

Diplomarbeit

*Pseudoskalare Kondensate in
farbsupraleitenden Phasen*

Hannes Basler



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Februar 2007

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Farbsupraleitung	9
2.1	Kondensate	10
2.2	Phasen mit ausschließlich skalaren Kondensaten	11
2.2.1	2SC	12
2.2.2	CFL	12
2.3	Kondensation von Goldstone-Bosonen in der CFL-Phase	14
2.3.1	CFL+K ⁰	14
2.3.2	CFL+K [±]	16
2.3.3	CFL+ π^{\pm}	16
2.4	Gaplose Phasen	18
3	Neutralität und β-Gleichgewicht	21
3.1	Dichten	21
3.2	Elektrische Neutralität	23
3.2.1	Neutralität der CFL-Phase	23
3.2.2	Neutralität der CFL+K ⁰ -Phase	24
3.2.3	Neutralität in gaplosen Phasen	25
3.3	Farbneutralität	26
3.4	β -Gleichgewicht	27
4	Das Nambu-Jona-Lasinio-Modell	29
4.1	Einige Eigenschaften des Modells	29
4.2	Die Lagrangedichte	30
4.3	Meanfieldnäherung	31
4.4	Nambu-Gorkov-Formalismus	32
4.5	Das thermodynamische Potential	33
4.6	Berechnung des thermodynamischen Potentials	34
4.7	Das thermodynamische Potential der Leptonen	36
4.8	Die Ableitungen des thermodynamischen Potentials	37

5	Das Phasendiagramm	39
5.1	Numerik	39
5.2	Parameter	39
5.3	Konstruktion der Phasengrenzen	40
5.4	Das $T = 0$ Problem	41
5.5	Das Phasendiagramm	42
5.5.1	Phasendiagramm bei mittlerer Kopplung	43
5.5.2	Phasendiagramm bei starker Kopplung	49
6	Gemischte Phasen	51
6.1	Neutrale gemischte Phasen	52
6.2	Oberflächen- und Coulombenergie	52
6.3	Gemischt 2SC-CFL+ π^i -Phase	55
7	Zusammenfassung	59
A	Konventionen	61
A.1	Konstanten	61
A.2	Dirac'sche γ -Matrizen	61
A.3	Gell-Mann Matrizen	62
A.4	\det_f	62
B	Matsubarasummen	63
B.1	Matsubarasumme des thermodynamischen Potentials	63
B.2	Die Matsubarasumme in den Ableitungen	64

Kapitel 1

Einleitung

Die Kerne der Atome, aus denen die Materie unserer Umwelt und auch wir selbst bestehen, enthalten Protonen und Neutronen. Schon in den 50er Jahren zeigte sich, dass diese Teilchen nicht elementar sind, sondern eine interne Struktur besitzen. Neben den Bausteinen der Atomkerne hatte man zu diesem Zeitpunkt schon eine große Anzahl an Mesonen gefunden.

Im Jahr 1964 schlugen Murray Gell-Mann [1] und George Zweig Quarks als die elementaren Bausteine vor, aus denen alle Baryonen und Mesonen gebildet werden. Der ursprüngliche Vorschlag enthielt drei verschiedene Quarks, die sich in Masse und elektrischer Ladung unterscheiden. Im Laufe der Zeit wurden noch drei weitere Quarks gefunden, die deutlich größere Massen haben. So sind heute sechs verschiedene Quarks bekannt: *Up*, *Down*, *Strange*, *Charm*, *Bottom*, *Top*. Die für diese Arbeit wichtigen Unterscheidungsmerkmale der Quarks sind Masse und elektrische Ladung (Tabelle 1.1). Da die drei schweren Quarks deutlich schwerer als alle anderen in dieser Arbeit auftretenden Größen sind, werden nur Up-, Down- und Strange-Quark berücksichtigt.

Die Quarks haben einen weiteren Freiheitsgrad. Sie tragen eine von drei so genannten Farbladungen. Die drei unterschiedlichen Ladungen werden mit *rot*, *grün* und *blau* bezeichnet. Die Theorie, die die Wechselwirkung der Teilchen mit Farbladung beschreibt, heißt deshalb *Quantenchromodynamik*, kurz QCD.

Die Stärke der Kopplung hängt in der QCD von der Energieskala eines Prozesses ab. So wird die Kopplung bei größerer Energie immer schwächer und geht schließlich asymptotisch gegen null. Diese Eigenschaft einer Eichtheorie nennt man *Asymptotische Freiheit*.

In der hadronischen Phase treten Quarks nur in gebundenen Zuständen auf, es können keine freien Quarks oder Gluonen beobachtet werden. Anders ist die Situation bei sehr hohen Temperaturen, im so genannten *Quark-*

	Masse	elek. Ladung
Up	1,5 bis 3.0 MeV	$\frac{2}{3}e$
Down	3 bis 7 MeV	$-\frac{1}{3}e$
Strange	95 ± 25 MeV	$-\frac{1}{3}e$
Charm	$1,25 \pm 0.09$ GeV	$\frac{2}{3}e$
Bottom	4.20 ± 0.07 GeV	$-\frac{1}{3}e$
Top	174.2 ± 3.3 GeV	$\frac{2}{3}e$

Tabelle 1.1: Die Massen und elektrischen Ladungen der Quarks aus [2].

Gluon-Plasma können auch freie Quarks und Gluonen existieren.

Bei extremen Dichten verschwinden die Grenzen zwischen einzelnen Hadronen. Nach unserem heutigen Wissensstand vermuten wir, dass Quarks unter diesen Bedingungen Paare bilden, ähnlich den Cooper-Paaren, wie sie aus der elektrischen Supraleitung bekannt sind. Zwar wurde schon 1975 [3] die Möglichkeit erwogen, dass sich in kalter dichter Quark-Materie supraleitende Quark-Quark-Paare bilden könnten. Diese Idee wurde zunächst nur von wenigen Autoren verfolgt ([4], [5], [6]) und erst Mitte der 90er Jahre wieder aufgegriffen. Heute kennen wir viele verschiedene dieser farbsupraleitenden Phasen mit teilweise deutlich unterschiedlichen Eigenschaften. Die Grundlagen der Farbsupraleitung werden zum Beispiel in [7], [8], [9], [10], [11] und [12] besprochen.

Einer der wenigen Orte, von dem wir uns vorstellen können, dass solche extremen Bedingungen herrschen, ist das Innere eines Neutronensternes. Der Name Neutronenstern ist etwas missverständlich, denn es werden damit nicht nur Sterne, die aus Baryonen bestehen, sondern auch Quarksterne und Hybridsterne bezeichnet. Eine bessere Bezeichnung wäre kompakter Stern.

Ein Neutronenstern ist ein kosmisches Objekt mit einer mittleren Dichte von ca. $1,5 \cdot 10^{14}$ g/cm³; dies entspricht ungefähr der Dichte von Kernmaterie. Allerdings ist im Kern des Sternes die Dichte um einiges größer.

Bei einer Masse von 0,8 bis 2,2 Sonnenmassen [13] hat ein Neutronenstern typischerweise einen Radius von 10 bis 20 km.

