfdimensionale System erster Ordnung

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon \quad (4.1)$$

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{GM}{c^2 r^2} \left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{Mc^2}\right) \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \quad (4.2)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\epsilon}{r^2} \left(1 + \frac{P}{\epsilon c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{Mc^2}\right) \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \quad (4.3)$$

$$\frac{d\varpi}{dr} = z \quad (4.4)$$

$$\frac{dz}{dr} = -\frac{4}{r}z - \frac{1}{j(r)} \frac{dj}{dr} z - \frac{4}{rj(r)} \frac{dj}{dr} \varpi \quad (4.5)$$

mit  $j(r) = e^{-\nu} \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}$  und einer Zustandsgleichung  $\epsilon(P)$ . Die Lösung hat im Zentrum des Sterns  $r = 0$  und an dessen Oberfläche  $r = R$  die Randbedingungen

$$M(0) = 0 \quad (4.6)$$

$$e^{2\nu(R)} = 1 - \frac{2GM(R)}{c^2 R} \quad (4.7)$$

$$P(0) = P_C \quad (4.8)$$

$$z(0) = \frac{d\varpi(0)}{dr} = 0 \quad (4.9)$$

$$\varpi(R) = \Omega - \frac{2GI\Omega}{R^3 c^2} \quad (4.10)$$

zu erfüllen. Die Oberfläche ist durch  $P(R) = 0$  definiert. Aufgrund der besonderen Struktur dieser Gleichungen kann dieses System als Anfangswertproblem behandelt werden, denn die Gleichung für  $\nu'$  ist unabhängig von  $\nu$ . Daraus folgt, dass auch der Term  $\frac{1}{j(r)} \frac{dj}{dr}$

#### 4 Eigenschaften langsam rotierender Neutronensterne

unabhängig von  $\nu$  ist. Das bedeutet, alle rechten Seiten sind unabhängig von  $\nu$ . Außerdem ist die Gleichung zweiter Ordnung für  $\varpi$  (2.90) linear, so dass die Lösung mit einer Konstanten multipliziert werden kann. Man kann deshalb für die Funktionen  $\nu$  und  $\varpi$

$$\nu(r) = \nu_0 + \nu_1(r) \quad (4.11)$$

$$\varpi(r) = \varpi_0 \cdot \varpi_1(r) \quad (4.12)$$

mit den Konstanten  $\nu_0$  und  $\varpi_0$  ansetzen. Damit transformiert sich obiges Differentialgleichungssystem in eine Anfangswertaufgabe für  $M(r)$ ,  $\nu_1(r)$ ,  $P(r)$ ,  $\varpi_1(r)$  und  $\frac{d\varpi_1}{dr}$  mit den zusätzlichen beliebig gewählten Anfangsbedingungen  $\nu_1(0) = 0$  und  $\varpi_1(0) = 1$ . Außerdem folgt aus Bedingung (4.9)  $\frac{d\varpi_1(0)}{dr} = 0$ . Die Konstanten können nach dem Lösen dieses neuen Systems durch die Randbedingungen bestimmt werden. Man findet

$$\nu_0 = \ln \left( 1 - \frac{2GM(R)}{c^2 R} \right)^{\frac{1}{2}} - \nu_1(R) \quad (4.13)$$

$$\varpi_0 = \frac{1}{\varpi_1(R)} \left( \Omega - \frac{2GI\Omega}{c^2 R^3} \right), \quad (4.14)$$

dabei ist das Trägheitsmoment  $I$  nach der Integration bekannt (siehe Anhang B).

Obwohl die rechten Seiten der Gleichungen (4.2) und (4.3) im Punkt  $r = 0$  nicht definiert sind, kann man mit der l'Hospitalschen Regel zeigen, dass der Grenzwert  $r \rightarrow 0$  wohldefiniert ist und nicht divergiert. Man löst dieses Problem in der Praxis dadurch, dass man die Integration nicht exakt im Ursprung beginnt, sondern leicht daneben z. B. bei  $r = 0,1 \text{ cm}$ . Man integriert dann bis zur Oberfläche des Sterns ( $P(R) = 0$ ). Der Außenraum ist analytisch darstellbar durch globale Eigenschaften des Sterns (siehe Kapitel 2).

Zustandsgleichungen sind meist in Form einer Tabelle  $(\epsilon_i, P_i)$  gegeben. Für die Integration der Gleichungen (4.1) bis (4.5) muss deshalb ein Interpolationsverfahren genutzt werden, um die entsprechende Energiedichte  $\epsilon$  zu gegebenem Druck  $P$  berechnen zu können. Kubische Splines sind ein bewertes numerisches Interpolationsverfahren, das auch hier genutzt werden soll (siehe z. B. [84]). Bei vorgegebenen Daten sind die Spline-Funktionen eindeutig gegeben [126]. Weil die Datenpunkte einer Zustandsgleichung über mehrere Dekaden ungleichmäßig verteilt sind, kann es bei der Interpolation zu unphysikalischen Effekte kommen (Verletzung der Monotonität durch „Über- und Unterschwinger“). Deshalb sollten die mit Splines interpolierten Zustandsgleichungen mit den Programmen `splineplot`, `test_spline` oder `testall_spline` auf der beigefügten CD getestet werden. Augenscheinlich unphysikalische Effekte können behoben werden, indem man mit einem anderen Interpolationsverfahren (z. B. Splines der logarithmierten Daten) zusätzliche Stützstellen erzeugt oder direkt aus der Zustandsgleichung weitere Datenpunkte ableitet. Die Interpolation dieser Daten verlangt eine hohe Genauigkeit, weshalb in den Programmen, die das Anfangswertproblem lösen, eigens eine besonders exakte Spline-Interpolation implementiert wurde. Dieselbe Interpolation wurde in den obigen Test-Programmen verwendet.

Das Anfangswertproblem wird mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung gelöst [54], [126]. Um das Trägheitsmoment berechnen zu können, wird parallel zur Iteration des Anfangswertproblems eine Hilfsgröße  $\Sigma$  integriert, die nur von Variablen des Anfangswertproblems abhängt (siehe Anhang B). Damit kann die gefundene Lösung nach der Integration den Randbedingungen angepaßt werden. Dazu stehen die Programme `runsys_neu` und `runsys_neu_profil` auf der beigefügten CD zur Verfügung. Informationen zu den einzelnen Programmen sind ebenfalls auf der CD als `readme`-Dateien zu finden.

## 4.2 Ergebnisse, Interpretation, Beobachtung, Stabilität

Die Anfangsbedingungen (4.6) bis (4.10) enthalten zwei freie Parameter (Zentraldruck  $P_C$  und Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$ ). Oben wurde jedoch gezeigt, dass langsame Rotation die Struktur des Sterns nicht beeinflusst, insbesondere ist das Trägheitsmoment unabhängig von der Rotation. Aus diesem Grund bilden die Lösungen zu einer gegebenen Zustandsgleichung eine einparametrische Schar. Einzig die metrische Funktion  $\omega(r)$  ist von  $\Omega$  abhängig. Die Modelle können zum Beispiel mit dem Zentraldruck oder der Zentralsdichte parametrisiert werden. Im folgenden sollen die Lösungen für die Zustandsgleichungen FPS, SLy4 und APR besprochen werden.

In Abbildung 4.1 ist die Gesamtmasse über der Zentralsdichte dargestellt. Wie beispielsweise in [118] gezeigt wird, gibt es für statische bzw. langsam rotierende Neutronensterne ein Stabilitätslimit. Wird die Steigung  $\frac{dM}{dc} < 0$ , sind die Sterne nicht mehr stabil gegenüber radialen Oszillationen und kollabieren zu Schwarzen Löchern. In [102] und [40] wird durch eine Stabilitätsanalyse die Bestimmungsgleichung für die Schwingungsmoden hergeleitet, was schließlich zu einem Sturm-Liouville-Problem führt. Damit existiert für eine gegebene Zustandsgleichung eine maximal mögliche Masse und eine maximale Zentralsdichte. Die instabilen Lösungen sind in Abbildung 4.1 gestrichelt dargestellt. Man erkennt, dass die harte Zustandsgleichung APR mit  $2,19 M_\odot$  die höchste maximale Masse besitzt. Die weiche Zustandsgleichung FPS hat die niedrigste maximale Masse von  $1,80 M_\odot$ , erreicht aber die höchste Zentralsdichte von  $3,4 \cdot 10^{15} g/cm^3$ . Dieses Verhalten ist dahingehend verständlich, als dass es bei weichen Zustandsgleichungen leichter ist, die Dichte zu erhöhen, da der Druck nicht so stark der Verdichtung entgegenwirkt wie bei harten Zustandsgleichungen. Die Sterne zu weichen Zustandsgleichungen werden deshalb kompakter und erreichen somit keine hohen Massen. Die maximalen Massen von Neutronensternen sind gerade im Zusammenhang mit Schwarzen Löchern von Interesse. Denn entdeckt man in einem Doppelsternsystem ein dunkles kompaktes Objekt, das sich nur durch seine Gravitation auf den Begleitstern bemerkbar macht und dessen Masse die maximale Masse von Neutronensternen übersteigt, kann es sich dabei nur um ein Schwarzes Loch handeln. In diesem Sinne ist die Massen-Obergrenze von Neutronensternen wichtig für den experimentellen Nachweis von Schwarzen Löchern. Man erwartet für rotierende Sterne höhere Massen, weil die Zentrifugalkraft der Gravitation entgegenwirkt. Deshalb ist in diesem Zusammenhang eigentlich die maximale Masse der rotierenden Modelle von

#### 4 Eigenschaften langsam rotierender Neutronensterne

Interesse (siehe Kapitel 6.2). Auch dies ist als Motivation für die Lösung des vollen Problems zu sehen.

In Abbildung 3.3 wurde die Schallgeschwindigkeit über der Dichte für die drei Zustandsgleichungen FPS, SLy4 und APR dargestellt. Es zeigte sich, dass die Schallgeschwindigkeit der Zustandsgleichung APR bei einer Dichte von  $1,8 \cdot 10^{15} \text{ g/cm}^3$  die Lichtgeschwindigkeit überschreitet. Das bedeutet, dass einige stabile Konfigurationen dieses Modells im Innern durch eine akausale Zustandsgleichung beschrieben werden, was sicherlich unphysikalisch ist. Bei den anderen beiden Zustandsgleichungen ergibt sich dieses Problem nicht, da die Schallgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit nicht erreicht (FPS) bzw. erst bei Dichten, für die keine stabilen Lösungen existieren (SLy4).

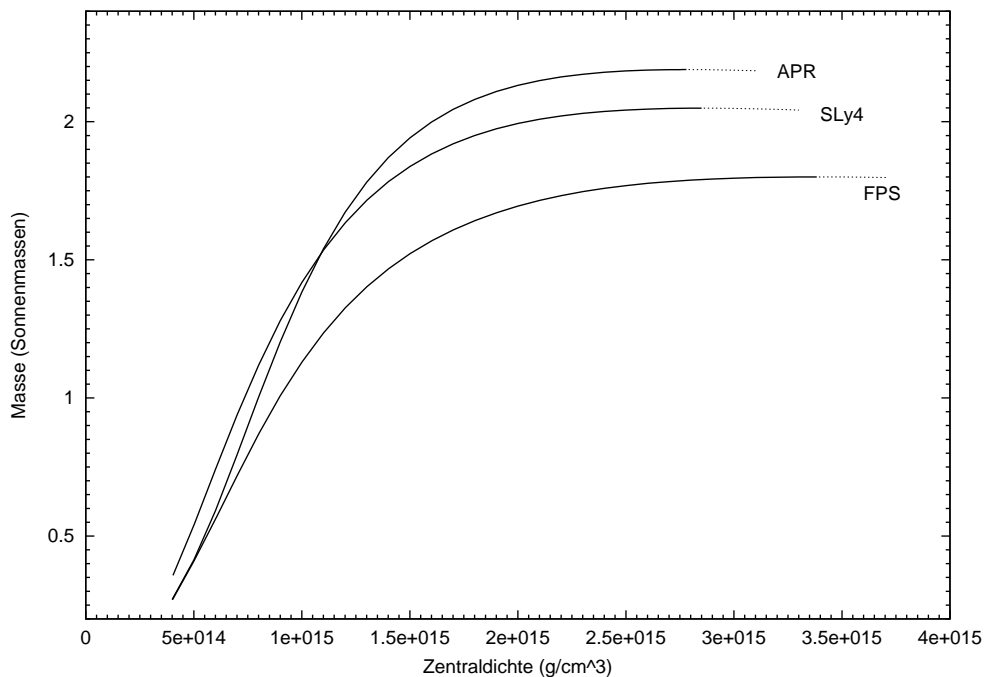


Abbildung 4.1: Masse über Zentraldichte für die Zustandsgleichungen APR, SLy4 und FPS. Instabile Lösungen sind gestrichelt eingezeichnet.

Es liegen verschiedenste Messungen der Massen von Neutronensternen vor. Zum einen haben viele Radiopulsare in Binärsystemen eine Masse im Bereich von 1,4 Sonnenmassen [135]. Die Masse kann mit hoher Genauigkeit durch relativistische Effekte in den Binärsystemen bestimmt werden (siehe z. B. [36]). Alle oben beschriebenen Zustandsgleichungen liefern Modelle in diesem Massenbereich, was deshalb keine Aussage über die wahre Zustandsgleichung erlaubt. Eine Einschränkung könnte sich erst durch die maximal beobachtete Masse ergeben. Manche Röntgenpulsare in Binärsystemen haben Massen im Bereich von 1,8 bis 1,9 Sonnenmassen. Die Messungen sind allerdings mit großen Fehlern

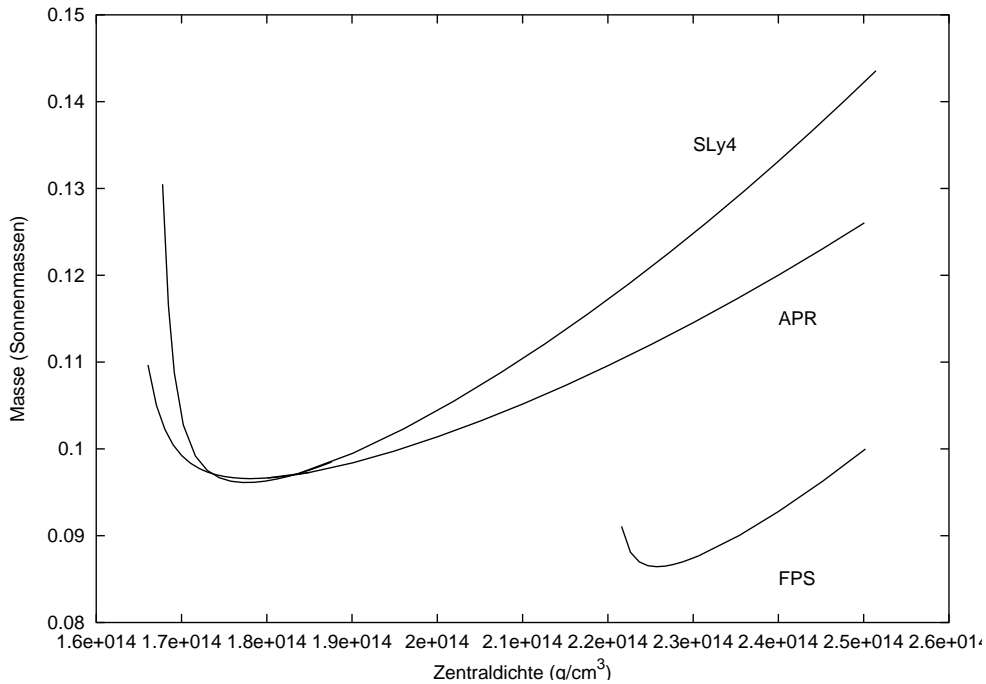


Abbildung 4.2: Masse über Zentraldichte für die Zustandsgleichungen APR, SLy4 und FPS. Lösungen links vom jeweiligen Minimum sind instabil.

behaftet (0,2 bis 0,4 Sonnenmassen) [88]. Außerdem wurde 2005 ein Radiopulsar in einem Binärsystem mit  $(2, 1 \pm 0, 2)$  Sonnenmassen und einer Rotationsperiode von 3,4 ms beobachtet [104]. Man kann also eine Tendenz zu höheren Massen und damit zu härteren Zustandsgleichungen feststellen. In Anbetracht der großen Fehler kann man jedoch zum jetzigen Zeitpunkt noch keine der drei vorgestellten Zustandsgleichungen ausschließen. Inwieweit ein mit 3,4 ms rotierender Neutronenstern noch als langsam rotierend betrachtet werden darf, soll in Kapitel 6.2 geklärt werden.

Das  $M-\epsilon_C$ -Diagramm für kleine Dichten ist in Abbildung 4.2 gezeigt. Auch hier ergibt das Stabilitätskriterium  $\frac{dM}{d\epsilon_C} > 0$  eine charakteristische minimale Masse für jede Zustandsgleichung. Damit sind alle Lösungen links von den gezeigten Minima instabil. Für diese Dichten existieren keine Neutronensterne. Für die beiden Zustandsgleichungen APR und SLy4 liegt die Masse bei ungefähr  $0.096 M_{\odot}$  verbunden mit einer Zentraldichte von  $1,78 \cdot 10^{14} g/cm^3$ . Die weichere Zustandsgleichung FPS erreicht eine minimale Masse von  $0,086 M_{\odot}$  bei einer Zentraldichte von  $2,26 \cdot 10^{14} g/cm^3$ .

Interessant ist besonders auch die Masse-Radius-Beziehung für verschiedene Zustandsgleichungen, denn die Zentraldichte ist nicht direkt beobachtbar. Die Masse-Radius-Beziehung dagegen verknüpft zwei im Prinzip beobachtbare Größen von Neutronensternen, auch wenn sich das in der Praxis als äußerst schwierig erweist [78], [36], [89], [88], [83]. Neutronensterne haben eine sogenannte inverse Masse-Radius-Beziehung, das

#### 4 Eigenschaften langsam rotierender Neutronensterne

bedeutet, mit zunehmender Masse wird der Durchmesser kleiner, wie man in Abbildung 4.3 sieht. Der Übersichtlichkeit halber sind nur die stabilen Lösungen für die drei Zustandsgleichungen FPS, SLy4 und APR gezeigt. Man erkennt ein für jede Zustandsgleichung charakteristisches Niveau im Bereich von 0,5 bis 1,5 Sonnenmassen, wo sich der Radius nur leicht verändert. Die weichste Zustandsgleichung, FPS, erreicht den geringsten Radius von 9 km, wohingegen der kleinstmögliche Radius der Zustandsgleichungen APR und SLy4 ungefähr 10 km beträgt. Deutlich sind auch wieder die Maximalmassen zu erkennen. Die instabilen Lösungen würden sich mit kleiner werdender Masse zu kleineren Radien bewegen. Für kleine Massen nehmen die Radien stark zu. Die Modelle mit minimaler Zentraldichte haben Radien von über 200 km.

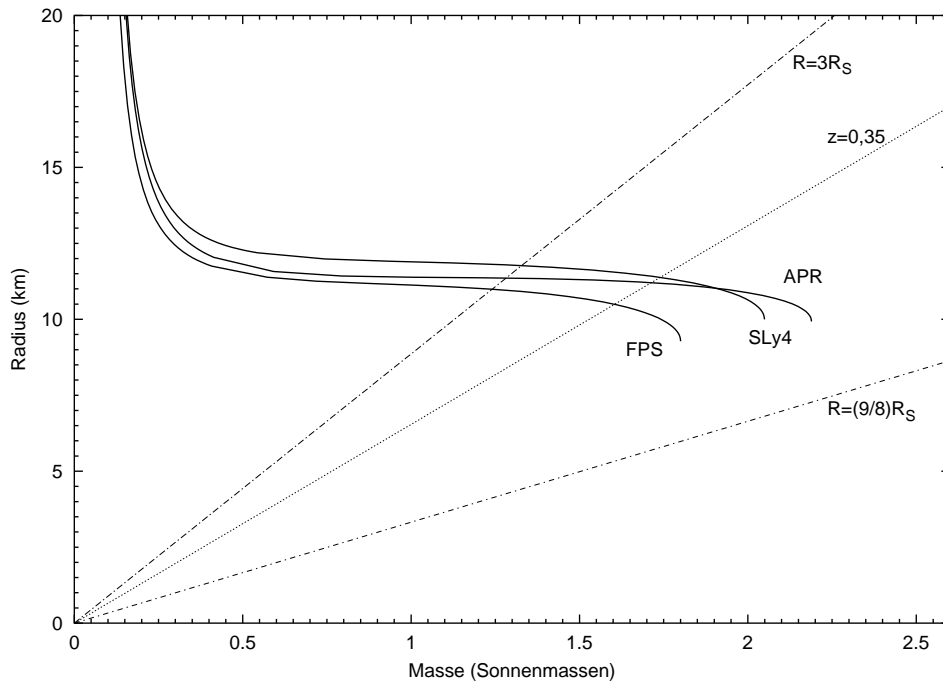


Abbildung 4.3: Masse-Radius-Beziehung für langsam rotierende Neutronensterne. Die eingezeichneten Geraden werden im Text erläutert.

Weiterhin sind in Abbildung 4.3 verschiedene Geraden eingezeichnet. Man kann zeigen, dass die Einstein-Gleichungen eine von der Zustandsgleichung unabhängig Beschränkung der Masse-Radius-Beziehung liefern [142]. Unter der Annahme einer beliebigen aber vom Zentrum her monoton fallenden Dichteverteilung  $\epsilon(r)$ , ergibt sich, dass für jede beliebige kugelsymmetrische Massenverteilung

$$\frac{MG}{c^2 R} < \frac{4}{9} \quad (4.15)$$



gelten muss, oder in Schwarzschildradien  $R_S = \frac{2GM}{c^2}$  ausgedrückt  $R > \frac{9}{8}R_S$ . Ist diese Bedingung nicht erfüllt, kollabiert die Massenverteilung unweigerlich zu einem Schwarzen Loch. Das Gebiet in der M-R-Ebene, das durch die Bedingung (4.15) verboten ist, befindet sich in Abbildung 4.3 unterhalb der mit  $R = (9/8)R_S$  bezeichneten Geraden. Man sieht, dass keine Zustandsgleichung dieses Kriterium verletzt.

Im Frühjahr des Jahres 2000 wurde mit dem XMM-Newton-Satellit das massearme Röntgen-Doppelsternsystem (LMXB) EXO 0748-676 beobachtet, und es wurden dabei 28 Röntgenstrahlenausbrüche detektiert. Cottam et al. analysierten das Röntgen-Spektrum dieser Ausbrüche und identifizierten rotverschobene Eisen- und Sauerstoff-Absorptionslinien [45]. Aus den Daten wurde eine Rotverschiebung von  $z = 0,35$  ermittelt. Die gravitative Rotverschiebung für die Schwarzschild-Metrik (2.60), die den Außenraum eines langsam rotierenden Sterns beschreibt, ist gegeben durch

$$z = \frac{\lambda_{\text{beobachtet}} - \lambda_{\text{emittiert}}}{\lambda_{\text{emittiert}}} = \left( \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}} \right)^{-1} - 1. \quad (4.16)$$

Diese Relation stellt deshalb unter der Voraussetzung, dass die Strahlung an der Oberfläche emittiert und ausschließlich durch Gravitation rotverschoben wird, eine Beziehung zwischen Masse und Radius her, nämlich aufgelöst

$$R(M) = \frac{2G}{c^2} \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 + 2z} M = 6,541 \text{ km} \frac{M}{M_\odot}. \quad (4.17)$$

Diese Gerade ist in Abbildung 4.3 ebenfalls geplottet. Wären die Massen des beobachteten LMXB bekannt, würde damit dessen Radius feststehen, und man könnte angeben, wo die wahre Masse-Radius-Beziehung die Gerade (4.17) schneiden muss. Damit könnte man also die Zustandsgleichung für kalte dichte Materie „messen“. Leider sind die Massen des LMXB nicht bekannt. Sollte EXO 0748-676 eine Masse von ungefähr  $1,4 M_\odot$  wie bei vielen Pulsare in Doppelsternsystemen beobachtet, verlangt dies einen relativ kleinen Radius und spricht für eine weiche Zustandsgleichung, wie beispielsweise die FPS, bzw. für einen Quarkstern (siehe Kapitel 7). Strohmayer et al. konnten in [130] die Rotationsfrequenz von EXO 0748-676 ableiten. Mit einer hohen Wahrscheinlichkeit beträgt sie 45 Hz, so dass die Rotation nur einen äußerst kleinen Effekt auf die Struktur des Neutronensterns hat, und die Näherungen aus Kapitel 2 gerechtfertigt sind. Dies wird sich in Kapitel 6.2 zeigen. Der Einfluss der Rotation auf die Breite der Spektrallinien wird in [41] diskutiert. In der Literatur werden noch weitere Messungen der Rotverschiebung durch Röntgenspektren diskutiert, deren Interpretation ist allerdings nicht eindeutig (z. B. in Tiengo et al. [133]  $z = 0,012_{-0,004}^{+0,002}$  oder  $z \sim 0,4$ ).

Die andere Gerade entspricht 3 Schwarzschildradien  $R_S = \frac{2GM}{c^2}$  für eine gegebene Masse  $M$ . Bei einer statischen kugelsymmetrischen Massenverteilung liegt dort die marginal stabile Bahn, innerhalb derer keine stabilen Kreisbahnen existieren (z. B. [102]). Der Unterschied zwischen Neutronensternen auf den beiden Seiten der Geraden besteht deshalb darin, dass Sterne rechts von  $R = 3R_S$  eine Lücke zwischen ihrer Oberfläche und einer möglichen Akkretionsscheibe haben. Dies ist bedeutsam für die Beobachtung von LMXBs, in deren Spektrum man kH Quasi Periodic Oscillations beobachtet [137].

#### 4 Eigenschaften langsam rotierender Neutronensterne

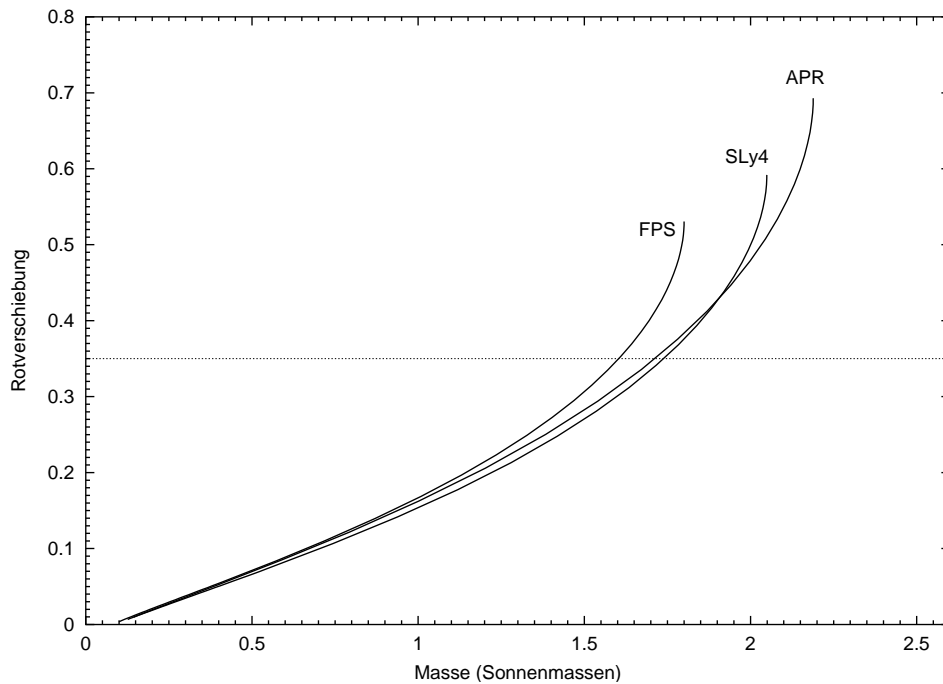


Abbildung 4.4: Rotverschiebung über Masse. Die horizontale Linie entspricht der von Cottam et al. [45] gemessenen Rotverschiebung von  $z=0,35$  bei EXO 0748-676.

Im Zusammenhang mit den oben erwähnten Rotverschiebungsmessungen kann man auch direkt die Rotverschiebung an der Oberfläche über der Masse darstellen. In Abbildung 4.4 ist dieses Diagramm gezeigt. Deutlich unterscheiden sich die drei gezeigten Zustandsgleichungen in der maximal erreichbaren Rotverschiebung. Die Messung einer hohen Rotverschiebung von über 0,55 würde demnach die weiche Zustandsgleichung FPS ausschließen. Im Bereich von 1,4 Sonnenmassen liegen die Diagramme sehr nahe beieinander, insbesondere die der Zustandsgleichungen APR und SLy4. In diesem Massenbereich liegen besonders exakte Messungen der Masse von Radiopulsaren in Binärsystemen vor. Für die Zukunft ist besonders Abbildung 4.5 interessant. Hier wird das Trägheitsmoment über der Masse gezeigt. Lyne et al. [93] identifizierten 2003/2004 ein Doppelpulsar-System bestehend aus einem 2,8-s-Pulsar und einem 23-ms-Pulsar in einer 2,4 h Umlaufbahn. Dieses System bietet exzellente Möglichkeiten, die Vorhersagen der Allgemeinen Relativitätstheorie zu testen, wie z. B. Gravitationswellenabstrahlung, Periastronverschiebung, Shapiro-Verzögerung (siehe [143]). Insbesondere wird es in einigen Jahren möglich sein, über die Spin-Bahn-Kopplung das Trägheitsmoment des schnelleren Pulsars auf ungefähr 10% genau zu messen [90], [103]. Die Spin-Bahn-Kopplung manifestiert sich in einem Zusatz zur Periastron-Drehung. Die Massen können aus den post-Keplerschen Parametern sehr genau abgeleitet werden (siehe z. B. [36]). Kramer et al. fanden  $M_A = 1,338 \pm 0,001 M_\odot$  für den Millisekunden-Pulsar und  $M_B = 1,249 \pm 0,001 M_\odot$

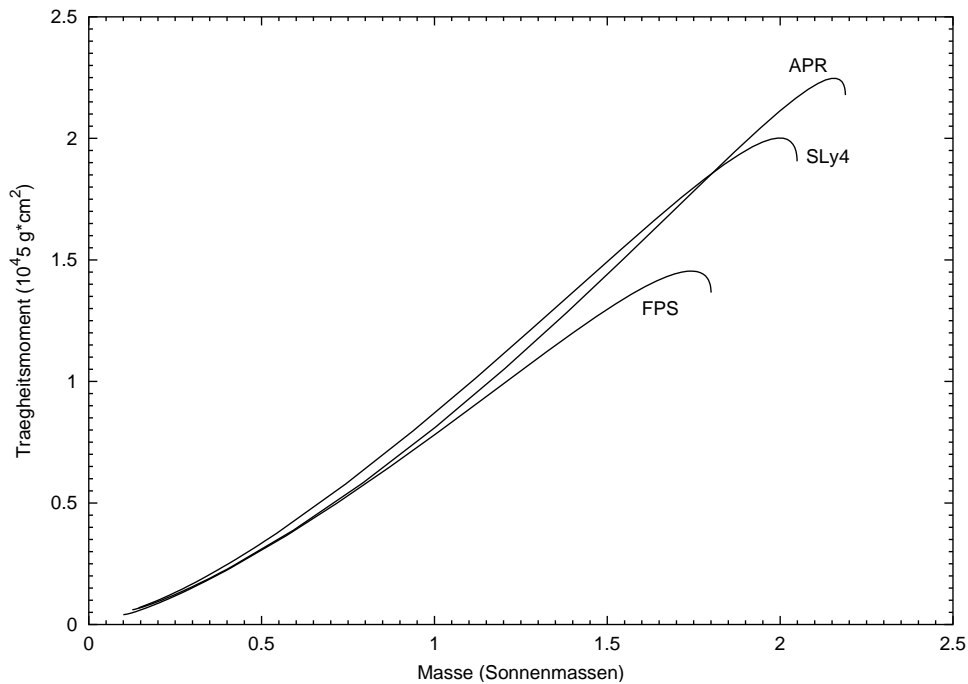


Abbildung 4.5: Das Trägheitsmoment langsam rotierender Neutronensterne für die Zustandsgleichungen FPS, SLy4 und APR.

für den mit 2,8 s rotierenden Pulsar [86]. In [86] sind auch die Keplerschen und post-Keplerschen Parameter aufgelistet. Wie man an Abbildung 4.5 sieht, würde eine Messung des Trägheitsmoment wesentliche Einschränkungen liefern, was die Zustandsgleichung betrifft. In [21] sind die Trägheitsmomente für eine große Auswahl an Zustandsgleichungen für die beiden Pulsarmassen dargestellt. Eine Messung würde demnach Aussagen zur Steifheit der gesuchten Zustandsgleichung erlauben. Im obigen Diagramm könnte bei dieser Genauigkeit zumindest bezüglich der Zustandsgleichungen FPS und SLy4 bzw. APR eine Entscheidung getroffen werden. Inwiefern der mit 23 ms rotierende Pulsar noch mit der Näherung für langsam rotierende Neutronensterne behandelt werden kann, wird sich in Kapitel 6.2 ergeben. Es wird sich zeigen, dass die Abweichungen äußerst gering sind. Somit könnte die Antwort auf die Frage nach der Zustandsgleichung von dichter kalter Materie näher rücken. Noch interessanter wären natürlich Messungen bei noch höheren Massen, da sich dort die Trägheitsmomente sehr deutlich unterscheiden. Insbesondere gibt es für jede Zustandsgleichung ein charakteristisches maximales Trägheitsmoment. Die Zustandsgleichung FPS erreicht nur  $1,45 \cdot 10^{45} \text{ g cm}^2$ , was sich deutlich vom maximalen Trägheitsmoment der Zustandsgleichung APR von  $2,25 \cdot 10^{45} \text{ g cm}^2$  unterscheidet. Auffallend ist auch, dass das maximale Trägheitsmoment nicht bei der maximalen Masse auftritt. Stattdessen nimmt das Trägheitsmoment für hohe Massen ab. Dieses Verhalten ist im Lichte der inversen Masse-Radius-Beziehung verständlich. Das „Abknicken“ des Trägheitsmoments bei hohen Massen entspricht in Abbildung 4.3 dem starken Abfall des

Radius bei hohen Massen jenseits des Bereichs mit annähernd konstantem Radius. Eine weitere Möglichkeit das Trägheitsmoment von Neutronensternen abzuschätzen, besteht in der Analyse des Krebs-Nebels M 1 (siehe Abbildung 1.1). Der Krebs-Nebel ist der Überrest einer im Jahre 1054 n. Chr. explodierten Supernova. Neben den Filamenten des Überrestes ist auch der Neutronenstern im Zentrum in einem weiten Bereich des elektromagnetischen Spektrums u. a. im Radiobereich beobachtbar, woraus dessen Rotationsperiode (33 ms) und deren Abbremsung bestimmt werden kann. Die Abnahme der Rotationsenergie hängt von der Rotationsperiode, der Abbremsung und dem Trägheitsmoment ab. Unter der Annahme, dass die abgestrahlte Energie die Bewegung des Nebels verursacht, kann man damit auf das Trägheitsmoment rückschließen. Voraussetzung ist eine Abschätzung der Masse des Nebels, was nur sehr ungenau möglich ist. Bejger et al. [19] nutzen die Ergebnisse von Fesen et al. [55] von  $M_{Nebel} = 4,6 M_{\odot}$ , was zu einem relativ hohen Trägheitsmoment des „Crab-Pulsars“ von  $1,93 \cdot 10^{45} g cm^2$  führt, und damit für harte Zustandsgleichungen, wie beispielsweise die APR, spricht. Für die obere Grenze von  $M_{Nebel} = 6,4 M_{\odot}$  ergibt sich sogar ein Trägheitsmoment von  $2,68 \cdot 10^{45} g cm^2$ . In Anbetracht der großen Fehler sind die Ergebnisse jedoch nicht sehr aussagekräftig.

Alle oben gezeigten Resultate sind konsistent mit den Ergebnissen anderer Autoren (z. B. [47]). Die Genauigkeit des numerischen Verfahrens kann abgeschätzt werden, indem man die Rechnungen mit verschiedener Feinheit (Schrittweite) laufen lässt. Die obigen Diagramme wurden mit einer Feinheit des Runge-Kutta-Verfahrens von 1 cm errechnet. Als Startradius, der ungleich null sein muss (siehe Kapitel 4.1), wurde 1 mm gewählt. Bei einer Feinheit von 5 cm sind keine Unterschiede zu erkennen, was die Konvergenz des Verfahrens zeigt.

Es könnten noch eine Reihe anderer Messungen und Beobachtungen besprochen werden, die alle eine gewisse Aussagekraft bezüglich der Eigenschaften von Neutronensternen haben, und damit die Zustandsgleichungen einschränken. Dabei werden verschiedenste Möglichkeiten genutzt, Neutronensterne zu beobachten, denn als Neutronensterne identifiziert man Radiopulsare, akkretierende Röntgenpulsare, X-ray Burster, anomale Röntgenpulsare, thermisch schwach strahlende Objekte oder „unsichtbare“ kompakte Objekte, deren Gravitation auf ein anderes Objekt wirkt. Für die Beschreibung einzelner Methoden bzw. einen Überblick über die verschiedenen Verfahren stehen viele Veröffentlichungen zur Verfügung z. B. [88], [76], [36], [83], [89], [140], [60] und [78].

Mit dem Programm `runsys_neu_profil` (auf der beigefügten CD) können die einzelnen Werte der Lösung des Systems (4.1)-(4.5) bei jedem Iterationsschritt gespeichert werden. Somit kann man das Profil eines Sternes erzeugen. In Abbildung 4.6 sind die Druck-Profile der drei Zustandsgleichungen FPS, SLy4 und APR gezeigt, einmal für einen Stern mit 1,4 Sonnenmassen und einmal für einen Stern mit 2,0 Sonnenmassen. Man beachte, dass es für die Zustandsgleichung FPS keinen Stern mit 2,0 Sonnenmassen gibt, da die maximale Masse von Neutronensternen für diese Zustandsgleichung bei ungefähr 1,8 Sonnenmassen liegt. In dieser Abbildung spiegelt sich das über die Steifheit der Zustandsgleichungen Gesagte wieder. Die Zustandsgleichung SLy4 ist für hohe Dichten (wie bei einem 2,0-Sonnenmassen-Stern) weicher als die Zustandsgleichung APR und erreicht deshalb im

Zentrum einen höheren Druck, sie ist kompressibler. Für den Stern mit 1,4 Sonnenmassen ist der Zentraldruck niedriger, so dass in diesem Bereich die Zustandsgleichung APR weicher als die Zustandsgleichung SLy4 ist (siehe Abbildung 3.3). Noch weicher als diese zwei Zustandsgleichungen ist die Zustandsgleichung FPS, die auch einen deutlich höheren Zentraldruck erreicht, weil sich die Materie am leichtesten verdichten lässt. In Abbildung

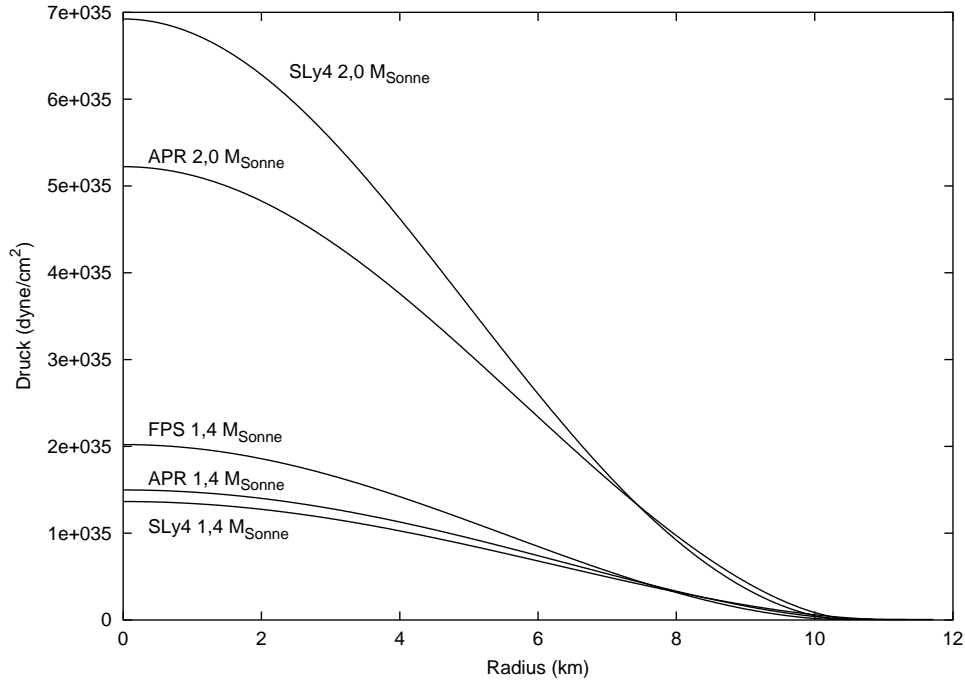


Abbildung 4.6: Der Verlauf des Drucks in einem 1,4 und einem 2,0 Sonnenmassen schweren Neutronenstern für die drei Zustandsgleichungen FPS, SLy4 und APR.

4.7 ist für die gleichen Sterne der Dichte-Verlauf gezeigt. Die Abfolge der Zentraldichten entspricht wieder der Steifheit der Zustandsgleichungen. Deutlich erkennt man die Kernregion der Neutronensterne, die sich bis zu einem Radius von ungefähr 10 km erstreckt. In diesem Bereich nimmt die Dichte im Vergleich zur Kruste nur verhältnismäßig leicht ab.

Abbildung 4.8 stellt einen Ausschnitt des Dichte-Profiles für die beiden Neutronensterne der Zustandsgleichung APR dar. Weiterhin sind in dieser Abbildung die in Kapitel 3.1 besprochenen Übergangsdichten eingetragen. Auf der linken Seite ist noch ein Teil des Kerns mit leicht abnehmendem Dichte-Verlauf zu erkennen. Bei einer Dichte von  $1,7 \cdot 10^{14} g/cm^3$  identifiziert man ein charakteristisches Abknicken des Dichte-Profiles, was den Übergang zur inneren Kruste markiert. Ebenfalls deutlich zu sehen ist der Übergang zur äußeren Kruste bei der neutron drip Dichte von  $4,3 \cdot 10^{11} g/cm^3$ . Diese Abbildungen rechtfertigten die in Kapitel 3.1 beschriebene Einteilung der Sterne in verschiedene Re-

#### 4 Eigenschaften langsam rotierender Neutronensterne

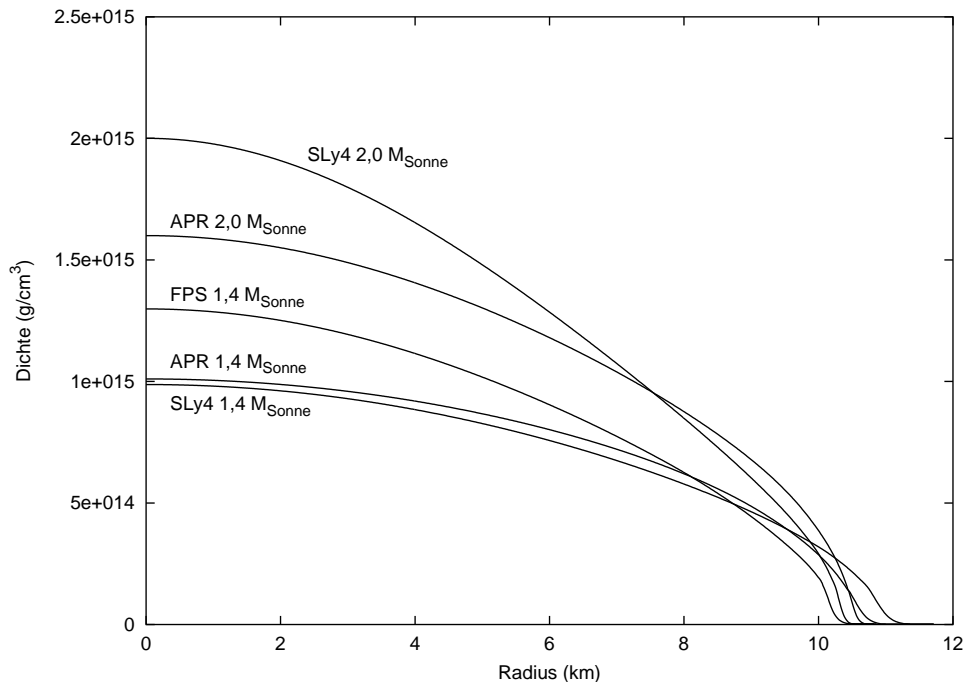


Abbildung 4.7: Der Verlauf der Dichte in einem 1,4 und einem 2,0 Sonnenmassen schweren Neutronenstern für die drei Zustandsgleichungen FPS, SLy4 und APR.

gionen. Der unterschiedliche Verlauf der Dichte in der Kruste für die beiden verschiedenen schweren Sterne ist ebenfalls verständlich. Der Stern mit der höheren Zentraldichte (2,0 Sonnenmassen) besitzt einen kompakteren Kern, das heißt eine höhere Kernmasse bei entsprechendem Radius. Dies sorgt dafür, dass die Kruste stärker gebunden und somit verdichtet wird, und erklärt den steileren Verlauf des Dichte-Profiles dieses Sterns. Damit wird auch die inverse Masse-Radius-Beziehung anschaulich klar.