Hat ein Stern mit einer Masse von mehr als 8 Sonnemassen das Ende seiner Lebenszeit erreicht, so kann er durch eine Explosion (Supernova) vernichtet werden. Als Rest kann sich unter bestimmten Umständen ein Neutronenstern bilden. Bei seiner Entstehung ist der Neutronenstern sehr heiß, kühlt dann aber in den ersten paar Sekunden unter 1 MeV ab, wobei 1 MeV umgerechnet $1,16 \cdot 10^{10}$ Kelvin entspricht. Dies ist für irdische Maßstäbe immer noch sehr heiß, auf einer nuklearen Skala aber schon kalt. Bei diesen niedrigen Temperaturen besetzen die Quarks nur die niedrigsten Energie-

niveaus, bis zur Fermikante, so dass sich Cooper-Paare bilden können. Der Stern ist sowohl elektrisch, als auch farbneutral und befindet sich zudem im β -Gleichgewicht.

Die Farbsupraleitung mit skalaren Kondensaten wurde unter den Bedingungen eines Neutronensternes schon vielfach untersucht. Wir wollen in dieser Arbeit nun das Auftreten von pseudoskalaren Kondensaten untersuchen und die Möglichkeit einer aus zwei unterschiedlich geladenen Phasen gemischten Phase betrachten. Dazu werden wir in Kapitel 2 zunächst einen Überblick über die verschiedenen Phasen geben, bevor wir uns im folgenden Kapitel mit den Bedingungen befassen, die aus der elektrischen Neutralität und der Farbneutralität folgen. In Kapitel 4 stellen wir das Nambu-Jona-Lasinio-Modell vor, mit dem wir die thermodynamischen Eigenschaften farbsupraleitender Materie berechnen wollen. Die Ergebnisse werden in den Kapiteln 5 (Phasendiagramm) und 6 (gemischte Phase) dargestellt. Während diese Arbeit entstand, hat H. J. Warringa ein Preprint [14] veröffentlicht, in dem ein Phasendiagramm für die hier untersuchten Phasen vorgestellt wird. Wir haben viele Übereinstimmungen mit diesen Ergebnissen gefunden, allerdings an einigen Stellen auch andere Ergebnisse erhalten. Insbesondere finden wir in [14] eine Inkonsistenz, der wir genauer nachgehen. H.J. Warringa betrachtet in seiner Arbeit keine gemischten Phasen.

Kapitel 2

Farbsupraleitung

Tritt in einem fermionischen System zwischen zwei Teilchen eine (schwache) anziehende Wechselwirkung auf, so bilden sich zumindest bei kleinen Temperaturen so genannte Cooper-Paare. Dies führt dazu, dass sich eine Lücke (engl. *gap*¹) im Anregungsspektrum bildet.

In konventionellen metallischen Supraleitern bilden sich diese Cooper-Paare aus zwei Elektronen mit entgegengesetztem Impuls und Spin. Da die direkte Wechselwirkung zwischen zwei Elektronen abstoßender Natur ist, muss die zur Bildung eines Cooper-Paares benötigte anziehende Wechselwirkung in einem metallischen Supraleiter durch den Austausch von Phononen vermittelt werden.

In einem kalten und sehr dichten Quark-System erwarten wir ein ähnliches Verhalten. Da die Wechselwirkung zwischen zwei Quarks durch den Austausch von Gluonen direkt anziehend ist, ist die Situation hier sogar einfacher. Allerdings haben wir durch die verschiedenen Quark-Flavors und -Farben mehrere Möglichkeiten die Quarks zu paaren. Als Erschwernis kommt hinzu, dass die beiden Quarks eines Paares unterschiedliche Fermienergien haben können. Je nach Paarungsmuster erhalten wir unterschiedliche farbsupraleitende Phasen mit teilweise deutlich unterschiedlichen Eigenschaften.

In dieser Arbeit wollen wir nur Spin-0-Phasen betrachten, da wir davon ausgehen, dass Spin-1-Phasen eine unbedeutendere Rolle spielen. In den folgenden Abschnitten wollen wir einen Überblick über die wichtigsten farbsupraleitenden Phasen und ihre Eigenschaften geben.

¹Da der Begriff *gap* auch in den Bezeichnungen einiger Phasen auftaucht, werden wir in dieser Arbeit an vielen Stellen das Wort *Gap* an Stelle von *Lücke* benutzen.

2.1 Kondensate

Bilden zwei Quarks ein Kondensat, so charakterisieren wir dieses durch den Erwartungswert

$$\langle \Psi^T \mathcal{O} \Psi \rangle. \quad (2.1)$$

Ψ sind die Quarkfelder ($\Psi^T = (u, d, s)$) und \mathcal{O} ein Operator, der auf Grund des Pauli-Prinzips antisymmetrisch sein muss.

$$\Psi^T \mathcal{O} \Psi = \mathcal{O}_{ij} \Psi_i \Psi_j = -\mathcal{O}_{ji}^T \Psi_j \Psi_i = -\Psi^T \mathcal{O}^T \Psi \quad (2.2)$$

also

$$\mathcal{O} = -\mathcal{O}^T. \quad (2.3)$$

Wir suchen demzufolge antisymmetrische Operatoren, die im Dirac-, Farb- und Flavorraum wirken. Einen antisymmetrischen Operator, der sich aus drei Anteilen zusammensetzt, können wir entweder als Produkt dreier antisymmetrischer Operatoren

$$\mathcal{O}_{\text{anti-symm}} = \mathcal{O}_{\text{anti-symm}}^{(1)} \otimes \mathcal{O}_{\text{anti-symm}}^{(2)} \otimes \mathcal{O}_{\text{anti-symm}}^{(3)} \quad (2.4)$$

oder als Produkt eines antisymmetrischen Operators mit zwei symmetrischen Operatoren

$$\mathcal{O}_{\text{anti-symm}} = \mathcal{O}_{\text{anti-symm}}^{(1)} \otimes \mathcal{O}_{\text{symm}}^{(2)} \otimes \mathcal{O}_{\text{symm}}^{(3)} \quad (2.5)$$

schreiben. In Tabelle 2.1 geben wir eine Übersicht über die in Frage kommenden Operatoren.

	antisymmetrisch	symmetrisch
Diracraum	$\mathcal{C}, \mathcal{C}\gamma_5, \mathcal{C}\gamma^\mu\gamma_5$	$\mathcal{C}\gamma^\mu, \mathcal{C}\sigma^{\mu\nu}$
Farbraum	$\lambda_2, \lambda_5, \lambda_7$	$\mathbb{1}, \lambda_1, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_6, \lambda_8$
Flavorraum	τ_2, τ_5, τ_7	$\mathbb{1}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \tau_6, \tau_8$

Tabelle 2.1: Die möglichen Operatoren im Dirac-, Farb- und Flavorraum. λ_i sind die Gell-Mann-Matrizen in Farbraum, τ_i die Gell-Mann-Matrizen im Flavorraum (Def. siehe Anhang A.3).

Da wir Spin-0 Phasen betrachten wollen, beschränken sich unsere Auswahlmöglichkeiten im Diracraum auf \mathcal{C} und $\mathcal{C}\gamma_5$.

Um eine Aussage über die weiteren Eigenschaften des Operators im Farbraum machen zu können, müssen wir uns mit der Art der Wechselwirkung beschäftigen. Orientieren wir uns an den Eigenschaften der Wechselwirkung, die durch den Austausch eines einzelnen Gluons vermittelt wird, so ist die Wechselwirkung im antisymmetrischen Kanal (Antitriplett) anziehend und im symmetrischen Kanal (Sextett) repulsiv.

2.2. PHASEN MIT AUSSCHLIESSLICH SKALAREN KONDENSATEN 11

Wenn wir nun im Farbraum einen antisymmetrischen Operator wählen, dann muss auch der Operator im Flavorraum antisymmetrisch sein. Im Farb- und Flavorraum stehen uns die drei antisymmetrischen Gell-Mann-Matrizen λ_2, λ_5 und λ_7 (Def. siehe A.3) zu Verfügung.

So definieren wir

$$\Delta_{AB}^{(s)} \sim \langle \Psi^T C \gamma_5 \tau_A \lambda_B \Psi \rangle \quad \text{skalar} \quad (2.6)$$

$$\Delta_{AB}^{(p)} \sim \langle \Psi^T C \tau_A \lambda_B \Psi \rangle \quad \text{pseudoskalar} \quad (2.7)$$

für skalare bzw. pseudoskalare Kondensate mit $A, B \in \{2, 5, 7\}$. Die Gell-Mann-Matrizen im Flavorraum bezeichnen wir mit τ_i , die in Farbraum mit λ_j .

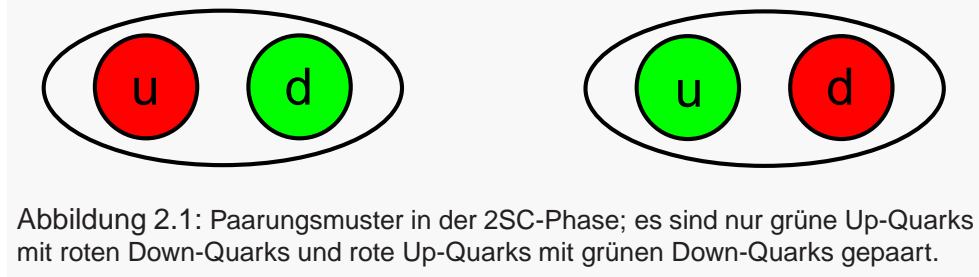
Die farbsupraleitenden Phasen unterscheiden sich durch das Vorhandensein unterschiedlicher Kondensate. Eine Übersicht über die verschiedenen Phasen gibt Tabelle 2.2. Die in dieser Arbeit wichtigen Phasen werden im restlichen Teil diesen Kapitels vorstellen.

	$\Delta_{22}^{(s)}$	$\Delta_{55}^{(s)}$	$\Delta_{77}^{(s)}$	$\Delta_{25}^{(p)}$	$\Delta_{52}^{(p)}$	$\Delta_{27}^{(p)}$	$\Delta_{72}^{(p)}$	$\Delta_{57}^{(p)}$	$\Delta_{75}^{(p)}$
2SC	×								
2SC _{us}		×							
2SC _{ds}			×						
uSC	×	×							
dSC	×		×						
sSC		×	×						
pSC	×			×					
CFL	×	×	×						
CFL+K ⁰	×	×	×	×	×				
CFL+K [±]	×	×	×			×	×		
CFL+π [±]	×	×	×					×	×

Tabelle 2.2: Kondensate der verschiedenen Phasen

2.2 Phasen mit ausschließlich skalaren Kondensaten

Nehmen wir an, dass das Strange-Quark eine so große Masse hat, dass keine Kondensate mit Strange-Quarks auftreten, dann können sich nur noch die zwei leichten Flavors paaren. Man spricht in diesem Fall von einem *two-flavor color-superconductor* (2SC). Nehmen wir hingegen den anderen Extremfall an, dass drei Quarks dieselbe Masse haben, dann werden alle Quarks gleichberechtigt gepaart. In diesem Fall spricht man von einer



Color-Flavor-Locked-Phase.

Neben diesen beiden Fällen gibt es noch fünf weitere Phasen, die wir durch Kombination der unterschiedlich skalaren Phasen erzeugen können (uSC, dSC, sSC, 2SC_{us}, 2SC_{ds}, Tabelle 2.2). Bis auf die uSC-Phase treten die Phasen in der vorliegenden Arbeit nicht wieder auf und werden deshalb nicht genauer besprochen. Wir werden nun einige weitere Details zur 2SC- und CFL-Phase vorstellen.

2.2.1 2SC

In der 2SC-Phase ist nur das $\Delta_{22}^{(s)}$ von null verschieden, alle anderen Kondensate sind nicht vorhanden. Das bedeutet, es gibt folgende Paarungen:

$$(u_r, d_g) \qquad (u_g, d_r) \qquad (2.8)$$

Die Wahl, dass nur rote und grüne Quarks gepaart werden, ist willkürlich. Wir hätten auch alle anderen Farbkombinationen paaren können. Allerdings können die dann entstehenden Kondensate $\Delta_{25}^{(s)}$ und $\Delta_{27}^{(s)}$ immer durch eine Rotation im Farbraum auf $\Delta_{22}^{(s)}$ gebracht werden und sind daher physikalisch äquivalent. Die Festlegung, dass in diesem Kondensat nur *rote* und *grüne* Quarks auftreten und die *blauen* Quarks ungepaart bleiben, bricht die $SU(3)$ -Farbsymmetrie zu einer $SU(2)$ -Symmetrie.

Wenn wir uns später (Abschnitt 3.3) mit Farbneutralität beschäftigen, werden wir uns daran erinnern müssen, wie wir die Farbwahl für die 2SC-Phase getroffen haben. Auf die physikalischen Eigenschaften der 2SC-Phase hat diese Wahl keinen Einfluss.

2.2.2 CFL

Die *Color-Flavor-Locked-Phase* ist eine Phase, in der alle Quarks gepaart sind, alle skalaren Kondensate ($\Delta_{22}^{(s)}$, $\Delta_{55}^{(s)}$, $\Delta_{77}^{(s)}$) sind von null verschieden.

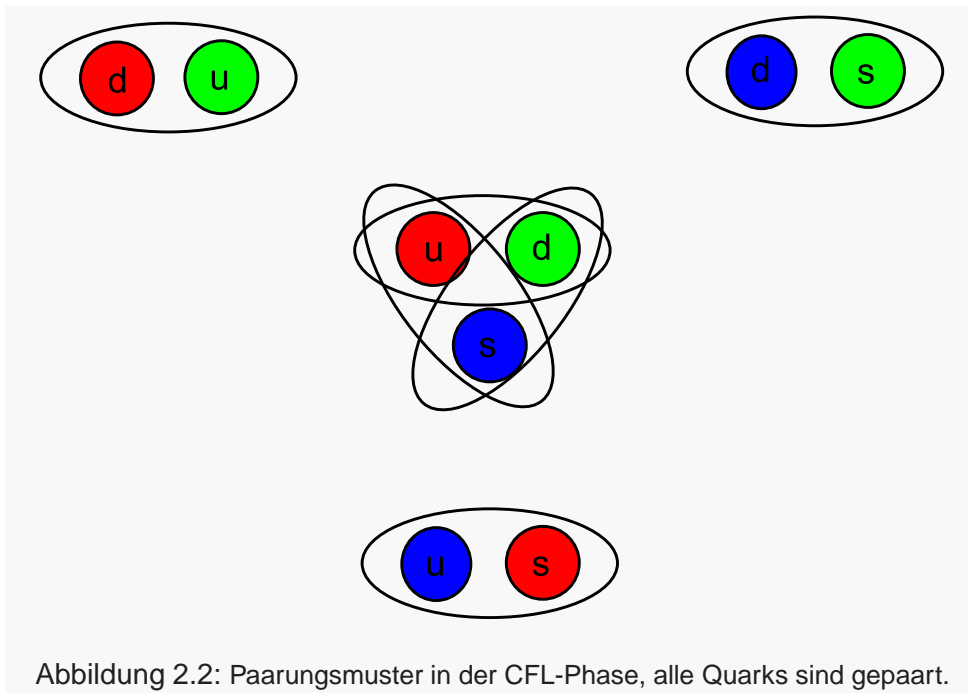
2.2. PHASEN MIT AUSSCHLIESSLICH SKALAREN KONDENSATEN 13