Ebenso wie die thermodynamischen Größen kann man natürlich auch den Verlauf der metrischen Funktionen darstellen. Gerade die Größe des frame-dragging-Effekts, der erst in einer allgemein relativistischen Behandlung auftritt, ist dabei von Interesse. Wie sich aus den obigen Gleichungen ergibt, ist die Differenz der Winkelgeschwindigkeiten  $\varpi(r)$  nur bis auf eine Konstante bestimmt. Diese Konstante errechnet sich aus der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  des Sterns beobachtet im Unendlichen (siehe Gleichung (4.14)). Unter [www.atnf.csiro.au/research/pulsar/psrcat/](http://www.atnf.csiro.au/research/pulsar/psrcat/) stehen die Daten von über 1500 Pulsar-Beobachtungen zur Verfügung. Wie man in Abbildung 4.9 sieht, kann man im Wesentlichen zwei Gruppen von Pulsar-Beobachtungen unterscheiden. Die Mehrzahl der beobachteten Pulsare gruppiert sich bei einer Rotationsperiode von 1 s. Eine kleinere Anzahl befindet sich im Bereich von einigen Millisekunden, die sogenannten Millisekunden-Pulsare. Aus diesem Grund wird die Winkelgeschwindigkeit  $\Omega = 2\pi \cdot 1/\text{s}$  gewählt. Abbildung (4.10) zeigt die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  des Lokalen Inertialsystems für einen Neutronenstern mit 1,4 Sonnenmassen. Dabei wurde die Zustandsgleichung SLy4 gewählt. Der

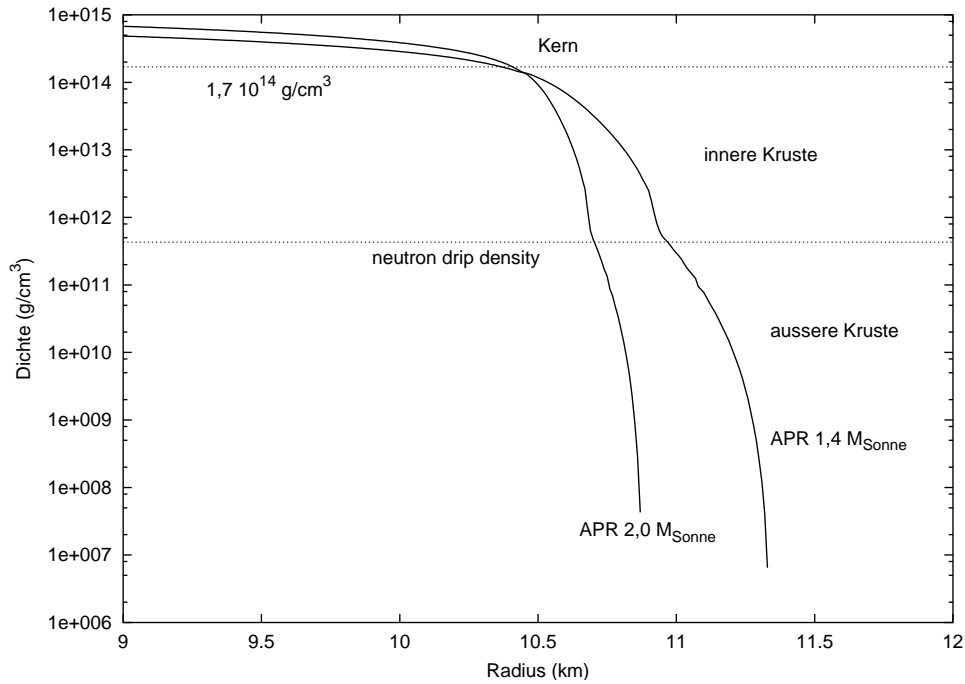


Abbildung 4.8: Der Dichte-Verlauf in der Kruste für die Zustandsgleichung APR. Gezeigt ist ein Stern mit 1,4 Sonnenmassen und ein Stern mit 2,0 Sonnenmassen. Außerdem sind die in Kapitel 3.1 angegebenen Übergangsdichten eingetragen.

Stern hat einen Radius von 11,72 km und ein Trägheitsmoment von  $1,37 \cdot 10^{45} \text{ g cm}^2$ . Das Iterationsverfahren liefert für  $\varpi_1(R) = 1,588 \text{ 1/s}$  und damit ergibt sich nach (4.14)  $\varpi_0 = 2\pi \cdot 0,550 \text{ 1/s}$ . Aus Abbildung 4.10 wird ersichtlich, dass das frame-dragging bei Neutronensternen nicht zu vernachlässigen ist. Die Winkelgeschwindigkeit des Lokalen Inertialsystems im Zentrum des Sterns beträgt  $2\pi \cdot 0,45 \text{ 1/s}$  und damit 45 % der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$ . An der Oberfläche des Sterns beträgt die Winkelgeschwindigkeit immerhin noch  $0,79 \text{ 1/s}$ , was 12,6 % der beobachteten Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  entspricht. Dies bedeutet, auch an der Oberfläche ist der Effekt des frame-draggings noch vorhanden. Außerdem ist in Abbildung 4.10 der Verlauf der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  im Außenraum des Sterns dargestellt, der analytisch gegeben ist durch  $\omega(r) = \frac{2GI\Omega}{c^2 r^3}$ . Die beiden metrischen Funktionen  $e^{2\nu(r)}$  und  $e^{-2\lambda(r)}$  für diesen Stern werden in Abbildung 4.11 gezeigt. Es wird der Kehrwert von  $e^{2\lambda}$  dargestellt, um zu sehen, wie sich die beiden metrischen Funktionen im Außenraum vereinigen. Gut erkennt man, wie sich die beiden metrischen Funktionen stetig an die Außenraumlösung  $e^{2\nu(r)} = e^{-2\lambda(r)} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$  anschließen.

#### 4 Eigenschaften langsam rotierender Neutronensterne

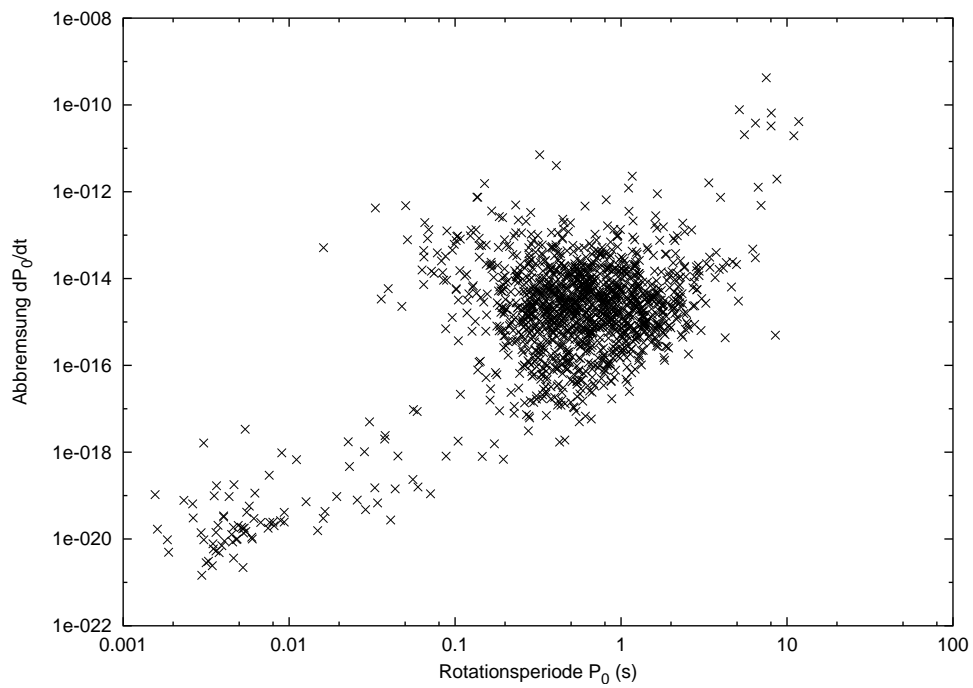


Abbildung 4.9: Die Rotationsperiode und deren Abbremsung aus über 1500 Pulsar-Beobachtungen. Dieses Diagramm wurde mit Daten erzeugt, die unter [www.atnf.csiro.au/research/pulsar/psrcat/](http://www.atnf.csiro.au/research/pulsar/psrcat/) erhältlich sind.



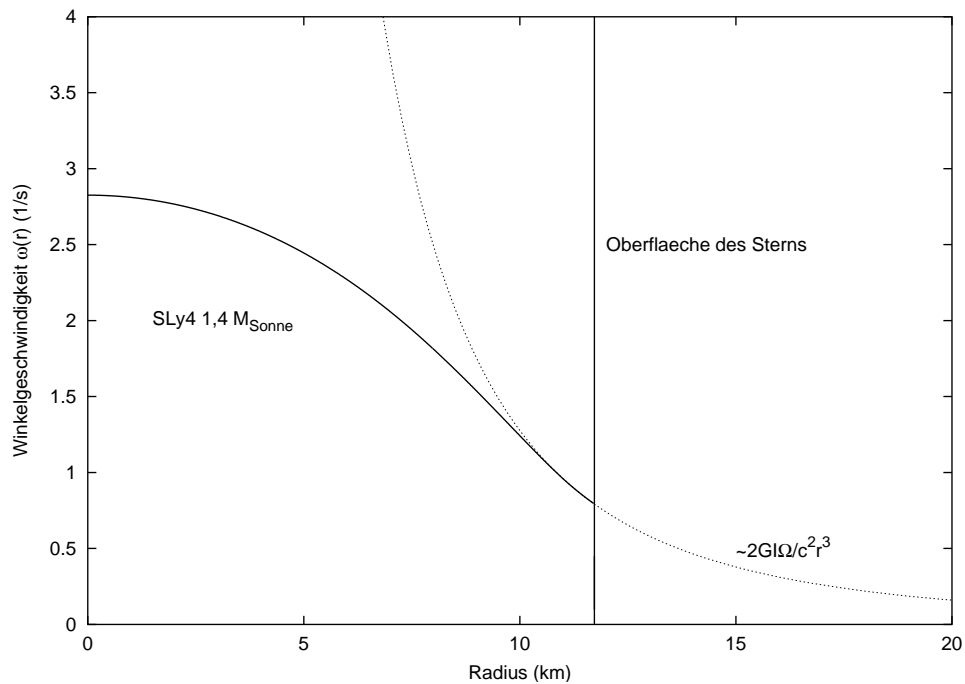


Abbildung 4.10: Die metrische Funktion  $\omega$  beschreibt das frame-dragging. Gezeigt ist der Verlauf von  $\omega(r)$  für einen 1,4-Sonnenmassen-Stern der Zustandsgleichung SLy4. Die im Unendlichen beobachtete Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  des Sterns beträgt  $2\pi \cdot 1/s$ . Die numerische Lösung geht an der Oberfläche des Sterns in die analytische Lösung über.

#### 4 Eigenschaften langsam rotierender Neutronensterne

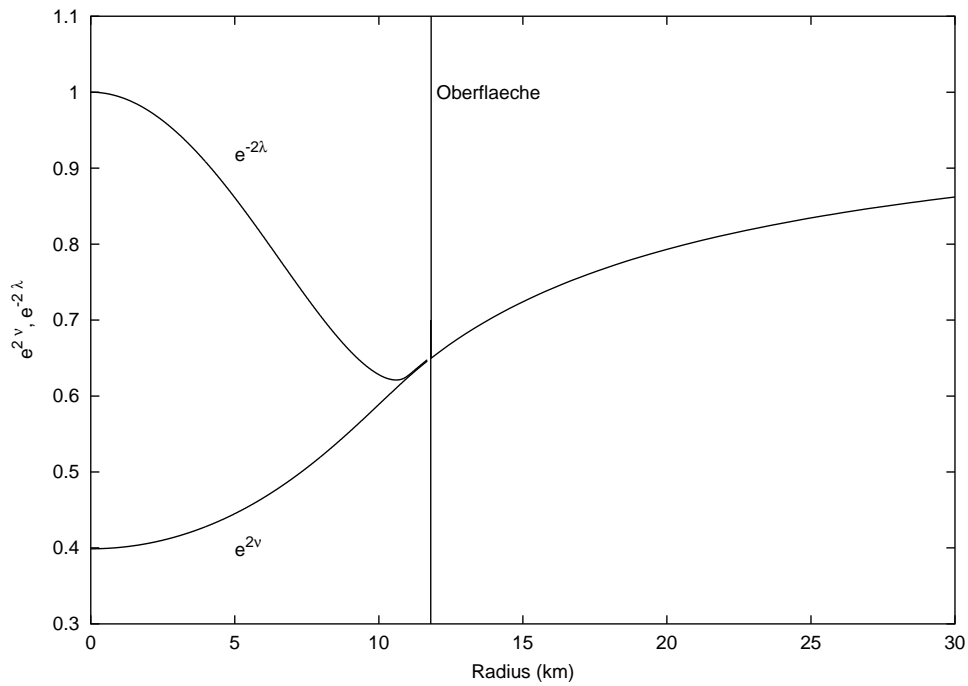


Abbildung 4.11: Darstellung der metrischen Funktionen  $e^{2\nu}$  und  $e^{2\lambda}$  eines 1,4-Sonnenmassen-Sterns der Zustandsgleichung SLy4. Außerhalb des Sterns ist die analytische Lösung dargestellt, die sich aus der Schwarzschild-Metrik ergibt.

## 5 Stellare Strukturgleichungen

In den vorherigen Kapiteln wurden ausschließlich langsam rotierende Neutronensterne behandelt. Wie man jedoch in Abbildung 4.9 sieht, rotieren einige Pulsare mit Perioden von wenigen Millisekunden. Um zu entscheiden, welche Sterne mit der oben abgeleiteten Näherungsmethode behandelt werden dürfen, müssen allgemeine stellare Strukturgleichungen hergeleitet werden, mit denen man Eigenschaften von beliebig schnell rotierenden Sternen berechnen kann. Mit der Lösung des vollen Problems kann man dann unter anderem durch Vergleich den Gültigkeitsbereich der Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen erschließen und angeben, was tatsächlich unter „langsam“ rotierend zu verstehen ist. Es wird wieder angenommen, dass das Gravitationsfeld von einer achsensymmetrischen und stationären Metrik beschrieben wird.

Zur Herleitung der stellaren Strukturgleichungen wird der sogenannte 3+1-Split verwendet. Aus diesem Grund wird im ersten Abschnitt dieses Kapitels diese Methode, die Einstein-Gleichungen zu berechnen, vorgestellt. Im nächsten Abschnitt sollen dann die stellaren Strukturgleichungen abgeleitet werden. In den darauffolgenden Unterkapiteln wird gezeigt, wie sich diese Gleichungen auf die Gleichungen der langsamen Rotation reduzieren, und dass diese Gleichungen äquivalent zu anderen Varianten von stellaren Strukturgleichungen sind.

### 5.1 3+1-Split

Der 3+1-Split stellt den Versuch dar, die Allgemeine Relativitätstheorie als Anfangswertproblem zu formulieren mit der Absicht, die Einstein-Gleichungen numerisch besser lösen zu können. Dabei ergeben sich im strukturellen Aufbau dieses Formalismus Ähnlichkeiten mit der Hamiltonschen Mechanik und der Elektrodynamik. Der 3+1-Split wird auch ADM-Formalismus genannt nach Arnowitt, Deser und Misner [9].

In Walds Buch [138] wird beschrieben, unter welchen Bedingungen eine Theorie als Anfangswertproblem beschrieben werden kann. Dort wird auch gezeigt, dass dies für die Allgemeine Relativitätstheorie möglich ist. Im Allgemeinen sucht man eine Form der entsprechenden Gleichungen derart, dass die zweite partielle Zeit-Ableitung einer dynamischen Variablen durch eine Funktion der zweiten räumlichen Ableitungen, der ersten Ableitungen und der Variablen selbst gegeben ist. Dabei sind besondere Anforderungen an diese Funktion zu stellen. Es ergibt sich jedoch das Problem, dass nicht alle Komponenten der Einsteinschen Feldgleichungen zweite Zeit-Ableitungen enthalten [142]. Diese Komponenten müssen jedoch trotzdem erfüllt sein. Hier ergibt sich die Analogie zur

## 5 Stellare Strukturgleichungen

Elektrodynamik, denn auch dort ergeben sich sogenannte constraint-Gleichungen (im Vakuum  $\nabla \cdot E = 0$  und  $\nabla \cdot B = 0$ ). Dieses Verhalten ist typisch für Theorien mit Eichfreiheitsgraden. Die constraint-Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie sind durch die Komponenten  $G_{00}$  und  $G_{0i}$  der Feldgleichungen gegeben. Man beachte, dass  $G_{\mu\nu}$  symmetrisch ist. Es verbleiben 6 Evolutionsgleichungen, entsprechend den 6 räumlichen Komponenten der Feldgleichungen.

Für die konkrete Formulierung des Anfangswertproblems der Allgemeinen Relativitätstheorie wird die Raumzeit in raumartige Hyperflächen mit konstanter (Koordinaten-)Zeit  $t$  zerlegt (siehe Abbildung 5.1). Diese Aufspaltung der Raumzeit erklärt den Namen 3+1-Split. Dabei sind die einzelnen Hyperflächen (auch Zeit-Schnitte genannt) mit den räumlichen Koordinaten  $x^1$ ,  $x^2$  und  $x^3$  eindeutig einem bestimmten Wert  $t$  zugeordnet. Die Zeit wird jetzt wie in der Klassischen Mechanik als Parameter verwendet. Dies läßt schon die Struktur eines Anfangswertproblems erkennen, indem man sich in der Zeit von einer Hyperfläche zur nächsten bewegt. In Abbildung 5.1 sind zwei benachbarte Punkte A und B einer Raumzeit dargestellt, die sich in zwei benachbarten Hyperflächen befinden. Die Raumzeit wird durch die 4-Metrik

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt) \quad (5.1)$$

beschrieben. Betrachtet man zwei benachbarte Punkte C und B, die sich auf derselben Hyperfläche befinden, so sieht man, dass die 4-Metrik (5.1) eine 3-Metrik der Hyperfläche induziert. Diese 3-Metrik entspricht dem räumlichen Anteil  $\gamma_{ij}$  der 4-Metrik, wobei  $t=\text{const.}$  einzusetzen ist. Der Übergang von der einen Hyperfläche zur anderen wird durch die sogenannte Lapse-Funktion oder auch Rotverschiebungsfunktion  $\alpha$  vermittelt. Diese gibt die Eigenzeit eines Beobachters (Eulerscher Beobachter) an, der sich entlang des zeitartigen 4-Normalen-Vektors  $\mathbf{n}$  der Hyperfläche von der einen zur anderen Hyperfläche bewegt.  $\beta^i$  schließlich ist der sogenannte Verschiebungs- oder Shift-Vektor. Dieser 3-Vektor beschreibt die Verschiebung der räumlichen Koordinaten von Schnitt zu Schnitt. Man kann die Größen  $\alpha$  und  $\beta^i$  als Variablen betrachten, die die zeitliche Entwicklung der Koordinaten angeben. Der Shift-Vektor  $\beta^i$  ist eine 3-Geschwindigkeit der räumlichen Koordinaten gegenüber dem Eulerschen Beobachter bzw. umgekehrt ist  $-\beta^i$  die 3-Geschwindigkeit des Eulerschen Beobachters im Koordinatensystem. Man kann zeigen, dass der zur Form  $dt$  duale Vektor  $\mathbf{t}$  sich schreibt als  $\mathbf{t} = \partial_t = \alpha \mathbf{n} + \boldsymbol{\beta}$ , dabei wird  $\mathbf{t}$  oftmals als „Fluß der Zeit“ interpretiert [16], [66], [36], [134], [125], [138]. In all diesen Referenzen, die sich auf den gesamten Abschnitt beziehen, findet man weitere Erklärungen und Hinweise zum 3+1-Split.

Als dynamische Variable des Anfangswertproblems wählt man nun die 3-Metrik der Hyperfläche  $\gamma_{ij}$ , die 6 unabhängige Komponenten besitzt (Symmetrie). Die äußere Krümmung  $K_{ij}$  einer Hyperfläche ist definiert als

$$K_{ij} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\mathbf{n}} \gamma_{ij} = \frac{1}{2\alpha} (\mathcal{L}_{\boldsymbol{\beta}} \gamma_{ij} - \mathcal{L}_{\mathbf{t}} \gamma_{ij}) = \frac{1}{2\alpha} (\beta_{i;j} + \beta_{j;i} - \partial_t \gamma_{ij}) \quad (5.2)$$

mit der Lie-Ableitung  $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$  der 3-Metrik entlang des Vektor  $\mathbf{n}$ , dabei wurde die obige Zerlegung und die Definition der Lie-Ableitung genutzt. Durch die äußere Krümmung

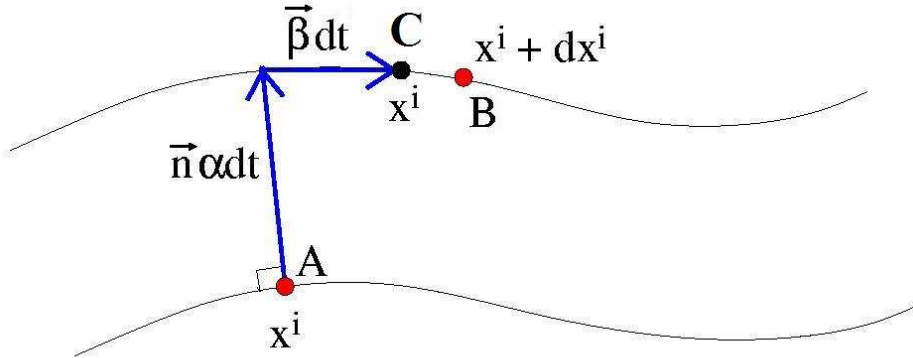


Abbildung 5.1: Konstruktion der Hyperflächen  $t=\text{const.}$  im 3+1-Split mit Normalenvektor und Verschiebungsvektor (Abbildung aus [119]).

wird die Einbettung der Hyperfläche im höher-dimensionalen Raum beschrieben und man kann sie als „Zeit-Ableitung“ der 3-Metrik interpretieren [138], [125]. Analog zur Hamiltonschen Mechanik wählt man die äußere Krümmung als zur 3-Metrik konjugierte Variable. Schreibt man nun die Einsteinschen Feldgleichungen in diesen Variablen [36], [66], [49], ergeben sich 4 constraint-Gleichungen und 6 Evolutionsgleichungen. Die constraint-Gleichungen

$$-8\pi T_{0i} = D_i K^j_j - D_j K^j_i \quad (5.3)$$

$$16\pi T_{00} = \bar{R} + [Tr(K)]^2 - Tr(K^2) \quad (5.4)$$

beziehungsweise

$$R_{00} = \frac{1}{\alpha} \bar{\Delta} \alpha + \frac{1}{\alpha} (\partial_t - \mathcal{L}_\beta) Tr(\mathbf{K}) - Tr(\mathbf{K}^2) \quad (5.5)$$

ergeben sich aus den  $G_{0\mu}$ -Komponenten der Feldgleichungen, wobei sich überstrichene Größen auf 3-Tensoren beziehen,  $D_i$  die kovariante Ableitung,  $\bar{\Delta} = D^i D_i$  den Laplace-Operator und  $Tr$  die Spur einer Größe bezeichnet. Diese Gleichungen müssen auf jeder Hyperfläche erfüllt sein. Aus dem räumlichen Anteil der Feldgleichungen ergibt sich

$$R_{ij} = \bar{R}_{ij} - 2(K^2)_{ij} + Tr(K)K_{ij} - \frac{1}{\alpha} (D_i \otimes D_j) \alpha - \frac{1}{\alpha} ((\partial_t - \mathcal{L}_\beta) K)_{ij}. \quad (5.6)$$

Diese Gleichungen bilden zusammen mit der Definition der äußeren Krümmung (5.2) die Evolutionsgleichungen. Man findet in jeder Gleichung einen Term, der die zeitliche Ableitung einer der dynamischen Variablen beschreibt. Obwohl diese Gleichungen nicht exakt von der oben beschriebenen Struktur sind, können sie doch integriert werden, wenn man geeignete Anfangsdaten zu Grunde legt. Es läßt sich zeigen, dass die constraint-Gleichungen immer erfüllt sind, wenn sie zum Anfangszeitpunkt erfüllt sind, ähnlich der Elektrodynamik. Dies gilt zumindest analytisch als Konsequenz der Bianchi-Identitäten,

## 5 Stellare Strukturgleichungen

ist aber bei numerischen Lösungen unklar [134].

Verwendet man dieses System von Gleichungen als Anfangswertproblem für  $\gamma_{ij}$  und  $K_{ij}$ , so werden die Lapse-Funktion  $\alpha$  und der Verschiebungsvektor  $\beta^i$  durch diese Gleichungen nicht bestimmt, obwohl sie in diese Gleichungen eingehen. Der physikalische Hintergrund dieser Tatsache besteht in der Eichfreiheit der Theorie. Die Größen  $\alpha$  und  $\beta^i$  beschreiben die zeitliche Entwicklung des Koordinatensystems, welches nicht durch die Einstein-Gleichungen gegeben ist. Gerade dies ist der Gehalt der Einsteinschen Theorie. Diese vier Größen müssen durch Koordinatenbedingungen spezifiziert werden, die bei der Integration der obigen Gleichungen zu berücksichtigen sind [134], [119], [16]. Eine Lösung dieses Anfangswertproblems bestimmt die 4-Größen über die obigen Gleichungen vollständig.

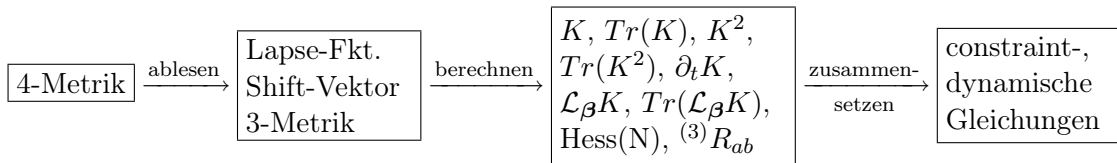
### 5.2 Herleitung der stellaren Strukturgleichungen

In diesem Kapitel sollen die Gleichungen des 3+1-Splits (5.2) bis (5.6) genutzt werden, um stellare Strukturgleichungen für beliebig schnell rotierende Objekte herzuleiten. Der 3+1-Split wird nicht verwendet, um ein Anfangswertproblem zu lösen, sondern um möglichst elegant die Einstein-Gleichungen zu berechnen. Eine „herkömmliche“ Herleitung wäre ein äußerst aufwendiges Unterfangen (siehe zum Beispiel [140]).

Man geht wieder davon aus, dass das Problem durch eine achsensymmetrische und stationäre Raumzeit beschrieben wird, deren Metrik als

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\psi} (d\varphi - \omega dt)^2 + e^{2\mu_2} (dx^2)^2 + e^{2\mu_3} (dx^3)^2 \quad (5.7)$$

geschrieben werden kann [26], [138], [82], [15]. Darin treten die metrischen Funktionen  $\nu$ ,  $\psi$ ,  $\omega$ ,  $\mu_2$  und  $\mu_3$  auf, die alle aufgrund der Symmetrien des Problems (Achsensymmetrie und Stationarität) Funktionen allein von  $r$  und  $\theta$  sind. Durch diese Wahl verbleibt noch ein Eichfreiheitsgrad. Die metrische Funktion  $e^{2\psi}$  besitzt eine besonders anschauliche Interpretation als Eigen-Zylinderradius, was man leicht an der Metrik abliest. Die Aufgabe besteht nun darin, die einzelnen Größen, die in den Gleichungen (5.2) bis (5.6) auftreten, für die Metrik (5.7) zu berechnen also den dreidimensionalen Ricci-Tensor, die kovariante Hesse-Matrix der Lapse-Funktion, die äußere Krümmung und einige davon abgeleitete Größen. Das Vorgehen wird in der folgenden Skizze verdeutlicht.



Um die Rechnung übersichtlicher zu gestalten, wird folgende Notation eingeführt:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} &\text{ als kovarianter Laplace-Operator des 3-D-Unterraums} \\ \nabla_A &= e^{-\mu_A} \partial_A \\ R &= e^\psi \end{aligned}$$

## 5.2 Herleitung der stellaren Strukturgleichungen

$$\Psi_A = e^{-\mu_A}(\partial_A\psi) = \nabla_A\psi.$$

Der Index A läuft dabei stets über  $A = 2, 3$ . Durch den Vergleich des Ansatzes (5.7) mit der Metrik (5.1) kann man die Lapse-Funktion  $\alpha$ , den Verschiebungs-Vektor  $\beta$  und die 3-Metrik  $\gamma_{ij}$  ablesen. Man findet

$$\alpha = e^\nu \quad (5.8)$$

$$\beta = (-\omega e^\psi, 0, 0) \quad (5.9)$$

für die Lapse-Funktion bzw. den Verschiebungs-Vektor im orthonormierten System (siehe unten). Zur Berechnung des Ricci-Tensors wird wieder der Cartan-Formalismus verwendet analog dem Vorgehen in Kapitel 2.1. Für die durch (5.7) induzierte 3-Metrik ergeben sich die Basis-1-Formen

$$\theta^1 = e^\psi d\varphi \quad (5.10)$$

$$\theta^2 = e^{\mu_2} dx^2 \quad (5.11)$$

$$\theta^3 = e^{\mu_3} dx^3 \quad (5.12)$$

mit den entsprechenden Basis-Vektoren

$$e_1 = e^{-\psi} \partial_\varphi \quad (5.13)$$

$$e_2 = e^{-\mu_2} \partial_2 \quad (5.14)$$

$$e_3 = e^{-\mu_3} \partial_3. \quad (5.15)$$

Daraus berechnet man die äußeren Ableitungen der Basis-1-Formen

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= (\partial_2\psi)e^\psi dx^2 \wedge d\varphi + (\partial_3\psi)e^\psi dx^3 \wedge d\varphi \\ &= \nabla_2\psi\theta^2 \wedge \theta^1 + \nabla_3\psi\theta^3 \wedge \theta^1 \\ &= \nabla_A\psi\theta^A \wedge \theta^1 \\ &= \frac{1}{R}(\nabla_A R)\theta^A \wedge \theta^1 \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} d\theta^2 &= e^{\mu_2}(\partial_3\mu_2)dx^3 \wedge dx^2 \\ &= e^{-\mu_3}(\partial_3\mu_2)\theta^3 \wedge \theta^2 \\ &= (\nabla_3\mu_2)\theta^3 \wedge \theta^2 \\ &= e^{-\mu_2}(\nabla_3 e^{\mu_2})\theta^3 \wedge \theta^2 \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} d\theta^3 &= e^{\mu_3}(\partial_2\mu_3)dx^2 \wedge dx^3 \\ &= e^{-\mu_2}(\partial_2\mu_3)\theta^2 \wedge \theta^3 \\ &= (\nabla_2\mu_3)\theta^2 \wedge \theta^3 \\ &= e^{-\mu_3}(\nabla_2 e^{\mu_3})\theta^2 \wedge \theta^3, \end{aligned} \quad (5.18)$$

die man nutzen kann, um mit Hilfe der ersten Cartanschen Strukturgleichung  $d\theta^i = -\omega^i_j \wedge \theta^j$  die Zusammenhangsformen  $\omega^i_j$  abzuleiten. Dabei wurden die Invertierungen

## 5 Stellare Strukturgleichungen

der Basis-1-Formen (5.10)-(5.12) eingesetzt. Leicht liest man entsprechende Ansätze für die Zusammenhangsformen ab, wenn man die drei Gleichungen explizit ausschreibt. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= -\omega^1_2 \wedge \theta^2 - \omega^1_3 \wedge \theta^3 \\ &= (\nabla_2\psi)\theta^2 \wedge \theta^1 + (\nabla_3\psi)\theta^3 \wedge \theta^1 \\ &= -(\nabla_2\psi)\theta^1 \wedge \theta^2 - (\nabla_3\psi)\theta^1 \wedge \theta^3 \end{aligned}$$

Ansatz:  $\omega^1_A = (\nabla_A\psi)\theta^1 = \frac{1}{R}(\nabla_A R)\theta^1 + \underbrace{\text{eine beliebige Fkt. von } \theta^A}_{\equiv F}$

Es wird vorerst die Funktion  $F = 0$  gesetzt.

$$\begin{aligned} d\theta^2 &= -\omega^2_1 \wedge \theta^1 - \omega^2_3 \wedge \theta^3 \stackrel{F=0}{=} -\omega^2_3 \wedge \theta^3 \\ &= (\nabla_3\mu_2)\theta^3 \wedge \theta^2 \\ &= -(\nabla_3\mu_2)\theta^2 \wedge \theta^3 \end{aligned}$$

Ansatz:  $\omega^2_3 = (\nabla_3\mu_2)\theta^2 + \text{eine Fkt. von } \theta^3$

$$\begin{aligned} d\theta^3 &= -\omega^3_1 \wedge \theta^1 - \omega^3_2 \wedge \theta^2 \stackrel{F=0}{=} -\omega^3_2 \wedge \theta^2 \\ &= (\nabla_2\mu_3)\theta^2 \wedge \theta^3 \\ &= -(\nabla_2\mu_3)\theta^3 \wedge \theta^2 \end{aligned}$$

Ansatz:  $\omega^3_2 = (\nabla_2\mu_3)\theta^3 + \text{eine Fkt. von } \theta^2$

Eine Kombination der letzten beiden Ansätze liefert

$$\omega^2_3 = (\nabla_3\mu_2)\theta^2 - (\nabla_2\mu_3)\theta^3. \quad (5.19)$$

Und man sieht, dass tatsächlich  $F = 0$  gesetzt werden kann, womit man

$$\omega^1_A = (\nabla_A\psi)\theta^1 \quad (5.20)$$

erhält. Diese Zusammenhangsformen erfüllen die erste Cartansche Strukturgleichung. Mit Hilfe der Basis-1-Formen (5.10)-(5.12) schreiben sich die Zusammenhangsformen schließlich als

$$\omega^1_2 = (\nabla_2\psi)e^\psi d\varphi = (\nabla_2 R)d\varphi \quad (5.21)$$

$$\omega^1_3 = (\nabla_3\psi)e^\psi d\varphi = (\nabla_3 R)d\varphi \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \omega^2_3 &= (\nabla_3\mu_2)e^{\mu_2} dx^2 - (\nabla_2\mu_3)e^{\mu_3} dx^3 \\ &= (\nabla_3 e^{\mu_2})dx^2 - (\nabla_2 e^{\mu_3})dx^3. \end{aligned} \quad (5.23)$$



## 5.2 Herleitung der stellaren Strukturgleichungen

Nun ist die äußere Ableitung dieser Zusammenhangsformen zu berechnen. Man findet

$$\begin{aligned}
 d\omega^1_2 &= \partial_A[\nabla_2 R]dx^A \wedge d\varphi \\
 &= \partial_A[e^{-\mu_2} e^\psi (\partial_2 \psi)]dx^A \wedge d\varphi \\
 &= \frac{1}{R} \nabla_A(R\Psi_2)\theta^A \wedge \theta^1
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

$$d\omega^1_3 = \frac{1}{R} \nabla_A(R\Psi_3)\theta^A \wedge \theta^1 \quad (\text{analog}) \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}
 d\omega^2_3 &= \partial_3[(\nabla_3 \mu_2)e^{\mu_2}]dx^3 \wedge dx^2 - \partial_2[(\nabla_2 \mu_3)e^{\mu_3}]dx^2 \wedge dx^3 \\
 &= [\partial_3(\nabla_3 e^{\mu_2}) + \partial_2(\nabla_2 e^{\mu_3})]e^{-\mu_2} e^{-\mu_3} \theta^3 \wedge \theta^2 \\
 &= [e^{-\mu_2} \nabla_3(\nabla_3 e^{\mu_2}) + e^{-\mu_3} \nabla_2(\nabla_2 e^{\mu_3})]\theta^3 \wedge \theta^2 \\
 &= [e^{-\mu_2} \nabla_3(e^{\mu_2}(\nabla_3 \mu_2)) + e^{-\mu_3} \nabla_2(e^{\mu_3}(\nabla_2 \mu_3))]\theta^3 \wedge \theta^2,
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

wobei im letzten Schritt jeweils wieder die invertierten Basis-1-Formen eingesetzt wurden. Die zweite Cartansche Strukturgleichung  $\Omega^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_n \wedge \omega^n_j$  bestimmt die Krümmungs-2-Formen, die sich im einzelnen schreiben als

$$\begin{aligned}
 \Omega^1_2 &= \frac{1}{R} \nabla_A(R\Psi_2)\theta^A \wedge \theta^1 + \frac{1}{R} (\nabla_3 R)\theta^1 \wedge [(\nabla_2 \mu_3)\theta^3 - (\nabla_3 \mu_2)\theta^2] \\
 &= \frac{1}{R} \nabla_A(R\Psi_2)\theta^A \wedge \theta^1 + \frac{1}{R} (\nabla_3 R)(\nabla_3 \mu_2)\theta^2 \wedge \theta^1 - \frac{1}{R} (\nabla_3 R)(\nabla_2 \mu_3)\theta^3 \wedge \theta^1 \\
 &= [\frac{1}{R} \nabla_2(R\Psi_2) + \Psi_3(\nabla_3 \mu_2)]\theta^2 \wedge \theta^1 + [\frac{1}{R} \nabla_3(R\Psi_2) - \Psi_3(\nabla_2 \mu_3)]\theta^3 \wedge \theta^1
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}
 \Omega^1_3 &= \frac{1}{R} \nabla_A(R\Psi_3)\theta^A \wedge \theta^1 + (\nabla_2 \psi)\theta^1 \wedge [(\nabla_3 \mu_2)\theta^2 - (\nabla_2 \mu_3)\theta^3] \\
 &= [\frac{1}{R} \nabla_3(R\Psi_3) + \Psi_2(\nabla_2 \mu_3)]\theta^3 \wedge \theta^1 + [\frac{1}{R} \nabla_2(R\Psi_3) - \Psi_2(\nabla_3 \mu_2)]\theta^2 \wedge \theta^1
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

$$\begin{aligned}
 \Omega^2_3 &= d\omega^2_3 \\
 &= [e^{-\mu_2} \nabla_3(e^{\mu_2}(\nabla_3 \mu_2)) + e^{-\mu_3} \nabla_2(e^{\mu_3}(\nabla_2 \mu_3))]\theta^3 \wedge \theta^2.
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Nun kann der 3-Ricci-Tensor  $\bar{R}_{ij}$  mit diesen Krümmungs-2-Formen berechnet werden. Mit

$$\bar{R}_{ij} = \Omega^n_i(e_n, e_j) \tag{5.30}$$

## 5 Stellare Strukturgleichungen

ergeben sich die 6 unabhängigen Komponenten

$$\begin{aligned}\bar{R}_{11} &= \Omega^2_1(e_2, e_1) + \Omega^3_1(e_3, e_1) \\ &= -\frac{1}{R}\nabla_2(R\Psi_2) - \Psi_3(\nabla_3\mu_2) - \frac{1}{R}\nabla_3(R\Psi_3) - \Psi_2(\nabla_2\mu_3)\end{aligned}\quad (5.31)$$

$$\bar{R}_{12} = \Omega^2_1(e_2, e_2) + \Omega^3_1(e_3, e_2) = 0 \quad (5.32)$$

$$\bar{R}_{13} = \Omega^2_1(e_2, e_3) + \Omega^3_1(e_3, e_3) = 0 \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned}\bar{R}_{22} &= \Omega^1_2(e_1, e_2) + \Omega^3_2(e_3, e_2) \\ &= -\frac{1}{R}\nabla_2(R\Psi_2) - \Psi_3(\nabla_3\mu_2) \\ &\quad - e^{-\mu_2}\nabla_3(e^{\mu_2}(\nabla_3\mu_2)) - e^{-\mu_3}\nabla_2(e^{\mu_3}(\nabla_2\mu_3))\end{aligned}\quad (5.34)$$

$$\begin{aligned}\bar{R}_{23} &= \Omega^1_2(e_1, e_3) + \Omega^3_2(e_3, e_3) \\ &= -\frac{1}{R}\nabla_3(R\Psi_2) + \Psi_3(\nabla_2\mu_3)\end{aligned}\quad (5.35)$$

$$\begin{aligned}\bar{R}_{33} &= \Omega^1_3(e_1, e_3) + \Omega^2_3(e_2, e_3) \\ &= -\frac{1}{R}\nabla_3(R\Psi_3) - \Psi_2(\nabla_2\mu_3) \\ &\quad - e^{-\mu_2}\nabla_3(e^{\mu_2}(\nabla_3\mu_2)) - e^{-\mu_3}\nabla_2(e^{\mu_3}(\nabla_2\mu_3)).\end{aligned}\quad (5.36)$$

Damit kann man den Ricci-Skalar zusammensetzen. Man erhält

$$\begin{aligned}\bar{R} &= \bar{R}_{11} + \bar{R}_{22} + \bar{R}_{33} \\ &= -2\left[\frac{1}{R}\nabla_2(R\Psi_2) + \Psi_3(\nabla_3\mu_2) + \frac{1}{R}\nabla_3(R\Psi_3) + \Psi_2(\nabla_2\mu_3)\right] \\ &\quad - 2\underbrace{\left[e^{-\mu_2}\nabla_3(e^{\mu_2}(\nabla_3\mu_2)) + e^{-\mu_3}\nabla_2(e^{\mu_3}(\nabla_2\mu_3))\right]}_{\equiv \Delta(\mu_2, \mu_3)}\end{aligned}\quad (5.37)$$

mit der Definition von  $\Delta(\mu_2, \mu_3)$ , die die letzte Zeile abkürzt.

Um den 4-dimensionalen Ricci-Tensor zusammensetzen, fehlen noch einige Größen, die von der äußeren Krümmung bzw. dem Shift-Vektor und der Lapse-Funktion abhängen (siehe Gleichungen (5.3) bis (5.6)).