Die Paarungen sind

$$(u_r, d_g) \qquad (u_g, d_r) \qquad (2.9)$$

$$(d_g, s_b) \qquad (d_b, s_g) \qquad (2.10)$$

$$(s_b, u_r) \qquad (s_r, u_b) \qquad (2.11)$$



Betrachtet man den Fall verschwindender Quarkmassen, so ist die CFL-Phase auf jeden Fall gegenüber einer 2SC-Phase energetisch bevorzugt. Eine nicht verschwindende Masse des Strange-Quarks führt bei niedrigen μ zu einem Aufbrechen der Kondensate in denen ein Strange-Quark beteiligt ist. Die verbleibenden Kondensate bilden nun eine 2SC-Phase.

Die CFL-Phase bricht einen großen Teil der Symmetrien der QCD

$$\text{SU}(3)_C \times \text{SU}(3)_L \times \text{SU}(3)_R \times \text{U}(1)_B \longrightarrow \text{SU}(3)_{C+L+R} \times \mathbb{Z}_2 \quad (2.12)$$

Der Name *Color-Flavor-Locked* kommt daher, dass aus den Farb- und Flavorsymmetrien eine gemeinsame Symmetrie wird. Die CFL-Phase ist invariant unter einer gekoppelten Farb-Flavorraumrotation

$$\Psi \longrightarrow e^{i\theta_a(\tau_a - \lambda_a^T)} \Psi. \quad (2.13)$$

2.3 Kondensation von Goldstone-Bosonen in der CFL-Phase

Berachten wir den Fall verschwindender Quarkmassen ($m_u = m_s = m_d = 0$, chiraler Limes), so hat die QCD folgende Symmetrieeigenschaften:

$$\mathrm{SU}(3)_{\mathrm{color}} \times \mathrm{SU}(3)_L \times \mathrm{SU}(3)_R \times \mathrm{U}(1)_B \quad (2.14)$$

Im vorherigen Abschnitt haben wir gesehen, wie diese Symmetrien der QCD durch die Kondensate der CFL-Phase gebrochen werden. Für jeden gebrochenen Erzeuger einer Symmetrie entsteht ein masse- und spinloses Teilchen, ein so genanntes Goldstone-Boson[15].

Das Brechen der Farb-Symmetrie ($\mathrm{SU}(3)_{\mathrm{color}}$) führt zur Entstehung von acht skalaren Goldstone-Bosonen, die allerdings von den acht Gluonen "geessen" werden. Damit ist gemeint, dass durch den Higgs-Mechanismus die Goldstone-Bosonen dafür verwendet werden, den Gluonen eine Masse zu geben, und zwar ganz analog dazu, wie die Massen der Eichbosonen in der Elektro-Schwachen-Theorie erzeugt werden (siehe z.B. [16]). Durch die gebrochene chirale Symmetrie entstehen acht pseudoskalare Goldstone-Bosonen. Es ergibt sich ein entarteter Grundzustand, das heißt, die axiale Rotation

$$\mathrm{SU}(3)_A : \quad q \rightarrow \exp\left(i\theta_a \frac{\tau_a}{2} \gamma_5\right) q, \quad (2.15)$$

auf den CFL-Grundzustand angewendet führt wieder auf einen Grundzustand, in dem allerdings ein Teil der skalaren Kondensate in pseudoskalare Kondensate rotiert worden sind.

Sind die Quarkmassen nicht null, so kann es sein, dass der rotierte Grundzustand gegenüber dem CFL-Grundzustand bevorzugt wird ([8], [17], [18], [19]). Wir bezeichnen die pseudoskalaren Kondensate anhand ihrer Quantenzahlen, die mit denen von neutralen Kaonen (K^0/\bar{K}^0), geladenen Kaonen (K^\pm) und geladenen Pionen (π^\pm) übereinstimmen. Im Folgenden werden wir die drei so entstandenen Phasen kurz vorstellen.

2.3.1 CFL+K⁰

Wenden wir die Transformation aus Gl. (2.15) auf die Kondensate der CFL-Phase an und wählen $a = 6, 7$

$$q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & (\hat{\theta}_6 - i\hat{\theta}_7)\gamma_5 i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 0 & (\hat{\theta}_6 + i\hat{\theta}_7)\gamma_5 i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

2.3. KONDENSATION VON GOLDSTONE-BOSONEN IN DER CFL-PHASE¹⁵

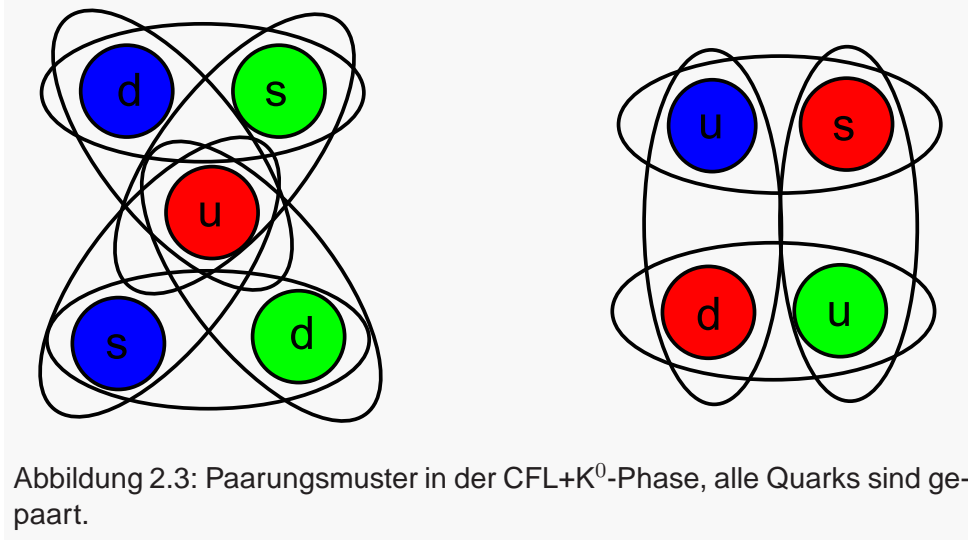


Abbildung 2.3: Paarungsmuster in der CFL+K⁰-Phase, alle Quarks sind gepaart.