Die äußere Krümmung ist definiert nach Gleichung (5.2) als

$$K_{ij} = \frac{1}{2\alpha}(\beta_{i;j} + \beta_{j;i}), \quad (5.38)$$

denn die metrischen Funktionen sind zeitunabhängig. Darin tritt die kovariante Ableitung des Shift-Vektors auf. In dem hier verwendeten Formalismus gilt  $\beta_{i;j} = e_j(\beta_i) - \omega^n_i(e_j)\beta_n$ ,

so dass sich mit dem Shift-Vektor (5.9) die einzelnen Komponenten

$$\beta_{1;1} = 0 \quad (5.39)$$

$$\beta_{1;2} = e_2(\beta_1) = e^{-\mu_2} \partial_2(-\omega e^\psi) = -(\nabla_2 \omega e^\psi) = -(\nabla_2 \omega) e^\psi - \omega (\nabla_2 e^\psi) \quad (5.40)$$

$$\beta_{1;3} = e_3(\beta_1) = e^{-\mu_3} \partial_3(-\omega e^\psi) = -(\nabla_3 \omega e^\psi) = -(\nabla_3 \omega) e^\psi - \omega (\nabla_3 e^\psi) \quad (5.41)$$

$$\beta_{2;1} = -\omega^1_2(e_1)\beta_1 = (\nabla_2 \psi) \omega e^\psi = \omega (\nabla_2 e^\psi) \quad (5.42)$$

$$\beta_{2;2} = e_2(0) - \omega^1_2(e_2)\beta_1 = 0 \quad (5.43)$$

$$\beta_{2;3} = e_3(0) - \omega^1_2(e_3)\beta_1 = 0 \quad (5.44)$$

$$\beta_{3;1} = -\omega^1_3(e_1)\beta_1 = (\nabla_3 \psi) \omega e^\psi = \omega (\nabla_3 e^\psi) \quad (5.45)$$

$$\beta_{3;2} = e_2(0) - \omega^1_3(e_2)\beta_1 = 0 \quad (5.46)$$

$$\beta_{3;3} = e_3(0) - \omega^1_3(e_3)\beta_1 = 0 \quad (5.47)$$

ergeben. Damit setzt man die äußere Krümmung

$$K_{ij} = -\frac{1}{2\alpha} R \begin{pmatrix} 0 & \nabla_2 \omega & \nabla_3 \omega \\ \nabla_2 \omega & 0 & 0 \\ \nabla_3 \omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

zusammen. Man sieht, dass die Spur der äußeren Krümmung  $Tr(K_{ij}) = K^i_i = 0$  verschwindet. Weiter findet man

$$(K^2)_{ij} = \frac{R^2}{4\alpha^2} \begin{pmatrix} (\nabla_2 \omega)^2 + (\nabla_3 \omega)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\nabla_2 \omega)^2 & (\nabla_2 \omega)(\nabla_3 \omega) \\ 0 & (\nabla_2 \omega)(\nabla_3 \omega) & (\nabla_3 \omega)^2 \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

und damit

$$Tr(K^2) = \frac{R^2}{2\alpha^2} [(\nabla_2 \omega)^2 + (\nabla_3 \omega)^2]. \quad (5.50)$$

Die Lie-Ableitung eines Tensors zweiter Stufe besitzt in der Koordinaten-Basis die besonders einfache Darstellung

$${}^{(K)}(\mathcal{L}_{(K)\beta} {}^{(K)}K)_{ij} = {}^{(K)}K_{ij,n} {}^{(K)}\beta^n + {}^{(K)}K_{in} {}^{(K)}\beta^n_{,j} + {}^{(K)}K_{nj} {}^{(K)}\beta^n_{,i}, \quad (5.51)$$

da sich alle auftretenden Christoffelsymbole gegenseitig aufheben [102]. Die hier eingehenden Größen müssen dabei natürlich ebenfalls in der Koordinaten-Basis vorliegen, was die Markierung (K) verdeutlichen soll. Aus diesem Grund werden die äußere Krümmung  $\mathbf{K}$  und der Shift-Vektor  $\beta$  transformiert. Es gilt

$$\mathbf{K} = K_{ij} \theta^i \otimes \theta^j = {}^{(K)}K_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad (5.52)$$

woraus

$$\begin{aligned} {}^{(K)}K_{ij} &= -\frac{1}{2\alpha} R^2 \begin{pmatrix} 0 & e^{\mu_2} \nabla_2 \omega & e^{\mu_3} \nabla_3 \omega \\ e^{\mu_2} \nabla_2 \omega & 0 & 0 \\ e^{\mu_3} \nabla_3 \omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2\alpha} R^2 \begin{pmatrix} 0 & (\partial_2 \omega) & (\partial_3 \omega) \\ (\partial_2 \omega) & 0 & 0 \\ (\partial_3 \omega) & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.53)$$

## 5 Stellare Strukturgleichungen

folgt. Für den Shift-Vektor liest man aus

$$\beta = \beta_i \theta^i = {}^{(K)}\beta_i dx^i = \beta^i e_i = {}^{(K)}\beta^i \partial_i \quad (5.54)$$

die Komponenten in Koordinaten-Darstellung

$${}^{(K)}\beta^i = (-\omega, 0, 0) \quad (5.55)$$

ab, was sich auch direkt durch Vergleich aus der Metrik ergibt. Die obige Gleichung (5.51) nutzend erhält man für die Komponenten der Lie-Ableitung

$${}^{(K)}(\mathcal{L}_{(K)\beta} {}^{(K)}K)_{11} = 0 \quad (5.56)$$

$${}^{(K)}(\mathcal{L}_{(K)\beta} {}^{(K)}K)_{12} = 0 \quad (5.57)$$

$${}^{(K)}(\mathcal{L}_{(K)\beta} {}^{(K)}K)_{13} = 0 \quad (5.58)$$

$${}^{(K)}(\mathcal{L}_{(K)\beta} {}^{(K)}K)_{22} = -{}^{(K)}K_{21}(\partial_2\omega) - {}^{(K)}K_{12}(\partial_2\omega) = \frac{1}{\alpha} R^2 (\partial_2\omega)^2 \quad (5.59)$$

$${}^{(K)}(\mathcal{L}_{(K)\beta} {}^{(K)}K)_{23} = -{}^{(K)}K_{21}(\partial_3\omega) - {}^{(K)}K_{13}(\partial_2\omega) = \frac{1}{\alpha} R^2 (\partial_2\omega)(\partial_3\omega) \quad (5.60)$$

$${}^{(K)}(\mathcal{L}_{(K)\beta} {}^{(K)}K)_{33} = -{}^{(K)}K_{31}(\partial_3\omega) - {}^{(K)}K_{13}(\partial_3\omega) = \frac{1}{\alpha} R^2 (\partial_3\omega)^2. \quad (5.61)$$

Die Symmetrie der Lie-Ableitung ist in Gleichung (5.51) offensichtlich. Mit der Rücktransformation

$$\mathcal{L}_\beta K = {}^{(K)}(\mathcal{L}_\beta K)_{ij} dx^i \otimes dx^j = (\mathcal{L}_\beta K)_{ij} \theta^i \otimes \theta^j \quad (5.62)$$

ergibt sich schließlich im orthonormierten System das Ergebnis

$$(\mathcal{L}_\beta K)_{ij} = \frac{1}{\alpha} R^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\nabla_2\omega)^2 & (\nabla_2\omega)(\nabla_3\omega) \\ 0 & (\nabla_2\omega)(\nabla_3\omega) & (\nabla_3\omega)^2 \end{pmatrix}. \quad (5.63)$$

Die Spur der Lie-Ableitung ist damit

$$Tr(\mathcal{L}_\beta K) = \frac{R^2}{\alpha} [(\nabla_2\omega)^2 + (\nabla_3\omega)^2]. \quad (5.64)$$

Außerdem wird die kovariante Divergenz der äußeren Krümmung benötigt  $(D \cdot K)_i =$

$D_j K^j_i$ , deren Komponenten durch

$$\begin{aligned}
 (D \cdot K)_1 &= D_1 K^1_1 + D_2 K^2_1 + D_3 K^3_1 \\
 &= e_1(K^1_1) - \omega^{n_1}(e_1)K^1_n + \omega^1_n(e_1)K^n_1 \\
 &\quad + e_2(K^2_1) - \omega^{n_1}(e_2)K^2_n + \omega^2_n(e_2)K^n_1 \\
 &\quad + e_3(K^3_1) - \omega^{n_1}(e_3)K^3_n + \omega^3_n(e_3)K^n_1 \\
 &= (\nabla_A \psi) \left(-\frac{R}{2\alpha}\right) (\nabla_A \omega) + (\nabla_a \psi) \left(-\frac{R}{2\alpha}\right) (\nabla_A \omega) + \nabla_A \left(-\frac{R}{2\alpha}\right) (\nabla_A \omega) \\
 &\quad + (\nabla_3 \mu_2) \left(-\frac{R}{2\alpha}\right) (\nabla_3 \omega) + (\nabla_2 \mu_3) \left(-\frac{R}{2\alpha}\right) (\nabla_2 \omega) \\
 &= -\frac{R}{\alpha} (\nabla_A \psi) (\nabla_A \omega) - \frac{1}{2} \nabla_A \left[\frac{R}{\alpha} (\nabla_A \omega)\right] \\
 &\quad - \frac{R}{2\alpha} [(\nabla_3 \mu_2) (\nabla_3 \omega) + (\nabla_2 \mu_3) (\nabla_2 \omega)] \tag{5.65}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (D \cdot K)_2 &= D_1 K^1_2 + D_2 K^2_2 + D_3 K^3_2 \\
 &= e_1(K^1_2) - \omega^{n_2}(e_1)K^1_n + \omega^1_n(e_1)K^n_2 \\
 &\quad + e_2(K^2_2) - \omega^{n_2}(e_2)K^2_n + \omega^2_n(e_2)K^n_2 \\
 &\quad + e_3(K^3_2) - \omega^{n_2}(e_3)K^3_n + \omega^3_n(e_3)K^n_2 \\
 &= 0 \tag{5.66}
 \end{aligned}$$

$$(D \cdot K)_3 = 0 \text{ (analog)} \tag{5.67}$$

gegeben sind. Es bleibt jetzt noch die kovariante Hesse-Matrix  $(H(\alpha))_{ij} := (D_i \otimes D_j)\alpha$  zu berechnen. Der Gradient der Lapse-Funktion ist

$$D_1 \alpha = e_1(\alpha) = 0 \tag{5.68}$$

$$D_2 \alpha = e_2(\alpha) = e^{-\mu_2}(\partial_2 \alpha) = \nabla_2 \alpha \tag{5.69}$$

$$D_3 \alpha = e_3(\alpha) = e^{-\mu_3}(\partial_3 \alpha) = \nabla_3 \alpha. \tag{5.70}$$

Hiermit kann man die Komponenten

$$D_1(D_1 \alpha) = e_1(D_1 \alpha) - \omega^{n_1}(e_1)D_n \alpha = (\nabla_A \psi)(\nabla_A \alpha) \tag{5.71}$$

$$D_1(D_2 \alpha) = -\omega^{n_2}(e_1)D_n \alpha = 0 \tag{5.72}$$

$$D_1(D_3 \alpha) = 0 \tag{5.73}$$

$$D_2(D_1 \alpha) = -\omega^{n_1}(e_2)D_n \alpha = 0 \tag{5.74}$$

$$D_2(D_2 \alpha) = e_2(\nabla_2 \alpha) - \omega^{n_2}(e_2)D_n \alpha = \nabla_2(\nabla_2 \alpha) + (\nabla_3 \mu_2)(\nabla_3 \alpha) \tag{5.75}$$

$$D_2(D_3 \alpha) = e_2(\nabla_3 \alpha) - \omega^{n_3}(e_2)D_n \alpha = \nabla_2(\nabla_3 \alpha) - (\nabla_3 \mu_2)(\nabla_2 \alpha) \tag{5.76}$$

$$D_3(D_1 \alpha) = e_3(0) - \omega^{n_1}(e_3)D_n \alpha = 0 \tag{5.77}$$

$$D_3(D_2 \alpha) = e_3(\nabla_2 \alpha) - \omega^{n_2}(e_3)D_n \alpha = \nabla_3(\nabla_2 \alpha) - (\nabla_2 \mu_3)(\nabla_3 \alpha) \tag{5.78}$$

$$D_3(D_3 \alpha) = e_3(\nabla_3 \alpha) - \omega^{n_3}(e_3)D_n \alpha = \nabla_3(\nabla_3 \alpha) + (\nabla_2 \mu_3)(\nabla_2 \alpha) \tag{5.79}$$

berechnen, woran man leicht den kovarianten Laplace-Operator der Hyperfläche als Spur

## 5 Stellare Strukturgleichungen

der Hesse-Matrix ablesen kann. Man hat

$$\bar{\Delta}\alpha = \text{Tr}(H(\alpha)) = (\nabla_2\psi)(\nabla_2\alpha) + (\nabla_3\psi)(\nabla_3\alpha) + \nabla_2(\nabla_2\alpha) \quad (5.80)$$

$$+ (\nabla_3\mu_2)(\nabla_3\alpha) + \nabla_3(\nabla_3\alpha) + (\nabla_2\mu_3)(\nabla_2\alpha). \quad (5.81)$$

Damit sind nun alle Einzelterme abgeleitet, um den 4-Ricci-Tensor nach den Gleichungen (5.3) bis (5.6) zusammensetzen. Es ergeben sich die Komponenten

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{1}{\alpha}\bar{\Delta}\alpha - \frac{R^2}{2\alpha^2}[(\nabla_2\omega)^2 + (\nabla_3\omega)^2] \\ &= \frac{1}{\alpha}[(\nabla_A\psi)(\nabla_A\alpha) + \nabla_A(\nabla_A\alpha) + (\nabla_3\mu_2)(\nabla_3\alpha) + (\nabla_2\mu_3)(\nabla_2\alpha) \\ &\quad - \frac{R^2}{2\alpha}(\nabla_A\omega)] \end{aligned} \quad (5.82)$$

$$R_{01} = \frac{1}{2}D \cdot \left[ \frac{R}{\alpha} \nabla\omega \right] \quad (5.83)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{R}{\alpha}(\nabla_A\psi)(\nabla_A\omega) + \frac{1}{2}\nabla_A\left[\frac{R}{\alpha}(\nabla_A\omega)\right] \\ &\quad + \frac{R}{2\alpha}[(\nabla_3\mu_2)(\nabla_3\omega) + (\nabla_2\mu_3)(\nabla_2\omega)] \end{aligned} \quad (5.84)$$

$$R_{02} = 0 \quad (5.85)$$

$$R_{03} = 0 \quad (5.86)$$

$$\begin{aligned} R_{11} &= -\frac{1}{R}\nabla_A(R\Psi_A) - \Psi_3(\nabla_3\mu_2) - \Psi_2(\nabla_2\mu_3) \\ &\quad - \frac{R^2}{2\alpha^2}(\nabla_A\omega)^2 - \frac{1}{\alpha}(\nabla_A\psi)(\nabla_A\alpha) \end{aligned} \quad (5.87)$$

$$R_{12} = 0 \quad (5.88)$$

$$R_{13} = 0 \quad (5.89)$$

$$\begin{aligned} R_{22} &= -\frac{1}{R}\nabla_2(R\Psi_2) - \Psi_3(\nabla_3\mu_2) - \Delta(\mu_2, \mu_3) + \frac{R^2}{2\alpha^2}(\nabla_2\omega)^2 - \frac{1}{\alpha}\nabla_2(\nabla_2\alpha) \\ &\quad - \frac{1}{\alpha}(\nabla_3\mu_2)(\nabla_3\alpha) \end{aligned} \quad (5.90)$$

$$\begin{aligned} R_{23} &= -\frac{1}{R}\nabla_3(R\Psi_2) + \Psi_3(\nabla_2\mu_3) + \frac{R^2}{2\alpha^2}(\nabla_3\omega)(\nabla_2\omega) + \frac{1}{\alpha}\nabla_2(\nabla_3\alpha) \\ &\quad - \frac{1}{\alpha}(\nabla_3\mu_2)(\nabla_2\alpha) \end{aligned} \quad (5.91)$$

$$\begin{aligned} R_{33} &= -\frac{1}{R}\nabla_3(R\Psi_3) - \Psi_2(\nabla_2\mu_3) - \Delta(\mu_2, \mu_3) + \frac{R^2}{2\alpha^2}(\nabla_3\omega)^2 - \frac{1}{\alpha}\nabla_3(\nabla_3\alpha) \\ &\quad - \frac{1}{\alpha}(\nabla_2\mu_3)(\nabla_2\alpha). \end{aligned} \quad (5.92)$$

Man nutzt die Einsteinschen Feldgleichungen in der Form  $R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T)$  und sucht Kombinationen von Komponenten des Ricci-Tensors, die das numerische Lösen der resultierenden Gleichungen möglichst einfach machen. Numerisch von Vorteil sind Gleichungen, in denen die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung nur einer metrischen

Funktion enthalten sind. Ansonsten sollten nur quadratische Terme der Ableitungen erster Ordnung der übrigen metrischen Funktionen auftreten. Hinweise zur Numerik findet man in [26].

Die Komponente  $R_{00}$  liefert eine verallgemeinerte Version der Poisson-Gleichung

$$\boxed{\frac{1}{\alpha}\bar{\Delta}\alpha - \frac{R^2}{2\alpha^2}(\nabla_A\omega)^2 = 8\pi G(T_{00} + \frac{1}{2}T)}, \quad (5.93)$$

was man am Auftreten des kovarianten Laplace-Operators erkennt, der auf das Gravitationspotential bzw. die Lapse-Funktion wirkt. Aus der constraint-Gleichung  $R_{01}$  findet man die frame-dragging-Gleichung

$$\boxed{D \cdot \left[ \frac{R}{\alpha} \nabla \omega \right] = 16\pi G T_{01}}, \quad (5.94)$$

die sich durch Entwicklung auf die in Kapitel 2 gefundene Gleichung der langsamen Rotation reduzieren läßt (siehe Abschnitt 5.4). Eine Gleichung für den Zylinderradius  $e^\psi$  ergibt sich aus der Komponente  $-R_{11}$  als

$$\boxed{\frac{1}{R}\nabla_A(R\Psi_A) + \Psi_A(\nabla_A\mu_B) + \frac{R^2}{2\alpha^2}(\nabla_A\omega)^2 + \frac{1}{\alpha}(\nabla_A\psi)(\nabla_A\alpha) = -8\pi G(T_{11} - \frac{1}{2}T)} \quad (5.95)$$

mit  $A \neq B$ . Die letzte Gleichung wird durch die Kombination  $R_{00} - R_{11} + R_{22} + R_{33}$  gebildet und lautet

$$\boxed{-2\Delta(\mu_2, \mu_3) + \frac{R^2}{2\alpha^2}(\nabla_A\omega)^2 + \frac{2}{\alpha}(\nabla_A\psi)(\nabla_A\alpha) = 8\pi G(T_{00} - T_{11} + T_{22} + T_{33})}. \quad (5.96)$$

Diese gesamte Herleitung beinhaltet noch einen Eichfreiheitsgrad. Durch die Festlegung  $\mu_2 = \mu_3 = \mu$  (isotrope Eichung) wird der in der letzten Gleichung auftretende Operator (Definition auf Seite 58) besonders einfach, nämlich  $\Delta(\mu_2, \mu_3) = \Delta(\mu, \mu) = e^{-2\mu}\partial_A^2\mu$ . Alle vier Gleichungen sind elliptische partielle Differentialgleichungen, die sich auch als Divergenz-Gleichungen schreiben lassen. Die Quellterme auf der rechten Seite der Gleichungen (5.93) bis (5.96) sind durch die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors gegeben. Diese Komponenten werden in Anhang C hergeleitet. Für ein ideales Gas ergibt sich

$$T_{00} = \gamma^2(\epsilon + PV^2) \quad (5.97)$$

$$T_{01} = -\gamma^2V(\epsilon + P) \quad (5.98)$$

$$T_{11} = \gamma^2(P + \epsilon V^2) \quad (5.99)$$

$$T_{22} = T_{33} = P \quad (5.100)$$

$$T = Tr(T_{\mu\nu}) = -\epsilon + 3P. \quad (5.101)$$

Die hierin auftretende Größe  $V$  ist definiert als  $V = e^\psi(\Omega - \omega)\frac{1}{\alpha}$  und kann als Geschwindigkeit der Materie beobachtet vom ZAMO (Zero Angular Momentum Observer) interpretiert werden (siehe Anhang C). Außerdem gilt  $\gamma^2 = \frac{1}{1-V^2}$  analog dem Lorentz-Faktor in der Speziellen Relativitätstheorie.

### 5.3 Hydrostatisches Gleichgewicht

Nachdem im vorherigen Kapitel die Bestimmungsgleichungen der metrischen Funktionen hergeleitet wurden, fehlt zur Lösung des vollen Problems noch eine Gleichung, die das hydrostatische Gleichgewicht ausdrückt. Diese bestimmt den Verlauf des Drucks bzw. der Dichte, die über die Zustandsgleichung verbunden sind. Analog der Rechnung im Fall der langsamen Rotation ergibt sich diese Gleichung aus dem Verschwinden der Divergenz des Energie-Impuls-Tensors. Die Rechnung wird für die Metrik (5.7) in der Koordinaten-Basis in isotroper Eichung ( $\mu_2 = \mu_3 = \mu$ ) ausgeführt. Dann kann die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors geschrieben werden als

$$T^{\rho\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} T^{\rho\nu}) + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho T^{\lambda\nu} \quad (5.102)$$

mit der Determinanten  $g$  der Metrik (siehe z. B. [35]). Man betrachtet die Komponente mit  $\rho = 2$ . Für die Determinante findet man  $g = -e^{2\nu+2\psi+4\mu}$  und damit  $\sqrt{-g} = e^{\nu+\psi+2\mu}$ . Es müssen nur 5 Christoffelsymbole bestimmt werden entsprechend den 5 nicht verschwindenden Komponenten des Energie-Impuls-Tensors. Man berechnet

$$\Gamma_{00}^2 = -\frac{1}{2} e^{-2\mu} \partial_2 (\omega^2 e^{2\psi} - e^{2\nu}) \quad (5.103)$$

$$\Gamma_{01}^2 = \frac{1}{2} e^{-2\mu} \partial_2 (\omega e^{2\psi}) \quad (5.104)$$

$$\Gamma_{11}^2 = -(\partial_2 \psi) e^{2\psi-2\mu} \quad (5.105)$$

$$\Gamma_{22}^2 = (\partial_2 \mu) \quad (5.106)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -(\partial_2 \mu). \quad (5.107)$$

Nun kann man Gleichung (5.102) für  $\rho = 2$  zusammensetzen. Indem man mit  $e^{2\mu}$  multipliziert, findet man

$$\begin{aligned} 0 &= e^{-\nu-\psi} \partial_2 [e^{\nu+\psi} P] + \Gamma_{\sigma\lambda}^2 T^{\sigma\lambda} e^{2\mu} \\ &= (\partial_2 \nu) P + (\partial_2 \psi) P + (\partial_2 P) \\ &\quad - \frac{1}{2} [\partial_2 (\omega^2 e^{2\psi} - e^{2\nu})] \cdot [(\epsilon + P)(u^t)^2 - P e^{-2\nu}] \\ &\quad + 2 \left[ \frac{1}{2} \partial_2 (\omega e^{2\psi}) \right] \cdot [(\epsilon + P) \Omega (u^t)^2 - P \omega e^{-2\nu}] \\ &\quad - (\partial_2 \psi) e^{2\psi} \cdot [(\epsilon + P) \Omega^2 (u^t)^2 + P (e^{-2\psi} - \omega^2 e^{-2\nu})] \\ &\quad + (\partial_2 \mu) P - (\partial_2 \mu) P, \end{aligned} \quad (5.108)$$

wobei darauf zu achten ist, dass jeweils die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors  $T^{\mu\nu} = (\epsilon + P) u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}$  in der Koordinaten-Basis einzusetzen sind (siehe auch Anhang C und Abschnitt 2.2). Indem man die Terme nach Größen proportional zu  $P$  und zu  $(\epsilon + P)(u^t)^2$  ordnet, erhält man schließlich

$$(\partial_2 P) - (\epsilon + P) [(\partial_2 \ln u^t) - u^t u_\varphi (\partial_2 \Omega)] = 0. \quad (5.109)$$



## 5.4 Reduktion auf die Gleichungen der langsamen Rotation

Die konkrete Rechnung wird in Anhang D gezeigt. Diese Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts entspricht der in Bonazzola et al. [26] wiedergegebenen und ist auch für differentiell rotierende Körper gültig. Dies erkennt man auch am Auftreten des Terms  $(\partial_2\Omega)$ . Damit bildet Gleichung (5.109) die Verallgemeinerung der Gleichung (2.56) (Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gl.). Für einen nicht rotierenden Stern gilt  $u^t = \frac{1}{\alpha} = e^{-\nu}$  und  $u_\varphi = 0$  und man erhält durch Einsetzen in (5.109)  $\frac{dP}{dr} = -(\epsilon + P)\nu'$  für  $x^2 = r$ . Die gesamte Rechnung würde sich für die Komponente mit  $\rho = 3$  aufgrund der Symmetrie nicht ändern, so dass man Gleichung (5.109) auf diesen Fall verallgemeinern darf.

## 5.4 Reduktion auf die Gleichungen der langsamen Rotation

An dieser Stelle soll nun die Komponente  $R_{01}$  des Ricci-Tensors, die das frame-dragging bestimmt, aus Kapitel 2.2 abgeleitet werden. Den Ausgangspunkt bildet die stellare Strukturgleichung, die die metrische Funktion  $\omega$  und damit das frame-dragging bestimmt, in der Form (5.84). Zunächst müssen die hier auftretenden metrischen Funktionen spezifiziert werden. Durch den Vergleich der Metrik (5.7) mit der Metrik (2.66) findet man

$$e^\nu = e^\phi \quad (5.110)$$

$$e^\psi = r \sin\theta \quad (5.111)$$

$$e^{\mu_2} = r \quad (5.112)$$

$$e^{\mu_3} = e^\lambda. \quad (5.113)$$

Außerdem entspricht  $\partial_2 = \partial_\theta$  und  $\partial_3 = \partial_r$ . Durch Einsetzen dieser Funktionen in (5.84) ergibt sich unter Beachtung der Kugelsymmetrie von  $e^\nu$  und  $e^\lambda$

$$\begin{aligned} R_{01} &= e^{-\nu} e^{-2\lambda} (\partial_r \omega) (\partial_r r \sin\theta) + \frac{1}{r^2} e^{-\nu} (\partial_\theta r \sin\theta) (\partial_\theta \omega) \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-\lambda} \partial_r [r \sin\theta e^{-\nu-\lambda} (\partial_r \omega)] + \frac{1}{2} \frac{1}{r} \partial_\theta [\sin\theta e^{-\nu} (\partial_\theta \omega)] \\ &\quad + \frac{1}{2} r \sin\theta e^{-\nu} [e^{-2\lambda} (\partial_r \ln r) (\partial_r \omega) + \frac{1}{r^2} \underbrace{(\partial_\theta \lambda)}_{=0} (\partial_\theta \omega)] \\ &= e^{-\nu-2\lambda} \sin\theta (\partial_r \omega) + e^{-\nu} \frac{1}{r} (\partial_\theta \sin\theta) (\partial_\theta \omega) \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-\lambda} \partial_r [r \sin\theta e^{-\nu-\lambda} (\partial_r \omega)] + \frac{1}{2} \frac{1}{r} e^{-\nu} \partial_\theta [\sin\theta (\partial_\theta \omega)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin\theta e^{-\nu-2\lambda} (\partial_r \omega) \\ &= 2e^{-\nu-2\lambda} \sin\theta (\partial_r \omega) + \frac{1}{2} e^{-\lambda} r \sin\theta \partial_r [e^{-\nu-\lambda} (\partial_r \omega)] \\ &\quad + e^{-\nu} \frac{1}{r} (\partial_\theta \sin\theta) (\partial_\theta \omega) + \frac{1}{2} \frac{1}{r} e^{-\nu} \partial_\theta [\sin\theta (\partial_\theta \omega)]. \end{aligned} \quad (5.114)$$

## 5 Stellare Strukturgleichungen

Die Multiplikation dieser Gleichung mit  $2\sin^2\theta$  liefert

$$2\sin^2\theta R_{01} = 4e^{-\nu-2\lambda}\sin^3\theta(\partial_r\omega) + e^{-\lambda}r\sin^3\theta\partial_r[e^{-\nu-\lambda}(\partial_r\omega)] \quad (5.115)$$

$$+ 2\sin^2\theta e^{-\nu}\frac{1}{r}(\partial_\theta\sin\theta)(\partial_\theta\omega) + \frac{1}{r}\sin^2\theta e^{-\nu}\partial_\theta[\sin\theta(\partial_\theta\omega)] \quad (5.116)$$

$$= \frac{1}{r^3}\sin^3\theta e^{-\nu-2\lambda}(\partial_r r^4)(\partial_r\omega) + e^{-\lambda}r\sin^3\theta\partial_r[e^{-\nu-\lambda}(\partial_r\omega)] \quad (5.117)$$

$$+ e^{-\nu}\frac{1}{r}\sin\theta(\partial_\theta\sin^2\theta)(\partial_\theta\omega) + \frac{1}{r}\sin^2\theta e^{-\nu}\partial_\theta[\sin\theta(\partial_\theta\omega)] \quad (5.118)$$

$$= \frac{1}{r^3}e^{-\lambda}\sin^3\theta\partial_r[r^4e^{-\nu-\lambda}(\partial_r\omega)] + \frac{1}{r}e^{-\nu}\partial_\theta[\sin^2\theta\sin\theta(\partial_\theta\omega)], \quad (5.119)$$

was nach einer weiteren Multiplikation des Faktors  $r^3e^\lambda$  zu

$$2r^3\sin^2\theta e^\lambda R_{01} = \partial_r[r^4\sin^3\theta e^{-\nu-\lambda}(\partial_r\omega)] + \partial_\theta[r^2\sin^3\theta e^{\lambda-\nu}(\partial_\theta\omega)] \quad (5.120)$$

wird. Zum Vergleich mit (2.74) sind die Komponenten des Ricci-Tensors noch auf die entsprechende Basis zu transformieren (siehe dazu Anhang C). Für die in Kapitel 2.2 angegebene Komponente gilt  $R^t{}_\varphi = g^{tt}R_{t\varphi} + g^{t\varphi}R_{\varphi\varphi}$ . Für die Komponenten in Koordinaten-Basis gilt mit  $e^\psi = r\sin\theta$

$$R_{\varphi\varphi} = R_{11}e^{2\psi} \quad (5.121)$$

$$R_{\varphi t} = R_{01}e^{\nu+\psi} + R_{11}(-\omega)e^{2\psi}. \quad (5.122)$$

Damit findet man schließlich

$$\begin{aligned} R^t{}_\varphi &= -e^{-2\nu}(R_{01}e^{\nu+\psi} + R_{11}(-\omega)e^{2\psi}) - \omega e^{-2\nu+2\psi}R_{11} \\ &= -r\sin\theta e^{-\nu}R_{01} \\ &\stackrel{(5.120)}{=} -\frac{1}{2}\frac{1}{r^2\sin\theta}e^{-\nu-\lambda}\left(\partial_r[r^4\sin^3\theta e^{-\nu-\lambda}(\partial_r\omega)] + \partial_\theta[r^2\sin^3\theta e^{\lambda-\nu}(\partial_\theta\omega)]\right), \end{aligned} \quad (5.123)$$

was Gleichung (2.74) entspricht. Es ist zu beachten, dass das hier auftretende  $\omega$  eigentlich nicht identisch mit dem in Kapitel 2.2 verwendeten  $\omega$  ist, sondern mit der dort eingeführten metrischen Funktion  $L$ . Dennoch folgt (2.74) aus (5.124) mit der Entwicklung (2.67) von  $L$ .

Mit Hilfe von (5.110) bis (5.113) kann man aus den Komponenten des Ricci-Tensors (5.82) bis (5.92) die entsprechenden Komponenten des Ricci-Tensors der Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen aus Kapitel 2.1 ableiten, indem man  $\omega = 0$  setzt.

## 5.5 Äquivalenz der Gleichungen

In den vergangenen 35 Jahren wurden eine Reihe stellarer Strukturgleichungen veröffentlicht, die beliebig schnell rotierende Sterne behandeln. Besonders hervorzuheben sind

dabei die Ansätze von Bardeen und Wagoner [15]. Diese Gleichungen wurden beispielsweise von Butterworth und Ipsier gelöst [34]. Deshalb erscheint es sinnvoll, die oben abgeleiteten Gleichungen mit den hier verwendeten zu vergleichen.

Zum einen ist festzustellen, dass die Komponenten des Ricci-Tensors (5.82) bis (5.92) mit den Komponenten des Riemann-Tensors, die von Bardeen berechnet wurden [14], konsistent sind. Unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften des Riemann-Tensors kann man den Ricci-Tensor ableiten und vergleichen. Der Vergleich ist zulässig, da dieselbe Metrik verwendet wurde und die Tensoren im selben Bezugssystem berechnet wurden. Weiterhin kann man zeigen, dass die stellaren Strukturgleichungen der oben genannten Veröffentlichungen aus den Gleichungen von Abschnitt 5.2 abgeleitet werden können. Indem man die metrischen Funktionen

$$e^{\mu_2} \equiv e^\mu \quad (5.124)$$

$$e^{\mu_3} \equiv re^\mu \quad (5.125)$$

$$e^\psi \equiv r \sin\theta B e^{-\nu} \quad (5.126)$$

definiert mit  $\partial_2 = \partial_r$  und  $\partial_3 = \partial_\theta$ , kann man schließlich durch Einsetzen zeigen, dass

$$\begin{aligned} \nabla_E \cdot (B \nabla_E \nu) &= \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta B^3 e^{-4\nu} (\nabla_E \omega)^2 \\ &\quad + 4\pi [(\epsilon + P)\gamma^2(1 + V^2) + 2P] B e^{2\mu} \end{aligned} \quad (5.127)$$

$$\nabla_E \cdot [r^2 \sin^2 \theta B^3 e^{-4\nu} (\nabla_E \omega)] = -16\pi r \sin\theta B^2 e^{-2\nu} e^{2\mu} \gamma^2 V (\epsilon + P) \quad (5.128)$$

$$\nabla_E \cdot [r \sin\theta (\nabla_E B)] = 16\pi r \sin\theta B e^{2\mu} P \quad (5.129)$$

gilt. Dabei symbolisiert  $\nabla_E$  den dreidimensionalen euklidischen Gradienten in Kugelkoordinaten. Diese Gleichungen sind identisch mit denen in [34] und werden durch eine weitere partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die letzte metrische Funktion ergänzt.

Obwohl der hier vorgestellte Vergleich im Prinzip schon die Richtigkeit der abgeleiteten Strukturgleichungen (5.93) bis (5.96) bestätigt, soll dennoch auf eine weitere Äquivalenz der Gleichungen hingewiesen werden. In [26] wurden von Bonazzola et al. vier ebenfalls elliptische Differentialgleichungen abgeleitet. Durch den Vergleich mit der verwendeten Metrik findet man, dass

$$e^\nu = N \quad (5.130)$$

$$\omega = N^\varphi \quad (5.131)$$

$$e^{2\psi} = A^4 B^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (5.132)$$

$$e^{\mu_2} = \frac{A^2}{B} \quad (5.133)$$

$$e^{\mu_3} = r \frac{A^2}{B} \quad (5.134)$$

zu setzen ist. Durch Einsetzen und Vergleich kann man die Äquivalenz der Gleichungen zeigen.

## 5 *Stellare Strukturgleichungen*

Es ist diese Äquivalenz, die es rechtfertigt, statt die stellaren Strukturgleichungen (5.93) bis (5.96) direkt zu lösen, den Satz von Gleichungen aus [26] zu verwenden. Das Software-Paket Lorene ([www.lorene.obspm.fr](http://www.lorene.obspm.fr)) ist unter anderem in der Lage, diese Gleichungen mit einer Spektralmethode zu lösen.

## 6 Schnell rotierende Neutronensterne

In diesem Kapitel soll zuerst das numerische Verfahren zum Lösen der stellaren Strukturgleichungen mit dem Software-Paket Lorene vorgestellt werden. Danach werden die Ergebnisse für die drei Zustandsgleichungen FPS, SLy4 und APR bei beliebiger Rotation diskutiert. Als erstes werden generische Eigenschaften bestimmter Darstellungen z. B. der Masse-Radius-Beziehung besprochen. Danach werden die Ergebnisse für jede Zustandsgleichung gezeigt. Im Anschluß werden die Eigenschaften einiger spezieller Sterne genauer untersucht. Man sollte dieses Kapitel keinesfalls als vollständige Diskussion der Materie betrachten, sondern vielmehr als einen groben Überblick über die Möglichkeiten, die die neu entwickelten Programme bieten, und als Versuch, verschiedene Aspekte der Lösungen zu beleuchten. Insbesondere ist eine detaillierte Untersuchung der Fehler sehr aufwendig. Dies soll ansatzweise durch den Vergleich mit den Lösungen eines anderen numerischen Verfahrens im letzten Abschnitt geschehen.

### 6.1 Spektralmethode

In diesem Abschnitt soll die Multi-Domänen-Spektralmethode zum Lösen von partiellen Differentialgleichungen vorgestellt werden, wie sie im Software-Paket Lorene Anwendung findet. Der wesentliche Unterschied dieser Methode im Vergleich zu der Methode der finiten Differenzen bzw. der finiten Elemente, die gewöhnlich zum Lösen von partiellen Differentialgleichungen genutzt werden, besteht darin, dass globale Basisfunktionen gewählt werden, die sich über das gesamte Integrationsgebiet erstrecken, statt lokaler Ansatzfunktionen, die nur einen kleinen Teil überdecken. Beschreibungen dieses Verfahrens findet man unter anderem in [105], [27], [26], [20], [28], [29] und den darin zitierten Referenzen.

Für die Multi-Domänen-Spektralmethode wird der physikalische Raum in verschiedene Domänen eingeteilt, bei einem Stern werden beispielsweise das Innere und der Außenraum getrennt behandelt. Für jede Domäne wird ein Netz von Gitterpunkten im Raum festgelegt, an denen die Werte der physikalischen Größen bestimmt werden. Man wählt eine Abbildung des physikalischen Raumes auf neue Koordinaten, um insbesondere  $r = \infty$  zu behandeln. Die zu bestimmenden Funktionen, hier die metrischen Funktionen, werden mit einem Separationsansatz in eine beschränkte Reihe entwickelt. Die Wahl der Basisfunktionen ist für die Geschwindigkeit des Lösungsverfahrens entscheidend. Der  $\theta$ -Anteil wird in eine Fourier-Reihe zerlegt, für die ein schnelles Transformationsverfahren (Fast Fourier Transformation FFT) existiert. Dies erklärt den Namen Spektralmethode. Der

radiale Anteil der Funktionen wird nach Chebyshev-Polynomen entwickelt, für die es ebenfalls ein schnelles Transformationsverfahren gibt. Die Chebyshev-Polynome sind definiert über  $T_n(x) = \cos(n\psi)$  mit  $\psi = \arccos(x)$ , wobei  $x$  im Bereich zwischen  $-1$  und  $1$  liegt. Der Zusammenhang zwischen  $x$  und der physikalischen Koordinate  $r$  ist durch die oben angesprochene Abbildung gegeben, die besondere Eigenschaften der Lösungen, z. B. deren Parität, zu berücksichtigen hat. So wird die innere Domäne nur auf das Intervall  $[0, 1]$  abgebildet [28]. Man erkennt, dass die Transformation wieder durch die FFT realisiert werden kann. Das Lösen der Differentialgleichungen wurde nun verlagert auf das Finden der entsprechenden Entwicklungskoeffizienten, also dem Aufstellen und Lösen eines linearen Gleichungssystems. Die Geschwindigkeit des Transformationsverfahrens (und dessen Umkehrung) ist deshalb entscheidend, weil im Verlauf der Iterationen immer wieder zum einen die Koeffizienten aus den Funktionen bestimmt werden müssen und zum anderen die Funktionen aus den Koeffizienten.

Die konkrete Lösung des Problems ergibt sich durch eine Relaxationsmethode, da die Verteilung der Quellen zu Beginn unbekannt ist. Zum Start wählt man eine bestimmte Konfiguration, die berechnet werden soll. Diese wird spezifiziert durch den zentralen Wert der Pseudo-Enthalpie  $H_C$  (siehe unten), die mit der Zentraldichte verbunden ist, und der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$ . Die metrischen Funktionen nehmen zum Beginn der Iteration die Werte einer flachen Metrik (Minkowski-Metrik) an. Für die Materieverteilung wird eine erste Abschätzung des erwarteten Verlaufs verwendet. Die vier partiellen Differentialgleichungen sind alle Laplace-artig, und man teilt sie in den entsprechenden Laplace-Operator und die entsprechenden Quellterme auf. Dabei behandelt man die zusätzlich auftretenden einfachen Operatoren (maximal quadratisch in der ersten Ableitung der metrischen Funktionen) ebenfalls als Quellterme. Die Entwicklung dieses gesamten Quellterms in die Winkel-Eigenfunktionen des zugehörigen Laplace-Operators liefert ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Die Koeffizienten der Winkel-Eigenfunktionen erhält man durch eine Matrix-Multiplikation aus der Fourier-Entwicklung. Die gewöhnlichen Differentialgleichungen werden unter Berücksichtigung der Randbedingungen, insbesondere an den Grenzen der Domänen, gelöst. Mit den neu berechneten Werten des Gravitationsfeldes kann die Materieverteilung neu berechnet werden (die entsprechende Formel wird unten angegeben (6.2)), und die Iteration wird fortgesetzt. Im Verlauf der Iteration muss die sogenannte Virial-Identität GRV2 [26], die mit einer der Einstein-Gleichungen verbunden ist, erfüllt sein, um eine numerische Divergenz zu vermeiden. Diese Virial-Identität stellt eine Verallgemeinerung des Virialtheorem der Newtonschen Mechanik dar und ist für eine exakte Lösung der Einstein-Gleichungen erfüllt. Aus diesem Grund wird ein Parameter  $\lambda$  in diese Einstein-Gleichung eingeführt, der stets so gewählt wird, dass die Virial-Identität erfüllt ist. Damit ergibt sich die Möglichkeit die Konvergenz des Verfahren zu überwachen, indem man die Abweichung der modifizierten Einstein-Gleichung von der ursprünglichen Einstein-Gleichung betrachtet ausgedrückt durch  $\lambda$ . Am Ende der Iteration muss  $\lambda$  natürlich den Wert haben, der die ursprüngliche Einstein-Gleichung erfüllt.

In Lorene ist dieses Iterationsverfahren nochmals in ein übergeordnetes Iterationsverfahren eingebettet, das die Parameter  $H_C$  und  $\Omega$  steuert. Dabei startet man stets bei einer nicht rotierenden Konfiguration  $\Omega = 0$ . Nachdem man eine hinreichend genaue Lösung

dieser Konfiguration bestimmt hat, wird durch die schrittweise Variation von  $H_C$  bzw.  $\Omega$  die endgültige Konfiguration bestimmt.

Wie oben erwähnt benutzt Lorene nicht die Zentraldichte als Parameter eines bestimmten Modells, sondern die Pseudo-Enthalpie. Dies hat folgenden Hintergrund. Definiert man die Pseudo-Enthalpie als

$$H(P) = \int_0^P \frac{dP'}{\epsilon(P')c^2 + P'}, \quad (6.1)$$

schreibt sich Gleichung (5.109), die das hydrostatische Gleichgewicht beschreibt, nach einer Integration als

$$H(r, \theta) + \nu(r, \theta) - \ln(\gamma(r, \theta)) = \text{const.} = H(0, 0) + \nu(0, 0). \quad (6.2)$$

Dabei ist  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$  der Lorentzfaktor und es wurde starre Rotation  $\partial_r \Omega = 0$  angenommen. Die Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts hat sich also auf eine algebraische Gleichung reduziert. Das Pseudo-Enthalpiefeld ergibt sich demnach aus der Metrik und dem Geschwindigkeitsfeld  $V = e^{\psi-\nu}(\Omega-\omega)$  des Fluids. Die Pseudo-Enthalpie kann weiterhin geschrieben werden als  $H(P) = \ln(\frac{h(P)}{h_S})$  mit

$$h(P) = \frac{\epsilon c^2 + P}{n}. \quad (6.3)$$

Die Konstante  $h_S = c^2 m_B$  ist gegeben durch die Baryonenmasse  $m_B = 1,66 \cdot 10^{-24} g$ . Lorene benutzt eine kubische Hermite-Interpolation der Größe  $H(P)$ , wobei  $\frac{dP}{dH} = \epsilon c^2 + P$  gilt. Die Energiedichte und die Teilchenzahldichte ergibt sich damit aus dem Pseudo-Enthalpiefeld durch

$$\epsilon c^2 = \frac{dP}{dH} - P \quad (6.4)$$

$$n = (\epsilon c^2 + P) e^{-H} / m_B c^2. \quad (6.5)$$

Wichtig in diesem Zusammenhang ist die thermodynamische Konsistenz der Zustandsgleichung, da nur dann die obigen Beziehungen aufgrund der Gibbs-Duhem-Relation gelten. Weitere Ausführungen zur Interpolation der Zustandsgleichung findet man in [70], [20] und [105].

Einen guten Überblick über die numerischen Methoden von Lorene geben Gourgoulhon et al. in [65], [28] und [26].

## 6.2 Eigenschaften schnell rotierender Neutronensterne

Nachdem in Kapitel 4.2 die Eigenschaften langsam rotierender Neutronensterne mit einem Runge-Kutta-Verfahren berechnet wurden, sollen in diesem Kapitel die Ergebnisse für die drei hadronischen Zustandsgleichungen FPS, SLy4 und APR für beliebig schnell

rotierende Neutronensterne vorgestellt werden. Zur Berechnung der Lösungen wird das Software-Paket Lorene verwendet, das die Gleichungen von Bonazzola et al. [26] löst, welche äquivalent zu den in Kapitel 5 hergeleiteten Gleichungen sind. Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Programm `rotstar_lang` entwickelt, das auf der Basis des in Lorene enthaltenen Codes `rotstar` in der Lage ist, mehrere Konfigurationen beliebig schnell rotierender Neutronensterne zu berechnen. Der Begriff beliebig schnell rotierend ist dahingehend einzuschränken, als dass es für eine gegebene Zentraldichte eine maximale Frequenz gibt, mit der ein Stern rotieren kann. Denn ab einer bestimmten Frequenz übersteigt die Zentrifugalkraft an der Oberfläche des Sterns die gravitative Anziehung, so dass der Stern nicht in der Lage ist, Materie an der Oberfläche zu halten. Diese Grenz-Frequenz wird Keplerfrequenz genannt und liegt typischerweise bei über 1500 Hz und kann bei manchen Konfigurationen 2000 Hz erreichen.

### 6.2.1 Evolutionssequenzen und Grenzsequenzen

Die Lösungen der stellaren Strukturgleichungen bilden eine zweiparametrische Schar. Man verwendet üblicherweise die Zentraldichte und die Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$ , wobei in dieser Arbeit grundsätzlich nur starr rotierende Sterne berechnet werden, das heißt  $\Omega = \textit{konstant}$ . Alternativ kann man auch statt der Winkelgeschwindigkeit die Ruhemasse oder den Drehimpuls eines Sterns verwenden. In der Darstellung der Lösungen verwendet man gewöhnlich drei verschiedene Arten von Sequenzen, denen jeweils eine besondere physikalische Bedeutung zukommt. Zum einen wird das statische Limit berechnet, also die Konfigurationen mit  $\Omega = 0$ . Diese sind deshalb interessant, weil sie nicht rotierende bzw. langsam rotierende Sterne beschreiben. Allgemein erwartet man, dass für rotierende Sterne höhere Massen möglich sind, was anschaulich verständlich ist, da die Zentrifugalkraft den Gravitationsdruck verringert. Den statischen Konfigurationen wird die Sequenz mit den maximal rotierenden Konfigurationen gegenübergestellt. Das sind die Sterne, die mit der Keplerfrequenz rotieren. Man nennt diese Sequenz auch das Kepler-Limit, in der englischen Literatur auch *mass shed limit*. Eine andere Klasse von Sequenzen bilden die sogenannten Evolutionssequenzen. Diese beinhalten alle Konfigurationen mit konstanter Ruhemasse. Diese Sequenzen sind deshalb von Interesse, weil sich isolierte magnetisierte Neutronensterne zeitlich entlang dieser Sequenzen entwickeln. Die Ruhemasse eignet sich für die Beschreibung dieser Entwicklung, weil sie während der Entwicklung eines isolierten also insbesondere nicht akkretierenden Neutronensterns konstant bleibt. Isolierte magnetisierte Neutronensterne verlieren im Laufe der Zeit durch die Abstrahlung elektromagnetischer Wellen Drehimpuls. Verbunden mit der Änderung des Drehimpulses ist im allgemeinen eine Änderung der Winkelgeschwindigkeit. Entgegen dem Verhalten starrer Körper in der Newtonschen Mechanik kann man jedoch nicht sagen, dass eine Abnahme des Drehimpulses grundsätzlich mit einer Abnahme der Winkelgeschwindigkeit einhergeht. Es wird sich später herausstellen, dass für bestimmte Sequenzen das Phänomen des *back bending* auftritt, einer Zunahme der Rotationsfrequenz bei abnehmendem Drehimpuls. Evolutionssequenzen können in zwei Gruppen aufgeteilt werden je nachdem, wo die



Entwicklung eines Sterns endet, was von seiner Ruhemasse abhängt. Bei den sogenannten normalen Evolutionssequenzen entwickelt sich der Stern von einer schnell rotierenden Konfiguration entlang der Sequenz und endet schließlich als nicht rotierender Stern auf der Sequenz des statischen Limits. Für Sterne, deren Ruhemasse die maximal mögliche Ruhemasse statischer Sterne übersteigt, ist diese Entwicklung nicht möglich. Man nennt diese Konfigurationen supramassive Sequenzen. Sterne, die sich entlang dieser Sequenzen entwickeln, kollabieren schließlich zu einem Schwarzen Loch aufgrund von Instabilitäten gegenüber quasi-radialen Schwingungen. Diese Sequenzen werden beispielsweise in [44] besprochen. In Stergioulas Artikel [129] werden Oszillationen, empirische Formeln des Kepler-Limits und Fragen der Kausalität detailliert behandelt.

All diese hier beschriebenen Konfigurationen werden von `rotstar_lang` automatisch berechnet. Zusätzlich zu diesen drei in der Literatur gebräuchlichen Sequenzen werden in dieser Arbeit Konfigurationen mit konstanter Frequenz gezeigt. Dies hat den Hintergrund, dass der schnellste bisher beobachtete Pulsar mit einer Periode von 1,4 ms rotiert [79]. Dies ist relativ weit von der theoretisch möglichen Keplerfrequenz entfernt. Damit scheidet diese Sequenz die Konfigurationen, die derzeit beobachtbar sind, von denen, auf die es bisher noch keinen experimentellen Hinweis gibt. Die Sequenz des Kepler-Limits kann mit dem Programm `rotstar_lang_kepler` berechnet werden.