mit $\theta = \sqrt{\theta_6^2 + \theta_7^2}$ und $\hat{\theta}_a = \theta_a/\theta$, so erhalten wir die Kondensate:

$$\Delta_{22}^{(s)'} = \cos \frac{\theta}{2} \bar{\Delta}_{22}^{(s)} \quad (2.17)$$

$$\Delta_{55}^{(s)'} = \cos \frac{\theta}{2} \bar{\Delta}_{55}^{(s)} \quad (2.18)$$

$$\Delta_{77}^{(s)'} = \bar{\Delta}_{77}^{(s)} \quad (2.19)$$

$$\Delta_{52}^{(p)'} = i \sin \frac{\theta}{2} (\hat{\theta}_6 - i\hat{\theta}_7) \bar{\Delta}_{22}^{(s)} \quad (2.20)$$

$$\Delta_{25}^{(p)'} = i \sin \frac{\theta}{2} (\hat{\theta}_6 + i\hat{\theta}_7) \bar{\Delta}_{55}^{(s)} \quad (2.21)$$

Die Kondensate $\Delta_{52}^{(p)'}$ und $\Delta_{25}^{(p)'}$ enthalten die folgenden Quark-Paarungen:

$$(u_r, d_b) \quad (u_b, d_r) \quad (2.22)$$

$$(u_r, s_g) \quad (u_g, s_r). \quad (2.23)$$

Zusammen mit den Paarungen der CFL-Kondensate ergibt sich das in Abbildung 2.3 dargestellte Paarungsmuster. In [14] wurde gezeigt, dass die physikalischen Eigenschaften gleich bleiben, wenn die pseudoskalaren Kondensate in folgender Weise transformiert werden

$$\Delta_{25}^{(p)} \rightarrow \Delta_{25}^{(p)} e^{i\phi} \quad (2.24)$$

$$\Delta_{52}^{(p)} \rightarrow \Delta_{52}^{(p)} e^{-i\phi}. \quad (2.25)$$

Betrachten wir die Gl. (2.20) und (2.21), so erkennen wir, dass die pseudo-

skalaren Kondensate immer reell wählen werden können:

$$\Delta_{52}^{(p)'} = \sin \frac{\theta}{2} \Delta_{22}^{(s)} \quad (2.26)$$

$$\Delta_{25}^{(p)'} = -\sin \frac{\theta}{2} \Delta_{55}^{(s)}. \quad (2.27)$$

Damit haben die reell gewählten pseudoskalaren Kondensate entgegengesetzte Vorzeichen.

2.3.2 CFL+K[±]

In der CFL+K[±]-Phase treten neben den Kondensaten der CFL-Phase auch die Paare

$$(u_g, d_b) \quad (u_b, d_g) \quad (2.28)$$

$$(d_r, s_g) \quad (d_g, s_r) \quad (2.29)$$

auf. Diese entstehen analog zur CFL+K⁰-Phase auch durch eine Rotation aus den CFL-Kondensaten mit $a = 4, 5$ und $\theta = \sqrt{\theta_4^2 + \theta_5^2}$. Wir erhalten so die Kondensate:

$$\Delta_{22}^{(s)'} = \cos \frac{\theta}{2} \Delta_{22}^{(s)} \quad (2.30)$$

$$\Delta_{55}^{(s)'} = \Delta_{55}^{(s)} \quad (2.31)$$

$$\Delta_{77}^{(s)'} = \cos \frac{\theta}{2} \Delta_{77}^{(s)} \quad (2.32)$$

$$\Delta_{72}^{(p)'} = -\sin \frac{\theta}{2} \Delta_{22}^{(s)} \quad (2.33)$$

$$\Delta_{27}^{(p)'} = \sin \frac{\theta}{2} \Delta_{77}^{(s)}. \quad (2.34)$$

Das Paarungsmuster ist in Abbildung 2.4 dargestellt.

2.3.3 CFL+ π^{\pm}

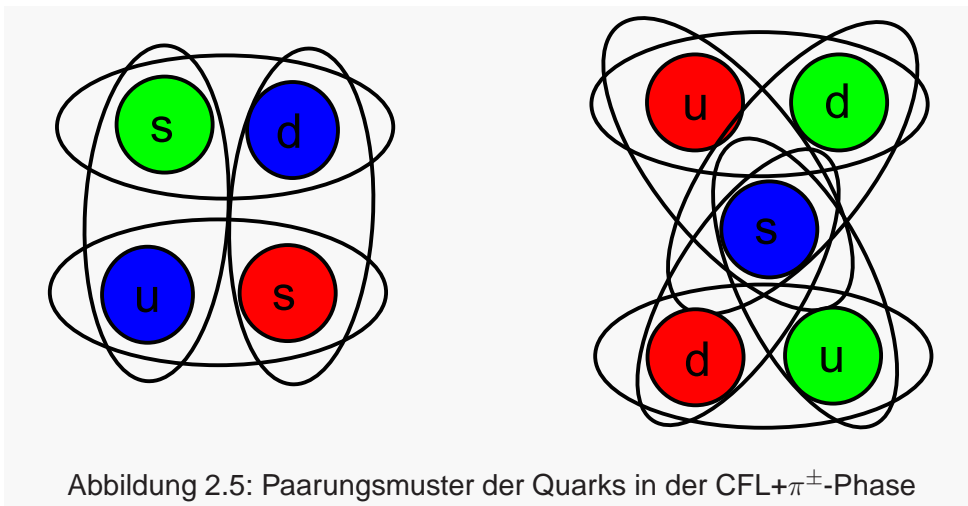
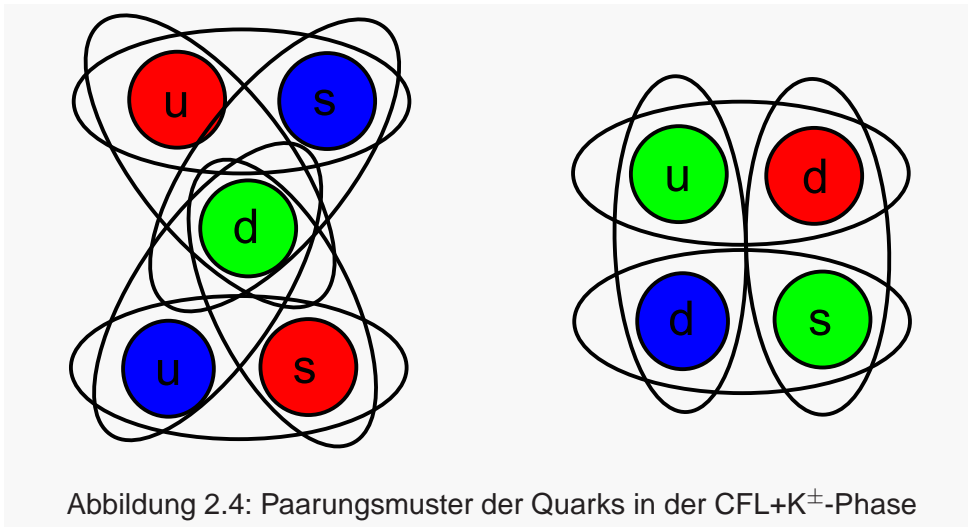
In der CFL+ π^{\pm} -Phase treten neben den Kondensaten der CFL-Phase auch die Paare

$$(u_g, s_b) \quad (u_b, s_g) \quad (2.35)$$

$$(d_r, s_b) \quad (d_b, s_r) \quad (2.36)$$

auf. Diese entstehen analog zur CFL+K⁰-Phase auch durch eine Rotation aus den CFL-Kondensaten mit $a = 1, 2$ und $\theta = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2}$. Wir erhalten so

2.3. KONDENSATION VON GOLDSTONE-BOSONEN IN DER CFL-PHASE¹⁷



die Kondensate:

$$\Delta_{22}^{(s)'} = \Delta_{22}^{(s)} \quad (2.37)$$

$$\Delta_{55}^{(s)'} = \cos \frac{\theta}{2} \Delta_{55}^{(s)} \quad (2.38)$$

$$\Delta_{77}^{(s)'} = \cos \frac{\theta}{2} \Delta_{77}^{(s)} \quad (2.39)$$

$$\Delta_{75}^{(p)'} = -\sin \frac{\theta}{2} \Delta_{55}^{(s)} \quad (2.40)$$

$$\Delta_{57}^{(p)'} = \sin \frac{\theta}{2} \Delta_{77}^{(s)}. \quad (2.41)$$

Das Paarungsmuster ist in [Abbildung 2.5](#) gezeigt.

2.4 Gaplose Phasen

Um uns klar zu machen, was es mit den gaplosen Phasen auf sich hat, betrachten wir zunächst ein sehr einfaches System, in dem nur masselose Teilchen mit zwei unterschiedlichen Flavours existieren. Farbfreiheitsgrade werden wir nicht berücksichtigen. Um die Situation weiter zu vereinfachen, vernachlässigen wir auch die Quark-Antiquark-Wechselwirkung und beschränken uns auf die, für die Farbsupraleitung wichtige, Quark-Quark-Wechselwirkung.

Dann ist die Lagrangedichte gegeben durch

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\not{\partial} + \hat{\mu}\gamma^0) \Psi + H' (\bar{\Psi} i\gamma_5 \tau_1 \mathcal{C} \bar{\Psi}^T) (\Psi^T i\gamma_5 \tau_1 \mathcal{C} \Psi). \quad (2.42)$$

Das hier auftretende Kondensat ist

$$\Delta \sim \langle \Psi^T \mathcal{C} i\gamma_5 \tau_1 \Psi \rangle. \quad (2.43)$$

Bei der Konstruktion des Operators gelten dieselben Einschränkungen wie in Abschnitt 2.1. Da wir keinen Farbraum haben und $\mathcal{C}\gamma_5$ antisymmetrisch ist, muss der "Flavor"-Anteil symmetrisch sein, deshalb kommt nur die symmetrische Pauli-Matrix

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

in Frage². Die beiden Flavours können unterschiedliche chemische Potentiale haben

$$\hat{\mu} = \text{diag}(\mu_1, \mu_2). \quad (2.45)$$

Wir betrachten dieses Beispiel, weil es wesentlich einfacher ist, als der sonst betrachtete Fall mit drei Flavor, Massen und Farben. Diese Vereinfachung erlaubt es, für die Dispersionsrelationen analytische Ergebnisse zu finden [20]:

$$k_0 = \pm (\epsilon_{\pm} \pm \delta\mu) \quad (2.46)$$

mit den folgenden Beziehungen

$$\epsilon_{\pm} = \sqrt{(E_k \pm \bar{\mu})^2 + \Delta^2}, \quad (2.47)$$

$$E_k = \sqrt{k^2}, \quad (2.48)$$

$$\bar{\mu} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}, \quad (2.49)$$

$$\delta\mu = \frac{\mu_1 - \mu_2}{2}. \quad (2.50)$$

²Die Symmetriebedingungen würde auch die Einheitsmatrix zulassen. In diesem Fall paaren sich allerdings nur Teilchen gleichen Flavours, und wir können den Effekt, für den wir uns interessieren, nicht beobachten.

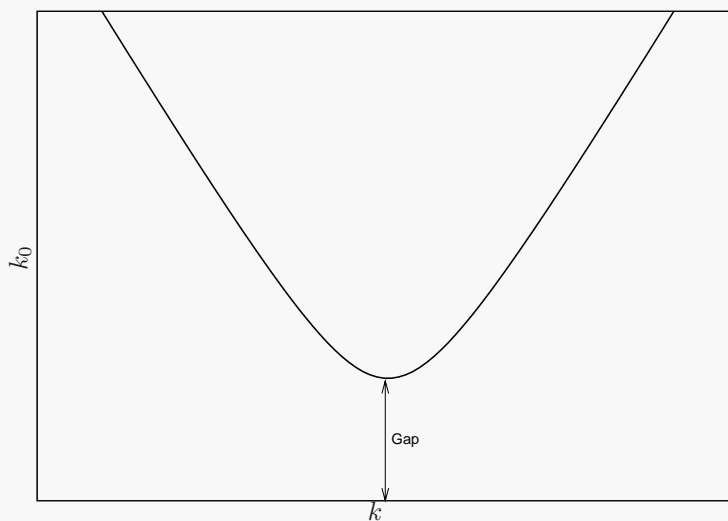


Abbildung 2.6: Schematische Darstellung einer Mode mit Gap.

Sind die chemischen Potentiale für beide Flavors gleich, dann gilt $\delta\mu = 0$ und so lange $\Delta > 0$ ist, gibt es auch einen Gap. In Abbildung 2.6 ist beispielhaft die Dispersionsrelation einer Mode mit Gap gezeigt; in dieser Situation ist die Größe des Gaps genau gleich Δ .

Betrachten wir nun den Fall, dass die chemischen Potentiale unterschiedlich sind, also $\delta\mu \neq 0$, dann reduziert der $\delta\mu$ -Term in Gl. (2.46) das Gap für eine der Moden und vergrößert es für eine andere (siehe Gl. (2.46)). Liegen μ_1 und μ_2 so weit auseinander, dass $\delta\mu = \Delta$ ist, so verschwindet das Gap ganz. Erhöht man $\delta\mu$ weiter, so erhält man die Situation aus Abbildung 2.7.

In den von uns in dieser Arbeit untersuchten Phasen kann dieses Phänomen auch auftreten, nur ist hier die Situation kompliziert, so dass die Dispersionsrelationen nicht analytisch berechnet werden können.

Verschwindet für eine oder mehrere Moden das Gap, ändern sich die Eigenschaften der Phase deutlich. In [21] wird eine CFL-Phase betrachtet und es wird gezeigt, dass sich die Quarks mit Impulsen zwischen k_1 und k_2 (siehe Abbildung 2.7) nicht mehr paaren. Dass nicht mehr alle Quarks gepaart sind, wirkt sich besonders auf die Neutralitätseigenschaften der Phase aus. Wir werden das in Abschnitt 3.2.3 genauer besprechen, nachdem wir uns mit den Neutralitätseigenschaften der CFL- und CFL+K⁰-Phase beschäftigt haben.