### 6.2.2 Neutronensterne der Zustandsgleichung SLy4

Bevor die Ergebnisse der drei Zustandsgleichungen FPS, SLy4 und APR diskutiert werden, soll zuerst anhand der Zustandsgleichung SLy4 allgemein der Verlauf der oben erwähnten Sequenzen in den verschiedensten Diagrammen besprochen werden. In Abbildung 6.1 sind alle stabilen Lösungen der Zustandsgleichung SLy4 gezeigt. (Zusätzlich ist noch ein kleiner Ausschnitt instabiler Lösungen des Kepler-Limits gezeigt.) Alle oben beschriebenen Sequenzen können in dieser Abbildung identifiziert werden. Die mit „Stat“ bezeichnete Sequenz ist das statische Limit. Sie entspricht der Kurve in Abbildung 4.1. Mit „Kepler“ ist das Kepler-Limit bezeichnet. Ebenso ist das sogenannte Stabilitätslimit mit „Stab“ markiert. Das Stabilitätslimit wird von allen Konfigurationen der supramassiven Evolutionssequenzen gebildet, die gerade noch stabil bzw. marginal stabil gegenüber quasi-radialen Oszillationen sind. Konfigurationen mit höherer Zentraldichte werden instabil und kollabieren zu einem Schwarzen Loch. Die Lösungen des Stabilitätslimits reichen von der nicht rotierenden Konfiguration mit maximaler Masse bis in die Nähe des Sterns mit der maximalen Masse auf dem Kepler-Limit. Die Bedingung für die Stabilität ist gegeben durch

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \epsilon_C} \right|_{M_0} < 0, \quad (6.6)$$

wobei  $J$  den Drehimpuls einer Konfiguration angibt [44] (siehe auch [149], [57] für andere Ausdrücke des Stabilitätskriteriums). Wo genau das Stabilitätslimit auf dem Kepler-Limit endet, muss für jede Zustandsgleichung einzeln bestimmt werden. Dazu hat man

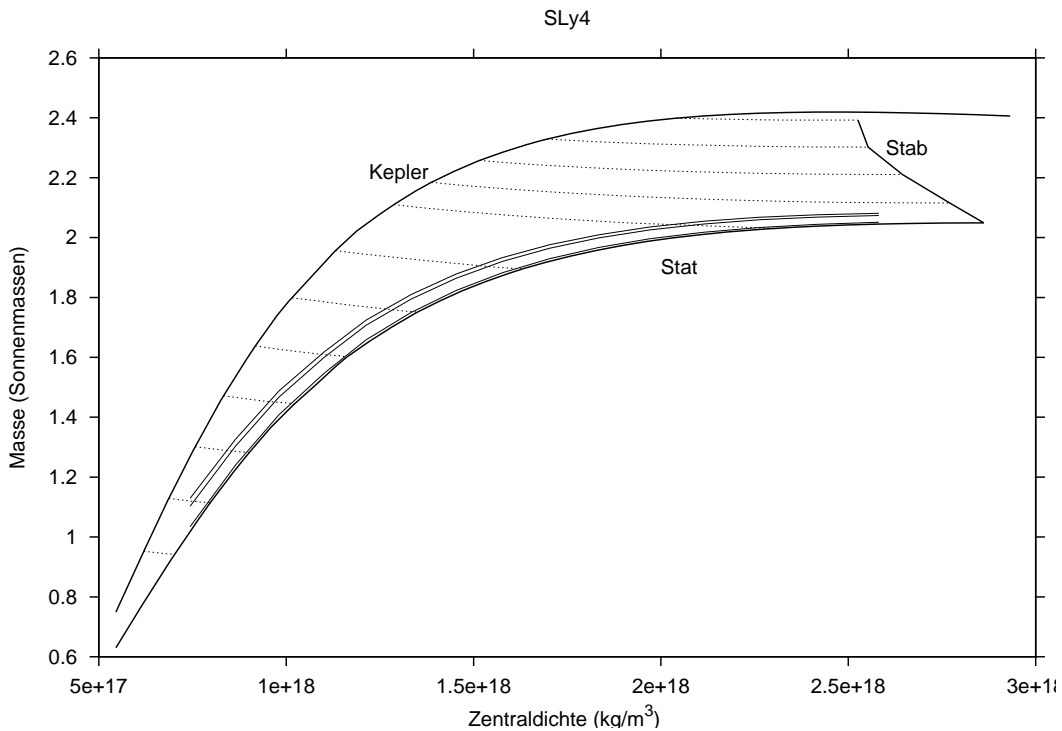


Abbildung 6.1: Masse über Zentralkichte für die Zustandsgleichung SLy4. Gezeigt sind das statische Limit, Evolutionssequenzen, Sequenzen konstanter Frequenz, das Kepler-Limit und das Stabilitätslimit (siehe Text).

eine Evolutionssequenz zu betrachten, deren Ruhemasse möglichst nahe an der maximal möglichen Ruhemasse liegt. Für manche Zustandsgleichungen endet das Stabilitätslimit bei einer Zentralkichte, die etwas kleiner ist als die Zentralkichte des Maximums des Kepler-Limits. Für andere Zustandsgleichungen ist das Maximum des Kepler-Limits stabil, das heißt das Stabilitätslimit endet bei einer höheren Zentralkichte als der des Maximums des Kepler-Limits [128]. Es gibt demnach auch stabile supramassive Evolutionssequenzen, die auf dem Kepler-Limit beginnen und auf dem Kepler-Limit enden. Das Programm `rotstar_lang` berücksichtigt dieses Kriterium automatisch und bestimmt die Konfigurationen, die das Stabilitätslimit bilden. Um das Stabilitätslimit einer einzelnen Evolutionssequenz zu bestimmen, wurde das Programm `rotstar_supraseq` geschrieben (CD).

Die gestrichelten Sequenzen in Abbildung 6.1, die sich nahezu horizontal vom Kepler-Limit zum statischen Limit erstrecken sind die Evolutionssequenzen, deren Ruhemassen von unten nach oben zunehmen. Es sind die normalen Sequenzen mit Ruhemassen von  $1,0 M_{\odot}$ ,  $1,2 M_{\odot}$ ,  $1,4 M_{\odot}$ ,  $1,6 M_{\odot}$ ,  $1,8 M_{\odot}$ ,  $2,0 M_{\odot}$ ,  $2,2 M_{\odot}$  und  $2,4 M_{\odot}$  gezeigt sowie die supramassiven Sequenzen mit  $2,5 M_{\odot}$ ,  $2,6 M_{\odot}$ ,  $2,7 M_{\odot}$  und  $2,8 M_{\odot}$ . Isolierte Neutronensterne entwickeln sich in diesem Diagramm, wie oben beschrieben wurde, von links

nach rechts.

Die drei durchgezogenen Linien, die nahezu parallel zum statischen Limit verlaufen sind die Sequenzen konstanter Rotationsperiode. Die näher am statischen Limit liegende Kurve entspricht den Konfigurationen mit 3,4 ms. Man erkennt hier, dass sich keine großen Unterschiede gegenüber dem statischen Limit und damit gegenüber den Lösungen, die man mit den Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen erhält, ergeben. In einer gemeinsamen Auftragung (nicht dargestellt) des statischen Limits und der Lösungen der Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen aus Kapitel 4.2 sind keine Unterschiede zu erkennen. Das bedeutet, dass die Behandlung eines mit 3,4 ms rotierenden Sterns als „langsam“ rotierend in Kapitel 4.2 gerechtfertigt war. Dementsprechend gilt das Gesagte erst recht für den mit 23 ms rotierenden Pulsar im Binärsystem, das ebenfalls in Kapitel 4.2 besprochenen wurde. Die nächste Sequenz entspricht einer Rotationsperiode von 1,56 ms (Backer-Pulsar). Die Lösungen, die am weitesten vom statischen Limit entfernt liegen, rotieren alle mit einer Frequenz von 719 Hz also einer Umlaufperiode von 1,4 ms.

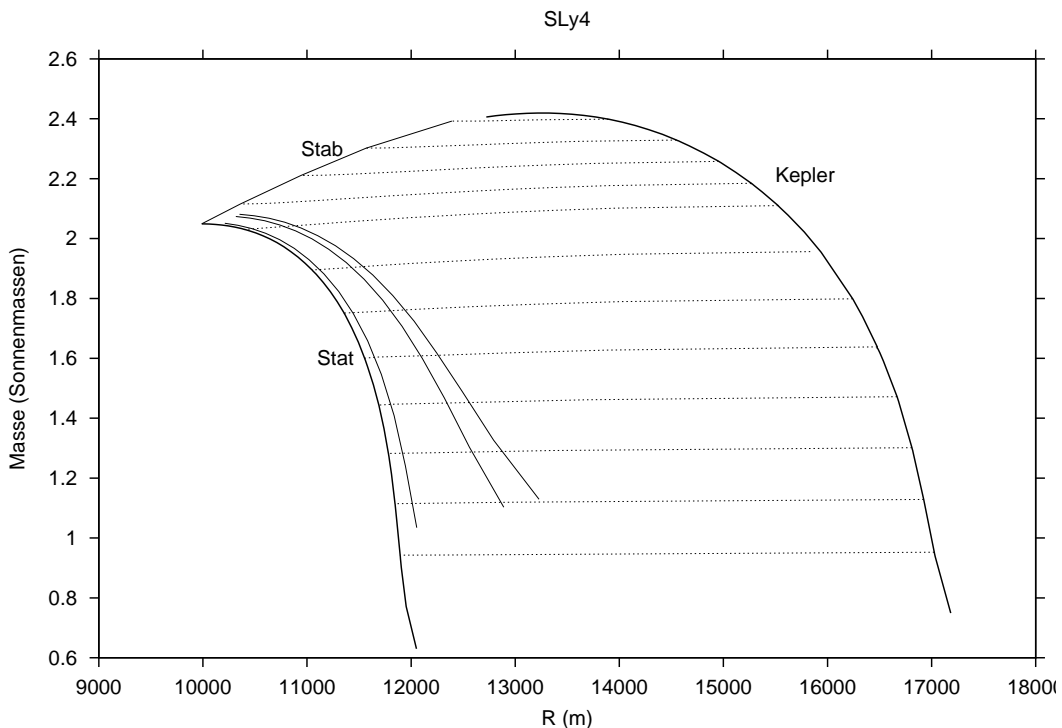


Abbildung 6.2: Masse über Radius für die Zustandsgleichung SLy4. Gezeigt sind das statische Limit, Evolutionsequenzen, Sequenzen konstanter Frequenz, das Kepler-Limit und das Stabilitätslimit.

Im Masse-Radius-Diagramm (Abbildung 6.2) sind diese verschiedenen Sequenzen ebenfalls gezeigt. Die nicht rotierenden Lösungen (statisches Limit) liegen bei kleinen Radien,

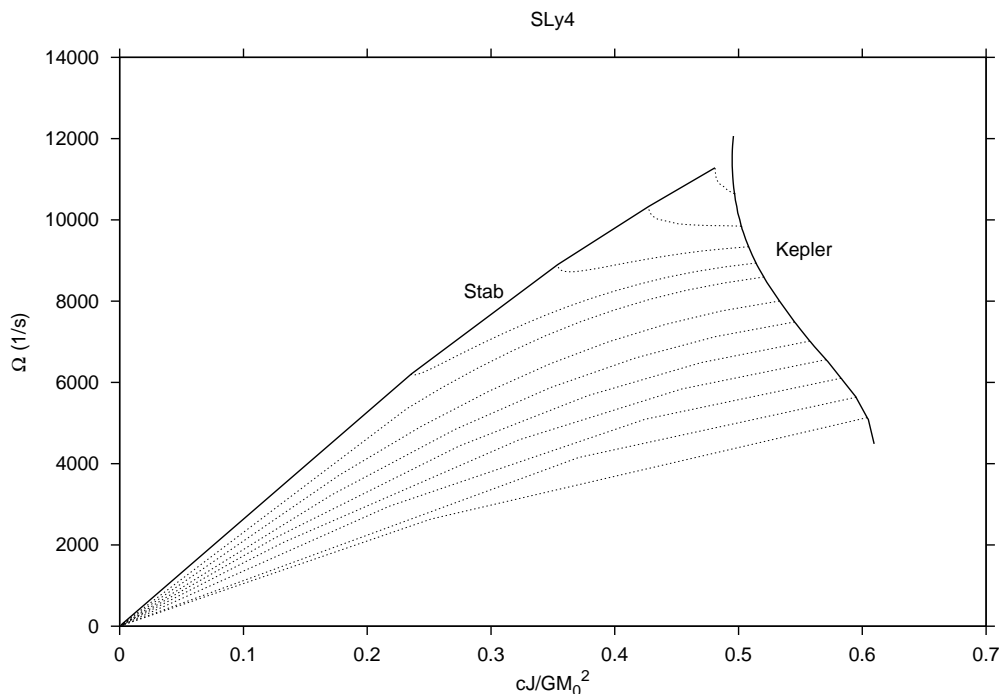


Abbildung 6.3: Winkelgeschwindigkeit über Drehimpuls/ $(\text{Ruhemasse})^2$  für die Zustandsgleichung SLy4. Gezeigt sind die Evolutionssequenzen, das Kepler-Limit und das Stabilitätslimit.

was auch dahingehend verständlich ist, als dass die durch die Rotation hervorgerufene Zentrifugalkraft den Stern „auseinander zieht“. Es sind die gleichen Sequenzen konstanter Ruhemasse eingetragen, wieder von unten nach oben mit zunehmender Ruhemasse. Man sieht, dass sich insbesondere für leichte Sterne signifikante Abweichungen beim Radius schon für einen 3,4-ms-Neutronenstern ergeben.

Mit den oben beschriebenen Programmen lassen sich noch eine Reihe weiterer Diagramme erzeugen. So ist beispielsweise in Abbildung 6.3 die Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  über einer vom Drehimpuls abhängigen Größe dargestellt. Der Drehimpuls wird durch das Quadrat der Ruhemasse geteilt, um eine dimensionslose Größe zu erhalten. Wieder sind die verschiedenen Sequenzen markiert. Es sind dieselben Evolutionssequenzen gezeigt, wobei wieder die Ruhemasse von unten nach oben zunimmt. Die normalen Evolutionssequenzen enden im Ursprung des Diagramms ( $\Omega = 0$  und  $J = 0$ ), wohingegen die supramassiven Evolutionssequenzen auf dem Stabilitätslimit enden. Wie oben beschrieben verlieren isolierte magnetisierte Neutronensterne mit der Zeit Drehimpuls, das bedeutet, sie entwickeln sich in diesem Diagramm von rechts nach links. Bei den Evolutionssequenzen mit den drei höchsten Ruhemassen kann man den Effekt des back bending beobachten. Mit abnehmendem Drehimpuls rotiert der Stern schneller. Konfigurationen des statischen Limits befinden sich alle im Ursprung des Diagramms.

### 6.2.3 Neutronensterne der Zustandsgleichungen APR und FPS

Die entsprechenden Diagramme für die Zustandsgleichungen APR und FPS sind in den Abbildungen 6.4 bis 6.9 gezeigt. Mit diesen Rechnungen kann man für jede Zustandsgleichung die maximal mögliche Masse angeben. Sie ist durch eine Konfiguration des Kepler-Limits gegeben, die sich in der Nähe des Maximums befindet, nicht zwangsläufig das Maximum selbst (siehe obige Diskussion). Für die harte Zustandsgleichung APR findet man  $2,60 M_{\odot}$ , wohingegen sich für die moderate Zustandsgleichung SLy4 ein Wert von  $2,42 M_{\odot}$  ergibt und für die weichste der drei berechneten Zustandsgleichungen FPS liegt die maximale Masse bei  $2,12 M_{\odot}$ . Die Unterschiede liegen also im Bereich von

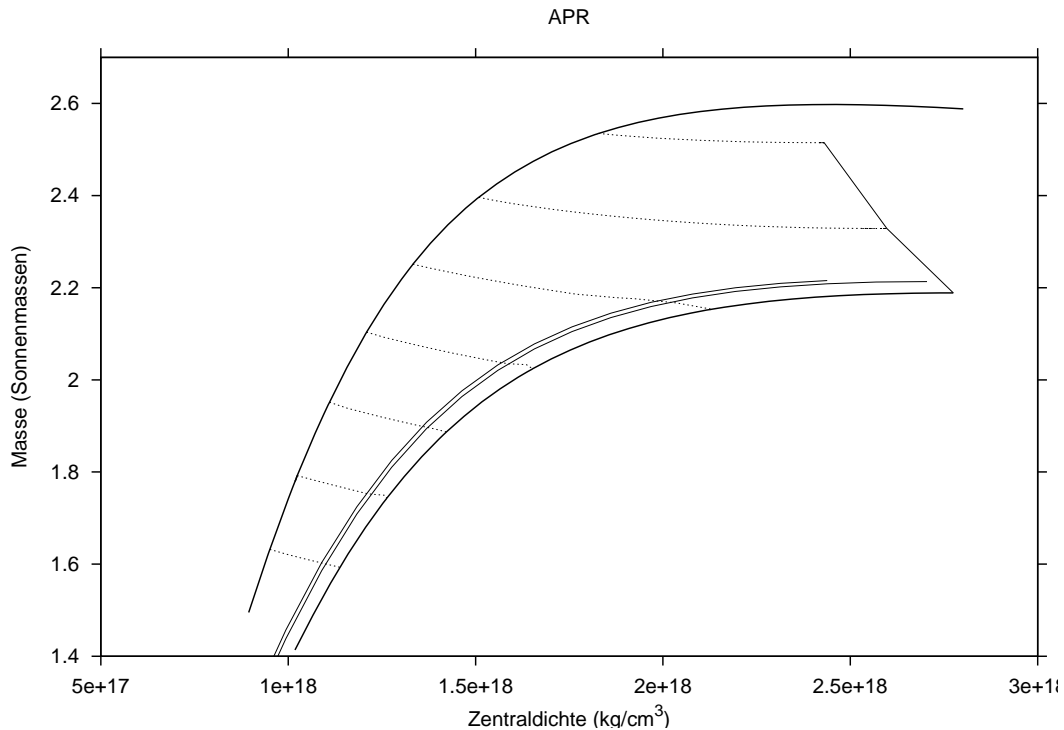


Abbildung 6.4: Masse über Zentraldichte für die Zustandsgleichung APR. Gezeigt sind das statische Limit, die Sequenzen mit konstanten Frequenzen  $f = 641$  Hz und  $f = 719$  Hz, das Kepler-Limit, das Stabilitätslimit sowie die Evolutionssequenzen mit Ruhemassen von  $1,8 M_{\odot}$ ,  $2,0 M_{\odot}$ ,  $2,2 M_{\odot}$ ,  $2,4 M_{\odot}$ ,  $2,6 M_{\odot}$ ,  $2,8 M_{\odot}$  und  $3,0 M_{\odot}$ .

einer halben Sonnenmasse. Generell ist festzustellen, dass die aufgrund der Rotation maximal möglichen Masse ungefähr 0,4 bis 0,5 Sonnenmassen über der maximalen Masse

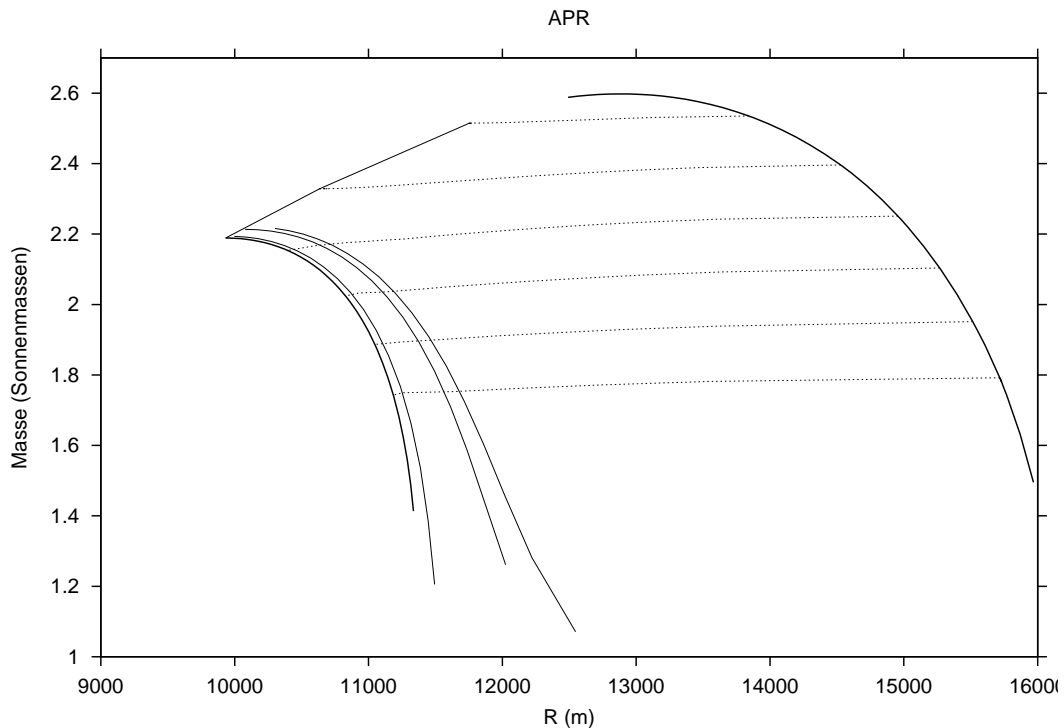


Abbildung 6.5: Radius-Massen-Beziehung für die Zustandsgleichung APR. Gezeigt sind das statische Limit, drei Sequenzen mit konstanten Frequenzen  $f = 294$  Hz,  $f = 641$  Hz und  $f = 719$  Hz, das Kepler-Limit, das Stabilitätslimit und die Evolutionssequenzen mit Ruhemassen von  $2,0 M_{\odot}$ ,  $2,2 M_{\odot}$ ,  $2,4 M_{\odot}$ ,  $2,6 M_{\odot}$ ,  $2,8 M_{\odot}$  und  $3,0 M_{\odot}$ .

der nicht rotierenden Konfigurationen liegen. Dieses bestätigt die obige Vermutung, dass für rotierende Sterne höhere Massen möglich sind. Entsprechendes gilt für die maximal möglichen Ruhemassen, die für die Zustandsgleichung FPS  $2,45 M_{\odot}$ , für die Zustandsgleichung SLy4  $2,83 M_{\odot}$  und für die Zustandsgleichung APR  $3,10 M_{\odot}$  betragen. Es fällt auf, dass diese Konfigurationen nicht die höchste Zentraldichte besitzen, da sich das Stabilitätslimit vom statischen Limit aus hin zu kleineren Zentraldichten erstreckt. Die höchste Zentraldichte wird von den statischen Konfigurationen erreicht (siehe dazu Diskussion in Kapitel 4.2). Die Zentraldichten der Sterne mit der maximal möglichen Masse liegen ungefähr  $0,4$  bis  $0,5 \cdot 10^{18} \text{ kg/m}^3$  unter den maximal möglichen Zentraldichten. Es ist bemerkenswert, dass ein großer Teil der in den Diagrammen dargestellten Sterne in der Natur nicht beobachtet wird - alle Lösungen oberhalb der 1,4-ms-Sequenz. Allgemein sind die Massen dieser Sequenz im gesamten betrachteten Bereich circa 2-6 % höher als die der statischen Lösungen bei gleicher Zentraldichte. Weiterhin erkennt man, dass die Evolutionssequenzen mit zunehmender Zentraldichte leicht abnehmen. Dies ist verständlich, da die kinetische Energie schnell rotierender Sterne (niedrigere Zentraldichte) höher

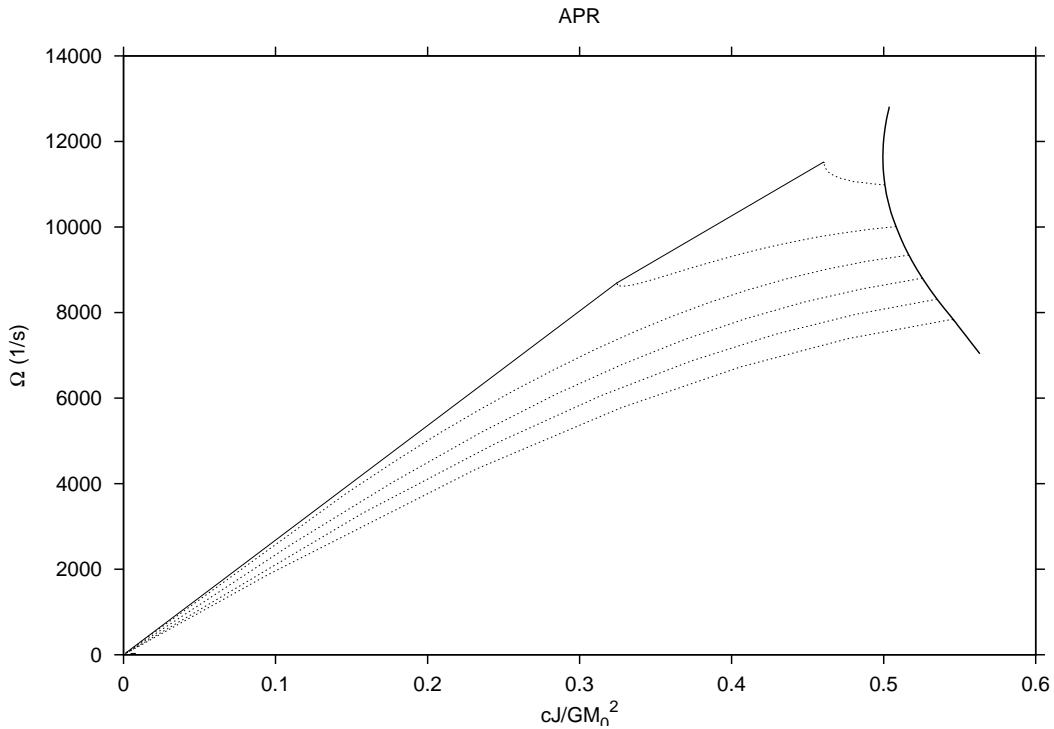


Abbildung 6.6: Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  über dem Drehimpuls/ $(\text{Ruhemasse})^2$  für die Zustandsgleichung APR. Gezeigt sind das Kepler-Limit, das Stabilitätslimit und die Evolutionssequenzen mit Ruhemassen von  $2,0 M_\odot$ ,  $2,2 M_\odot$ ,  $2,4 M_\odot$ ,  $2,6 M_\odot$ ,  $2,8 M_\odot$  und  $3,0 M_\odot$ .

ist als die langsam rotierender Sterne (höhere Zentralkichte) mit der gleichen Ruhemasse. In den Masse-Radius-Diagrammen 6.2, 6.5 und 6.8 ist die Masse über dem Eigenzylinderradius  $R = e^\psi$  der Sterne in der Äquatorialebene aufgetragen, der vom Koordinatenradius  $r$  zu unterscheiden ist. Man findet, dass die statische Konfiguration mit der höchsten Masse den kleinsten Radius besitzt (siehe dazu Ergebnisse aus Kapitel 4.2), was anschaulich klar ist, da Zentrifugalkräfte einen Stern „aufblähen“. Die Radien der Sterne, die mit der Keplerfrequenz rotieren, sind in den betrachteten Massen-Bereichen ungefähr 5 Kilometer größer als die der statischen Lösungen mit derselben Ruhemasse. Für die Familie der mit 3,4 ms rotierenden Konfigurationen ergeben sich im Radius Abweichungen von der statischen Lösung von 1 % (für Sterne mit  $1,4 M_\odot$ ), wobei die Abweichungen für leichte Sterne größer werden. Diese Abweichungen werden noch größer für Sterne, die mit 1,56 ms bzw. 1,4 ms rotieren. Auch hier sind die Abweichungen von der statischen Lösung für leichte Sterne größer. Dieses Verhalten ist einzusehen, denn bei leichten Sternen ist die gravitative Anziehung schwächer und damit kann die Zentrifugalkraft den Stern stärker verformen.

Über die Rotationsfrequenzen geben die Abbildungen 6.3, 6.6 und 6.9 Aufschluss, wo die

## 6 Schnell rotierende Neutronensterne

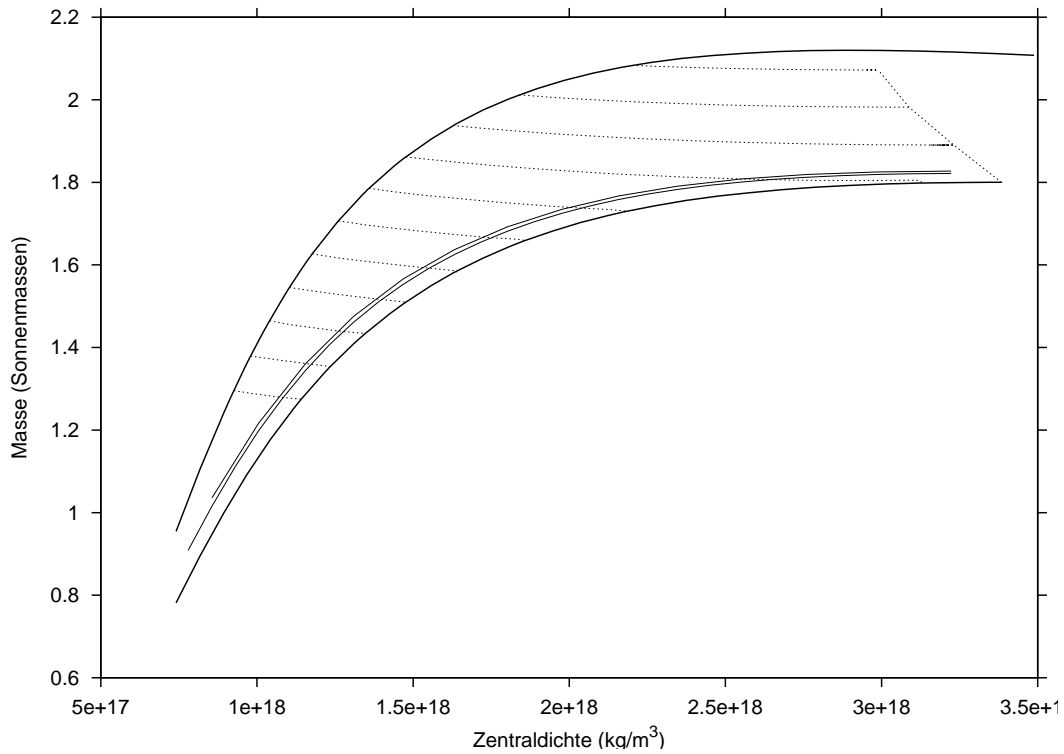


Abbildung 6.7: Masse über Zentraldichte für die Zustandsgleichung FPS. Gezeigt sind das statische Limit, drei Sequenzen mit konstanten Frequenzen  $f = 294$  Hz,  $f = 641$  Hz und  $f = 719$  Hz, das Kepler-Limit, das Stabilitätslimit sowie die Evolutionssequenzen mit Ruhemassen von  $1,4 M_{\odot}$ ,  $1,5 M_{\odot}$ ,  $1,6 M_{\odot}$ ,  $1,7 M_{\odot}$ ,  $1,8 M_{\odot}$ ,  $1,9 M_{\odot}$ ,  $2,0 M_{\odot}$ ,  $2,1 M_{\odot}$ ,  $2,2 M_{\odot}$ ,  $2,3 M_{\odot}$  und  $2,4 M_{\odot}$ .

Winkelgeschwindigkeit der Materie gemessen im Unendlichen über dem spezifischen Drehimpuls (Drehimpuls/ $(\text{Ruhemasse})^2$ ) dargestellt ist. Man findet beispielsweise, dass die maximal möglichen Rotationsfrequenzen dieser Zustandsgleichung im Bereich von 1800 Hz liegen. Diese Konfigurationen befinden sich jeweils am Schnittpunkt des Stabilitätslimits mit dem Kepler-Limit. Eine exaktere Untersuchung würde erfordern, das Ende des Stabilitätslimits auf dem Kepler-Limit genauer zu bestimmen. Allgemein kann man feststellen, dass schwerere Sterne höhere Frequenzen erreichen. Die Keplerfrequenz für Sterne mit Massen im Bereich von  $2,0 M_{\odot}$  liegen bei 1300 bis 1550 Hz. Besonders gut kann man das Phänomen des back bending, das in der Literatur auch stellenweise als spin up bezeichnet wird, in diesen Diagrammen erkennen, das heißt die Zunahme der Rotationsfrequenz bei abnehmendem Drehimpuls. Man kann diesen Effekt für alle drei Zustandsgleichungen bei den supramassiven Sequenzen beobachten. Insbesondere gibt es supramassive Evolutionssequenzen, die überhaupt keine Abnahme der Winkelgeschwindigkeit bei sinkendem Drehimpuls zeigen (jeweils die besonders schweren Sequenzen der



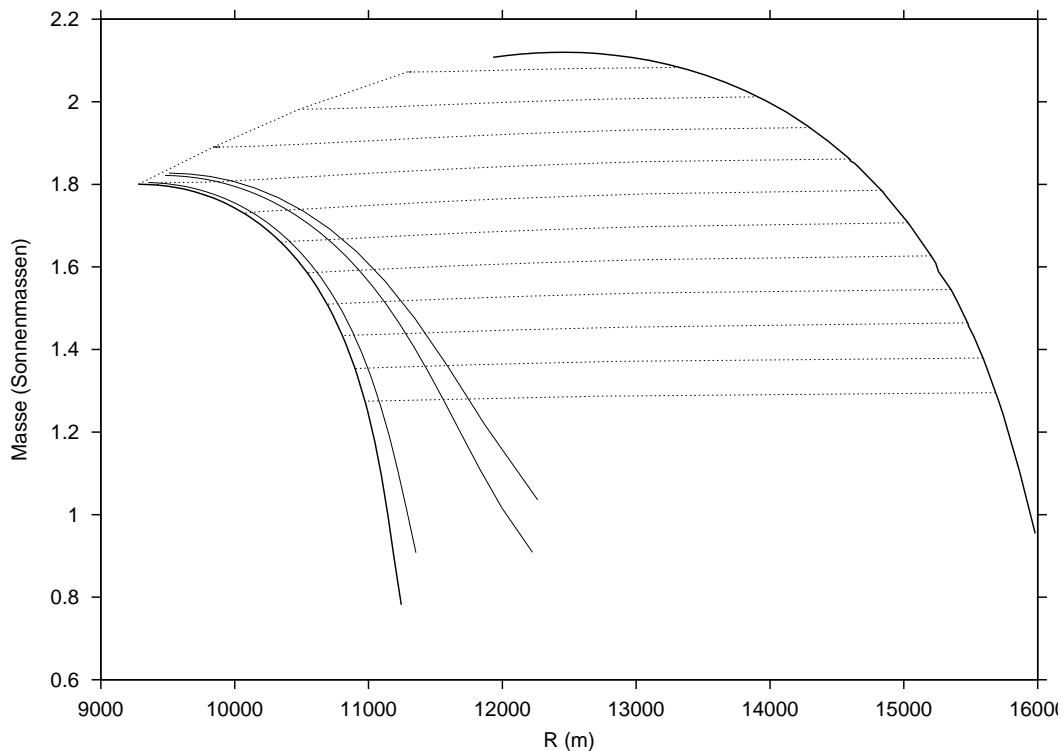


Abbildung 6.8: Radius-Massen-Beziehung für die Zustandsgleichung FPS. Gezeigt sind das statische Limit, drei Sequenzen mit konstanten Frequenzen  $f = 294$  Hz,  $f = 641$  Hz und  $f = 719$  Hz, das Kepler-Limit und das Stabilitätslimit sowie die Evolutionssequenzen aus Abbildung 6.7

jeweiligen Zustandsgleichung). Für eine tiefer gehende Diskussion dieses Phänomens auch im Zusammenhang mit möglichen Phasenübergängen sei auf [44], [149], [150] und [20] verwiesen.

Die hier gezeigten Ergebnisse sind für die Zustandsgleichung FPS konsistent mit den Ergebnissen aus [44], wobei die dortigen Diagramme mit einer Greenfunktionen-Methode erzeugt wurden. Für die anderen beiden Zustandsgleichungen sind in der Literatur keine Lösungen für schnell rotierende Sterne zu finden. Teilweise sind Berechnungen für die Zustandsgleichung APR in [23] dargestellt. Allerdings wurde für diese Rechnungen ein Modell der Zustandsgleichung APR benutzt, das relativistische Korrekturen unberücksichtigt läßt (siehe [3]). Deshalb sind die Ergebnisse nicht vergleichbar. Um die Exaktheit der hier dargestellten Rechnungen abzuschätzen, wird im nächsten Abschnitt ein Vergleich mit einem anderen numerischen Verfahren herangezogen. Weiterhin sei vor allem auf die Ergebnisse für andere Zustandsgleichungen aus dem Umfeld der Lorene-Gruppe um Bonazzola undourgoulhon hingewiesen z. B. [26], [111], [105].

Die oben erwähnten Programme berechnen nicht nur die in den Diagrammen dargestell-

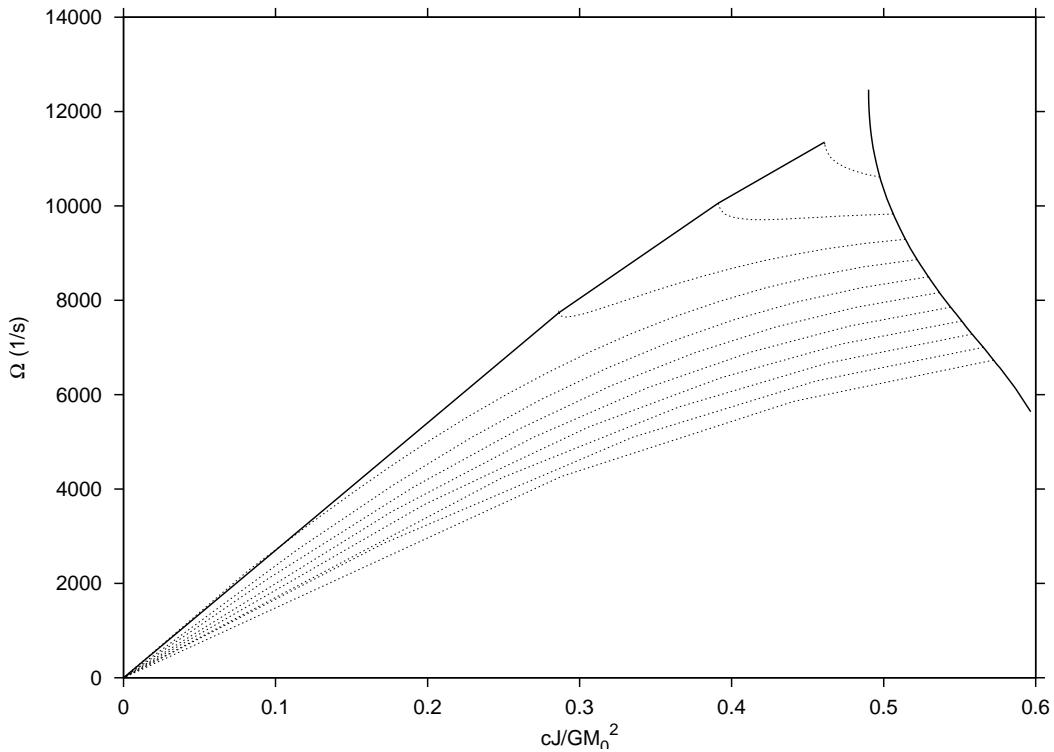


Abbildung 6.9: Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  über dem Drehimpuls/ $(\text{Ruhemasse})^2$  für die Zustandsgleichung FPS. Gezeigt sind das Kepler-Limit, das Stabilitätslimit und die Evolutionssequenzen aus Abbildung 6.7

ten Größen, sondern auch darüber hinaus noch den Zentraldruck, die Pseudo-Enthalpie, die Ruhemasse, das Verhältnis zwischen kinetischer und potentieller Energie  $T/W$ , das Quadrupolmoment und die Abplattung der Sterne. Außerdem werden zwei Größen berechnet GRV2 und GRV3, die man als allgemein relativistische Verallgemeinerung der Virial-Identität interpretieren kann (siehe [105], [129] und die darin zitierten Veröffentlichungen). Man kann diese Größen bei numerischen Rechnungen als Maß für die Abweichung von der wahren Lösung nutzen. Sie liegen bei einer Auflösung von 33 Gitterpunkten in radialer Richtung und 17 Gitterpunkten in  $\theta$ -Richtung innerhalb des Sterns unter  $1 \cdot 10^{-4}$  abhängig von der konkreten Konfiguration. Allein die Angabe des absoluten Wertes sagt natürlich nichts über die Exaktheit des numerischen Verfahrens aus. In [105] werden die Ergebnisse für verschiedene Methoden verglichen, dabei zeigte sich, dass die Spektralmethode des Lorene-Projekts die höchste Genauigkeit erzielt. All diese Größen werden in [105] diskutiert. Außerdem sind dort auch die Definitionen angegeben, wie man aus den metrischen Funktionen und der Materieverteilung diese Größen berechnet. Eine detaillierte Diskussion und Darstellung jeder einzelnen dieser Größen wäre wertvoll, es muss allerdings an dieser Stelle darauf verzichtet werden, und es wird auf die entsprechende Literatur verwiesen.

### 6.2.4 Profile

Jetzt sollen noch einzelne Modelle bzw. deren Verlauf genauer betrachtet werden. Mit dem Programm `rotstar_neu` (auf der beigelegten CD) können zum einen globale Eigenschaften eines bestimmten Sterns berechnet werden und zum anderen die metrischen und thermodynamischen Funktionen an beliebigen Gitterpunkten gespeichert werden. Damit wird es möglich verschiedenste Profile bestimmter Größen zu erstellen. Es kann der radiale Verlauf einer Größe abhängig vom Winkel  $\theta$  oder eine Äquipotential-Darstellung erzeugt werden. Im Einzelnen werden zusätzlich zu den oben erwähnten globalen Größen auch der Koordinaten-Radius am Pol und am Äquator, die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  im Zentrum und an der Oberfläche, die Rotverschiebungen  $z$  am Pol und am Äquator in und gegen die Drehrichtung sowie die innerste stabile Kreisbahn (ISCO) berechnet.

Die Dichte-Profile in der Äquatorebene von verschiedenen schnell rotierenden Sternen

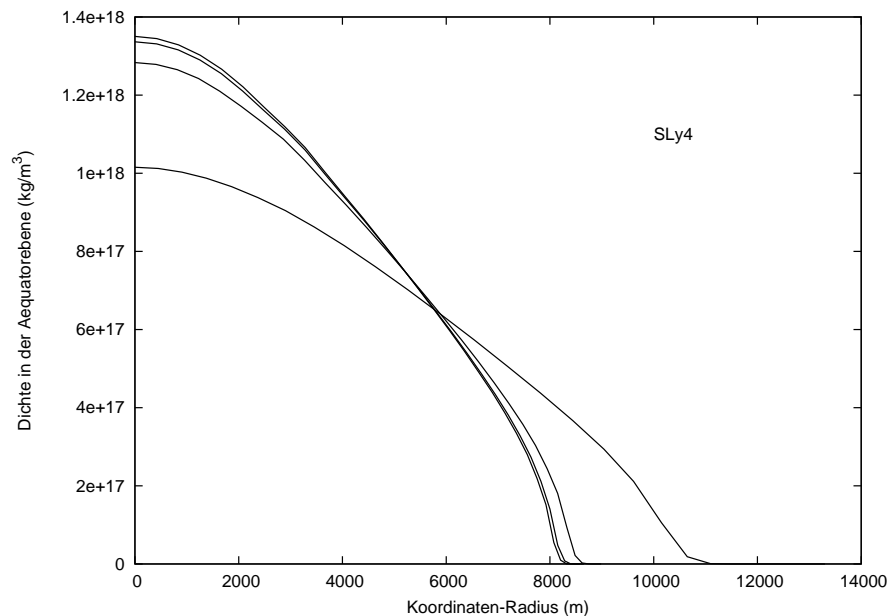


Abbildung 6.10: Der Verlauf der Dichte in der Äquatorebene für vier Konfigurationen der Zustandsgleichung SLy4. Alle Sterne gehören zur Evolutionssequenz mit einer Ruhemasse von 2,0 Sonnenmassen. Die einzelnen Eigenschaften der Sterne sind in Tabelle 6.1 aufgelistet. Mit abnehmender Zentraldichte rotieren die Sterne mit 0 Hz, 294 Hz, 641 Hz und 1192 Hz, was dem Kepler-Limit entspricht.

mit einer Ruhemasse von 2,0 Sonnenmassen sind in Abbildung 6.10 dargestellt. Diese Konfigurationen wurden für die Zustandsgleichung SLy4 berechnet. Mit abnehmender Zentraldichte sind die Sterne mit  $T=0$  ms, 3,4 ms, 1,56 ms und 0,84 ms (Kepler-Limit) gezeigt. Entsprechende globale Eigenschaften dieser Sterne sind in Tabelle 6.1 aufgelistet.

## 6 Schnell rotierende Neutronensterne

Man erkennt gut, dass sich die Struktur des mit der Keplerfrequenz rotierenden Sterns sehr deutlich von den anderen beiden unterscheidet. Auf der anderen Seite sind die Unterschiede zwischen dem mit 3,4 ms rotierenden Stern und dem nicht rotierenden Stern sehr gering. Auch dies ist wieder als Rechtfertigung der Diskussion aus Kapitel 4.2 zu sehen. Besonders auffallend ist die Verformung der Sterne aufgrund der Rotation. Dies ist in Abbildung 6.11 ersichtlich, wo das Dichte-Profil des mit 1,56 ms rotierenden Sterns in der Äquatorebene ( $\theta = 90^\circ$ ), in einem Kegel mit  $\theta = 45^\circ$  und entlang der Rotationsachse ( $\theta = 0^\circ$ ) zu sehen ist. Das Diagramm zeigt, dass bei dieser Rotationsfrequenz der Stern

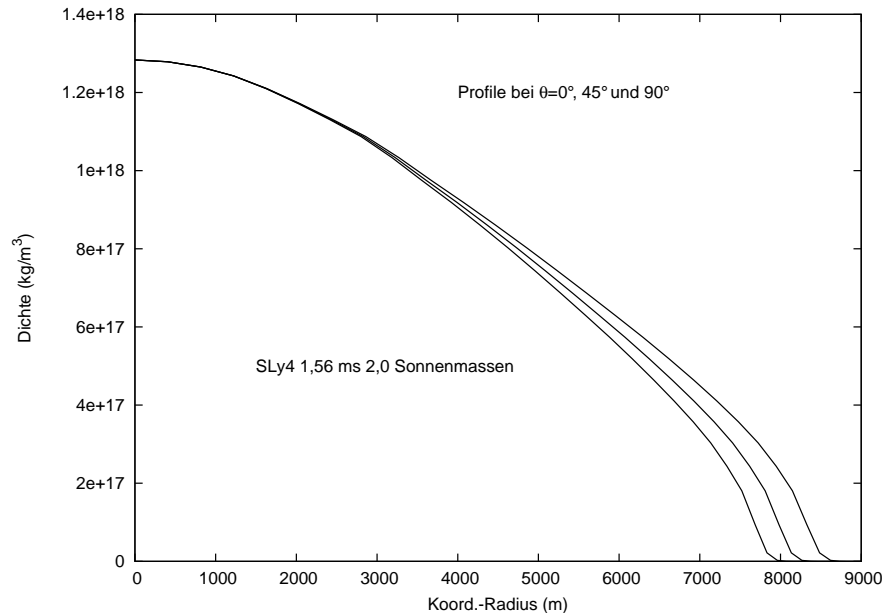


Abbildung 6.11: Verlauf der Dichte eines Sterns der Zustandsgleichung SLy4 in verschiedenen  $\theta$ -Richtungen. Der Stern rotiert mit 641 Hz und hat eine Ruhemasse von  $2,0 M_\odot$ . Gezeigt ist das Profil in der Äquatorebene, in einem Kegel mit  $\theta = 45^\circ$  und entlang der Rotationsachse. Verständlicherweise gehört das ausgedehnteste Profil zur Äquatorebene und entsprechend das schmalste Profil zur Rotationsachse. Weitere Informationen zu den Sternen findet man in Tabelle 6.1.

schon deutlich abgeplattet ist, was sich nochmals verstärkt für den mit der Keplerfrequenz rotierenden Stern zeigt (siehe Abplattung in Tabelle 6.1). Die extreme Abplattung dieser Konfiguration ist in Abbildung 6.12 dargestellt. In diesem Diagramm sind die Flächen konstanter Dichte für einen mit der Keplerfrequenz rotierenden Stern gezeigt. Der Stern hat eine Ruhemasse von  $2,0$  Sonnenmassen und wurde mit der Zustandsgleichung SLy4 berechnet. Es sind die Flächen mit  $10^{18} \text{ kg/m}^3$ ,  $10^{17} \text{ kg/m}^3$ ,  $4,3 \cdot 10^{14} \text{ kg/m}^3$  und  $10^7 \text{ kg/m}^3$  eingetragen. Zum Erstellen dieses Diagramms wurde das Programm `aequiplot` (CD) verwendet, das Daten nutzt, die mit `rotstar_neu` erzeugt wurden. Die offensichtlich unphysikalischen Schwankungen des letzten Niveaus sind auf ein unzureichendes

Interpolationsverfahren in `aequiplot` zurückzuführen. Es ist bemerkenswert, wie spitz die äußeren Hüllen in der Äquatorebene zusammenlaufen. Die Zentraldichte dieses Sterns beträgt  $1,02 \cdot 10^{18} \text{ kg/m}^3$ .

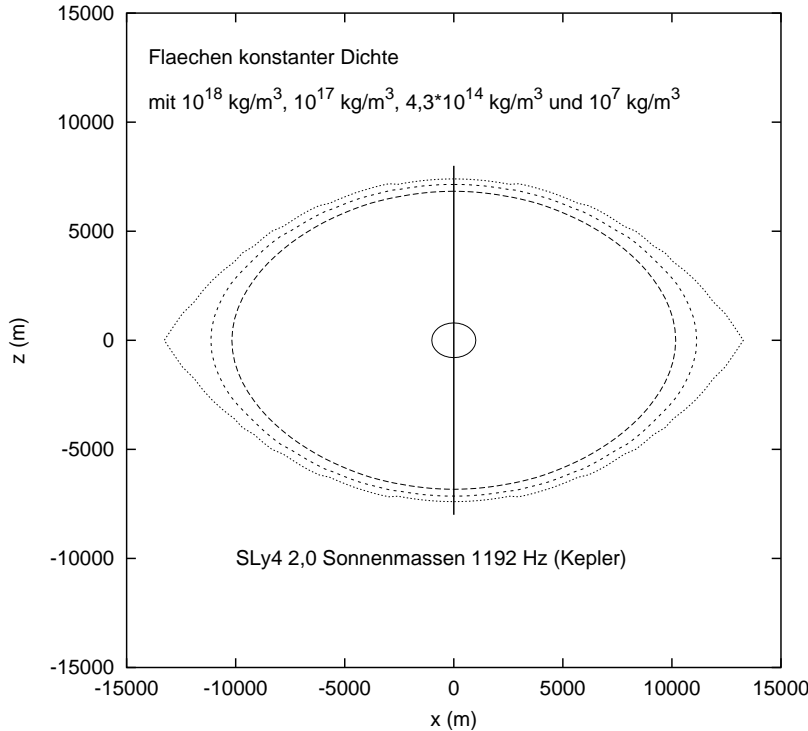


Abbildung 6.12: Die Flächen konstanter Dichte eines mit 1192 Hz rotierenden Sterns der Zustandsgleichung SLy4. Der Stern hat eine Ruhemasse von 2,0 Sonnenmassen. Es sind die Flächen mit Dichten von  $10^{18} \text{ kg/m}^3$ ,  $10^{17} \text{ kg/m}^3$ ,  $4,3 \cdot 10^{14} \text{ kg/m}^3$  und  $10^7 \text{ kg/m}^3$  gezeigt. Die durchgezogene Linie entspricht der Drehachse. Weitere Informationen zu diesem Stern findet man in Tabelle 6.1.

Abbildung 6.13 zeigt den radialen Verlauf der metrischen Funktion  $\omega$  in Einheiten der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  in der Äquatorebene. Es ist wieder der oben besprochene Stern des Kepler-Limits und der mit 1,56 ms rotierende Stern dargestellt. Die gestrichelten Linien geben jeweils den Radius des Sterns an. Sterne mit niedrigeren Rotationsfrequenzen zeigen in etwa denselben Verlauf wie der mit 1,56 ms rotierende Stern und wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht geplottet. Für den mit 1,56 ms rotierenden Stern erreicht die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  im Zentrum 57 % der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$ , um an der Oberfläche auf 18 % abzufallen. Der andere Stern hat sowohl im Zentrum einen geringeren Wert von 55 % als auch an der Oberfläche (10 % am Äquator). Dieses Verhalten ist verständlich, wenn man sich klarmacht, dass der schnellere Stern eine geringere Zentraldichte besitzt und damit weniger kompakt ist. Mit der Abplattung ein-

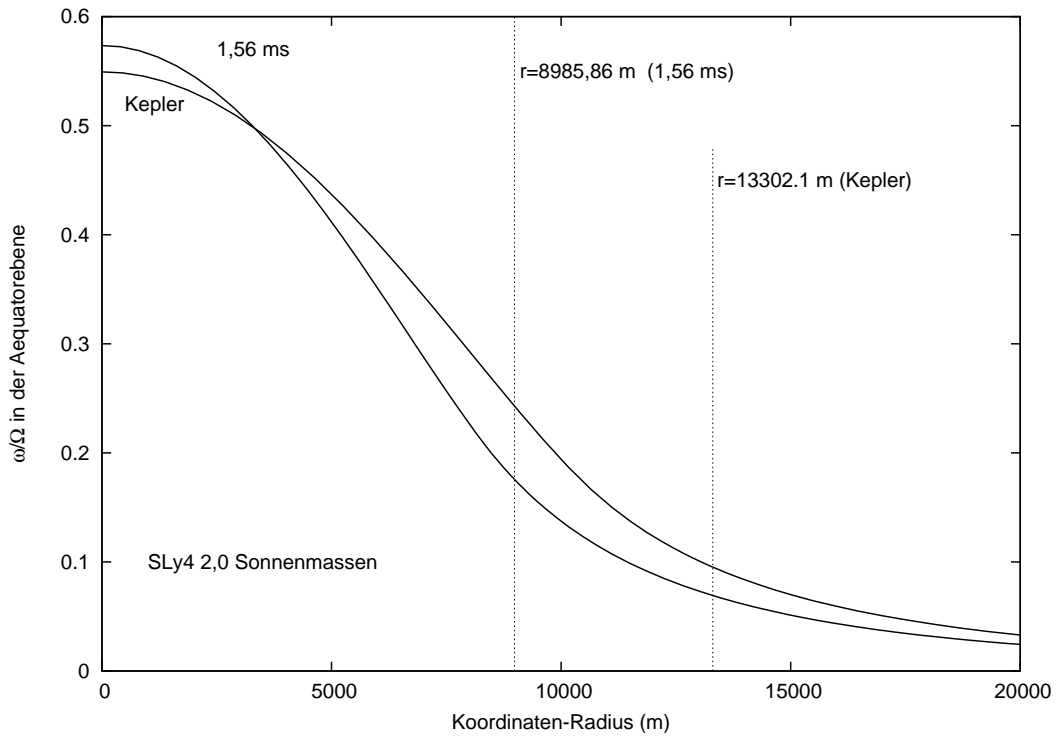


Abbildung 6.13: Der Verlauf der metrischen Funktion  $\omega$  in Einheiten von  $\Omega$ . Die beiden Sterne haben eine Ruhemasse von  $2,0 M_{\odot}$ . Es ist die Konfiguration des Kepler-Limit und ein mit 641 Hz rotierender Stern gezeigt. Die gestrichelten Linien markieren die jeweilige Oberfläche des Sterns. Weitere Informationen zu den Sternen findet man in Tabelle 6.1.

her geht die Ausbildung eines Quadrupolmoments, welches in der Tabelle angegeben ist. Ebenso findet man dort den Drehimpuls. Das Trägheitsmoment eines Sterns ist dabei definiert als  $I = J/\Omega$ . Außerdem sind in dieser Tabelle noch verschiedene Rotverschiebungen angegeben, die sich je nach dem unterscheiden, wo und in welche Richtung das entsprechende Licht emittiert wird. Für den mit der Keplerfrequenz rotierenden Stern ergibt sich sogar eine Blauverschiebung, wenn das Licht am Äquator in Rotationsrichtung abgestrahlt wird.

Für eine Fehlerbetrachtung eignen sich wie oben erwähnt in gewisser Weise die Größen GRV2 und GRV3, die für diese Konfigurationen im Bereich  $10^{-4}$  liegen. Wichtiger für die Fehleranalyse ist jedoch der Vergleich von Lösungen, die mit unterschiedlichen numerischen Verfahren gewonnen wurden [105]. Aus diesem Grund sollen im nächsten Kapitel die mit Lorene berechneten Lösungen mit den Lösungen eines anderen Verfahrens verglichen werden.

## 6.2 Eigenschaften schnell rotierender Neutronensterne

Energiedichte ( $10^{18} kg/m^3$ )	1,350	1,336	1,283	1,0154
Frequenz (Hz)	0	294,11	641,03	1191,89
grav. Masse ( $M_{\odot}$ )	1,75103	1,75223	1,7596	1,7991
Ruhemasse ( $M_{\odot}$ )	2,00076	2,00000	2,00000	2,0005
Zylinderradius (Äqu.) (m)	11356,2	11440,6	11804,3	16200,7
Winkelgeschwindigkeit $\Omega$ (1/s)	0	1847,95	4027,71	7488,87
Winkelgeschw. $\omega$ im Zentrum (1/s)	0	1065,87	2309,87	4114,05
$\omega$ am Äquator (1/s)	0	334,80	707,41	713,55
$\omega$ am Pol (1/s)	0	341,43	782,39	1336,88
Koord.-Radius (Äquator) (m)	8575,52	8653,13	8985,86	13302,1
Koord.-Radius (Pol) (m)	8575,52	8524,65	8318,77	7439,57
Abplattung	1	0,985	0,9258	0,5593
Drehimpuls ( $c/GM_{\odot}^2$ )	0	0,3820	0,8731	2,1816
T/W	0	0,00434	0,02201	0,1146
Quadrupolmoment ( $kg m^2$ )	0	$9,9932 \cdot 10^{35}$	$5,1993 \cdot 10^{36}$	$3,375 \cdot 10^{37}$
$z^{Pol}$	0,355047	0,3563	0,3618	0,3743
$z_{forward}^{Äquator}$	0,355047	0,2292	0,0827	-0,2776
$z_{backward}^{Äquator}$	0,355047	0,4879	0,6626	1,0910
GRV2	0,000143	0,000128	-0,000117	-0,000108
GRV3	-0,000206	-0,000182	0,000118	$7,98 \cdot 10^{-5}$
Zylinderradius des ISCO (m)	15514,5	14555,6	13681,6	16200,7

Tabelle 6.1: 4 Konfigurationen für die Zustandsgleichung SLy4

### 6.3 Vergleich mit RNS-Code

Um Fehler abzuschätzen, zieht man häufig den Vergleich mit anderen numerischen Methoden heran. Der sogenannte RNS-Code wurde von Stergioulas entwickelt und verwendet Greenfunktionen, um die Einstein-Gleichungen zu lösen [128], [127]. Dieses Programm ist im Internet frei verfügbar ([www.gravity.phys.uwm.edu/rns/](http://www.gravity.phys.uwm.edu/rns/)) und im Vergleich zu Lorene weniger vielseitig aber dafür relativ einfach zu bedienen. Beschreibungen und Literaturhinweise findet man ebenfalls unter oben genannter Internetadresse.

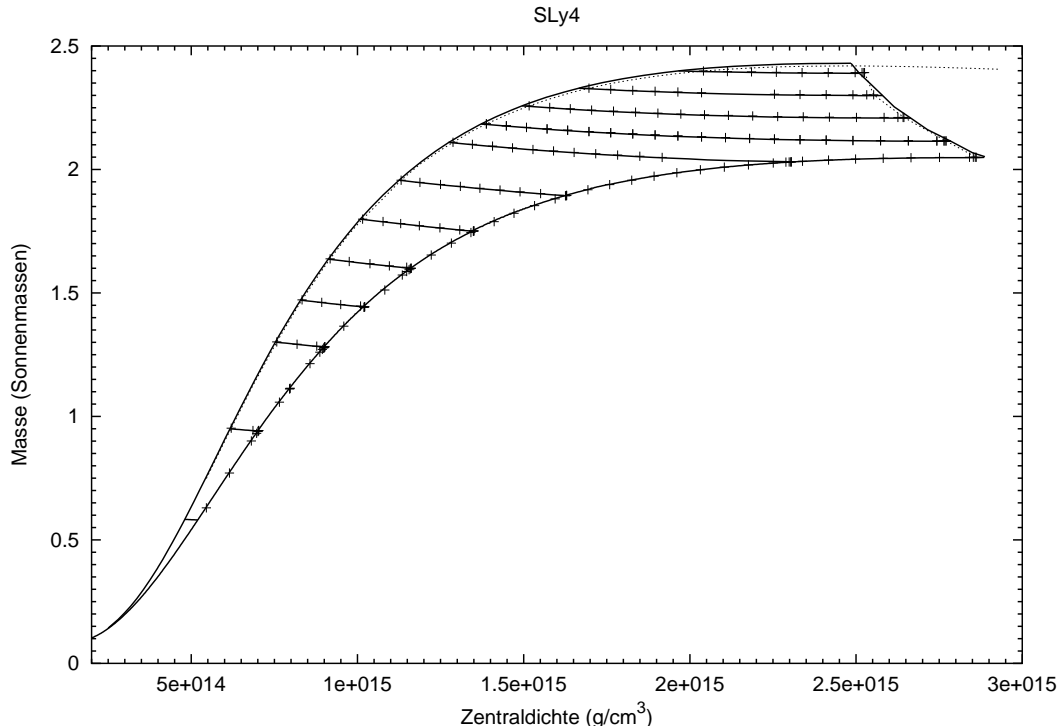


Abbildung 6.14: Das Masse-Zentraldichte-Diagramm der Zustandsgleichung SLy4. Die durchgezogenen Linien beziehen sich auf den RNS-Code, gestrichelte Linien und Punkte beziehen sich auf Ergebnisse, die mit Lorene gewonnen wurden. Es sind die Evolutionssequenzen mit  $0,6 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$ ,  $1,4 M_{\odot}$ ,  $1,6 M_{\odot}$ ,  $1,8 M_{\odot}$ ,  $2,0 M_{\odot}$ ,  $2,2 M_{\odot}$ ,  $2,4 M_{\odot}$ ,  $2,5 M_{\odot}$ ,  $2,6 M_{\odot}$ ,  $2,7 M_{\odot}$  und  $2,8 M_{\odot}$  eingetragen sowie das statische Limit, das Kepler-Limit und das Stabilitätslimit.

In Abbildung 6.14 ist das Masse-Zentraldichte-Diagramm, das mit dem RNS-Code erzeugt wurde, mit dem von Lorene überlagert. Die durchgezogenen Linien beziehen sich auf den RNS-Code, während gestrichelte Linien und Datenpunkte zu Lorene gehören. Offensichtlich stimmen die beiden Resultate sehr gut überein. Man findet typischerweise



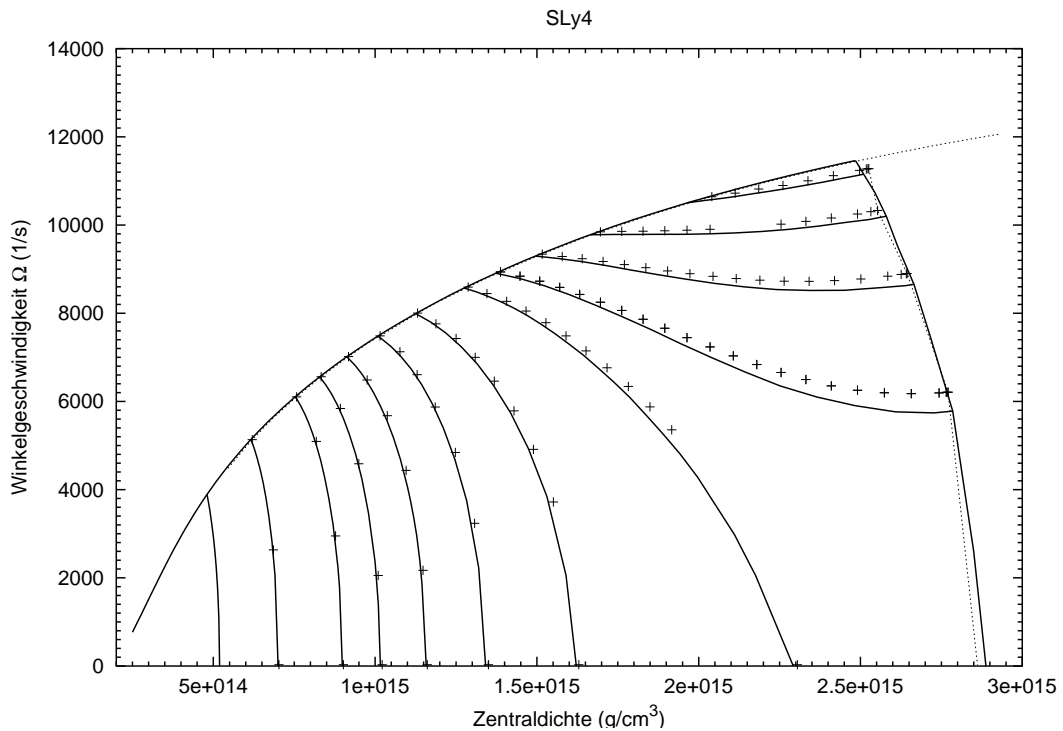


Abbildung 6.15: Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  über Zentraldichte für die Zustandsgleichung SLy4. Die durchgezogenen Linien beziehen sich auf den RNS-Code, gestrichelte Linien und Punkte beziehen sich auf Ergebnisse, die mit Lorene gewonnen wurden. Es sind dieselben Sequenzen wie in Abbildung 6.14 gezeigt.

Abweichungen im Bereich von 0,2 bis 0,3 %. Für das Kepler-Limit ergeben sich größere Fehler von ungefähr 0,5 %. Für das Masse-Radius-Diagramm (nicht dargestellt) liegen die Fehler in der gleichen Größenordnung. Besonders im Bereich des Kepler-Limits und des Stabilitätslimits erscheinen die Resultate von Lorene vertrauenswürdiger, da der RNS-Code bei unterschiedlicher Genauigkeit leicht veränderte Ergebnisse liefert. Insgesamt findet man also eine sehr gute Übereinstimmung, was zusammen mit den Ergebnissen für GRV2 und GRV3 für sehr präzise Resultate spricht. Es blieb allerdings an dieser Stelle eine Fehlerquelle noch unberücksichtigt und zwar Effekte, die sich durch die Interpolation der Zustandsgleichung ergeben.

Erhebliche Unterschiede ergeben sich jedoch bei Größen, die die Rotation betreffen. In Abbildung 6.15 ist die Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  über der Zentraldichte gezeigt mit der gleichen Darstellungsweise wie in Abbildung 6.14. Man findet Abweichungen von bis zu 8% (bei der Evolutionssequenz mit einer Ruhemasse von  $2,1 M_{\odot}$ ), was absoluten Werten von 100 Hz in der Rotationsfrequenz entspricht. Noch größer sind die Abweichungen beim Stabilitätslimit. Insbesondere in dieser Region sind die Resultate des RNS-Codes weniger

## 6 *Schnell rotierende Neutronensterne*

präzise. Es zeigte sich, dass die Bestimmung des Stabilitätslimits mit diesem Programm eine sehr hohe Genauigkeit erfordert.

Es sei noch auf den Artikel von Nozawa et al. [105] hingewiesen, der sich intensiv mit dem Vergleich verschiedener numerischer Methoden beschäftigt.

## 7 Quarksterne

Seit drei Jahrzehnten wird über die Möglichkeit diskutiert, dass es in Neutronensternen Phasen von freien Quarks gibt. Dabei lassen sich drei grundsätzlich verschiedene Modelle unterscheiden abhängig vom Übergang der gewöhnlichen Kernmaterie zur Quarkmaterie. Dies ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Zum einen wurde spekuliert, dass der absolute Grundzustand von Materie aus up-, down-, und strange-Quarks besteht (strange matter hypothesis) [25], [144]. Damit verbunden ist die Existenz von sogenannten Seltsamen Sternen bestehend aus dieser Materie des absoluten Grundzustandes, strange matter genannt. Eine andere Möglichkeit wären Hybrid-Sterne, die einen Kern aus Quarkmaterie besitzen. Für eine Zustandsgleichung, die solch einen Stern beschreibt, sollen in diesem Kapitel die Eigenschaften dieser Hybrid-Sterne berechnet werden. Eine letzte Möglichkeit bilden die gemischten Hybrid-Sterne, in denen es gemischte Phasen mit gleichzeitig auftretender Kern- und Quarkmaterie gibt. Dieses Kapitel ist derart organisiert, dass zuerst die strange matter hypothesis und als deren Konsequenz die Seltsamen Sterne besprochen werden, gefolgt von einem Abschnitt der das MIT-Bag-Modell zur Beschreibung von Quarkmaterie einführt. Nach der Konstruktion des Phasenübergangs werden im letzten Abschnitt die Ergebnisse für einen schnell rotierenden Hybrid-Stern diskutiert.

### 7.1 Strange matter hypothesis und Seltsame Sterne

Die strange matter hypothesis wurde unabhängig von Bodmer [25] und Witten [144] formuliert und beinhaltet die Vermutung, dass der absolute Grundzustand von Materie nicht durch Eisen sondern durch die sogenannte strange matter gebildet wird, bestehend aus ungefähr gleichen Teilen von up-, down- und strange-Quarks, die nicht auf ein Baryon beschränkt bleiben. Ausgedrückt wird diese Hypothese durch den Vergleich der Energie pro Baryon für die verschiedenen Zustände. Dabei zeigt eine theoretische Analyse, dass strange matter eine Energie pro Baryon von unter 930 MeV haben könnte, der Energie pro Baryon von Eisen. Sollte diese Vermutung korrekt sein, hätte es enorme Auswirkungen auf die Physik des frühen Universum, die zeitliche Entwicklung des Universums, die Physik von kompakten Objekten sowie Laborexperimente (siehe [141]). Auf den ersten Blick scheint diese Annahme nicht sehr wahrscheinlich einfach aus den Grund, dass man diese Form von Materie bisher noch nicht beobachtet hat. Allerdings kann es auch nicht ausgeschlossen werden, denn gewöhnliche Materie kann sich nicht direkt in strange matter umwandeln, da keine strange-Quarks vorhanden sind. Es ist nicht schwierig, sich mit einem einfachen Bag-Modell einen Überblick zu verschaffen ([53], [42], [141], [144],

[60], [140], [94] und nächster Abschnitt). Eine allgemein verständliche Einführung findet man in [33]. Man kann die Energie pro Baryon für Quarkmaterie, die ausschließlich aus up- und down-Quarks besteht (2-flavor-Quarkmaterie), im Rahmen dieses Modell berechnen und findet einen Wert abhängig von der unbekanntes Bag-Konstante. Aufgrund der Tatsache, dass gewöhnliche Materie stabil ist, kann man folgern, dass eine Bag-Konstante  $B^{1/4}$  kleiner als 145 MeV ausgeschlossen ist. Bezieht man in einem ersten Schritt masselose strange-Quarks in die Berechnung mit ein, so findet man für die Energie pro Baryon einen um 100 MeV niedrigeren Wert als für die 2-flavor-Quarkmaterie. Dieser Wert könnte unter den 930 MeV des Eisens liegen. In diesen Rechnungen nimmt man masselose nicht-wechselwirkende Quarks an. Der Unterschied entsteht durch eine dichtere Packung der Teilchen in der 3-flavor-Quarkmaterie (drei Fermi-Seen statt zwei). Dieses Ergebnis steht nicht im Widerspruch zur Beobachtung, denn eine Umwandlung eines Atomkerns in strange matter würde eine gleichzeitige Transformation von up- und down-Quarks in strange-Quarks erfordern. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Übergang, der durch die schwache Wechselwirkung vermittelt wird, ist sehr gering. Die Umwandlung muss simultan erfolgen, da Hyperkerne (Kerne mit strange-Quark) energetisch ungünstiger als gewöhnliche Atomkerne sind. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Atomkern mit der Baryonenzahl  $A$  in ein strange nugget verwandelt, ist deshalb proportional zu  $(g_{\text{schwach}})^{2A}$  (mit der schwachen Kopplungskonstanten  $g_{\text{schwach}}$ ). Damit ergibt sich eine Lebensdauer der normalen Materie, die auch im Vergleich zum Alter des Universums noch sehr lang ist (für  $A \geq 6$  mehr als  $10^{60}$  Jahre). In einem weiteren Schritt können die strange-Masse und Wechselwirkungen berücksichtigt werden, was die Ergebnisse jedoch innerhalb dieses Modells qualitativ nicht beeinflusst, sofern die strange-Masse hinreichend klein im Vergleich zum chemischen Potential ist, so dass strange-Quark-Zustände besetzt werden. Eine nicht verschwindende strange-Masse sowie eine nicht verschwindende Kopplungskonstante der QCD reduzieren die Bag-Konstante (bei gleicher Energie pro Baryon) [53], [94].

Wie Witten sehr schön in seinem Artikel darlegt, geht von einem Nugget bestehend aus strange matter keine Gefahr für die restliche Materie aus, da sich eine positive Ladung an der Oberfläche bilden wird, die gewöhnliche Kerne abstößt. Auf der anderen Seite jedoch können elektrostatische Potentiale die Absorption von Neutronen nicht verhindern. Dies ist der Grund für die Annahme von Seltsamen Sternen. Das heißt, dass es sich bei dem, was man als Neutronensterne beobachtet, in Wahrheit um Quarksterne handeln sollte. Unabhängig davon wird versucht, strange matter experimentell nachzuweisen. Dabei kann man die Bemühungen grob in drei Klassen einteilen. Zum einen bringt man kosmische Strahlen mit strange nuggets in Verbindung (Centauereignisse). Außerdem sucht man nach diesen Phasen in gewöhnlicher Materie und versucht strange matter in Beschleunigern zu produzieren. Einen Überblick gibt Weber in [140] und [141].

Auf die Möglichkeit von Seltsamen Sternen soll an dieser Stelle näher eingegangen werden. Im Gegensatz zu gewöhnlichen Neutronensternen sind Seltsame Sterne durch die starke Wechselwirkungen (selbst-)gebunden. Gravitation verdichtet den Stern nur noch zusätzlich. Das bedeutet, dass es keine minimale Masse für Seltsame Sterne gibt. Auf der anderen Seite bleibt aber die Schranke für die maximale Masse bestehen. Sterne mit einer

zu hohen Zentraldichte kollabieren ebenso zu Schwarzen Löchern wie gewöhnliche Neutronensterne. In verschiedenen Veröffentlichungen findet man Massen-Radius-Beziehungen für diese Objekte (siehe beispielsweise [140], [141], [60], [68], [63], [65]). Insbesondere gibt es auch Modelle, die über das einfache MIT-Bag-Modell hinausgehen und entweder im MIT-Bag-Modell weitere Effekte einbeziehen oder ein anderes Modell benutzen. So werden z. B. von Buballa und Oertel [31] Seltsame Sterne innerhalb des Nambu-Jona-Lasinio-Modells diskutiert, wobei die Autoren finden, dass strange matter nicht absolut stabil ist. Ein anderes häufig benutztes Modell ist das von Dey et al. [46]. Im Allgemeinen ergeben sich für Seltsame Sterne im Vergleich zu gewöhnlichen Neutronensternen deutlich geringere Radien (Abbildung 7.2). Die Beobachtung von Neutronensternen hängt

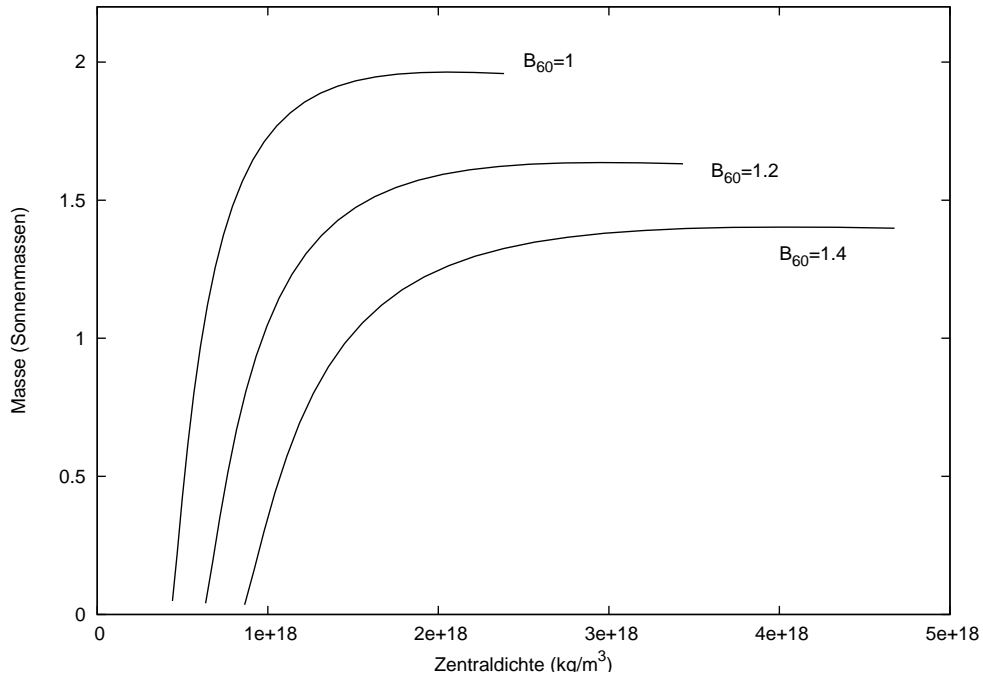


Abbildung 7.1: Masse über Zentraldichte für Seltsame Sterne. Gezeigt sind 3 Modelle masseloser nicht wechselwirkender Quarks mit verschiedener Bag-Konstante (mit  $B_{60} = B/(60\text{MeV}/fm^3)$ ). Teilweise sind auch instabile Sterne dargestellt.

aufs Engste mit Effekte an der Oberfläche zusammen. Aus diesem Grund diskutiert man häufig Modelle, bei denen der Seltsame Stern eine Hülle aus gewöhnlicher Materie besitzt. Wie oben angedeutet, sorgen elektrische Wechselwirkungen dafür, dass ein Kontakt zwischen normaler Materie und Quarkmaterie verhindert wird. Verschiedenste Artikel befassen sich mit diesen Sternen und dem Einfluss dieser Kruste, wobei man auch rotierende Seltsame Sterne mit  $\Omega_{Kern} \neq \Omega_{Kruste}$  nicht ausschließt (Überblick in [140]). Besonders wichtig ist dabei, welche Unterschiede man bei Beobachtungen von Seltsamen Sternen im Vergleich zu gewöhnlichen Neutronensternen erwartet (z. B. kleinere Radien).

## 7 Quarksterne

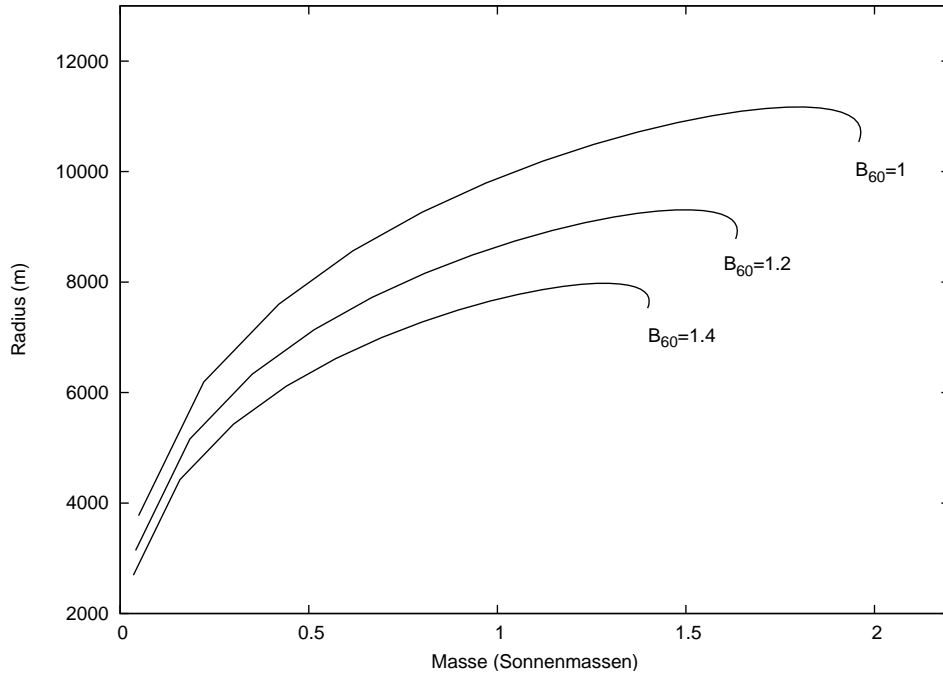


Abbildung 7.2: Masse-Radius-Beziehung für drei Seltsame Sterne mit unterschiedlicher Bag-Konstante ( $B_{60} = B/(60\text{MeV}/\text{fm}^3)$ ). Deutlich erkennbar sind die instabilen Konfigurationen (siehe Kapitel 4.2).

Innerhalb des oben erwähnten MIT-Bag-Modells kann man die Zustandsgleichung von strange matter als

$$P = \frac{1}{3}(\epsilon - 4B) \quad (7.1)$$

schreiben mit der Bag-Konstanten  $B^{1/4} = (B \cdot (\hbar c)^3)^{1/4}$ . Und es stellt sich heraus, dass diese einfache Form  $P = a(\epsilon - \epsilon_S)$  mit den Konstanten  $a$  und  $\epsilon_S$  auch viele andere Modelle beschreibt [68], [148], [63]. Wie man an Gleichung (7.1) sieht, kann man  $\epsilon_S$  als Energiedichte an der Oberfläche eines Seltsamen Sterns interpretieren. Die hier eingeführten Konstanten sind physikalische Parameter, die allerdings unbekannt sind. Man kann lediglich einige Schranken annehmen. Deshalb werden sie bei der Berechnung von speziellen Modellen als freie Parameter behandelt. Diese einfache Form der Zustandsgleichung ist für die Berechnung von Eigenschaften der Seltsamen Sterne sehr vorteilhaft. Schnell rotierende Seltsame Sterne werden unter anderem in [63], [65] und [62] behandelt. Den Effekt des back bending konnte man ebenfalls für Seltsame Sterne feststellen.

Eine besonders interessante Messung im Zusammenhang mit Seltsamen Sternen wurde erst kürzlich veröffentlicht. In [96] wird die Messung der Masse, des Radius und der gravitativen Rotverschiebung von MXB 1728-34 anhand des Röntgenspektrums geschildert. Dabei werden bestimmte Modelle für die Atmosphäre vorausgesetzt. Die Autoren geben jeweils zwei verschiedene Werte an, für den Radius entweder 4,6 km oder 5,3 km, für die

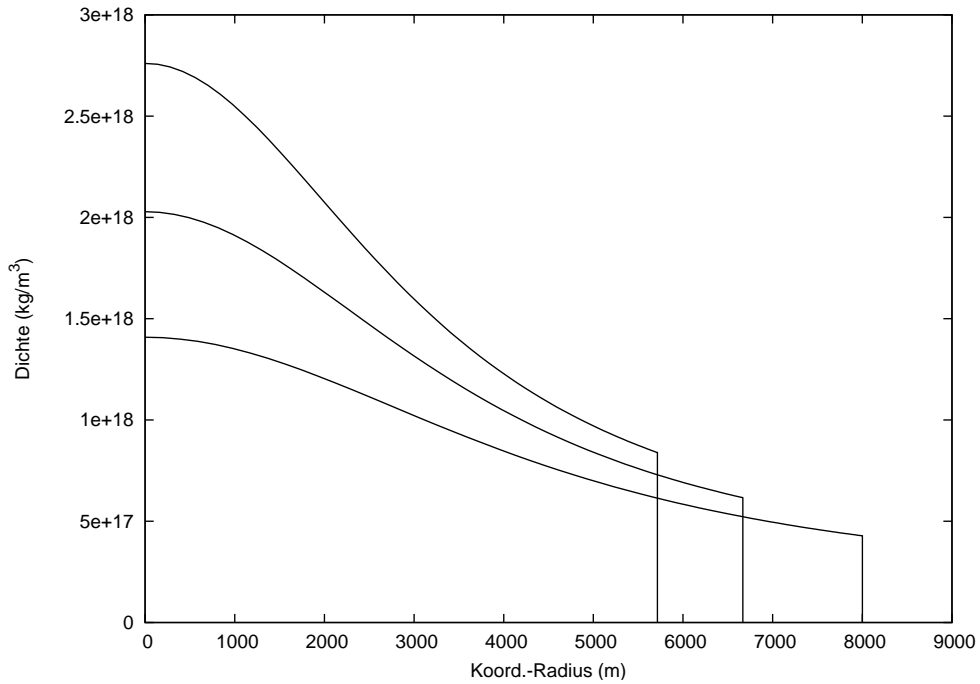


Abbildung 7.3: Das Dichteprofil drei ausgewählter Konfigurationen mit verschiedenen Bag-Konstanten. Der Stern mit dem kleinsten Radius entspricht einer Bag-Konstante von  $B_{60} = 1,4$ . Die anderen beiden Sterne beziehen sich mit abnehmender Zentraldichte auf  $B_{60} = 1,2$  bzw.  $B_{60} = 1,0$ .

Masse  $0,40 M_{\odot}$  oder  $0,63 M_{\odot}$  und für die Rotverschiebung  $0,14$  bzw.  $0,22$ . Sollte sich dieses Ergebnis bestätigen, kann es nur den Schluß zulassen, dass es sich bei MXB 1728-34 um einen Seltsamen Stern handelt. Wie die Autoren betonen, setzt die Beobachtung von Röntgenausbrüchen, auf denen diese Messungen beruhen, eine Hülle aus gewöhnlicher Materie voraus. Weitere Beobachtungen sind unter anderem in [141], [64] und den darin aufgeführten Referenzen zusammengestellt.

Zur Veranschaulichung sind in Abbildung 7.1 drei Modelle nicht rotierender Seltsamer Sterne gezeigt. Dabei wurde die Zustandsgleichung für masselose nicht wechselwirkende Quarks analog der Herleitung in [65] berechnet. Die Modelle unterscheiden sich einzig durch verschiedene Bag-Konstanten. Diese werden in den Diagrammen angegeben als Vielfache von  $60 \text{ MeV}/fm^3$ , das heißt  $B_{60} = B/(60 \text{ MeV}/fm^3)$ . Im Rahmen dieses Modells kann die Bag-Konstante im Bereich  $0,9821 < B_{60} < 1,525$  variiert werden, wobei sich diese Grenzen zum einen durch die nicht beobachtete spontane Erzeugung von strange matter und zum anderen durch die Energie pro Baryon von Eisen ergeben. Im einzelnen wurden Seltsame Sterne mit Bag-Konstanten von  $60 \text{ MeV}/fm^3$ ,  $72 \text{ MeV}/fm^3$  und  $84 \text{ MeV}/fm^3$  berechnet. Man erkennt, dass die niedrigste Bag-Konstante die höchste

maximale Masse von  $1,96 M_{\odot}$  zulässt, wohingegen die maximale Masse bei einer Bag-Konstante von  $84 \text{ MeV}/fm^3$  nur bei  $1,40 M_{\odot}$  liegt. Dieses Verhalten wird durch die Beschreibung des MIT-Bag-Modells im nächsten Abschnitt anschaulich klar. Im Masse-Radius-Diagramm 7.2 findet man, dass die Radien von Seltsamen Sternen signifikant kleiner sind als die von Neutronensternen. Auch in dieser Darstellung kann man gut den Effekt von verschiedenen Bag-Konstanten erkennen. Der größte Radius von über 11 km ergibt sich für das Modell mit der kleinsten Bag-Konstante. Bei einer Bag-Konstante von  $84 \text{ MeV}/fm^3$  liegt der maximale Radius bei knapp 8 km. In diesem Diagramm wird auch deutlich, dass Seltsame Sterne für kleine Massen ein anderes Verhalten zeigen als Neutronensterne. Während Neutronensterne für kleine Massen größer werden und eine minimale Masse besitzen, können Seltsame Sterne beliebig leicht und beliebig klein werden. Der Hintergrund ist die oben erwähnte Eigenschaft von Seltsamen Sternen, durch die starke Wechselwirkung selbstgebunden zu sein (siehe Abschnitt 7.2 und Abbildung 7.4). Alle drei gezeigten Masse-Radius-Beziehungen haben einen Schnittpunkt mit der durch die Rotverschiebungsmessung von Cottam et al. [45] gegebenen Geraden.

In Abbildung 7.3 ist der Dichteverlauf von drei Seltsamen Sternen mit Bag-Konstanten von  $B_{60} = 1,0, 1,2$  und  $1,4$  dargestellt, wobei der kleinste Radius der höchsten Bag-Konstante entspricht. Im Unterschied zu gewöhnlichen Neutronensternen fällt die Dichte an der Oberfläche nicht bis zur Eisendichte ab, sondern zeigt einen sehr großen Dichtesprung aufgrund der oben erwähnten Bindung. Der Abfall der Dichte kann einen beträchtlichen Anteil der Zentraldichte umfassen. Beim Modell mit der größten Bag-Konstante gibt es den größten Dichtesprung.

Die Stabilität und die Schwingungsmoden von Seltsamen Sternen werden in [124] und [140] besprochen. Außerdem werden farbsupraleitende Phasen in Seltsamen Sternen untersucht (siehe z. B. [95] und Ausführungen im nächsten Abschnitt).

## 7.2 Quark-Zustandsgleichung

Nachdem im letzten Kapitel Seltsame Sterne behandelt wurden, soll hier die Zustandsgleichung eines Hybrid-Sterns hergeleitet werden. Dazu kommt ein phänomenologisches Modell von Alford et al. [7] zum Einsatz, das sich am MIT-Bag-Modell orientiert. Hybrid-Sterne besitzen einen inneren Kern aus Quarkmaterie. Der Rest des Sterns wird durch eine hadronische Zustandsgleichung beschrieben. In diesem Unterkapitel soll als erstes die Idee des MIT-Bag-Modells vermittelt werden, um dann eine konkrete Quark-Zustandsgleichung zu berechnen. Im Anschluß wird der Phasenübergang zur hadronischen Zustandsgleichung konstruiert.

Der Hintergrund des MIT-Bag-Modells und die Interpretation der Bag-Konstanten  $B$  ist in Abbildung 7.4 veranschaulicht. In diesem Modell nimmt man an, dass sich Quarks als nicht wechselwirkende Teilchen frei in einem bestimmten beschränkten Volumen (Bag) bewegen können. Dieses Modell wird durch die asymptotische Freiheit der QCD gerechtfertigt, das heißt, dass sich die Wechselwirkungen zwischen Quarks mit kleinerem



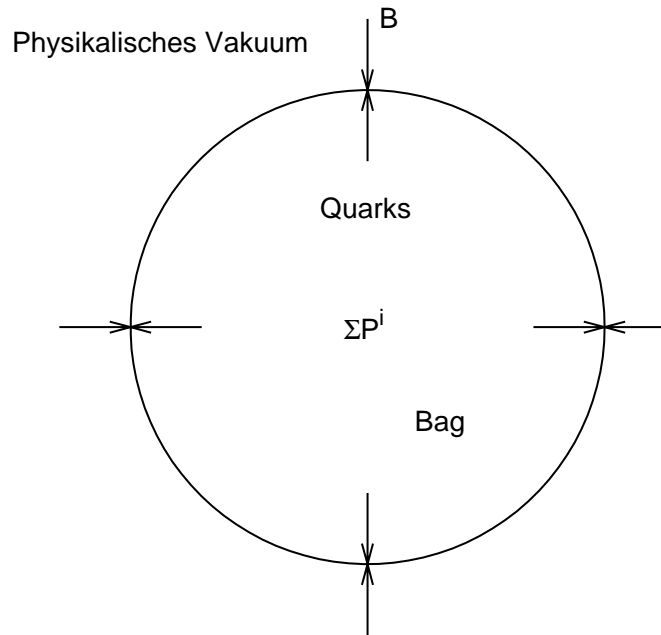


Abbildung 7.4: Illustration des MIT-Bag-Modells.

Abstand immer weiter abschwächen [60]. Die Bag-Konstante hat die Bedeutung eines Druckunterschieds zwischen dem gewöhnlichen physikalischen Vakuum und dem Vakuum der QCD [140]. Ebenso könnte man die Bag-Konstante als Energiedichte interpretieren, die aufgebracht werden muss, um das Vakuum zu verdrängen. Es muss betont werden, dass in dieser Diskussion im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt die Gravitation die entscheidende Zutat für die Bindung des Sterns ist. Das heißt, auch wenn die strange matter hypothesis nicht zutrifft, könnten Quarksterne als Hybrid-Sterne existieren. Diese sind dann jedoch nicht selbstgebunden.