Interessant sind gaplose Phasen auch für das Abkühlverhalten von Neutronensternen. Da in solchen Phasen Anregungen durch thermische Ener-

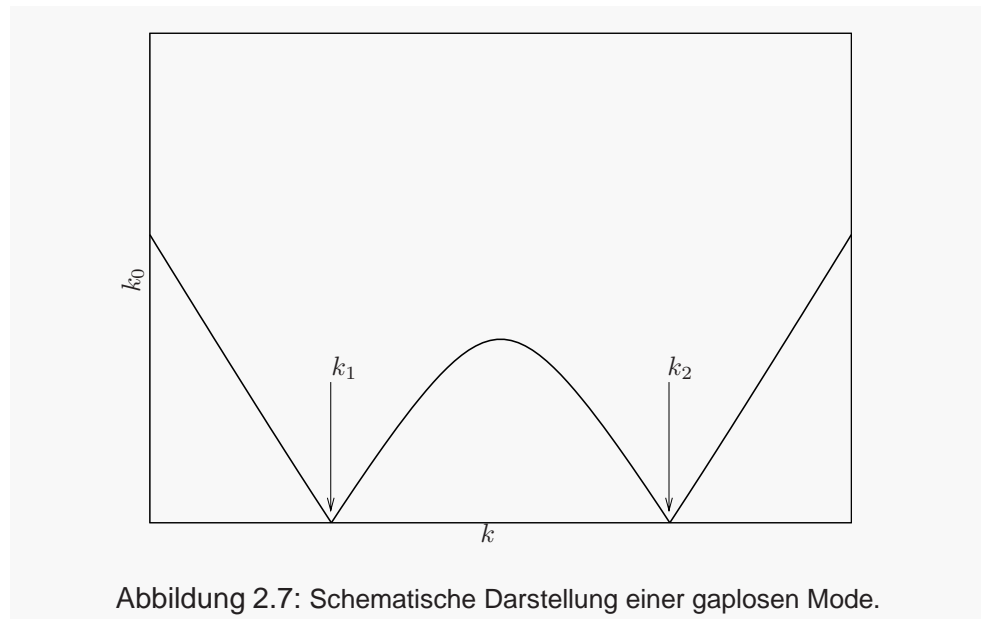


Abbildung 2.7: Schematische Darstellung einer gaplosen Mode.

gie, die einige keV beträgt, möglich sind, was bei einem typischen Gap von mehreren MeV nicht möglich ist. (Da sich durch das Verschwinden des Gaps die Eigenschaften einer Phase so grundlegend ändern, weist man schon im Namen der Phase durch Voranstellen eines "g" für *gapless* darauf hin, dass eine oder mehrere Moden kein Gap haben, zum Beispiel *gCFL* oder *g2SC*.)

Kapitel 3

Neutralität und β -Gleichgewicht

3.1 Dichten

Um Neutralität beschreiben zu können, müssen wir wissen, wie wir Aussagen über die Dichten der beteiligten Teilchen machen können. Wir haben in dem zu beschreibenden System Quarks mit drei verschiedenen Flavors und drei verschiedenen Farben, das heißt neun Dichten um die Quarks zu beschreiben. Als Zeichen für eine der Dichten verwenden wir ein n mit jeweils einem Index für den Flavor und einem für die Farbe. So bezeichnet zum Beispiel $n_{u,r}$ die Dichte der roten Up-Quarks.

Die Dichte aller Quarks mit der Farbe c ist nun

$$n_c = n_{u,c} + n_{d,c} + n_{s,c}. \quad (3.1)$$

Die Dichte der verschiedenen Flavor-Spezies werden mit

$$n_f = \langle \Psi_f^\dagger \Psi_f \rangle = \langle \Psi^\dagger A_f \Psi \rangle = n_{f,r} + n_{f,g} + n_{f,b} \quad (3.2)$$

mit

$$A_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

bezeichnet.

Unser System beschreiben wir durch das thermodynamische Potential Ω . Zu jeder Dichte können wir ein chemisches Potential einführen. So verknüpfen wir das chemische Potential μ mit der Gesamtdichte der Quarks

$$n = n_u + n_d + n_s = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \quad (3.4)$$

und das chemische Potential μ_Q mit der elektrischen Ladungsdichte

$$n_Q^{(\text{Quark})} = \langle \Psi^\dagger Q \Psi \rangle = -\frac{\partial \Omega^{(\text{Quark})}}{\partial \mu_Q}. \quad (3.5)$$

Der elektrische Ladungs-Operator wird durch

$$Q = \text{diag}_f \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right) \quad (3.6)$$

dargestellt.

$n_Q^{(\text{Quark})}$ bezieht sich auf den Quark-Anteil des Systems. Das Gesamtsystem enthält neben Quarks auch Elektronen und Myonen, die auch zur elektrischen Ladungsdichte beitragen.

$$n_Q = n_Q^{(\text{Quark})} - n_{e^-} - n_{\mu^-} \quad (3.7)$$

Da die Elektronen und Myonen negative elektrische Ladung tragen, gilt für die chemischen Potentiale der Leptonen

$$\mu_{e^-} = \mu_{\mu^-} = -\mu_Q. \quad (3.8)$$

Allgemein definieren wir die acht Farbladungsdichten

$$n_i = \langle \Psi^\dagger \lambda_i \Psi \rangle \quad i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}. \quad (3.9)$$

Um die Farbladung zu beschreiben, verwenden wir allerdings nur die Dichten n_3 und n_8

$$n_3 = \langle \Psi^\dagger \lambda_3 \Psi \rangle = n_r - n_g = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_3} \quad (3.10)$$

$$n_8 = \langle \Psi^\dagger \lambda_8 \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (n_r + n_g - 2n_b) = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_8}. \quad (3.11)$$

Insgesamt haben wir vier unabhängige chemische Potentiale $\{\mu, \mu_Q, \mu_3, \mu_8\}$, aus denen sich die chemischen Potentiale der einzelnen Quarks je nach Flavor und Farbe als unterschiedliche Linearkombinationen darstellen las-

sen.

$$\mu_{u,r} = \mu + \frac{2}{3}\mu_Q + \mu_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\mu_8 \quad (3.12)$$

$$\mu_{u,g} = \mu + \frac{2}{3}\mu_Q - \mu_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\mu_8 \quad (3.13)$$

$$\mu_{u,b} = \mu + \frac{2}{3}\mu_Q - \frac{2}{\sqrt{3}}\mu_8 \quad (3.14)$$

$$\mu_{d,r} = \mu - \frac{1}{3}\mu_Q + \mu_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\mu_8 \quad (3.15)$$

$$\mu_{d,g} = \mu - \frac{1}{3}\mu_Q - \mu_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\mu_8 \quad (3.16)$$

$$\mu_{d,b} = \mu - \frac{1}{3}\mu_Q - \frac{2}{\sqrt{3}}\mu_8 \quad (3.17)$$

$$\mu_{s,r} = \mu - \frac{1}{3}\mu_Q + \mu_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\mu_8 \quad (3.18)$$

$$\mu_{s,g} = \mu - \frac{1}{3}\mu_Q - \mu_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\mu_8 \quad (3.19)$$

$$\mu_{s,b} = \mu - \frac{1}{3}\mu_Q - \frac{2}{\sqrt{3}}\mu_8 \quad (3.20)$$

Damit lassen sich die neun verschiedenen Dichten der Quarks durch

$$n_{f,c} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu_{f,c}} \quad (3.21)$$

ausdrücken.

3.2 Elektrische Neutralität

Um elektrisch neutral zu sein, muss die gesamte Dichte der elektrischen Ladung null sein.

$$n_Q = \frac{2}{3}n_u - \frac{1}{3}(n_d + n_s) - n_{e^-} - n_{\mu^-} = 0 \quad (3.22)$$

Für farbneutrale CFL- und CFL+K⁰-Phasen gibt es interessante Neutralitätseigenschaften bei $T = 0$, die wir im Folgenden betrachten wollen.