Alford hat in einer Reihe von Veröffentlichungen verschiedenste Effekte von Quarkmaterie diskutiert [7], [6], [5]. Man erwartet unter anderem, dass Quarkmaterie verschiedene Phasen von Farbsupraleitung zeigt analog der elektrischen Supraleitung in Festkörpern. Unterscheiden kann man diese Phasen nach den möglichen Paarungsmustern der Cooper-Paare. Besonders wichtig sind dabei die Phasen 2SC (2-flavor-Farbsupraleitung, up- und down-Quarks beteiligt) und CFL (color-flavor locked, up-, down- und strange-Quarks beteiligt). Für einen Überblick sei auf [122], [123] verwiesen. Darüber hinaus kann man Wechselwirkungen der Quarks einbeziehen und die nicht verschwindenden Quarkmassen. Um die Auswirkungen dieser verschiedenen Effekte zu studieren, benutzt Alford eine phänomenologische Parametrisierung der Quark-Zustandsgleichung, ausgedrückt durch das großkanonische Potential [7]. Darin treten die Parameter  $c$  für die QCD-Wechselwirkung,  $\Delta$  für die Supraleitfähigkeit ( $\Delta$  entspricht dem Gap-Parameter der Festkörperphysik),  $m_s$

für die strange-Masse und die effektive Bag-Konstante  $B_{eff}$  auf. Auf Grund der Tatsache, dass diese Parameter unbekannt sind, werden sie als freie Parameter behandelt. Für manche dieser Konstanten kann man Schranken angeben, so dass man die Modelle innerhalb dieses beschränkten Parameterraumes variiert und die verschiedenen Auswirkungen berechnet. In den oben genannten Referenzen werden die astrophysikalischen Konsequenzen dieser Modelle durch das Lösen der Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen dargestellt und diskutiert. Es sei auch auf eine Reihe anderer Arbeiten hingewiesen, die über das MIT-Bag-Modell hinausgehen, so zeigten zum Beispiel Buballa et al. [32], dass es im Rahmen des Nambu-Jona-Lasinio-Modells nur eine sehr kleine stabile Sequenz von Hybrid-Sternen gibt, wobei die Quarkmaterie in der 2SC-Phase vorliegt. In [114], [113] werden unter anderem Modelle mit gemischten Phasen in Betracht gezogen.

Wie erwähnt beschäftigen sich viele Veröffentlichungen mit der Masse-Radius-Beziehung von nicht rotierenden Hybrid-Sternen. Deshalb soll hier beispielhaft die Struktur eines schnell rotierenden Hybrid-Sterns berechnet werden. Es wird die auf dem MIT-Bag-Modell basierende phänomenologische Zustandsgleichung aus Alford et al. [7] benutzt. Dann schreibt sich das großkanonische Potential als

$$\Omega = -\frac{3}{4\pi^2}a_4\mu^4 + \frac{3}{4\pi^2}a_2\mu^2 + B_{eff} \quad (7.2)$$

mit dem dem chemischen Potential der Quarks  $\mu$ . Dabei wurde

$$a_4 = 1 - c \quad (7.3)$$

$$a_2 = m_S^2 - 4\Delta^2 \quad (7.4)$$

definiert. Genaugenommen handelt es sich bei  $\Omega$  aus Gleichung (7.2) nicht um das großkanonische Potential, sondern um das großkanonische Potential pro Volumen. Ausgehend vom großkanonischen Potential kann man Druck, Energiedichte und Teilchenzahldichte mit Hilfe der Gibbs-Duhem-Relation berechnen [48]. Dann gilt im Grenzfall  $T = 0$

$$P = -\Omega \quad (7.5)$$

$$n = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\right) \quad (7.6)$$

$$\epsilon = -P + n\mu. \quad (7.7)$$

Das Programm `create_quark_eos` (auf der beigefügten CD) berechnet mit dem obigen Modell Zustandsgleichungen, indem es die Gleichungen (7.2) und (7.5) bis (7.7) in einem bestimmten Bereich des chemischen Potentials  $\mu$  auswertet. Für den hier betrachteten schnell rotierenden Hybrid-Stern wird der Parametersatz  $a_4 = 1$ ,  $a_2 = (180 \text{ MeV})^2$  und  $B_{eff} = 90 \text{ MeV}$  verwendet.

Zur Konstruktion der endgültigen Zustandsgleichung ist noch der Phasenübergang von der hadronischen Materie zur Quarkmaterie zu bestimmen. Dazu ist das chemische Potential der hadronischen Zustandsgleichung zu berechnen, denn der Phasenübergang findet bei  $P_{hard}(\mu) = P_{Quark}(\mu)$  statt. Informationen zur Konstruktion des Phasenübergangs

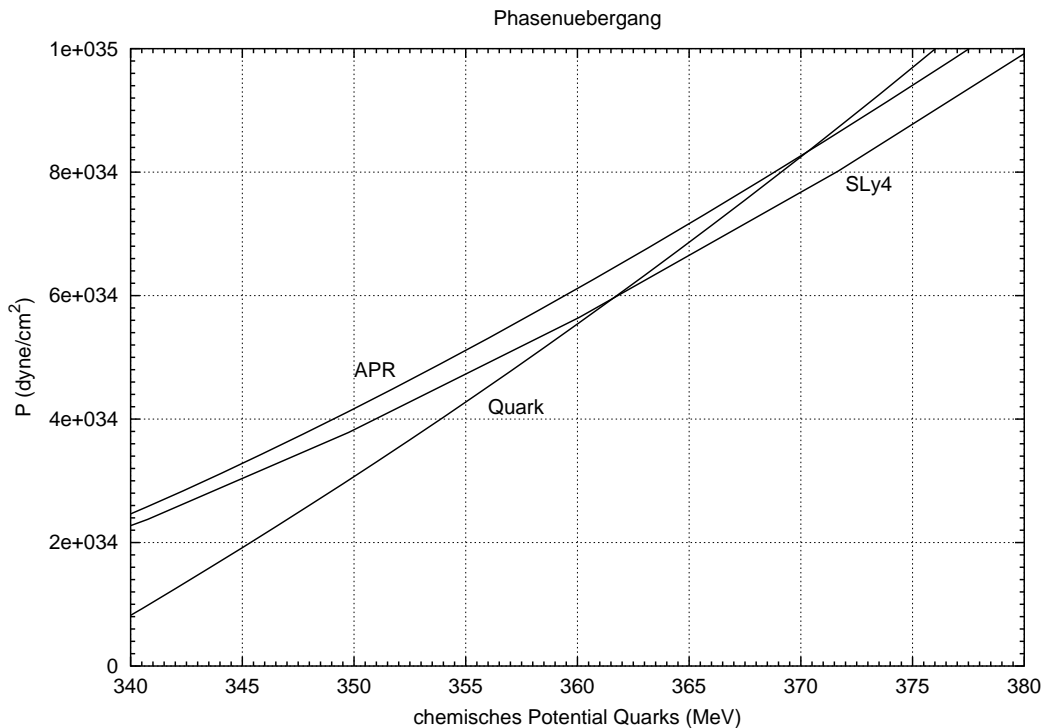


Abbildung 7.5: Druck über dem chemischen Potential der Quarks für die im Text beschriebene Quark-Zustandsgleichung und die hadronischen Zustandsgleichungen SLy4 und APR zur Bestimmung des Phasenübergangs.

findet man unter anderem in [140], [60] und [114]. Das chemische Potential wird mit dem Programm `mu_eos` berechnet (ebenfalls auf der beigefügten CD), indem man die Gibbs-Duhem-Relation in der Form  $\mu = \frac{\epsilon + P}{n}$  verwendet. Bei all diesen Rechnungen ist auf das korrekte Einfügen der Konstanten  $c$  und  $\hbar c$  zu achten (siehe Quellcode der Programme). Damit hat man für jede Zustandsgleichung eine Funktion  $P(\mu)$  und kann den Phasenübergang graphisch bestimmen, wobei zu beachten ist, dass sich das chemische Potential der Baryonen um einen Faktor 3 von dem der Quarks unterscheidet. In Abbildung 7.5 ist der Druck der Quark-Zustandsgleichung und der hadronischen Zustandsgleichungen SLy4 und APR über dem chemischen Potential der Quarks dargestellt. Der Schnittpunkt bestimmt den Druck des Phasenübergangs. Man findet den Übergang von der Zustandsgleichung SLy4 zur Quarkphase bei  $\mu = 361,7 \text{ MeV}$  und einem Druck von  $P = 5,95 \cdot 10^{34} \text{ dyne/cm}^2$ . Für die Zustandsgleichung APR findet der Phasenübergang bei einem etwas höheren Druck von  $8,3 \cdot 10^{34} \text{ dyne/cm}^2$  statt. Hat man den Übergangsdruck gefunden, kann man schließlich die Hybrid-Zustandsgleichung zusammensetzen. Als hadronische Zustandsgleichung für den äußeren Teil des Sterns wird in den folgenden Rechnungen die moderate Zustandsgleichung SLy4 benutzt. Diese ist zusammen mit der Quark-Zustandsgleichung in Abbildung 7.6 gezeigt. In dieser Darstellung kann man

## 7 Quarksterne

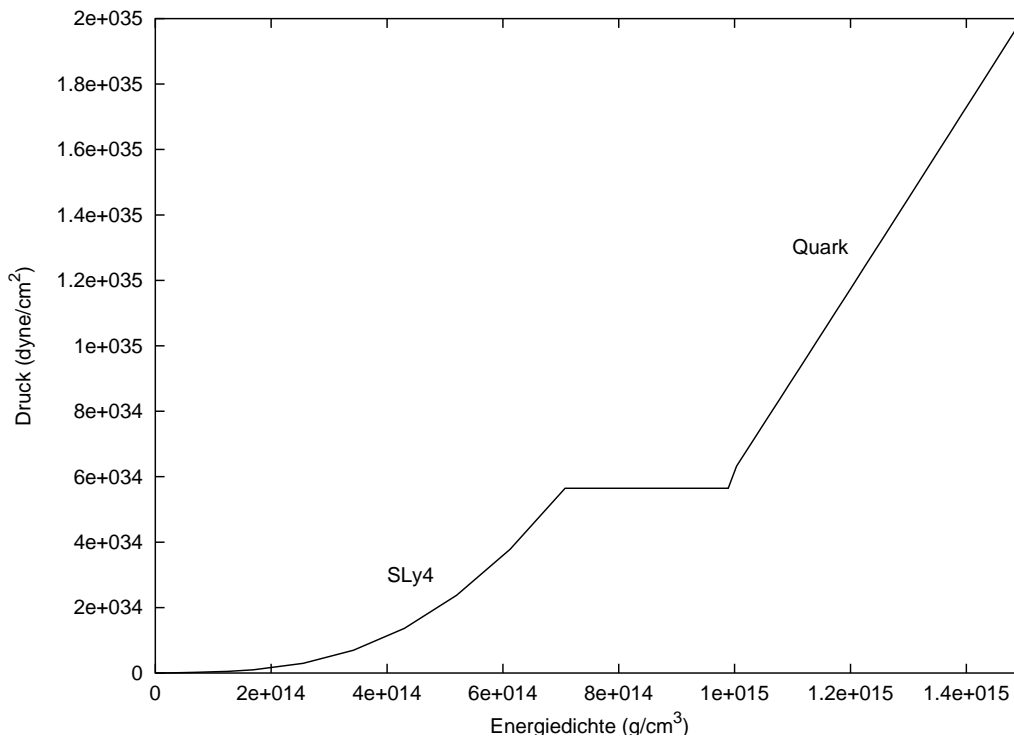


Abbildung 7.6: Hybrid-Zustandsgleichung bestehend aus der hadronischen Zustandsgleichung SLy4 bei geringen Dichten und der im Text beschriebenen Zustandsgleichung des MIT-Bag-Modells. Der Phasenübergang erster Ordnung liegt im Bereich zwei- bis dreifacher Kerndichte.

besonders gut den Phasenübergang erster Ordnung erkennen, der bei einer Dichte von  $7 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$  auftritt, was dem Zweifachen bis Dreifachen der Kerndichte entspricht ( $B_{eff}$  wurde entsprechend gewählt, dass der Phasenübergang in diesem Bereich auftritt). Das heißt, wenn der Druck im Innern des Sterns einen Wert von  $6 \cdot 10^{34} \text{ dyne/cm}^2$  erreicht, springt die Dichte von  $7 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$  auf  $10 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$ . Im nächsten Kapitel sollen für diese Zustandsgleichung schnell rotierende Lösungen berechnet werden.

Die Veröffentlichungen von Alford et al. [7], [6], [5] beschäftigen sich hauptsächlich mit den Auswirkungen der verschiedenen Parameter. So konnte gezeigt werden, dass mit steigendem Druck auch mehrere Phasenübergänge „hin und zurück“ zwischen der hadronischen Phase und der Quarkphase möglich sind. Ob es einen gemischten Phasenübergang oder einen Phasenübergang, wie er oben geschildert wird, gibt, wird beispielsweise in [4] diskutiert und hängt von der unbekanntem Oberflächenspannung der Phasen ab.

### 7.3 Eigenschaften schnell rotierender Quarksterne

In diesem Abschnitt werden die schnell rotierenden Lösungen der oben vorgestellten Hybrid-Zustandsgleichung ( $a_4 = 1$ ,  $a_2 = (180 \text{ MeV})^2$  und  $B_{eff} = 90 \text{ MeV}$ ) berechnet. Wie in Kapitel 6.1 beschrieben, wurde in Lorene eine Multi-Domänen-Spektralmethode implementiert. Dies stellt das derzeit beste Werkzeug dar, um Phasenübergang innerhalb von Sternen zu behandeln. Dazu werden die Grenzen der Domänen entsprechend den verschiedenen Phasen im Stern angepaßt. Die Grenzen werden durch die Pseudo-Enthalpie definiert. Deshalb ist das Programm `rotstar_neu` in der Lage, für eine gegebene Zustandsgleichung die entsprechende Pseudo-Enthalpie zu bestimmen (siehe dazu `readme_rotstar_neu`). Damit kann man die Pseudo-Enthalpie am Phasenübergang angeben. Darüber hinaus ist Lorene standardmäßig nur in der Lage, die „eigenen“ Zustandsgleichungen zu verwenden. Aus diesem Grund wurden für diese Arbeit einige Klassen und Quellcodes ergänzt sowie vorhandene entsprechend angepaßt. Was hierzu im einzelnen zu ändern ist, wird kurz in Anhang E dargelegt.

In den Abbildungen 7.7 bis 7.10 sind die Eigenschaften des schnell rotierenden Hybrid-

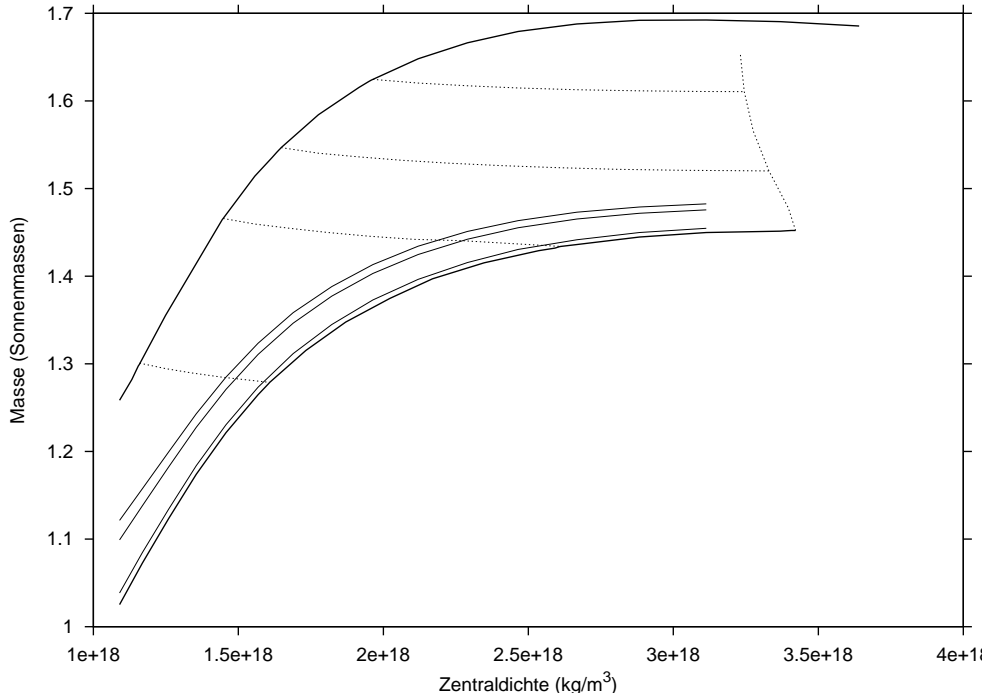


Abbildung 7.7: Masse über Zentraldichte für eine Hybrid-Zustandsgleichung des MIT-Bag-Modells ( $a_4 = 1$ ,  $a_2 = (180 \text{ MeV})^2$  und  $B_{eff} = 90 \text{ MeV}$ ). Es sind das statische Limit, das Kepler-Limit, das Stabilitätslimit, drei Sequenzen mit konstanten Frequenzen  $f = 294 \text{ Hz}$ ,  $f = 641 \text{ Hz}$  und  $f = 719 \text{ Hz}$  sowie die Evolutionsequenzen mit Ruhemassen von  $1,4 M_\odot$ ,  $1,6 M_\odot$ ,  $1,7 M_\odot$  und  $1,8 M_\odot$  gezeigt.

## 7 Quarksterne

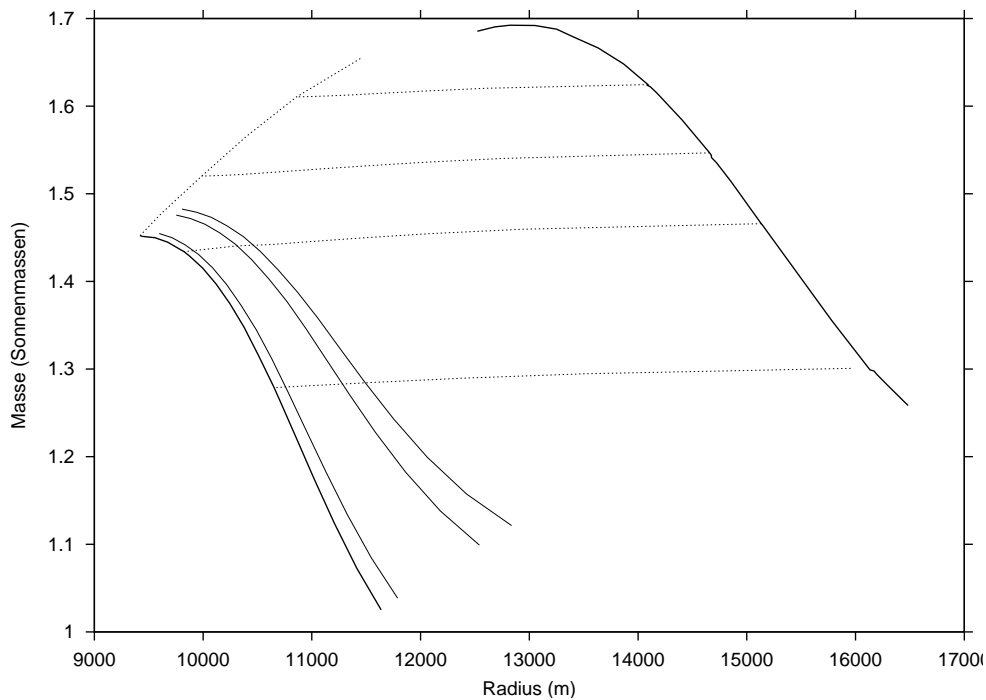


Abbildung 7.8: Masse-Radius-Beziehung für eine Hybrid-Zustandsgleichung des MIT-Bag-Modells ( $a_4 = 1$ ,  $a_2 = (180 \text{ MeV})^2$  und  $B_{eff} = 90 \text{ MeV}$ ). Es sind dieselben Sequenzen wie in Abbildung 7.7 dargestellt.

Sterns gezeigt. Dabei wurde die Zustandsgleichung mit der phänomenologischen Parametrisierung des großkanonischen Potentials im Rahmen des MIT-Bag-Modells berechnet und für den äußeren Teil des Sterns die hadronische Zustandsgleichung SLy4 angeschlossen (siehe vorheriges Kapitel). Man kann alle in Kapitel 6.2 beschriebenen Sequenzen identifizieren (für die Bedeutung der jeweiligen Sequenzen sei auf dieses Kapitel verwiesen). In den Darstellungen ist kein „Knick“ zu erkennen, was den Übergang vom rein hadronischen Stern zum Hybrid-Stern markieren würde. Dies liegt daran, dass alle hier gezeigten Konfigurationen einen Quark-Kern besitzen, denn der Phasenübergang tritt schon bei einer Dichte von  $7 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$  auf. Es wurden die normalen Evolutionssequenzen mit Ruhemassen von 1,4 und 1,6 Sonnenmassen sowie die supramassiven Sequenzen mit 1,7 und 1,8 Sonnenmassen berechnet. Aus 7.7 kann man ablesen, dass die maximale Masse der statischen Sterne bei ungefähr 1,45 Sonnenmassen liegt. Zum selben Ergebnis kommt Alford in [7] für einen vergleichbaren Stern. Erlaubt man Rotation ergibt sich eine maximale Masse von knapp 1,7 Sonnenmassen. Mit diesem Resultat kann man dieses spezielle Modell einer Hybrid-Zustandsgleichung nahezu ausschließen, denn die beobachteten maximalen Massen von Neutronensternen liegen trotz großer Fehlerbalken weit über den hier berechneten Massen des Modells. Darüber hinaus schneidet die in Kapitel 4.2 eingeführte Gerade auf der Grundlage der Rotverschiebungsmessung von Cottam et al. [45] die Masse-Radius-Beziehung (Abbildung 7.8) dieser Zustandsgleichung

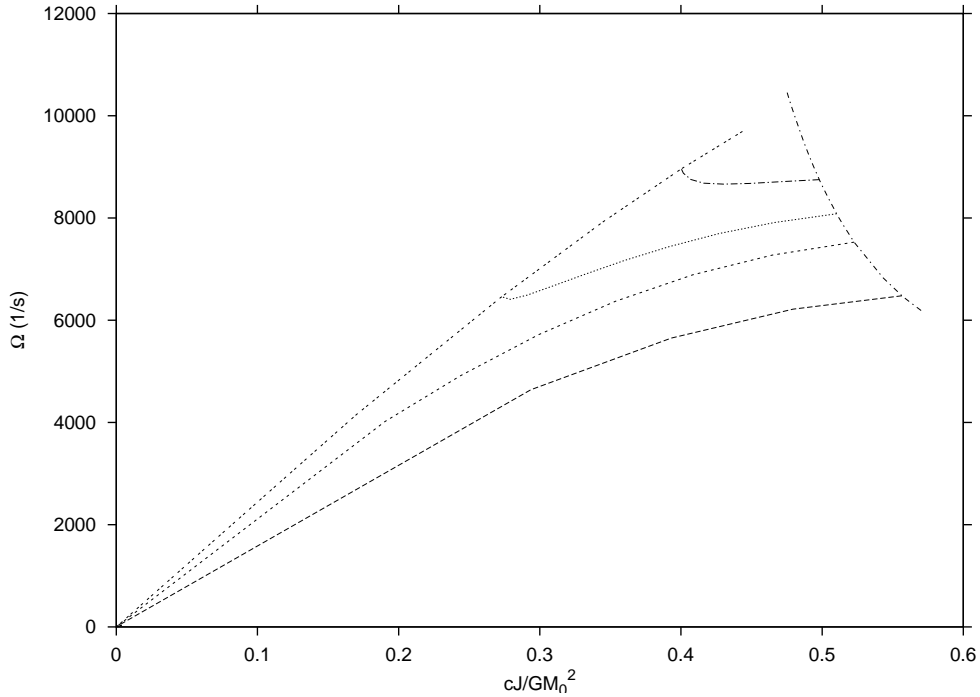


Abbildung 7.9: Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  über dem „dimensionslosen“ Drehimpuls für eine Hybrid-Zustandsgleichung des MIT-Bag-Modells ( $a_4 = 1$ ,  $a_2 = (180 \text{ MeV})^2$  und  $B_{eff} = 90 \text{ MeV}$ ). Es sind dieselben Sequenzen wie in Abbildung 7.7 dargestellt.

nicht. Wie Alford zeigen konnte, erreicht man durch die Berücksichtigung von Wechselwirkungen  $a_4 < 1$  höhere maximale Massen [7]. Dies erfordert jedoch ein Absenken der effektiven Bag-Konstante, da sonst der Phasenübergang erst bei höheren Dichten auftritt. Dieses Verhalten kann durch Rechnungen mit den Lorene-Programmen bestätigt werden. Obwohl also die obige Hybrid-Zustandsgleichung eher als ein Spielzeugmodell zu betrachten ist, sollen dennoch diese Diagramme kurz besprochen werden. Wieder erkennt man, dass sich für einen mit 3,4 ms rotierenden Stern keine großen Unterschiede zum nicht rotierenden Stern ergeben. Und ebenso liegen wie bei den rein hadronischen Zustandsgleichungen viele Konfigurationen jenseits der Sequenz mit 1,4 ms. Die Radien fallen bei entsprechender Masse etwas geringer aus als für hadronische Sterne, das heißt, diese Sterne sind kompakter. Auch für Hybrid-Sterne findet man den Effekt des back bendings bei den supramassive Evolutionssequenzen (siehe Abbildung 7.9). Man erkennt in Diagramm 7.10, dass die maximalen Rotationsfrequenzen niedriger sind als bei hadronischen Sternen. Die maximale Rotationsfrequenz liegt unter 1600 Hz, wohingegen für hadronische Zustandsgleichungen die Keplerfrequenzen durchaus im Bereich von 1800 Hz liegen können.

Besonders interessant sind die Dichte-Profile dieser Sterne, da man in dieser Darstel-

## 7 Quarksterne

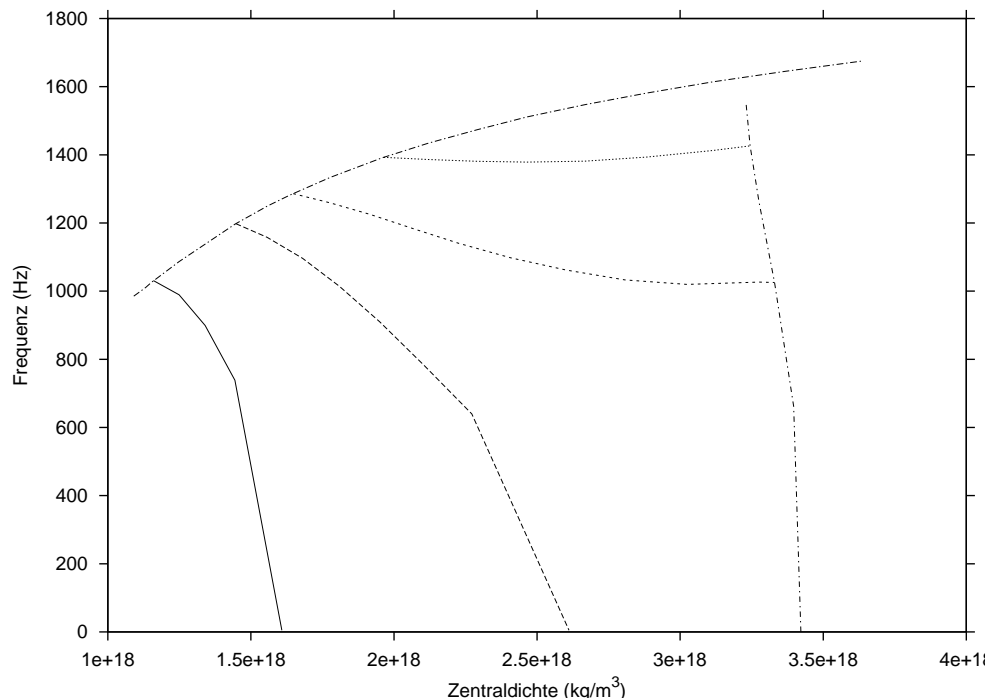


Abbildung 7.10: Frequenz über der Zentraldichte für eine Hybrid-Zustandsgleichung innerhalb des MIT-Bag-Modells ( $a_4 = 1$ ,  $a_2 = (180 \text{ MeV})^2$  und  $B_{eff} = 90 \text{ MeV}$ ). Unter Frequenz versteht man hier die Rotationsfrequenz des Fluids beobachtet im Unendlichen. Es sind dieselben Sequenzen wie in Abbildung 7.7 dargestellt.

lung den inneren Aufbau erkennen kann. In Abbildung 7.11 sind drei Konfigurationen der supramassiven Sequenz mit einer Ruhemasse von 1,8 Sonnenmassen gezeigt. Der Drehimpuls nimmt mit zunehmender Zentraldichte ab. Die Rotationsfrequenzen dagegen nehmen mit ansteigender Zentraldichte erst leicht ab und steigen für noch höhere Zentraldichten wieder an (back bending), was auch Abbildung 7.10 verdeutlicht. In Tabelle 7.1 sind weitere Eigenschaften dieser Sterne zusammengestellt. Der Übergang vom hadronischen Teil des Sterns zur Quarkphase liegt bei circa 5 km. Gut kann man diesen Phasenübergang durch den Dichtesprung identifizieren. Auf den Stern mit der höchsten Rotationsfrequenz (höchste Zentraldichte) entfällt der kleinste Kern (4726 m), wobei sich die Größe des Kerns bei den drei Konfigurationen nicht sehr stark unterscheidet. Damit ergibt sich folgende anschauliche Erklärung des back bending. Man kann sich das spin up ähnlich vorstellen wie die Pirouette einer Eisläuferin, die die Arme anzieht. Obwohl diese Drehimpuls durch die Reibung der Kufen verliert, rotiert sie schneller. Dadurch, dass mehr Masse zum Kern verlagert wird, kann der Drehimpuls abnehmen, während die Frequenz zunimmt. Der Stern mit der höchsten Rotationsfrequenz vereinigt mit Abstand am meisten Masse im Kern.

Ein anderes Bild ergibt sich bei der normalen Evolutionsequenz mit 1,4 Sonnenmassen,



die in Abbildung 7.12 gezeigt ist. Dort ergeben sich unterschiedlich große Kerne, was man mit Abbildung 7.10 verstehen kann, da sich die Rotationsfrequenzen über einen großen Bereich erstrecken. Analog zu den rein hadronischen Sternen hat der Stern mit der höchsten Zentraldichte den kleinsten Radius. Den kleinsten Kern hat jedoch der Stern mit der geringsten Zentraldichte. Dieses Verhalten entspricht dem der normalen Sequenz der Zustandsgleichung SLy4 in Kapitel 6.2 (siehe Abbildung 6.10). Weitere Informationen zu diesen Sternen sind in Tabelle 7.2 eingetragen.

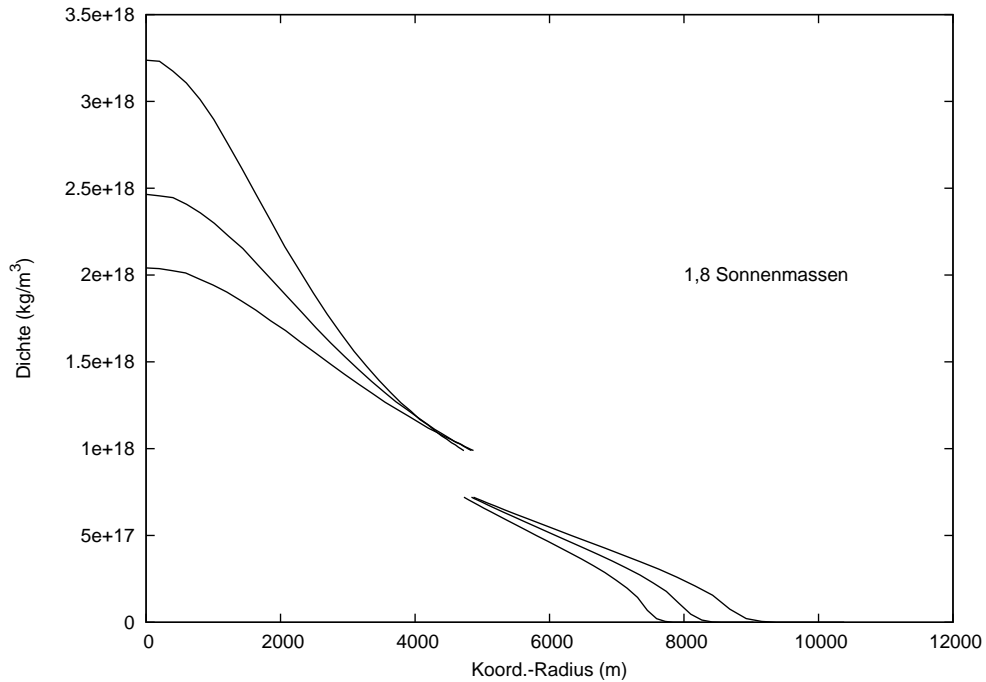


Abbildung 7.11: Drei Dichteprofile der supramassiven Evolutionssequenz mit 1,8 Sonnenmassen in der Äquatorebene. Eigenschaften dieser Sterne sind in Tabelle 7.1 zu finden.

Wie in den Veröffentlichungen von Alford et al. (z. B. [7]) deutlich wurde, besitzen verschiedene Hybrid-Sterne je nach Wahl der Parameter der Zustandsgleichung vollkommen unterschiedliche Eigenschaften. In diesem Sinne stellen die obigen Ergebnisse auch nur einen Anfangspunkt bzw. Probelauf dar. Vergleichbare Rechnungen für Hybrid-Quarksterne gibt es bisher noch nicht, außer einer Veröffentlichung von Panda et al. [108]. Allerdings werden dort nur sehr wenige Konfigurationen gezeigt und die Widersprüche zu den bisherigen Beobachtungen sind gravierend (zu große Radien). Während sich die durch die Rotverschiebungsmessung von Cottam et al. [45] gegebene Gerade und die Masse-Radius-Beziehung des oben gezeigten Hybrid-Sterns (Abbildung 7.8) nur knapp „verpassen“, liegt diese Gerade im Diagramm von Panda et al. sehr weit von der dort dargestellten Masse-Radius-Beziehung entfernt (siehe Kapitel 4.2). Als Zielstellung für weitere Arbeiten wäre zu untersuchen, welche Effekte gerade im Zusammenhang mit

## 7 Quarksterne

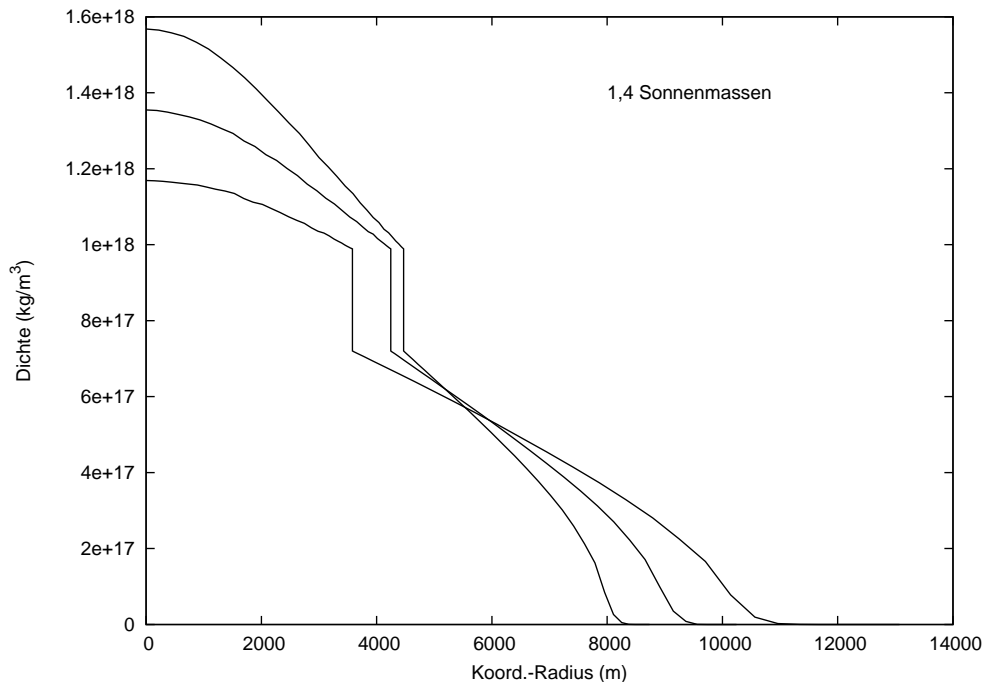


Abbildung 7.12: Drei Dichteprofile der normalen Evolutionssequenz mit 1,4 Sonnenmassen in der Äquatorebene. Eigenschaften dieser Sterne sind in Tabelle 7.2 zu finden.

schneller Rotation durch die Variation der Parameter hervorgerufen werden und inwiefern es möglich ist, Resultate zu erhalten, die im Einklang mit den bisherigen Beobachtungen stehen.

Ein vielversprechendes Modell scheint die Parameterwahl  $c = 0,3$ ,  $a_2 = (150 \text{ MeV})^2$  und  $B_{eff} = 52,9 \text{ MeV}$  zu sein. Für diese Zustandsgleichung tritt der Phasenübergang von der hadronischen Phase (SLy4) zur Quarkphase bei einem Druck von  $3,3 \cdot 10^{35} \text{ dyne/cm}^2$  auf, was ungefähr der fünffachen Kerndichte entspricht. In Abbildung 7.13 ist ein Ausschnitt der Masse-Radius-Beziehung dieser Zustandsgleichung gezeigt. Es sind Teile des statischen Limits, des Kepler-Limits und der Evolutionssequenzen mit Ruhemassen von  $2,1 M_\odot$ ,  $2,2 M_\odot$ ,  $2,3 M_\odot$  und  $2,4 M_\odot$  dargestellt. Dieser Stern erreicht eine deutlich höhere maximale Masse als das obige Modell. Das Maximum des statischen Limits liegt bei  $1,82 M_\odot$ . Dies liegt beinahe innerhalb der Fehlerschranken der Messungen von Nice et al. [104], die die größte bisher beobachtete Neutronensternmasse von  $(2,1 \pm 0,2) M_\odot$  in einem Doppelsternsystem fanden. Außerdem schneidet diese Masse-Radius-Beziehung die „ $z=0,35$ -Gerade“ (Cottam et al. [45]).

### 7.3 Eigenschaften schnell rotierender Quarksterne

Zentraldichte ( $10^{18} \text{kg/m}^3$ )	2,04	2,46	3,24
Frequenz (Hz)	1388,6	1378,46	1425,33
grav. Masse (Sonnenmassen)	1,62211	1,61475	1,61056
Ruhemasse (Sonnenmassen)	1,8	1,79998	1,79998
Zylinderradius (Äqu.) (m)	13005,9	11659,9	10864,9
$\Omega$ (1/s)	8724,85	8661,12	8955,62
$\omega$ im Zentrum (1/s)	5308,34	5499,07	6024,4
$\omega$ an Oberfläche Äq. (1/s)	989,648	1217	1391,61
$\omega$ an Oberfläche Pol (1/s)	827,748	1035,38	1207,58
Drehimpuls ( $c/GM_{\odot}^2$ )	1,56643	1,39395	1,29687
T/W	0,0923393	0,0761088	0,0671677
Quadrupolmoment ( $kg m^2$ )	$1,6667 \cdot 10^{37}$	$1,2110 \cdot 10^{37}$	$9,3411 \cdot 10^{36}$
GRV2	-0,000476	-0,000453	-0,000370
GRV3	0,000365	0,000416	0,000312
Abplattung	0,633637	0,714219	0,747107
$z_{forward}^{\text{Äquator}}$	-0,236993	-0,172443	-0,145136
$z_{backward}^{\text{Äquator}}$	1,10881	1,08256	1,12073
$z^{\text{Pol}}$	0,399429	0,416244	0,445015
Zylinderradius des ISCO (m)	13005,9	11708,9	11473,2
Koord.-Radius (Äquator) (m)	10381,6	9032,69	8235,73
Koord.-Radius (Pol) (m)	6578,17	6451,32	6152,97
Koordinaten-Radius des Kern (m)	4869,8	4839,4	4726,5

Tabelle 7.1: 3 Konfigurationen der Evolutionssequenz mit  $1,8 M_{\odot}$ .

## 7 Quarksterne

Zentraldichte ( $10^{18} \text{kg/m}^3$ )	1,17	1,35	1,57
Frequenz (Hz)	1026,15	883,786	40,2262
grav. Masse (Sonnenmassen)	1,29866	1,28895	1,26502
Ruhemasse (Sonnenmassen)	1,4	1,39997	1,38435
Zylinderradius (Äqu.) (m)	15120,1	12278,8	10704,5
$\Omega$ (1/s)	6447,52	5552,99	252,749
$\omega$ im Zentrum (1/s)	2842,91	2572,16	119,87
$\omega$ an Oberfläche Äq. (1/s)	429,974	551,824	29,4639
$\omega$ an Oberfläche Pol (1/s)	353,046	478,016	29,4552
Drehimpuls ( $c/GM_{\odot}^2$ )	1,07089	0,7479	0,0275609
T/W	0,090843	0,0496711	7,86E-05
Quadrupolmoment ( $\text{kg m}^2$ )	$1,9373 \cdot 10^{37}$	$0,8889 \cdot 10^{37}$	$1,2727 \cdot 10^{34}$
GRV2	-0,000515	-0,000610	-0,000477
GRV3	0,000363	0,000407	0,000313
Abplattung	0,620604	0,807873	0,999681
$z_{\text{forward}}^{\text{Äquator}}$	-0,215905	-0,0864905	0,225635
$z_{\text{backward}}^{\text{Äquator}}$	0,723239	0,599522	0,253364
$z^{\text{Pol}}$	0,241889	0,247182	0,239482
Zylinderradius des ISCO (m)	15120,1	12278,8	11105,2
Koord.-Radius (Äquator) (m)	13072,2	10243,9	8736,56
Koord.-Radius (Pol) (m)	8112,67	8275,8	8733,78
Koordinaten-Radius des Kern (m)	3579.89	4246.37	4468.48

Tabelle 7.2: 3 Konfigurationen der Evolutionssequenz mit  $1,4 M_{\odot}$ .

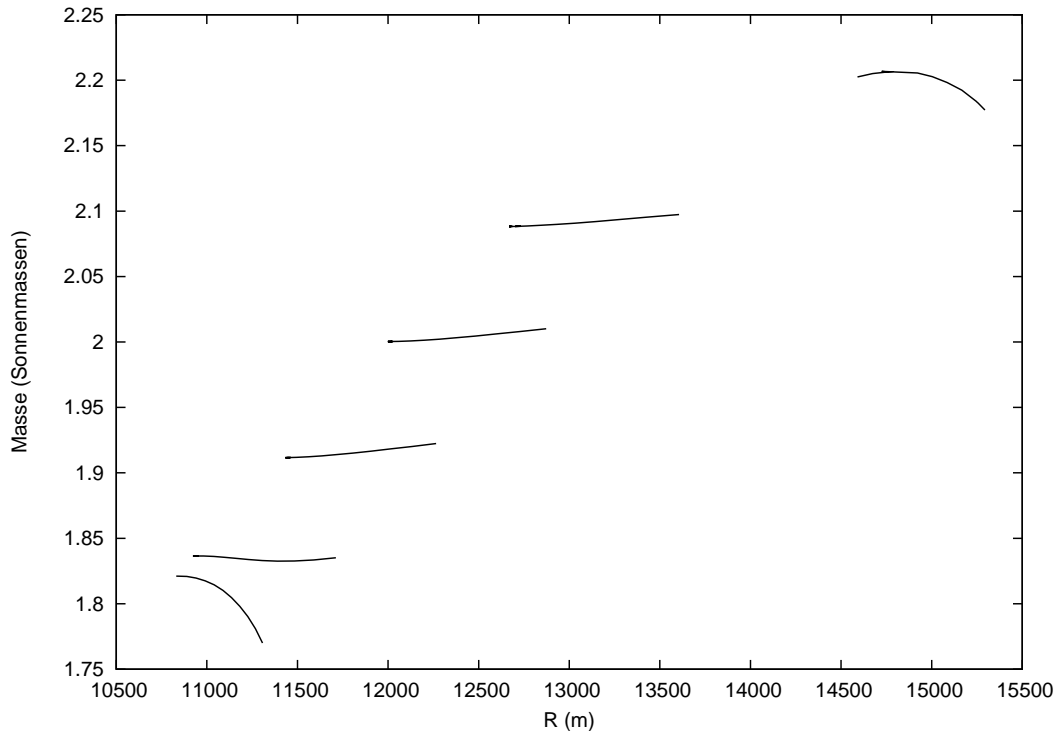


Abbildung 7.13: Ausschnitt aus dem Masse-Radius-Diagramm für eine Hybrid-Zustandsgleichung des MIT-Bag-Modells ( $a_4 = 0,7$ ,  $a_2 = (150 \text{ MeV})^2$  und  $B_{eff} = 52,9 \text{ MeV}$ ). Es sind die statischen Konfigurationen, das Kepler-Limit und vier supramassive Evolutionssequenzen mit Ruhemassen von  $2,1 M_\odot$ ,  $2,2 M_\odot$ ,  $2,3 M_\odot$  und  $2,4 M_\odot$  gezeigt. Die Konfigurationen der Evolutionssequenzen mit dem jeweils niedrigsten Radius bilden das Stabilitätslimit.

## 7 Quarksterne

## 8 Manko-Lösung

Ein weiterer Aspekt im Zusammenhang mit schnell rotierenden Neutronensternen ist die Manko-Lösung, benannt nach V. S. Manko [98], [99]. Bei der Manko-Lösung handelt es sich um eine exakte analytische Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen im Vakuum. Es stellte sich heraus, dass diese Metrik den Außenraum von schnell rotierenden Neutronensternen gut beschreibt. Die Problematik besteht nun darin, dass sich diese Lösung nicht kontinuierlich auf die Schwarzschild-Metrik reduzieren lässt, die den Außenraum nicht bzw. langsam rotierender Sterne korrekt wiedergibt. Damit erhebt sich die Frage, in welchem Bereich welche Lösung gültig ist, ob sich die Gültigkeitsbereiche überlappen und wie groß die Abweichungen im Vergleich zur numerischen Lösung sind. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels soll die Manko-Lösung eingeführt werden und die eben erwähnten Probleme veranschaulicht werden. Der nächste Abschnitt beschäftigt sich dann mit der Frage, für welche Sterne eine Manko-Lösung existiert, und wie gut diese Manko-Metrik mit der numerischen Lösung übereinstimmt. Dies wird den Gültigkeitsbereich der Manko-Lösung abstecken.

### 8.1 Definition und Problematik

Im hier betrachteten Fall wird ein Spezialfall der Manko-Lösung benutzt, der die elektrische Ladung und den magnetischen Dipol vernachlässigt. Die Herleitung soll hier nicht gezeigt werden. Man findet sie in [98], [99], [131]. Die Manko-Lösung schreibt sich in Weyl-Papapetrou-Koordinaten als

$$ds^2 = -f(dt - wd\varphi)^2 + f^{-1}[e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2]. \quad (8.1)$$

Dabei sind die metrischen Funktionen unabhängig von  $t$  und  $\varphi$ , was die Symmetrien der Metrik widerspiegelt. Damit erkennt man schon das erste technische Problem, denn die zu vergleichenden Metriken benutzen unterschiedliche Koordinaten. Man wird also für den Vergleich eine Koordinatentransformation bemühen müssen. Um nun die analytische Lösung anzugeben, verwendet man sphäroidale Koordinaten, die man definiert als

$$x = \frac{1}{2\kappa}(r_+ + r_-) \quad (8.2)$$

$$y = \frac{1}{2\kappa}(r_+ - r_-) \quad (8.3)$$

## 8 Manko-Lösung

mit dem Parameter  $\kappa$  und  $r_{\pm} = \sqrt{\rho^2 + (z \pm \kappa)^2}$ . Die Metrik nimmt dann die Form

$$ds^2 = -f(dt - wd\varphi)^2 + \kappa^2 f^{-1} \left[ e^{2\gamma}(x^2 - y^2) \left( \frac{dx^2}{x^2 - 1} + \frac{dy^2}{1 - y^2} \right) + (x^2 - 1)(1 - y^2)d\varphi^2 \right] \quad (8.4)$$

an. Der Parameter  $\kappa$  ist gegeben durch  $\kappa = \sqrt{d + \delta}$ . Die hier auftretenden Parameter wiederum sind

$$d = \frac{1}{4}[M^2 - (a - b)^2] \quad (8.5)$$

$$\delta = \frac{-M^2 b^2}{M^2 - (a - b)^2} \quad (8.6)$$

mit der Masse  $M$  und dem spezifischen Drehimpuls  $a = J/M$  des Sterns. Der Parameter  $b$  hat keine physikalische Bedeutung, hängt aber über

$$Q = -M(d - \delta - ab + a^2) \quad (8.7)$$

mit dem Quadrupolmoment  $Q$  eines Sterns zusammen. Jetzt führt man

$$f = \frac{E}{D} \quad (8.8)$$

$$e^{2\gamma} = \frac{E}{16\kappa^8(x^2 - y^2)^4} \quad (8.9)$$

$$w = -\frac{(1 - y^2)F}{E} \quad (8.10)$$

ein, wobei

$$\begin{aligned} D = & \{4(\kappa^2 x^2 - \delta y^2)^2 + 2\kappa Mx[2\kappa^2(x^2 - 1) + (2\delta + ab - b^2)(1 - y^2)] \\ & + (a - b)[(a - b)(d - \delta) - M^2 b](y^4 - 1) - 4d^2\}^2 \\ & + 4y^2 \{2\kappa^2(x^2 - 1)[\kappa x(a - b) - Mb] - 2Mb\delta(1 - y^2) \\ & + [(a - b)(d - \delta) - M^2 b](2\kappa x + M)(1 - y^2)\}^2 \end{aligned} \quad (8.11)$$

$$\begin{aligned} E = & \{4[\kappa^2(x^2 - 1) + \delta(1 - y^2)]^2 + (a - b)[(a - b)(d - \delta) - M^2 b](1 - y^2)^2\}^2 \\ & - 16\kappa^2(x^2 - 1)(1 - y^2)\{(a - b)[\kappa^2(x^2 - y^2) + 2\delta y^2] + M^2 b y^2\}^2 \end{aligned} \quad (8.12)$$

$$\begin{aligned} F = & 8\kappa^2(x^2 - 1)\{(a - b)[\kappa^2(x^2 - y^2) + 2\delta y^2] + y^2 M^2 b\} \\ & \cdot \{\kappa Mx[(2\kappa x + M)^2 - 2y^2(2\delta + ab - b^2) - a^2 + b^2] \\ & - 2y^2(4\delta d - M^2 b^2)\} \\ & + \{4[\kappa^2(x^2 - 1) + \delta(1 - y^2)]^2 + (a - b)[(a - b)(d - \delta) - M^2 b](1 - y^2)^2\} \\ & \cdot (4(2\kappa Mbx + 2M^2 b)[\kappa^2(x^2 - 1) + \delta(1 - y^2)] \\ & + (1 - y^2)\{(a - b)(M^2 b^2 - 4\delta d) \\ & - (4\kappa Mx + 2M^2)[(a - b)(d - \delta) - M^2 b]\}) \end{aligned} \quad (8.13)$$

gilt. Damit hat man die gesamte Metrik in analytischer Form gegeben, was von großem Vorteil ist, wenn man das Gravitationsfeld im Außenraum eines schnell rotierenden Sterns



für verschiedenste Anwendungen (Akkretion, Gravitationswellen) betrachtet. Denn obwohl die Darstellung recht kompliziert ist, erspart sie doch numerische Verfahren und den damit verbundenen Aufwand und die unvermeidbaren Fehler. Diese Lösung ist einzig von den drei Parametern  $M$ ,  $a$  und  $b$  abhängig.

Man kann leicht durch Einsetzen zeigen, dass sich für  $a \rightarrow 0$  ein nicht verschwindendes Quadrupolmoment von

$$Q(a = 0) = -\frac{M}{4} \frac{M^2 + b^2}{M^2 - b^2} \quad (8.14)$$

ergibt, und sich die Metrik deshalb für reelle Werte der Parameter nicht kontinuierlich auf die Schwarzschild-Metrik reduziert. Damit ist klar, dass die Manko-Lösung nicht für jeden Stern gültig sein kann. Für welche Bereiche von Parametern die Manko-Lösung eine gute Beschreibung des Außenraums darstellt, soll im nächsten Abschnitt untersucht werden.

Es sei noch angemerkt, dass man die Schwarzschild-Lösung findet, indem man  $a = 0$  und  $b = iM$  setzt. Ähnlich ergibt sich die Kerr-Metrik für  $b^2 = a^2 - M^2$ .

## 8.2 Vergleich und Gültigkeitsbereich

Für einen Vergleich der Metriken ist zunächst sicherzustellen, dass dieselben physikalischen Modelle verglichen werden. Dazu nimmt man an, dass die Masse, der Drehimpuls und das Quadrupolmoment der betrachteten Lösungen übereinstimmen. Praktisch bedeutet dies, dass man für einen durch die numerische Lösung gegebenen Parametersatz bestehend aus Masse, Drehimpuls und Quadrupolmoment die entsprechende Manko-Lösung bestimmt und vergleicht. Dies erscheint als das natürlichste Vorgehen, die entsprechenden Metriken zu vergleichen, wenn gleich man auch andere Verfahren wählen könnte (siehe [131], [98]). Da das Quadrupolmoment nicht direkt in die Manko-Lösung eingeht, sondern nur über den Parameter  $b$ , muss dieser über Gleichung (8.7) bestimmt werden. Eine Möglichkeit besteht darin, diese Gleichung graphisch zu lösen, das heißt, die Nullstellen der Funktion

$$-M[d(M, a, b) - \delta(M, a, b) - ab + a^2] - Q_{num} \quad (8.15)$$

für feste Parameter  $M$  und  $a$  zu suchen. Das Programm `manko_zusatz` (auf der CD) erzeugt für zuvor eingegebene Masse, Drehimpuls und Quadrupolmoment eine Datei mit der entsprechenden Funktion, die sich graphisch darstellen läßt. Typischerweise findet man einen Verlauf, wie er in Abbildung 8.1 gezeigt ist.

Um zu entscheiden, welche der Nullstellen die physikalische Lösung darstellt, untersuchten Berti und Stergioulas [23] das Massenstromoktupolmoment  $S_3$ . Dieses ist für die Manko-Lösung definiert als

$$S_3 = -M\{a^3 - 2a^2b + a[b^2 + 2(d - \delta)] - b(d - \delta)\}. \quad (8.16)$$

Dabei stellte sich heraus, dass der niedrigere Wert für  $b$  das Massenstromoktupolmoment besser beschreibt. Für die in Abbildung 8.1 gezeigte Konfiguration (FPS,  $M_0 = 2,4 M_\odot$ ,

## 8 Manko-Lösung

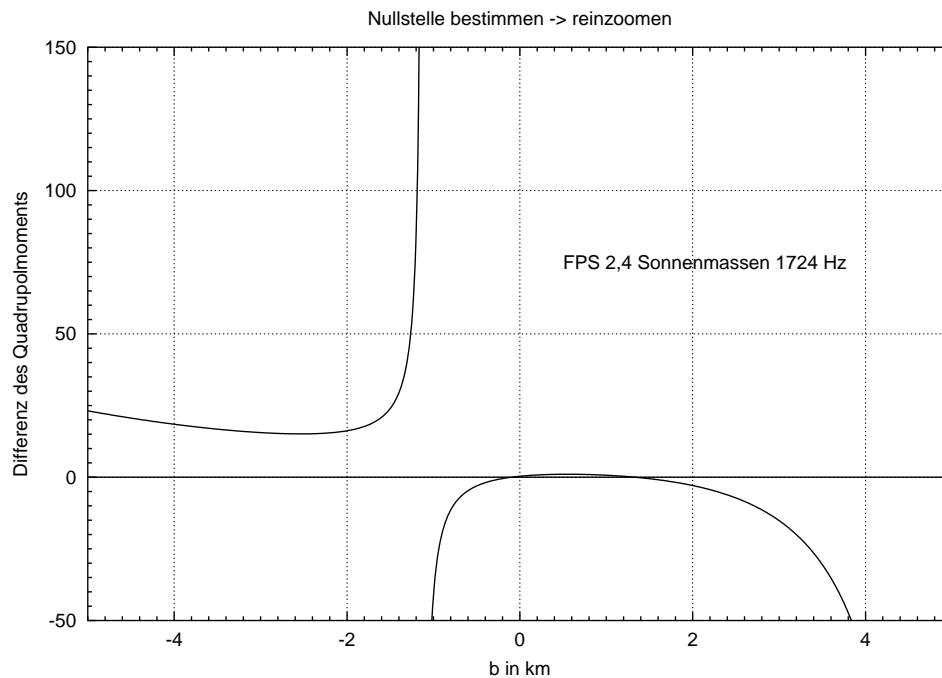


Abbildung 8.1: Differenz der Quadrupolmomente über dem Parameter  $b$ . Die kleinere Nullstelle legt die entsprechende Manko-Lösung zu einer bestimmten numerischen Lösung fest. Gezeigt ist der Verlauf für einen Stern der Zustandsgleichung FPS mit einer Ruhemasse von  $2,4 M_{\odot}$  und einer Rotationsfrequenz von 1724 Hz.

$f = 1724$  Hz) liegt diese Nullstelle bei  $b = -0,1025$  km. Damit hat man nun den vollständigen Satz an Parameter für die Manko-Lösung bestimmt. Für langsam rotierende Sterne liegt der  $\cap$ -förmige Bereich der Funktion (8.15) unterhalb der Abszisse, so dass die Funktion keine Nullstelle besitzt, und dementsprechend keine Manko-Lösung mit reellen Parameter  $b$  existiert.

Der konkrete Vergleich wird analog dem Vorgehen in [23] durchgeführt. Die Koordinatentransformation orientiert sich dabei an einer Rechnung von Islam [82]. Die Transformation der Koordinaten erfordert die numerische Integration von zwei partiellen Differentialgleichungen. Allerdings kann man in der Äquatorialebene, die astrophysikalisch von besonderer Relevanz ist, auf die Integration verzichten, da die Lösung dieser Gleichungen dort als deren Randbedingungen bekannt sind. Es ergibt sich schließlich für die metrischen Funktionen der Manko-Lösung in Abhängigkeit von der numerischen Lösung

in der Äquatorialebene

$$f_{num} = e^{2\nu} - \omega^2 r^2 \sin^2 \theta e^{-2\nu} \quad (8.17)$$

$$w_{num} = -\frac{\omega r^2 \sin^2 \theta e^{-2\nu}}{f_{num}} \quad (8.18)$$

$$(e^{2\gamma})_{num} = \frac{f_{num} A^2}{(Be^\nu + r \frac{\partial Be^\nu}{\partial r})^2}, \quad (8.19)$$

wobei  $f_{num}$  jeweils in den unteren Gleichungen eingesetzt wird. Dabei gehen die metrischen Funktionen  $A$ ,  $B$ ,  $\nu$  und  $\omega$  der von Lorene verwendeten Metrik ein. Mit dem Programm `rotstar_neu` (CD) lassen sich diese Größen an allen Gitterpunkten berechnen. In [23] wurden nur die rein zeitliche und die räumlich-zeitliche Komponenten der Metrik untersucht. Um auch die rein räumlichen Komponenten der Manko-Lösung vergleichen zu können, ist in (8.19) eine Ableitung der metrischen Funktionen zu bestimmen. Dazu wurde in `manko_zusatz` eine Spline-Interpolation implementiert, mit deren Hilfe sich diese Ableitung berechnen lässt.

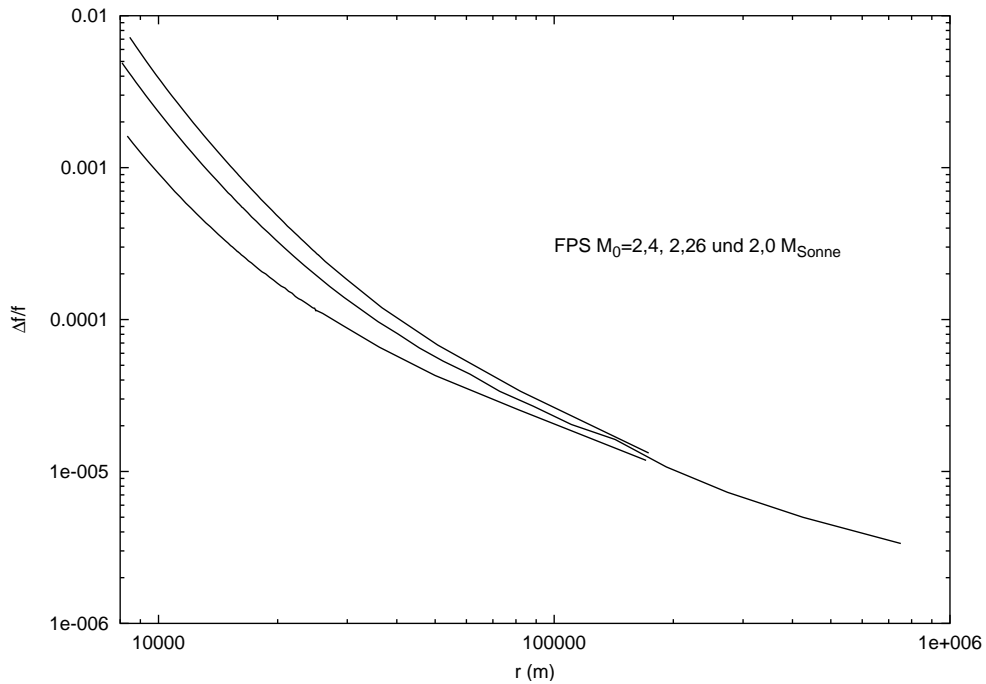


Abbildung 8.2: Relative Abweichung der metrischen Funktion  $f$  der Manko-Lösung von der exakten numerischen Lösung der Zustandsgleichung FPS. Es sind drei Konfigurationen mit Ruhemassen von  $2,0 M_\odot$ ,  $2,26 M_\odot$  und  $2,4 M_\odot$  gezeigt. Die größten Abweichungen ergeben sich für den schwersten Stern, für den leichtesten Stern zeigen sich die geringsten Abweichungen.

## 8 Manko-Lösung

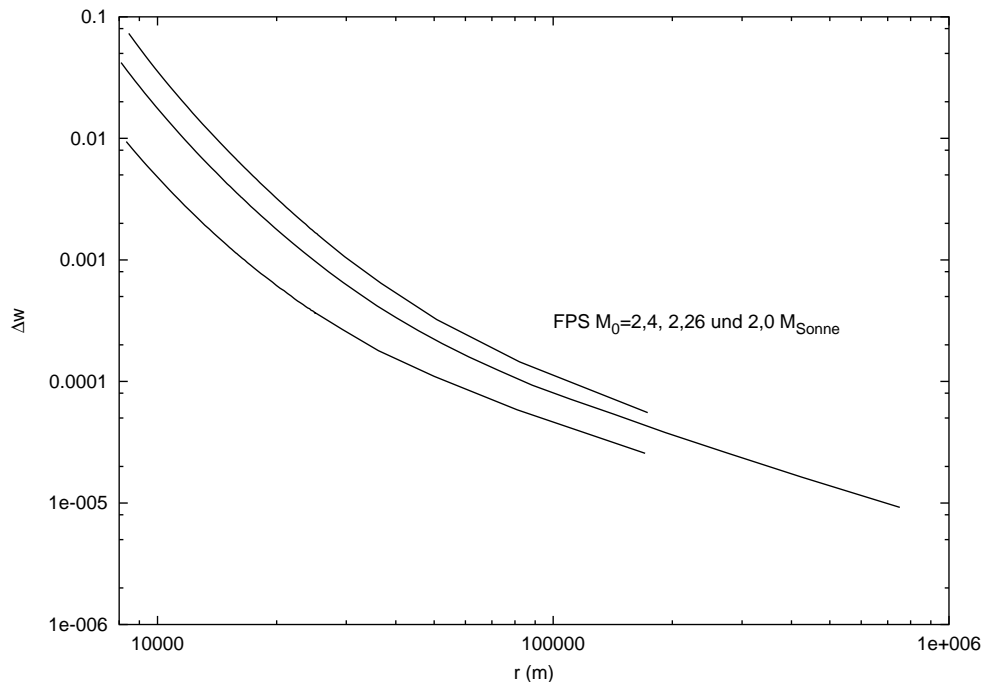


Abbildung 8.3: Absolute Abweichung der metrischen Funktion  $w$  der Manko-Lösung von der exakten numerischen Lösung der Zustandsgleichung FPS. Es sind drei Konfigurationen mit Ruhemassen von  $2,0 M_{\odot}$ ,  $2,26 M_{\odot}$  und  $2,4 M_{\odot}$  gezeigt. Die größten Abweichungen ergeben sich für den schwersten Stern, für den leichtesten Stern zeigen sich die geringsten Abweichungen.

In den Abbildungen 8.2 bis 8.4 sind die Abweichungen der metrischen Funktionen der Manko-Lösung von der als exakt angenommenen numerischen Lösung gezeigt. Der Vergleich wurde für drei Konfigurationen der Zustandsgleichung FPS durchgeführt. Eigenschaften, insbesondere der Drehimpuls und die Rotationsfrequenz, der einzelnen Sterne sind in Tabelle 8.1 zu finden.

Es zeigt sich, dass die Abweichungen für schwerere bzw. schneller rotierende Sterne größer werden. Sie liegen für die metrische Funktion  $f$  an der Oberfläche unter 1% und fallen für einen größeren Abstand vom Stern sehr stark ab. Die innerste stabile Kreisbahn (ISCO) der drei betrachteten Sterne liegt bei ungefähr 13 km, dort beträgt die Abweichung der Manko-Lösung von der numerischen Lösung nur noch 0,01 %. Für die metrische Funktion  $w$  und damit die Komponente  $g_{t\varphi}$  der Metrik ergeben sich größere Fehler von 1-3 %. Dieses Verhalten wird verständlich, wenn man bedenkt, dass diese Komponente stärker von den höheren Multipolmomenten beeinflusst wird, für die sich Abweichungen ergeben. Die metrische Funktion  $e^{2\gamma}$ , die den räumlichen Anteil der Metrik bestimmt, zeigt wieder kleinere Abweichungen. In der Abbildung 8.4 ist nur ein Stern mit einer Ruhemasse von  $2,26 M_{\odot}$  gezeigt. Die Abweichungen an der Oberfläche betragen 0,25 %. Die starken

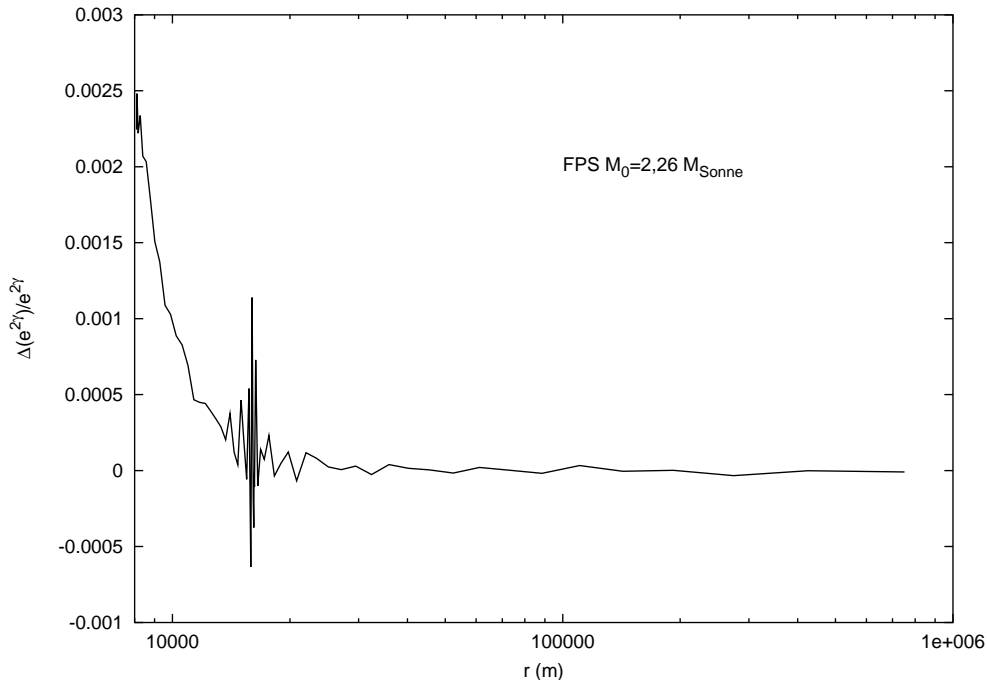


Abbildung 8.4: Relative Abweichung der metrischen Funktion  $e^{2\gamma}$  der Manko-Lösung von der exakten numerischen Lösung der Zustandsgleichung FPS. Es ist eine Konfiguration mit einer Ruhemasse von  $2,26 M_{\odot}$  gezeigt.

Schwankungen zwischen 10 km und 20 km sind keine physikalischen Effekte. In diesem Bereich liegt eine Domänengrenze der Lorene-Lösung, die numerische Fehler verursacht. In diesem Fall würde ein Vergleich mit dem RNS-Code vermutlich klarere Ergebnisse liefern. Ein ähnliches Bild ergibt sich für die beiden anderen Konfigurationen, die der Übersichtlichkeit wegen nicht dargestellt werden. Es ergeben sich also für die räumlichen Komponenten ähnliche Abweichungen wie für die rein zeitliche Komponente. Einen direkten Vergleich der Komponenten des metrischen Tensors erhält man, indem man die verschiedenen Komponenten durch die metrischen Funktionen gemäß (8.1) ausdrückt. Es bleibt festzustellen, dass die Manko-Lösung, sofern sie für eine bestimmte Konfiguration existiert, eine sehr gute Näherung der exakten Lösung darstellt. Zum diesem Ergebnis kommen auch Berti et al. in [23], wobei dort auch der Vergleich mit der entsprechenden Kerr-Metrik angestellt wird.

Obwohl mit den hier gezeigten Rechnungen die Ergebnisse aus [23] bezüglich der Exaktheit der Lösung bestätigt werden konnten, ergeben sich jedoch erhebliche Zweifel am Gültigkeitsbereich der Manko-Lösung. In dieser Veröffentlichung wird als Kriterium für die Existenz der Manko-Lösung, die den Außenraum einer bestimmten numerischen Lösung beschreibt, die Bedingung  $j = a/M > 0,5$  angegeben. Schon bei einer genaueren Inspektion der Tabellen in [23] scheint dieses Kriterium für die Existenz einer Lösung

Zentraldichte ( $10^{18} kg/m^3$ )	2.495	1.7704	2.2525
Frequenz (Hz)	1724.12	1043.83	1480
grav. Masse (Sonnenmassen)	2.07654	1.75194	1.96227
Ruhemasse (Sonnenmassen)	2.4	1.99973	2.2645
Zylinderradius (Äqu.) (m)	11985.1	11192.9	11384.1
$\Omega$ (1/s)	10833	6558.59	9299.11
Drehimpuls ( $c/GM_{\odot}^2$ )	2.73478	1.27041	2.11869
T/W	0.109668	0.0471512	0.0828822
Quadrupolmoment ( $kg m^2$ )	$2.1883 \cdot 10^{37}$	$8,9424 \cdot 10^{36}$	$1,5837 \cdot 10^{37}$
GRV2	-0.000117	-2.806e-05	2.724e-05
GRV3	0.000231	3.428e-05	-3.581e-05
Abplattung	0.639068	0.844629	0.73679
$z_{forward}^{Äquator}$	-0.257074	-0.0241647	-0.14812
$z_{backward}^{Äquator}$	1.88522	0.939105	1.48069
$z^{Pol}$	0.675052	0.427072	0.576951
Zylinderradius des ISCO (m)	13227.6	12864.5	13194.5
Koord.-Radius (Äquator) (m)	8461.26	8336.94	8091.24
Koord.-Radius (Pol) (m)	5407.32	7041.62	5961.55

Tabelle 8.1: 3 Konfigurationen der Zustandsgleichung FPS, deren metrische Funktionen in diesem Kapitel verglichen werden.

fragwürdig und eher willkürlich gewählt. Obwohl man für viele schnell rotierende Konfigurationen den Parameter  $b$  bestimmen kann, ist dies noch nicht gleichbedeutend mit der Existenz einer Manko-Lösung. In vielen Fällen wird der Parameter  $\delta$  negativ und betragsmäßig größer als der Parameter  $d$ , so dass der Parameter  $\kappa$  imaginär wird. Für diese Fälle existiert keine Manko-Lösung. Insbesondere für sehr schnell rotierende Lösungen bzw. Lösungen mit hohem Drehimpuls tritt dieser Fall auf. Statt des Kriteriums  $j > 0,5$ , das über solche Ausnahmen keine Aussage trifft, scheint vielmehr als Bedingung für die Existenz der Manko-Lösung eine andere Form sinnvoll. In Abbildung 8.5 ist der spezifische Drehimpuls  $j = a/M$  über der Masse aufgetragen. Es werden die Lösungen der Evolutionssequenzen der Zustandsgleichung FPS gezeigt, für die erstens ein Parameter  $b$  als Nullstelle der Funktion (8.15) existiert und zweitens der Parameter  $\kappa$  reell ist. Man kann die verschiedenen Evolutionssequenzen noch ansatzweise anhand ihrer Masse erkennen. Es scheint, dass sich die Lösungen entlang einer Geraden in diesem Diagramm gruppieren. Zur Orientierung ist zusätzlich die Sequenz des Keplerlimits eingetragen. Man erkennt, dass lediglich für die supramassive Evolutionssequenz mit einer Ruhemasse von  $2,4 M_{\odot}$  die Konfiguration des Keplerlimits eine entsprechende Manko-Lösung besitzt. Die Lösungen wurden mit den Programmen des Lorene-Pakets erzeugt, wobei nur verhältnismäßig wenige Konfigurationen für die „leichten“ Evolutionssequenzen berechnet wurden, so dass die Aussagekraft der Auftragung 8.5 in diesem Bereich sehr begrenzt und der

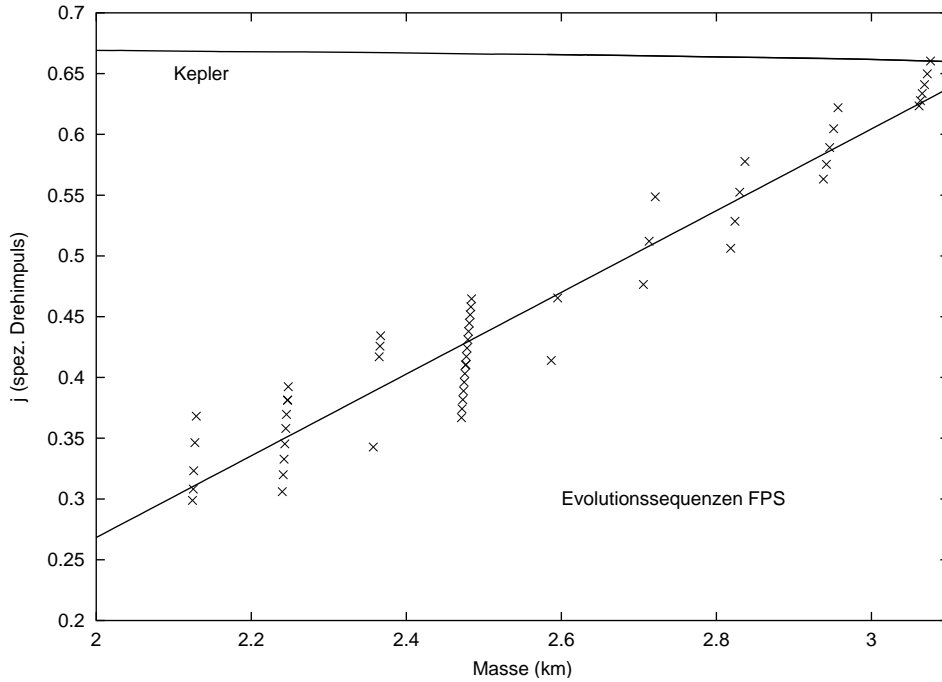


Abbildung 8.5: Konfigurationen der Zustandsgleichung FPS, für die eine entsprechende Manko-Lösung existiert. Aufgetragen ist der spezifische Drehimpuls  $J/M^2$  über der Masse (in km). Zusätzlich ist das Kepler-Limit dargestellt.

Verlauf nicht deutlich ist. In [23] wurden die numerischen Lösungen mit dem RNS-Code gewonnen, dessen Lösungen sich, wie in Kapitel 6.3 gezeigt, gerade bei den Eigenschaften, die die Rotation des Sterns betreffen, deutlich von Lorene unterscheiden. Dennoch zeichnet sich in den tabellierten Ergebnissen dasselbe Verhalten ab. Für die Lösungen in Abbildung 8.5 wurde eine Ausgleichsgerade berechnet und eingetragen. Man findet eine Steigung von  $(0,336 \pm 0,013) \frac{1}{km} = (0,496 \pm 0,019) \frac{1}{M_\odot}$  und einen Achsenabschnitt von  $(-0,404 \pm 0,034)$ . Die Lösungen liegen scheinbar entlang dieser Geraden in einem Band mit der Breite 0,1. In Abbildung 8.6 ist das entsprechende Diagramm für die Zustandsgleichung SLy4 zu sehen. Es sind alle Evolutionsssequenzen mit Ruhemassen von  $1,4 M_\odot$  bis  $2,8 M_\odot$  im Abstand von  $0,1 M_\odot$  eingezeichnet. Für die Ausgleichsgerade ergibt sich eine Steigung von  $(0,273 \pm 0,007) \frac{1}{km} = (0,403 \pm 0,010) \frac{1}{M_\odot}$  und ein Achsenabschnitt von  $(-0,304 \pm 0,021)$ . Das Band in dem sich die Manko-Lösungen befinden hat ebenfalls eine Breite von ungefähr 0,1. Bei dieser Zustandsgleichung besitzt nur das Kepler-Limit der zwei schwersten Evolutionsssequenzen eine Manko-Lösung. Weitere Untersuchungen könnten zeigen, ob sich dieses lineare Gesetz bestätigt, und wie die Steigung, der Achsenabschnitt und die Breite des Bandes von der Zustandsgleichung abhängen.

Um zu bestimmen, in welchem Bereich analytische Lösungen für den Außenraum von Neutronensternen existieren, ist in Abbildung 8.7 die Rotationsfrequenz über der Masse

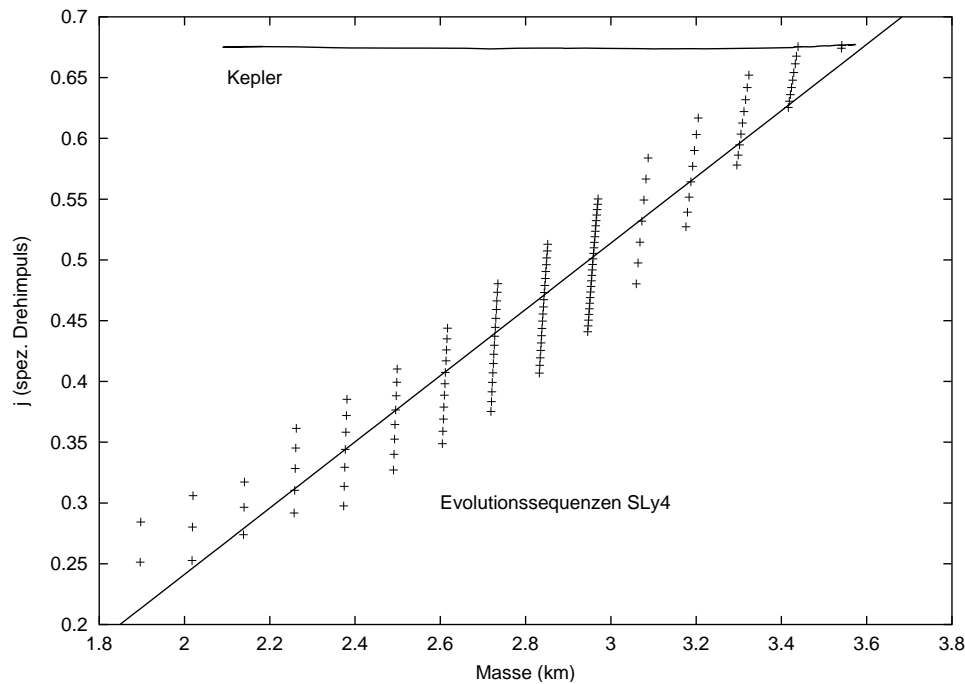


Abbildung 8.6: Konfigurationen der Zustandsgleichung SLy4, für die eine entsprechende Manko-Lösung existiert. Aufgetragen ist der spezifische Drehimpuls  $J/M^2$  über der Masse (in km). Zusätzlich ist das Kepler-Limit dargestellt.

für die Zustandsgleichung SLy4 dargestellt. Wie man in den Abbildungen aus Kapitel 6.2 sieht, skaliert die Abweichung der analytischen Lösung für langsam rotierende Sterne nach Hartle und Thorne (siehe Kapitel 2) mit der Frequenz. Deshalb ist diese Darstellung besonders geeignet, den Gültigkeitsbereich der Manko-Lösung abzuschätzen. Man erkennt in diesem Diagramm, dass es für viele Neutronensterne keine hinreichend exakte analytische Lösung des Außenraums gibt. Dies gilt zumindest dann, wenn man für die Näherungsmethode nur eine Entwicklung in erster Ordnung ansetzt. Die Entwicklung bis zur zweiten Ordnung wurde in Kapitel 2.3 besprochen. Dort wurde auch auf die Arbeit von Berti et al. [24] verwiesen, die sich mit der Güte der Hartle-Thorne-Näherung in zweiter Ordnung auseinandersetzt. Es stellte sich heraus, dass diese Näherungsmethode je nach betrachteter Größe für einen mit 1,5 ms rotierenden Neutronenstern noch gute Ergebnisse liefert. Dies entspricht einer Frequenz von 666 Hz, so dass selbst mit diesem Verfahren ein großer Bereich in Abbildung 8.7 nicht abgedeckt wird.



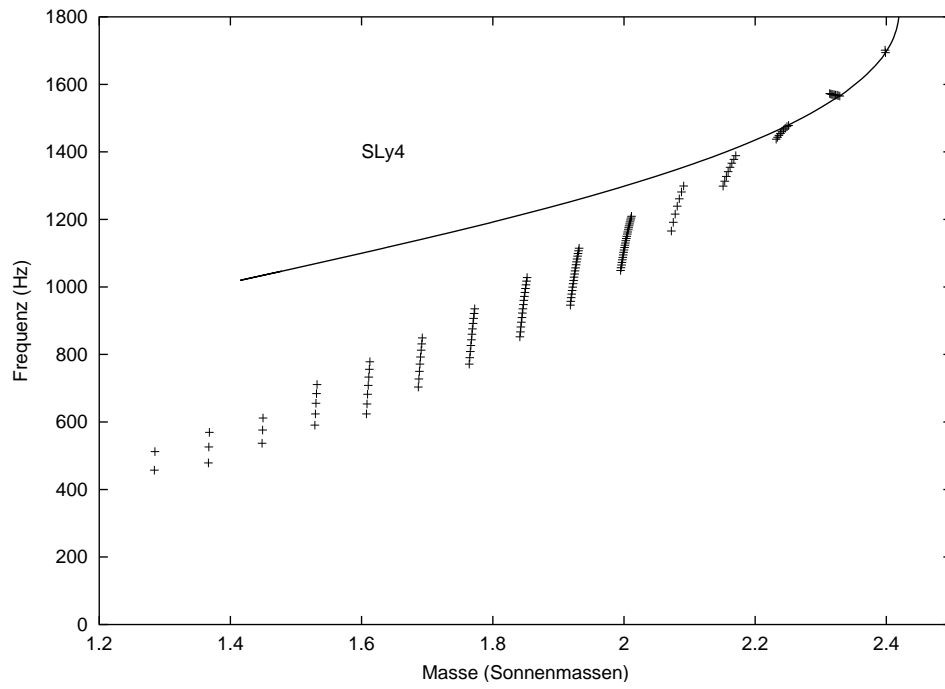


Abbildung 8.7: Konfigurationen der Zustandsgleichung SLy4, für die eine entsprechende Manko-Lösung existiert. Aufgetragen ist die Rotationsfrequenz über der Masse (in  $M_{\odot}$ ). Zusätzlich ist das Kepler-Limit mit einer durchgezogenen Linie dargestellt.



## 9 Zusammenfassung und Ausblick

Wie in der Motivation und der historischen Darstellung aufgezeigt, sind Untersuchungen von Neutronen- und Quarksternen ein äußerst interessantes Forschungsgebiet, das vielen Einflüssen aus verschiedenen Bereichen der Physik unterliegt und ebenso aber auch Einfluß auf diese nimmt. Viele Fragen zum Beispiel nach der Zustandsgleichung von dichter kalter Materie sind noch offen und können möglicherweise in den nächsten Jahrzehnten mit verbesserten Beobachtungen geklärt werden. Im wesentlichen gibt es zwei Methoden zur Ableitung einer Zustandsgleichung. Zum einen benutzt man Methoden der nicht relativistischen Vielteilchenphysik zum anderen kommen Herleitungen im Rahmen einer relativistischen Quantenfeldtheorie zum Einsatz. In dieser Arbeit wurden die drei rein hadronischen Zustandsgleichungen FPS, SLy4 und APR vorgestellt, die alle mit der ersten Methode gewonnen wurden. Weiterhin wurden verschiedene Modelle von Quarksternen diskutiert. Einerseits die mit der strange matter hypothesis verbundene Möglichkeit von Seltsamen Sternen. Andererseits wurden Quark-Zustandsgleichungen mit dem MIT-Bag-Modell berechnet und entsprechende Phasenübergänge von der hadronischen Phase zur Quarkphase konstruiert.

Um die Eigenschaften und das Gravitationsfeld von Neutronensternen zu berechnen wurden verschiedene Verfahren vorgestellt. Ein seit langem etabliertes Verfahren beschränkt sich auf die Behandlung von langsam rotierenden Sternen. Diese Näherungsmethode wurde ausführlich eingeführt und diskutiert. Es zeigte sich, dass dieses Vorgehen für viele Anwendungen ausreicht und besonders aufgrund seiner Einfachheit im Vergleich zu den anderen Methoden von Vorteil ist. Die Lösungen dieser Rechnungen wurden vorgestellt und mit verschiedenen Beobachtungen in Verbindung gebracht.

Für die Behandlung des vollen Problems, das heißt für beliebig schnell rotierende Sterne, wurden stellare Strukturgleichungen abgeleitet. Dabei kam der 3+1-Split zur Anwendung, der mittlerweile ein Standardverfahren der Numerical Relativity darstellt. Die gewonnenen Gleichungen sind numerisch besonders vorteilhaft, weil es sich um elliptische Differentialgleichungen handelt, für die verschiedene numerische Lösungsverfahren existieren. Darüber hinaus wurde die Äquivalenz dieser Gleichungen zu anderen Strukturgleichungen diskutiert und gezeigt, wie sich diese Gleichung auf die Gleichungen der langsamen Rotation reduzieren.

Schließlich wurden die Eigenschaften und das Gravitationsfeld von schnell rotierenden Neutronen- und Quarksternen berechnet. Dabei wurden die frei verfügbaren Software-Pakete RNS und Lorene mit einem Schwerpunkt auf letzterem benutzt. Es wurden im einzelnen die Ergebnisse für die rein hadronischen Zustandsgleichungen FPS, SLy4 und APR vorgestellt als auch Resultate für Zustandsgleichungen des MIT-Bag-Modells. Verschiedenste Aspekte dieser Modelle wurden dargelegt und verglichen. Soweit entspre-

chende Daten in der Literatur verfügbar sind, wurde ein Vergleich mit den Ergebnissen angestellt.

Weiterhin wurde in dieser Arbeit ausgehend von den numerischen Lösungen die Manko-Lösung, eine analytische Lösung der Feldgleichungen für den Außenraum von schnell rotierenden Sternen, diskutiert. Dabei bestätigten sich frühere Resultate bezüglich der Exaktheit der Manko-Lösung im Vergleich zu numerisch gewonnenen Lösungen. Insbesondere wurden auch die räumlichen Komponenten der Metrik untersucht. Es zeigte sich allerdings, dass das bisherige Kriterium für die Existenz einer solchen Lösung, die zu einem bestimmten Stern paßt, nicht weiter als gültig angesehen werden darf. Stattdessen wurde eine neue Bedingung vorgeschlagen auf der Grundlage einer Untersuchung, die mehrere verschiedene Sterne einschloss. Im Lichte dieser Betrachtung zeigte sich, dass die Manko-Lösung nur für einen begrenzten Parameterbereich den Außenraum von Neutronensternen beschreibt. Es bleibt damit festzuhalten, dass es nicht für jede Konfiguration eine hinreichend exakte analytische Lösung, also entweder die analytische Metrik der langsamen Rotation oder die Manko-Metrik, gibt.

Innerhalb dieser Arbeit mußten viele Aspekte insbesondere der schnell rotierenden Lösungen unberücksichtigt bleiben bzw. konnten nur kurz besprochen werden. Viele Eigenschaften konnten nur exemplarisch diskutiert werden, obwohl eine Fülle an Daten zur Verfügung steht. Ebenso konnte der Vergleich mit anderen Lösungen sowie die Analyse der Fehler nur ansatzweise vorgestellt werden. All dies könnte Gegenstand weiterer Untersuchungen sein, die auch andere Zustandsgleichungen einbeziehen als die hier verwendeten. Besonders viele Möglichkeiten ergeben sich hier im Zusammenhang mit Quark-Zustandsgleichungen (für Hybrid-Sterne), deren Eigenschaften für schnell rotierende Lösungen noch nicht umfassend untersucht wurden. In dieser Arbeit konnten auf diesem Gebiet nur erste Versuche unternommen werden. Auch die Einordnung der jeweiligen Resultate bezüglich verschiedenster Beobachtungsergebnisse konnte nur am Rande behandelt werden.

Obwohl gerade die Codes des Lorene-Projekts umfassend weiterentwickelt wurden, so dass man nahezu alle interessierenden Probleme behandeln kann, könnten dennoch einige Fortschritte im Hinblick auf die Effizienz und die Rechengeschwindigkeit gemacht werden. Zum einen bestände die Möglichkeit der Parallelisierung und zum anderen wäre zu überprüfen, inwieweit man mit einem Rechendurchlauf der Methode `et_rot_equilibrium` aus `rotstar` bzw. `rotstar_neu` mehrere Konfigurationen berechnen kann. Weiterhin könnte man versuchen, die in dieser Arbeit abgeleiteten stellaren Strukturgleichungen zu implementieren.

Die Beschäftigung mit der Manko-Lösung am Ende dieser Arbeit hat ebenfalls aufgezeigt, in welche Richtung noch weitere Untersuchungen angestellt werden könnten. Zum einen bleibt die Genauigkeit der Manko-Lösung außerhalb der Äquatorialebenen immer noch offen. (Nur für die Rotationsachse gibt es ähnliche Ergebnisse). Außerdem wurde nur eine kleine Anzahl von Konfigurationen ausgewählter Zustandsgleichungen betrachtet. Zum anderen sollte das hier gefundene Kriterium für die Existenz der Manko-Lösung weiter untersucht werden. Dabei stellt sich die Frage, ob sich das lineare Verhalten in der

j-M-Darstellung bestätigt. Dazu sollte man auch eine größere Klasse von Zustandsgleichungen in Betracht ziehen. Weiter könnte man überlegen, ob sich eine andere „matching“-Prozedur als sinnvoller erweist.

Insgesamt gibt es also noch einige spannende Frage, die es zu klären gilt. Besonders von zukünftigen Beobachtungen wird man wichtige Beiträge erwarten können.

## 9 Zusammenfassung und Ausblick

## A Diverse Rechnungen

In diesem Anhang werden diverse Aspekte aus Kapitel 2.2 genauer untersucht. Als erstes soll Gleichung (2.69) für den Ricci-Tensor bewiesen werden. Die Rechnung wird in der Koordinaten-Basis ausgeführt. Aus der Definition des Ricci-Tensors

$$R_{\nu\mu} = -\frac{\partial\Gamma_{\mu\rho}^{\rho}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial\Gamma_{\nu\mu}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} + \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\rho}^{\rho} \quad (\text{A.1})$$

folgt

$$R_{\varphi}{}^t = g^{t\mu}R_{\varphi\mu} = g^{t\mu} \left[ \frac{\partial\Gamma_{\varphi\mu}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \Gamma_{\varphi\rho}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} + \Gamma_{\varphi\mu}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\rho}^{\rho} \right], \quad (\text{A.2})$$

da die metrischen Komponenten und damit die Christoffelsymbole unabhängig von  $t$  und  $\varphi$  sein sollen. Jetzt gilt

$$\Gamma_{\sigma\rho}^{\rho} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^{\sigma}} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^{\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^{\sigma}}, \quad (\text{A.3})$$

was man leicht mit der Definition der Christoffelsymbole zeigt. Außerdem erhält man aus  $g^{t\rho}{}_{;\sigma} = 0$ , indem man die Definition der kovarianten Ableitung umstellt,

$$g^{t\mu}\Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} = -\frac{\partial g^{t\rho}}{\partial x^{\sigma}} - \Gamma_{\sigma\mu}^t g^{\rho\mu}. \quad (\text{A.4})$$

Setzt man dies in (A.2) ein, ergibt sich

$$R_{\varphi}{}^t = g^{t\mu} \frac{\partial\Gamma_{\varphi\mu}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^{\sigma}} \Gamma_{\varphi\mu}^{\sigma} g^{t\mu} + \frac{\partial g^{t\rho}}{\partial x^{\sigma}} \Gamma_{\rho\varphi}^{\sigma} + \Gamma_{\varphi\rho}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\mu}^t g^{\rho\mu} \quad (\text{A.5})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} [\Gamma_{\varphi\mu}^{\rho} \sqrt{-g} g^{t\mu}] + \Gamma_{\sigma\mu}^t \Gamma_{\varphi\rho}^{\sigma} g^{\rho\mu}, \quad (\text{A.6})$$

wenn man eine entsprechende Umbenennung der Indizes im zweiten und dritten Term vornimmt. Nun sollen die metrischen Funktionen nicht von  $\varphi$  abhängen, so dass man mit (A.4) und Index-Umbenennung

$$0 = \Gamma_{\sigma\mu}^t \underbrace{\frac{\partial g^{\sigma\mu}}{\partial x^{\varphi}}}_{=0} \quad (\text{A.7})$$

$$= -\Gamma_{\sigma\mu}^t \Gamma_{\varphi\rho}^{\sigma} g^{\rho\mu} - \Gamma_{\sigma\mu}^t \Gamma_{\rho\varphi}^{\mu} g^{\rho\sigma} \quad (\text{A.8})$$

$$= -2\Gamma_{\sigma\mu}^t \Gamma_{\varphi\rho}^{\sigma} g^{\rho\mu} \quad (\text{A.9})$$

## A Diverse Rechnungen

rechnet. Damit verschwindet der letzte Term in (A.6) und man findet die gewünschte Formel.

Nun soll gezeigt werden, dass die Vektor-Harmonischen

$$\varpi(r, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} \varpi_l(r) \left( -\frac{1}{\sin\theta} \frac{dP_l}{d\theta} \right) \quad (\text{A.10})$$

der passende Separationsansatz für Gleichung (2.87) sind, wobei  $P_l(\cos\theta)$  die Legendre-Polynome sind.  $\omega$  als Winkelgeschwindigkeit transformiert sich unter Rotation wie ein Vektor, was diesen Ansatz nahelegt. Es muss also bewiesen werden, dass  $\frac{1}{\sin\theta} \frac{dP_l}{d\theta}$  Eigenfunktionen des Operators

$$\frac{1}{\sin^3\theta} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin^3\theta \frac{d}{d\theta} \right] \quad (\text{A.11})$$

sind. Mit  $x = \cos\theta$  erfüllen die Legendre-Polynome definitionsgemäß die Legendre-Differentialgleichung

$$(1 - x^2) \frac{d^2 P_l(x)}{dx^2} = 2x \frac{dP_l(x)}{dx} - l(l+1)P_l(x) \quad (\text{A.12})$$

mit  $l = 0, 1, 2, \dots$  [30]. Allgemein gilt nach der Kettenregel

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d}{dx} = -\sin\theta \frac{d}{dx}, \quad (\text{A.13})$$

woraus auch

$$\frac{dP_l}{d\theta} = -\sin\theta \frac{dP_l}{dx} \quad (\text{A.14})$$

folgt.



Dieses verwendend zeigt man

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin^3\theta} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin^3\theta \frac{d}{d\theta} \left( -\frac{1}{\sin\theta} \frac{dP_l}{d\theta} \right) \right] &= \frac{1}{\sin^3\theta} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin^3\theta \frac{d}{d\theta} \frac{dP_l}{dx} \right] \\
&= \frac{-1}{\sin^2\theta} \frac{d}{dx} \left[ -\sin^4\theta \frac{d}{dx} \left( \frac{dP_l}{dx} \right) \right] \\
&= \frac{1}{1-x^2} \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2)^2 \frac{d^2 P_l}{dx^2} \right] \\
\stackrel{(A.12)}{=} \frac{1}{1-x^2} \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \left( 2x \frac{dP_l}{dx} - l(l+1)P_l \right) \right] \\
&= \frac{1}{1-x^2} \left[ (-2x) \left( 2x \frac{dP_l}{dx} - l(l+1)P_l \right) \right. \\
&\quad \left. + (1-x^2) \left( 2 \frac{dP_l}{dx} + 2x \frac{d^2 P_l}{dx^2} - l(l+1) \frac{dP_l}{dx} \right) \right] \\
\stackrel{(A.12)}{=} \frac{1}{1-x^2} \left[ (-2x) \left( 2x \frac{dP_l}{dx} - l(l+1)P_l \right) \right. \\
&\quad \left. + 2(1-x^2) \frac{dP_l}{dx} - (1-x^2)l(l+1) \frac{dP_l}{dx} \right. \\
&\quad \left. + 2x \left( 2x \frac{dP_l}{dx} - l(l+1)P_l \right) \right] \\
&= [2 - l(l+1)] \frac{dP_l}{dx} \\
&= [2 - l(l+1)] \left( \frac{-1}{\sin\theta} \frac{dP_l}{d\theta} \right). \tag{A.15}
\end{aligned}$$

Nun kann dieses Ergebnis in (2.87) eingesetzt werden und liefert für den radialen Anteil dieser Gleichung

$$\frac{1}{r^4} \frac{d}{dr} \left[ r^4 j(r) \frac{d\varpi_l}{dr} \right] + \frac{4}{r} \frac{dj}{dr} \varpi_l + \frac{e^{\lambda-\nu}}{r^2} [2 - l(l+1)] \varpi_l = 0, \tag{A.16}$$

was (2.89) entspricht.

*A Diverse Rechnungen*

## B Integration der Gleichungen der langsamen Rotation

An dieser Stelle soll gezeigt werden, wie und warum das Differentialgleichungssystem (4.1) bis (4.5) als Anfangswertproblem gelöst wird. Aus den in Kapitel 4.1 genannten Gründen ist der Ansatz

$$\nu(r) = \nu_0 + \nu_1(r) \quad (\text{B.1})$$

$$\varpi(r) = \varpi_0 \cdot \varpi_1(r) \quad (\text{B.2})$$

mit beliebigen Anfangswerten für  $\nu_1$  und  $\varpi_1$  gerechtfertigt,  $\nu_0$  und  $\varpi_0$  konstant. Zunächst gilt offensichtlich

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{d\nu_1}{dr}. \quad (\text{B.3})$$

Weiterhin folgt

$$\frac{d\varpi_1}{dr} = \frac{1}{\varpi_0} \frac{d\varpi}{dr} = \frac{z}{\varpi_0} \equiv V. \quad (\text{B.4})$$

Nun multipliziert man (4.5) mit  $\frac{1}{\varpi_0}$  und erhält

$$\frac{d\frac{z}{\varpi_0}}{dr} = -\frac{4}{r} \frac{z}{\varpi_0} - \frac{1}{j(r)} \frac{dj}{dr} \frac{z}{\varpi_0} - \frac{4}{rj(r)} \frac{dj}{dr} \varpi_1, \quad (\text{B.5})$$

was sich mit Definition (B.4) schreibt als

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{4}{r} V - \frac{1}{j(r)} \frac{dj}{dr} V - \frac{4}{rj(r)} \frac{dj}{dr} \varpi_1. \quad (\text{B.6})$$

Damit ist das Anfangswertproblem für  $M$ ,  $\nu_1$ ,  $P$ ,  $\varpi_1$  und  $\frac{d\varpi_1}{dr} \equiv V$  formuliert mit  $V(0) = 0$  und den beliebigen Anfangswerten  $\nu_1(0) = 0$  und  $\varpi_1(0) = 1$ .

Die Randbedingungen lauten mit (B.1) und (B.2)

$$e^{2(\nu_0 + \nu_1(R))} = 1 - \frac{2GM(R)}{c^2 R} \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\varpi(R)}{\Omega} = \frac{\varpi_0}{\Omega} \varpi_1(R) = 1 - \frac{2GI}{c^2 R^3}, \quad (\text{B.8})$$

was die Konstanten  $\nu_0$  und  $\varpi_0$  bestimmt. Denn diese Konstanten sollen gerade so gewählt werden, dass die Randbedingungen erfüllt sind. Die Bestimmung von  $\nu_0$  ist offensichtlich

## B Integration der Gleichungen der langsamen Rotation

und durch (4.13) gegeben. Weiter ergibt sich nach Gleichung (2.96) für das Trägheitsmoment

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{8\pi}{3} \int_0^R r^4 \left[ \epsilon + \frac{P}{c^2} \right] \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right]^{-\frac{1}{2}} e^{-\nu_0 - \nu_1(r)} \frac{\varpi_0 \varpi_1(r)}{\Omega} dr \\
 &= \frac{8\pi}{3} \frac{\varpi_0}{\Omega} e^{-\nu_0} \int_0^R r^4 \left[ \epsilon + \frac{P}{c^2} \right] \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right]^{-\frac{1}{2}} e^{-\nu_1(r)} \varpi_1(r) dr \\
 &\stackrel{(B.8)}{=} \frac{8\pi}{3} \frac{1}{\varpi_1(R)} \left( 1 - \frac{2GI}{c^2 R^3} \right) e^{-\nu_0} \underbrace{\int_0^R r^4 \left[ \epsilon + \frac{P}{c^2} \right] \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right]^{-\frac{1}{2}} e^{-\nu_1(r)} \varpi_1(r) dr}_{\equiv \Sigma} \\
 &= \frac{8\pi}{3} \frac{1}{\varpi_1(R)} \left( 1 - \frac{2GI}{c^2 R^3} \right) e^{-\nu_0} \Sigma. \tag{B.9}
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung für das Trägheitsmoment enthält nur Größen, die nach der Integration des Anfangswertproblems bekannt sind, denn  $\nu_0$  ist durch (4.13) gegeben. Insbesondere ist der Integrand der Hilfsgröße  $\Sigma$  während der Iteration bekannt, so dass man  $\Sigma$  parallel integrieren kann. Damit ergibt sich schließlich durch das Hinzufügen von  $\Sigma$  ein 6-dimensionales Anfangswertproblem (mit  $\Sigma(0) = 0$ ). Die Invertierung von Gleichung (B.9) liefert das Trägheitsmoment

$$\begin{aligned}
 I &= \left( \frac{3}{8\pi} e^{\nu_0} \frac{\varpi_1(R)}{\Sigma} + \frac{2G}{c^2 R^3} \right)^{-1} \\
 &= \left( \frac{3}{8\pi} \sqrt{1 - \frac{2GM(R)}{c^2 R}} e^{-\nu_1(R)} \frac{\varpi_1(R)}{\Sigma} + \frac{2G}{c^2 R^3} \right)^{-1}. \tag{B.10}
 \end{aligned}$$

Man beachte, dass an keiner Stelle die Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  einging. Das Trägheitsmoment ist demnach in dieser Ordnung unabhängig von der Rotation. Für schnell rotierende Sterne erwartet man, dass dies nicht mehr gültig ist, da die Rotation den Stern verformt. Jetzt kann man für eine gegebene Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  den Drehimpuls  $J = I\Omega$  berechnen und auch die Konstante  $\varpi_0$  angeben. Es ist

$$\varpi_0 = \frac{1}{\varpi_1(R)} \left( \Omega - \frac{2GI\Omega}{c^2 R^3} \right) = \varpi_0 \cdot \underbrace{\varpi_1(0)}_{=1} = \varpi(0) \tag{B.11}$$

für die obige Anfangsbedingung  $\varpi_1(0) = 1$ .

## C Herleitung des Energie-Impuls-Tensors

Für die Herleitung des Energie-Impuls-Tensors wird die Metrik (5.7)

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\psi} (d\varphi - \omega dt)^2 + e^{2\mu} ((dx^2)^2 + (dx^3)^2) \quad (\text{C.1})$$

in isotroper Eichung benutzt mit  $e^\nu = \alpha$ . Daraus kann man ablesen:

- Beobachter:

$$e_0 = e^{-\nu} (\partial_t + \omega \partial_\varphi) \quad (\text{C.2})$$

$$e_1 = e^{-\psi} \partial_\varphi \quad (\text{C.3})$$

$$e_2 = e^{-\mu} \partial_2 \quad (\text{C.4})$$

$$e_3 = e^{-\mu} \partial_3 \quad (\text{C.5})$$

- Basis-1-Formen:

$$\theta^0 = e^\nu dt \quad (\text{C.6})$$

$$\theta^1 = e^\psi (d\varphi - \omega dt) \quad (\text{C.7})$$

$$\theta^2 = e^\mu dx^2 \quad (\text{C.8})$$

$$\theta^3 = e^\mu dx^3 \quad (\text{C.9})$$

- und die Invertierungen:

$$\partial_t = e^\nu e_0 - \omega e^\psi e_1 \quad (\text{C.10})$$

$$\partial_\varphi = e^\psi e_1 \quad (\text{C.11})$$

$$\partial_2 = e^\mu e_2 \quad (\text{C.12})$$

$$\partial_3 = e^\mu e_3 \quad (\text{C.13})$$

$$dt = e^{-\nu} \theta^0 \quad (\text{C.14})$$

$$d\varphi = e^{-\psi} \theta^1 + \omega e^{-\nu} \theta^0 \quad (\text{C.15})$$

$$dx^2 = e^{-\mu} \theta^2 \quad (\text{C.16})$$

$$dx^3 = e^{-\mu} \theta^3 \quad (\text{C.17})$$

### C Herleitung des Energie-Impuls-Tensors

Um den Energie-Impuls-Tensor herzuleiten benötigt man die Eigengeschwindigkeit der rotierenden Materie. Es wird in der Koordinaten-Basis gerechnet. Die allgemeine Definition der Eigengeschwindigkeit lautet

$$u^t = \frac{dt}{d\tau} \quad u^\varphi = \frac{d\varphi}{d\tau} \quad u^A = \frac{dx^A}{d\tau} \quad (\text{C.18})$$

$$\Rightarrow \quad u^\varphi = \frac{d\varphi}{dt} u^t =: \Omega u^t \quad u^A = \frac{dx^A}{dt} u^t =: v^A u^t. \quad (\text{C.19})$$

Für die betrachtete rotierende Materie ist  $v^A = 0$ , woraus  $u^A = 0$  folgt. Die verbleibenden Komponenten bestimmt man aus der Normierungsbedingung der Eigengeschwindigkeit.

$$-1 = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \quad (\text{C.20})$$

$$\Rightarrow \quad -1 = g_{tt} u^t u^t + 2g_{t\varphi} u^t u^\varphi + g_{\varphi\varphi} u^\varphi u^\varphi$$

$$\Rightarrow \quad -1 = g_{tt} (u^t)^2 + 2g_{t\varphi} \Omega (u^t)^2 + g_{\varphi\varphi} \Omega^2 (u^t)^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad u^t &= \frac{1}{\sqrt{e^{2\nu} - e^{2\psi} (\Omega - \omega)^2}} \\ &= e^{-\nu} \underbrace{[1 - e^{2\psi-2\nu} (\Omega - \omega)^2]^{-\frac{1}{2}}}_{=: \gamma} \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

$$= \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad u^\varphi = \Omega \frac{\gamma}{\alpha}$$

Diese Eigengeschwindigkeiten müssen orthonormiert werden:

$$\mathbf{u} = u^\mu \partial_\mu = u^{(\mu)} e_\mu$$

$$u^{(0)} = u^t e^\nu = \gamma$$

$$u^{(1)} = u^t (-\omega e^\psi) + u^\varphi e^\psi = \frac{\gamma}{\alpha} e^\psi (\Omega - \omega) = V\gamma$$

$$\Rightarrow \quad (\text{ortho}) \mathbf{u} = (\gamma, V\gamma, 0, 0) \quad (\text{C.22})$$

Im folgenden werden die Klammern, die orthonormierte Tensoren kennzeichnen, unterdrückt. Wie man an der Definition von  $\gamma$  erkennt, gilt

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - V^2} \Rightarrow \quad 1 + V^2 \gamma^2 = \gamma^2, \quad (\text{C.23})$$

wenn man  $V = e^{\psi-\nu} (\Omega - \omega)$  definiert. Der Energie-Impuls-Tensor im orthonormierten System ist gegeben durch

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P) u^\mu u^\nu + P \eta^{\mu\nu}. \quad (\text{C.24})$$

Damit findet man die nicht verschwindenden Komponenten

$$\begin{aligned} T^{00} &= (\epsilon + P)\gamma^2 - P = \epsilon\gamma^2 + P(\gamma^2 - 1) \\ &\stackrel{(C.23)}{=} \epsilon\gamma^2 + PV^2\gamma^2 = \gamma^2(\epsilon + PV^2) \end{aligned} \quad (C.25)$$

$$T^{01} = (\epsilon + P)\gamma^2 V \quad (C.26)$$

$$\begin{aligned} T^{11} &= (\epsilon + P)\gamma^2 V^2 + P = \gamma^2 V^2 \epsilon + P(1 + \gamma^2 V^2) \\ &\stackrel{(C.23)}{=} \gamma^2 V^2 \epsilon + P\gamma^2 = \gamma^2(P + \epsilon V^2) \end{aligned} \quad (C.27)$$

$$T^{22} = T^{33} = P. \quad (C.28)$$

Daraus bestimmt man die Spur des Energie-Impuls-Tensors als

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad Tr(T^{\mu\nu}) = T^\mu{}_\mu &= -T^{00} + T^{11} + T^{22} + T^{33} \\ &= -\gamma^2\epsilon - \gamma^2 PV^2 + \gamma^2 P + \gamma^2\epsilon V^2 + 2P \\ &= \epsilon(\gamma^2 V^2 - \gamma^2) + P(\gamma^2 - \gamma^2 V^2) + 2P \\ &\stackrel{(C.23)}{=} -\epsilon + P + 2P = -\epsilon + 3P. \end{aligned} \quad (C.29)$$

zur Interpretation von  $\gamma$  und  $V$ :

$e^\psi$  kann als Eigen-Zylinderradius  $R$  interpretiert werden, was sich aus der Metrik ergibt (siehe Kapite 5.2). Damit schreibt sich  $V$  als

$$V = R(\Omega - \omega)e^{-\nu}, \quad (C.30)$$

was von der Dimension einer Geschwindigkeit ist.  $\Omega$  ist die Winkelgeschwindigkeit des Fluids und  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit des ZAMO (Zero Angular Momentum Observer) beobachtet im Unendlichen. Deshalb ist die Differenz der Winkelgeschwindigkeiten multipliziert mit  $e^{-\nu}$  die Winkelgeschwindigkeit der Materie, wie sie der ZAMO beobachtet. Der Faktor  $e^{-\nu}$  transformiert die Differenz vom im Unendlichen beobachteten Wert auf den im Lokalen Inertialsystem gemessenen Wert. Damit kann  $V$  als die Geschwindigkeit des Fluids im ZAMO interpretiert werden und  $\gamma$  entspricht dem aus der Speziellen Relativitätstheorie bekannten Lorentz-Faktor.

*C Herleitung des Energie-Impuls-Tensors*



## D Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts

Hier wird die Herleitung der Gleichung für das hydrostatische Gleichgewicht (5.109) gezeigt. Startend mit Gleichung (5.108) besteht der entscheidende Schritt im Addieren einer 0. Man rechnet in der Koordinaten-Basis unter Verwendung der Beziehungen für die Eigengeschwindigkeit (z. B. Anhang C)

$$\begin{aligned}
-(\partial_2 P) &= (\partial_2 \nu)P + (\partial_2 \psi)P \\
&\quad - \frac{1}{2} [\partial_2 (\omega^2 e^{2\psi} - e^{2\nu})] \cdot [(\epsilon + P)(u^t)^2 - P e^{-2\nu}] \\
&\quad + 2 \left[ \frac{1}{2} \partial_2 (\omega e^{2\psi}) \right] \cdot [(\epsilon + P)\Omega(u^t)^2 - P \omega e^{-2\nu}] \\
&\quad - (\partial_2 \psi) e^{2\psi} \cdot [(\epsilon + P)\Omega^2(u^t)^2 + P(e^{-2\psi} - \omega^2 e^{-2\nu})] \\
&= P \cdot \left\{ (\partial_2 \nu) + (\partial_2 \psi) + \frac{1}{2} e^{-2\nu} \partial_2 [\omega^2 e^{2\psi} - e^{2\nu}] - \omega e^{-2\nu} \partial_2 (\omega e^{2\psi}) - (\partial_2 \psi) e^{2\psi} (e^{-2\psi} - \omega^2 e^{-2\nu}) \right\} \\
&\quad + (\epsilon + P)(u^t)^2 \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \left\{ \partial_2 (\omega^2 e^{2\psi} - e^{2\nu}) - 2\Omega \partial_2 (\omega e^{2\psi}) + \Omega^2 (\partial_2 e^{2\psi}) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \underbrace{-2(\omega - \Omega)(\partial_2 \Omega) e^{2\psi} + 2(\omega - \Omega)(\partial_2 \Omega) e^{2\psi}}_{=0} \right\} \\
&= P \cdot \left\{ (\partial_2 \nu) + \omega (\partial_2 \omega) e^{2\psi-2\nu} + e^{-2\nu} \omega^2 e^{2\psi} (\partial_2 \psi) - (\partial_2 \nu) - \omega (\partial_2 \omega) e^{2\psi-2\nu} \right. \\
&\quad \quad \left. - 2\omega^2 (\partial_2 \psi) e^{2\psi-2\nu} + \omega^2 (\partial_2 \psi) e^{2\psi-2\nu} \right\} \\
&\quad + (\epsilon + P)(u^t)^2 \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \left\{ \partial_2 (\omega^2 e^{2\psi} - e^{2\nu}) - 2\Omega \partial_2 (\omega e^{2\psi}) + \Omega^2 (\partial_2 e^{2\psi}) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. - 2\omega (\partial_2 \Omega) e^{2\psi} + (\partial_2 \Omega^2) e^{2\psi} \right\} \\
&\quad + (\epsilon + P)(u^t)^2 \cdot \underbrace{(-\omega e^{2\psi})}_{=g_{\varphi t}} + \Omega \underbrace{e^{2\psi}}_{=g_{\varphi\varphi}} (\partial_2 \Omega) \\
&= (\epsilon + P)(u^t)^2 \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \partial_2 \left[ -e^{2\nu} + \omega^2 e^{2\psi} - 2\Omega \omega e^{2\psi} + \Omega^2 e^{2\psi} \right] \\
&\quad + (\epsilon + P)(u^t) \cdot (g_{\varphi t} u^t + g_{\varphi\varphi} \underbrace{\Omega u^t}_{u^\varphi}) (\partial_2 \Omega)
\end{aligned}$$

D Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts

$$\begin{aligned}
 &= (\epsilon + P)(u^t)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \partial_2 \left[-e^{2\nu} + (\omega - \Omega)^2 e^{2\psi}\right] \\
 &\quad + (\epsilon + P)(u^t) \cdot (u_\varphi)(\partial_2 \Omega) \\
 &= (\epsilon + P)(u^t)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \partial_2 \left[\frac{1}{(u^t)^2}\right] \\
 &\quad + (\epsilon + P)(u^t) \cdot (u_\varphi)(\partial_2 \Omega) \\
 &= -(\epsilon + P)(\partial_2 \ln u^t) + (\epsilon + P)u^t u_\varphi(\partial_2 \Omega), \tag{D.1}
 \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt  $\partial \ln X = \frac{1}{X} \partial X = \frac{1}{2} \frac{1}{X^2} \partial(X^2)$  benutzt wurde.

## E Modifikationen in Lorene

Um beliebige Zustandsgleichungen innerhalb von Lorene nutzen zu können, sind einige Modifikationen und Ergänzungen vorzunehmen. Diese sollen hier kurz beschrieben werden. Im wesentlichen besteht die Aufgabe darin, analog zu einer vorhandenen Zustandsgleichung eine neue Zustandsgleichung zu etablieren. Folgende \*.C- und \*.h-Dateien sind zu ändern:

- eos\_tabul.h: Extra-Klasse (z. B. Eos\_quark) analog zu einer vorhandenen Klasse (z. B. Eos\_sly4) deklarieren
- eos\_from\_file.C: zusätzlichen „identifier“ (beliebiger Integer) einfügen, zum ansprechen der neuen Zustandsgleichung (zweimal in der switch-Anweisung)

Außerdem sind zusätzlich folgende Dateien anzulegen:

- eos\_\*.C (z. B. eos\_quark.C) als „Kopie“ von zum Beispiel eos\_SLy4.C, wobei natürlich die auftretenden Konstruktoren, Destruktoren und Methoden entsprechend zu benennen sind, insbesondere ist die Datei, die die Tabelle der neuen Zustandsgleichung enthält, anzugeben (z. B. eos\_quark.d).
- Datei (z. B. eos\_quark.d), die die Daten der Zustandsgleichung enthält. Diese Datei muss denselben Aufbau wie die anderen Dateien mit Zustandsgleichungen haben, insbesondere ist die Anzahl der Zeilen anzugeben. Sie muss sich im gleichen Verzeichnis befinden.

Vor der Kompilierung sind diese Änderungen in den Dateien dependencies und List\_obj einzutragen.

Darüber hinaus wurden verschiedenste Programme zur Berechnung der Eigenschaften von Neutronensternen entwickelt, die alle auf dem Code rotstar basieren. Diese Programme befinden sich auf der beigelegten CD. Dort findet man auch die entsprechenden Beschreibungen. Zur Kompilierung sind diese Codes in der Makefile zu ergänzen.



# Literaturverzeichnis

- [1] M. Abramowicz, G. J. E. Almergren, W. Kluzniak, A. V. Thampan, gr-qc/0312070
- [2] A. Akmal, V. R. Pandharipande, Phys. Rev. C 56, 2261 (1997)
- [3] A. Akmal, V. R. Pandharipande, D. G. Ravenhall, Phys. Rev. C 58, 1804 (1998)
- [4] M. Alford, K. Rajagopal, S. Reddy, F. Wilczek, Phys. Rev. D 64, 074017 (2001), hep-ph/0105009
- [5] M. Alford, S. Reddy, Phys. Rev. D 67, 074024 (2003), nucl-th/0211046
- [6] M. Alford, J. Phys. G 30, S441 (2004), nucl-th/0305097
- [7] M. Alford, M. Braby, M. Paris, S. Reddy, Astrophys. J. 629, 969 (2005), nucl-th/0411016
- [8] M. Ansorg, A. Kleinwächter, R. Meinel, Astron. Astrophys. 381, L49 (2002), astro-ph/0111080
- [9] R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, Gravitation: An Introduction to Current Research, ed. L. Witten (Wiley, ew York, 1962)
- [10] W. Baade, F. Zwicky, Phys. Rev. 45, 138 (1934)
- [11] W. Baade, F. Zwicky, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. 20, 254 (1934)
- [12] W. Baade, F. Zwicky, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. 20, 259 (1934)
- [13] D. C. Backer, S. R. Kulkarni, C. Heiles, M. M. Davis, W. M. Goss, Nature 300, 615 (1982)
- [14] J. M. Bardeen, Astrophys. J. 162, 71 (1970)
- [15] J. M. Bardeen, R. V. Wagoner, Astrophys. J. 167, 359 (1971)
- [16] T. W. Baumgarte, S. L. Shapiro, Phys. Rept. 376, 41 (2003), gr-qc/0211028
- [17] G. Baym, H. A. Bethe, C. Pethick, Nucl. Phys. A 175, 225 (1971)
- [18] G. Baym, C. Pethick, P. Sutherland, Astrophys. J. 170, 299 (1971)

## LITERATURVERZEICHNIS

- [19] M. Bejger, P. Haensel, *Astron. Astrophys.* 405, 747 (2003), astro-ph/0301071
- [20] M. Bejger, PhD, Nicolaus Copernicus Astronomical Center, (2005)
- [21] M. Bejger, T. Bulik, P. Haensel, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 364, 635 (2005)
- [22] O. Benhar, *Mod. Phys. Lett. A* 20, 2335 (2005)
- [23] E. Berti, N. Stergioulas, *MNRAS* 350, 1416 (2004), gr-qc/0310061
- [24] E. Berti, F. White, A. Maniopoulou, M. Bruni, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 358, 923 (2005)
- [25] A. R. Bodmer, *Phys. Rev. D* 4, 1601 (1971)
- [26] S. Bonazzola, E. Gourgoulhon, M. Salgado, J. A. Marck, *Astron. Astrophys.* 278, 421 (1993)
- [27] S. Bonazzola, J. Frieben, E. Gourgoulhon, J. A. Marck, To appear in the Proceedings of the Third International Conference on Spectral and High Order Methods, Houston Journal of Mathematics (1996), University of Houston, gr-qc/9604029
- [28] S. Bonazzola, E. Gourgoulhon, J. A. Marck, *Phys. Rev. D* 58, 104020 (1998), astro-ph/9803086
- [29] S. Bonazzola, E. Gourgoulhon, J. A. Marck, *J. Comput. Appl. Math.* 109, 433 (1999), gr-qc/9811089
- [30] I. N. Bronstein, K. A. Semendjaev, G. Musiol, H. Mühlig, Taschenbuch der Mathematik, (Verlag Harri Deutsch, Frankfurt, 2000)
- [31] M. Buballa, M. Oertel, *Phys. Lett. B* 457, 261 (1999), hep-ph/9810529
- [32] M. Buballa, F. Neumann, M. Oertel, I. Shovkovy, *Phys. Lett. B* 595, 36 (2004), nucl-th/0312078
- [33] W. Busza, R. L. Jaffe, J. Sandweiss, F. Wilczek, *Rev. Mod. Phys.* 72, 1125 (2000), hep-ph/9910333
- [34] E. M. Butterworth, J. R. Ipser, *Astrophys. J.* 204, 200 (1976)
- [35] M. Camenzind, Vorlesungsskript General Relativity, Universität Heidelberg (2004)
- [36] M. Camenzind, Vorlesungsskript Compact Objects, Universität Heidelberg (2004); Compact Objects in Astrophysics, (Springer, erscheint 2006)
- [37] J. Chadwick, *Proc. Roy. Soc. A* 136, 692 (1932)
- [38] S. Chandrasekhar, *Phil. Mag.* 11, 592 (1931)
- [39] S. Chandrasekhar, *Astrophys. J.* 74, 81 (1931)

- [40] S. Chandrasekhar, *Astrophys. J.* 140, 417C (1964)
- [41] P. Chang, S. Morsink, L. Bildstein, I. Wasserman, *Astrophys. J.* 636, Issue 2, L117 (2006), astro-ph/0511246
- [42] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorne, V. F. Weisskopf, *Phys. Rev. D* 9, 3471 (1974)
- [43] W. J. Cocke, H. J. Disney, D. J. Taylor, *Nature* 221, 525 (1969)
- [44] G. B. Cook, S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky, *Astrophys. J.* 424, 823 (1994)
- [45] J. Cottam, F. Paerels, M. Mendez, *Nature* 420, 51 (2002)
- [46] M. Dey, I. Bombaci, J. Dey, S. Ray, B. C. Samanta, *Phys. Lett. B* 438, 123 (1998), astro-ph/9810065
- [47] F. Douchin, P. Haensel, *Astron. Astrophys.* 380, 151 (2001)
- [48] B. Drossel, Vorlesungsskript Statistische Physik, Technische Universität Darmstadt (2003)
- [49] R. Durrer, N. Straumann, *Helv. Phys. Acta* 61, 1027 (1988)
- [50] J. J. L. Duyvendak, *Proc. Astron. Soc. Pacific* 54, 91 (1942)
- [51] A. Einstein, *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber.*, 778-786 (1915)
- [52] A. Einstein, *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber.*, 844-847 (1915)
- [53] E. Fahri, R. L. Jaffe, *Phys. Rev. D* 30, 2379 (1984)
- [54] D. Feldmann, *Repetitorium der Numerischen Mathematik*, (Binomi, Springe, 2001)
- [55] R. A. Fesen, M. J. Shull, P. A. Hurdford, *Astron. J.* 113, 354 (1997)
- [56] B. Friedman, V. R. Pandharipande, *Nucl. Phys. A* 361, 502 (1981)
- [57] J. L. Friedman, J. R. Ipser, R. D. Sorkin, *Astrophys. J.* 325, 722 (1988)
- [58] R. Giacconi, H. Gursky, F. R. Paolini, B. B. Rossi, *Phys. Rev. Lett.* 9, 439 (1962)
- [59] R. Giacconi, H. Gursky, E. Kollogg, E. Schreier, H. Tananbaum, *Astrophys. J. Lett.* 167, L67 (1971)
- [60] N. K. Glendenning, *Compact Stars*, (Springer, New York, 1997)
- [61] T. Gold, *Nature* 218, 731 (1968)
- [62] D. Gondek-Rosinska, P. Haensel, J. L. Zdunik, ASP Conference Series "Pulsar Astronomy - 2000 and Beyond", eds Kramer, Wex, Wielebinski, Vol 202, 661, astro-ph/0009282

## LITERATURVERZEICHNIS

- [63] D. Gondek-Rosinska, T. Bulik, L. Zdunik, E. Gourgoulhon, S. Ray, J. Dey, M. Dey, *Astron. Astrophys.* 363, 1005 (2000), astro-ph/0007004
- [64] D. Gondek-Rosinska, W. Kluzniak, N. Stergioulas, *Astron. Astrophys.* submitted (2002), astro-ph/0206470
- [65] E. Gourgoulhon, P. Haensel, R. Livine, E. Paluch, S. Bonazzola, J. A. Marck, *Astron. Astrophys.* 349, 851 (1999), astro-ph/9907225
- [66] E. Gourgoulhon, J. L. Jaramillo, *Phys.Rept.* 423, 159 (2006), gr-qc/0503113
- [67] P. Haensel, B. Pichon, *Astron. Astrophys.* 283, 313 (1994)
- [68] P. Haensel, *Final Stages of Stellar Evolution*, C. Motch and J.-M. Hameury (eds.), EAS Publications Series: EDP Sciences 249 (2003), astro-ph/0301073
- [69] P. Haensel, *Neutron Star Crust*, *Physics of Neutron Star Interiors*, Edited by D. Blaschke, N.K. Glendenning and A. Sedrakian, *Lecture Notes in Physics*, vol. 578, p.127 (2001)
- [70] P. Haensel, A. Y. Potekhin, *Astron. Astrophys.* 428, 191 (2004)
- [71] T. Hamada, E. E. Salpeter, *Astrophys. J.* 134, 683 (1961)
- [72] B. K. Harrison, M. Wakano, J. A. Wheeler, *Onzieme Conseil de Physique Solvay*, 124 (1958)
- [73] J. B. Hartle, *Astrophys. J.* 150, 1005 (1967)
- [74] J. B. Hartle, K. S. Thorne, *Astrophys. J.* 153, 807 (1968)
- [75] D. J. Hegyi, *Astrophys. J.* 217, 244 (1977)
- [76] H. Heiselberg, M. Hjorth-Jensen, *MNRAS* 302, 530 (1999), astro-ph/9902033
- [77] H. Heiselberg, V. Pandharipande, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 50, 481 (2000), astro-ph/0003276
- [78] H. Heiselberg, *Introductory talk given at the "Compact Stars in the QCD Phase Diagram"*, conf. Copenhagen, (2001), astro-ph/0201465
- [79] J. W. T. Hessels, S. M. Ransom, I. H. Stairs, P. C. C. Freire, V. M. Kaspi, F. Camilo, *Accepted by Science. Published electronically via Science Express* 12 Jan 2006, astro-ph/0601337
- [80] A. Hewish, S. J. Bell, J. D. Pilkington, P. F. Scott, R. A. Collins, *Nature* 217, 709 (1968)
- [81] R. A. Hulse, J. H. Taylor, *Astrophys. J.* 195, L51 (1975)



- [82] J. N. Islam, Rotating fields in general relativity, (Cambridge University Press, Cambridge, 1985)
- [83] W. Kluzniak, From the Sun to the Great Attractor, 1999 Guanajuato Lectures on Astrophysics Guanajuato, Mexico 4-11 August 1999, Edited by D. Pageand J.G. Hirsch, Lecture Notes in Physics, vol. 556, p.173, astro-ph/0012548
- [84] M. Knorrenschild, Numerische Mathematik, (Fachbuchverlag Leibzig im Carl Hanser Verlag, München, Wien, 2003)
- [85] H. Komatsu, Y. Erigushi, I. Hchisu, MNRAS 237, 355 (1989)
- [86] M. Kramer, D. R. Lorimer, A. G. Lyne, M. McLaughlin, Contribution to The 22nd Texas Symposium on Relativistic Astrophysics, Stanford University, December 2004, astro-ph/0503386
- [87] L. D. Landau, Phys. Z. Sowjetunion 1, 285 (1932)
- [88] J. M. Lattimer, M. Prakash, Astrophys. J. 550, 426 (2001), astro-ph/0002232
- [89] J. M. Lattimer, M. Prakash, Science 304, 536 (2004) astro-ph/0405262
- [90] J. M. Lattimer, B. F. Schutz, Astrophys. J. 629, 979 (2005)
- [91] C. P. Lorenz, D. G. Ravenhall, C. J. Pethick, Phys. Rev. Lett. 70, 379 (1993)
- [92] D. R. Lorimer, Liv. Rev. Rel. 8, 7 (2005), astro-ph/0511258
- [93] A. G. Lyne, M. Burgay, M. Kramer, A. Possenti, R. N. Manchester, F. Camilo, M. A. McLaughlin, D. R. Lorimer, N. D'Amico, B. C. Joshi, J. Reynolds, P. C. C. Freire, Science 303, 1153 (2004), astro-ph/0401086
- [94] J. Madsen, Lect. Notes Phys. 516, 162 (1999), astro-ph/9809032
- [95] J. Madsen, eConf C010815, 155 (2002), hep-ph/0111417
- [96] A. Majczyna, J. Madej, Acta Astronomica 55, 1 (2005)
- [97] F. Mandl, G. Shaw, Quantenfeldtheorie, (AULA-Verlag, Wiesbaden, 1993)
- [98] V. S. Manko, E. W. Mielke, J. D. Sanabria-Gomez, Phys. Rev. D 61, 081501(R) (2000), gr-qc/0001081
- [99] V. S. Manko, J. D. Sanabria-Gomez, O. V. Manko, Phys. Rev. D 62, 044048 (2000)
- [100] N. U. Mayall, J. H. Oort, Proc Astron. Soc. Pacific 54, 95 (1942)
- [101] M. C. Miller, MNRAS 255, 129 (1992)
- [102] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, Gravitation, (Freeman and Company, New York, 1973)

## LITERATURVERZEICHNIS

- [103] I. A. Morrison, T. W. Baumgarte, S. L. Shapiro, V. R. Pandharipande, *Astrophys. J.* 617, L135 (2004)
- [104] D. J. Nice, E. M. Splaver, I. H. Stairs, O. Löhmer, A. Jessner, M. Kramer, J. M. Cordes, Submitted to *Astrophys. J.*, astro-ph/0508050
- [105] T. Nozawa, N. Stergioulas, E. Gourgoulhon, Y. Eriguchi, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* 132, 431 (1998), gr-qc/9804048
- [106] J. R. Oppenheimer, G. Volkoff, *Phys. Rev.* 55, 374 (1939)
- [107] F. Pacini, *Nature* 216, 567 (1967)
- [108] P. K. Panda, H. S. Nataraj, Rotating compact star with superconducting quark matter, astro-ph/0601416
- [109] V. R. Pandharipande, D. G. Ravenhall, Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Nuclear Matter and Heavy Ion Collisions, Les Houches, (Plenum, New York), 103 (1989)
- [110] D. G. Ravenhall, C. J. Pethick, J. R. Wilson, *Phys. Rev. Lett.* 50, 2066 (1983)
- [111] M. Salgado, S. Bonazzola, E. Gourgoulhon, P. Haensel, *Astron. Astrophys.* 291, 155 (1994)
- [112] T. Schaefer, Lectures delivered at the 14th Summer School in Nuclear Physics (Santa Fe, NM) and the BARC workshop on Quarks and Mesons; to appear in the proceedings of the BARC workshop, hep-ph/0304281
- [113] K. Schertler, S. Leupold, J. Schaffner-Bielich, *Phys. Rev. C* 60, 025801 (1999), astro-ph/9901152
- [114] K. Schertler, PhD, Universität Gießen, (1999)
- [115] K. Schwarzschild, *Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Phys. Tech.*, 189 (1916)
- [116] K. Schwarzschild, *Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Phys. Tech.*, 424 (1916)
- [117] R. U. Sexl, H. K. Urbantke, *Gravitation und Kosmologie*, (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2002)
- [118] S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*, (John Wiley & Sons, New York, 1983)
- [119] S. L. Shapiro, to appear in “The Next Chapter in Einstein’s Legacy”, Proceedings of YKIS 2005, Kyoto, Japan, eds M. Sasaki, J. Soda and T. Tanaka, in *Progress of Theoretical Physics Suppl*, in press (2006), gr-qc/0509094

- [120] Y. A. Shibhanov, G. G. Pavlov, V. E. Zavlin, J. Ventura, in M.A. Alpar, Ue. Kiziloglu, J. van Paradijs (eds.), *The Lives of the Neutron Stars*, Kluwer, Dordrecht, p. 91 (1995)
- [121] I. S. Shklovsky, *Astrophys. J.* 148, L1 (1967)
- [122] I. A. Shovkovy, *Found. Phys.* 35, 1309 (2005), nucl-th/0410091
- [123] I. A. Shovkovy, Invited talk given at Workshop on Extreme QCD, Swansea, Wales, 2-5 Aug 2005, nucl-th/0511014
- [124] M. Sinha, J. Dey, M. Dey, S. Ray, S. Bhowmick, submitted for the proceedings of 22nd Texas Symposium on Relativistic Astrophysics held at Stanford University, 13th-17th December, 2004, astro-ph/0503378
- [125] K. L. Smith, Phd, Pennsylvania State University, (2004)
- [126] P. Spellucci, Vorlesungsskript Numerische Mathematik, Technische Universität Darmstadt; A. Klar Vorlesungsmitschrift Numerische Mathematik, Technische Universität Darmstadt (2003)
- [127] N. Stergioulas, J. L. Friedman, *Astrophys. J.* 444, 306 (1995)
- [128] N. Stergioulas, PhD, University of Wisconsin-Milwaukee, (1996)
- [129] N. Stergioulas, *Liv. Rev. Rel.* 6, 3 (2003)
- [130] T. E. Strohmayer, A. R. Villarreal, *Astrophys. J.* 614, L121 (2004), astro-ph/0409384
- [131] M. Stute, M. Camenzind, *MNRAS* 336, 831 (2002)
- [132] K. Sumiyoshi, J. M. Ibanez, J. V. Romero, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* 134, 39 (1999)
- [133] A. Tiengo, D. K. Galloway, T. di Salvo, M. Mendez, J. M. Miller, J. L. Sokoloski, M. van der Klis, *Astron. Astrophys.* 441, 283T (2005), astro-ph/0506590
- [134] J. Thornburg, PhD, University of British Columbia (1993)
- [135] S. E. Thorsett, D. Chakrabarty, *Astrophys. J.* 512, 288 (1999)
- [136] R. C. Tolman, *Phys. Rev.* 55, 364 (1939)
- [137] M. van der Klis, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 38, 717 (2000), astro-ph/0001167
- [138] R. Wald, *General Relativity*, (The University of Chicago Press, Chicago, 1984)
- [139] J. D. Walecka, *Ann. of Phys.* 83, 491 (1974)

## LITERATURVERZEICHNIS

- [140] F. Weber, *Pulsars as Astrophysical Laboratories for Nuclear and Particle Physics*, (IOP Publishing, Bristol, 1999)
- [141] F. Weber, *Prog. Part. Nucl. Phys.* 54, 193 (2005), astro-ph/0407155
- [142] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, (John Wiley & Sons, New York, 1972)
- [143] C. M. Will, *Liv. Rev. Rel.* 4, 4 (2001), update gr-qc/0510072
- [144] E. Witten, *Phys. Rev. D* 30, 272 (1984)
- [145] [www.eso.org/outreach/ut1fl/astroim-nebula.html](http://www.eso.org/outreach/ut1fl/astroim-nebula.html)
- [146] [www.gravity.phys.uwm.edu/rns/](http://www.gravity.phys.uwm.edu/rns/)
- [147] [www.lorene.obspm.fr/](http://www.lorene.obspm.fr/)
- [148] J. L. Zdunik, *Astron. Astrophys.* 359, 311 (2000)
- [149] J. L. Zdunik, P. Haensel, E. Gourgoulhon, M. Bejger, *Astron. Astrophys.* 416, 1013 (2004), astro-ph/0311470
- [150] J. L. Zdunik, P. Haensel, E. Gourgoulhon, M. Bejger, accepted by *Astron. Astrophys.*, astro-ph/0509806

# Danksagung

Im Laufe der Zeit haben mich verschiedenste Personen auf vielfältige Weise bei meinem Studium unterstützt. Deswegen möchte ich ihnen auf diesem Weg meinen Dank aussprechen. In der Hoffnung keinen vergessen zu haben, seien hier genannt: Prof. Dr. M. Camenzind für die Bereitstellung des äußerst interessanten Themas dieser Arbeit und vor allem für die vielen sehr hilfreichen Gespräche und Hinweise, Prof. Dr. J. Wambach und PD Dr. M. Buballa für die Betreuung der Arbeit und die ebenfalls erhellenden Gespräche, die LSW-Mitarbeiter und die Theorie-Gruppe für die nette Atmosphäre und die Diskussionen an der Sternwarte und insbesondere Volker für die Unterstützung bei Computer-Fragen, verschiedene Hochschullehrer und Mitarbeiter der TUD, die mir das Studieren sehr angenehm gemacht haben, Klaus für viele Diskussionen und ebenso viele Biere, Matthias, Christian und diverse Kommilitonen für gemeinsames Studieren und nicht zuletzt meine Familie und Freunde für alles Mögliche.



# Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die Diplomarbeit selbständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und die Arbeit keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt habe.

Hainburg, den 23. Februar 2006