3.2.1 Neutralität der CFL-Phase

In [22] wird, mit Hilfe von Argumenten aus [23], gezeigt, dass bei $T = 0$ in der CFL-Phase für die einzelnen Dichten der Quarks $n_{f,c}$ gilt:

$$n_{u,g} = n_{d,r} \quad (3.23)$$

$$n_{u,b} = n_{s,r} \quad (3.24)$$

$$n_{d,b} = n_{s,g}. \quad (3.25)$$

Für eine farb-neutrale CFL-Phase gilt außerdem

$$\underbrace{\sum_f n_{f,r}}_{n_r} = \underbrace{\sum_f n_{f,g}}_{n_g} = \underbrace{\sum_f n_{f,b}}_{n_b}. \quad (3.26)$$

Setzt man nun Gl. (3.23) - (3.25) in (3.26) ein so erhält man

$$n_r = n_u \quad n_g = n_d \quad n_b = n_s \quad (3.27)$$

und damit

$$n_u = n_d = n_s. \quad (3.28)$$

Dies erfüllt dann sofort die Bedingung für elektrische Neutralität

$$\frac{2}{3}n_u - \frac{1}{3}n_d - \frac{1}{3}n_s = 0. \quad (3.29)$$

Eine farbneutrale CFL-Phase ist bei einer Temperatur von 0 MeV also automatisch elektisch neutral. Es lassen sich für jedes μ_Q ein μ_3 und μ_8 finden, so dass der Quarkanteil in der CFL-Phase farbneutral und elektrisch neutral ist. Da wir allerdings in allen Rechnungen auch Elektronen und Myonen berücksichtigen, finden wir eine elektrisch neutrale Lösung genau dann, wenn keine Leptonen vorhanden sind, also bei $\mu_Q = 0$.

3.2.2 Neutralität der CFL+K⁰-Phase

Wir nehmen den elektrischen Ladungs-Operator

$$Q = \text{diag}_f \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right) \quad (3.30)$$

und betrachten das Verhalten der Kondensate (Gl.(2.9) - (2.11) und Gl.(2.22) - (2.23)) unter Transformationen, die durch den Operator Q erzeugt werden. Wir stellen fest, dass die Kondensate nicht invariant unter den durch den elektrischen Ladungsoperator erzeugten Transformationen sind.

$$q \rightarrow e^{i\alpha Q} q \quad \Delta_{22}^{(s)} \rightarrow e^{i\alpha/3} \Delta_{22}^{(s)} \quad (3.31)$$

$$q \rightarrow e^{i\alpha Q} q \quad \Delta_{55}^{(s)} \rightarrow e^{-i\alpha 2/3} \Delta_{55}^{(s)} \quad (3.32)$$

$$q \rightarrow e^{i\alpha Q} q \quad \Delta_{77}^{(s)} \rightarrow e^{i\alpha/3} \Delta_{77}^{(s)} \quad (3.33)$$

$$q \rightarrow e^{i\alpha Q} q \quad \Delta_{25}^{(p)} \rightarrow e^{i\alpha/3} \Delta_{25}^{(p)} \quad (3.34)$$

$$q \rightarrow e^{i\alpha Q} q \quad \Delta_{52}^{(p)} \rightarrow e^{i\alpha/3} \Delta_{52}^{(p)} \quad (3.35)$$

Die Kondensate tragen elektrische Ladung. Betrachten wir allerdings eine Linearkombination aus elektrischer Ladung und Farbladung, so können wir einen Operator

$$\tilde{Q} = Q - \frac{1}{2}\lambda_3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8 \quad (3.36)$$

$$= \text{diag}(0, 1, 1, -1, 0, 0, -1, 0, 0) \quad (3.37)$$

finden, der Transformationen erzeugt, unter denen die Kondensate invariant sind.

$$q \rightarrow e^{i\alpha\tilde{Q}}q \quad \Delta_{ii}^{(s)} \rightarrow \Delta_{ii}^{(s)} \quad (3.38)$$

Das zu dieser Transformation gehörende Eichboson ist eine Mischung aus Photon und Gluon, ganz analog zur Mischung des Photons mit dem Z^0 -Boson in der Elektro-Schwachen-Theorie.

Man kann ein zur \tilde{Q} -Ladung passendes chemisches Potential einführen.

$$\mu_{\tilde{Q}} = \frac{4}{9} \left(\mu_Q - \mu_3 - \frac{1}{2}\mu_8 \right) \quad (3.39)$$

Da alle Quarks gepaart sind und alle Kondensate verschwindende \tilde{Q} -Ladung haben, ist

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\mu_{\tilde{Q}}} = 0, \quad (3.40)$$

das heißt, die CFL+ K^0 Phase ist \tilde{Q} -neutral. Nun setzt sich die \tilde{Q} -Ladung aus elektrischer Ladung und Farbladung zusammen, also muss, wenn \tilde{Q} verschwindet und die Farbladung Null ist, auch die elektrische Ladung Null sein.

\tilde{Q} in anderen Phasen Die CFL-Phase ist genauso wie die CFL+ K^0 \tilde{Q} -neutral [7]. Statt der Argumentation aus 3.2.1 kann man genau so wie in diesem Abschnitt argumentieren und erhält das gleiche Ergebnis. Die Kondensate der 2SC-Phase sind zwar auch \tilde{Q} -neutral, da aber nicht alle Quark-Spezies gepaart sind, wird elektrische Neutralität erst durch das Hinzufügen von Leptonen erreicht.

3.2.3 Neutralität in gaplosen Phasen

Im Abschnitt 2.4 haben gesehen, dass in gaplosen Phasen nicht mehr alle Quarks gepaart sind. Betrachten wir eine CFL- oder eine CFL+ K^0 -Phase bei $T = 0$, in der alle Moden ein Gap aufweisen, so haben die Kondensate keine \tilde{Q} -Ladung. Verschwindet nun das Gap, so sind einige der Quarks nicht mehr gepaart. Tragen diese Quarks $\tilde{Q} = \pm 1$, dann wird unsere Phase vom \tilde{Q} -Isolator zum \tilde{Q} -Leiter. Da wir neutrale Lösungen suchen,

müssen nun elektrisch geladene Leptonen in das System gebracht werden, damit das Gesamtsystem weiterhin neutral ist. Man erkennt eine gCFL- oder gCFL+K⁰-Phase bei $T = 0$ sofort an dem von null verschiedenen μ_Q .

Auch das in Abschnitt 3.2.1 gegebene Argument bricht zusammen, wenn das Gap verschwindet, da die ungepaarten Quarks nicht mehr gleiche Dichten haben müssen.

3.3 Farbneutralität

Damit Farbneutralität vorliegt, müssen gleich viele rote, grüne und blaue Quarks vorhanden sein.

$$n_r = n_g = n_b \quad (3.41)$$

Um dies zu erreichen, kann man die mit den chemischen Potentialen μ_3 und μ_8 verknüpften Dichten n_3 und n_8 verwenden.

$$n_3 = \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_3} = n_r - n_g \quad (3.42)$$

$$n_8 = \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_8} = \sqrt{\frac{1}{3}}n_r + \sqrt{\frac{1}{3}}n_g - \frac{2}{\sqrt{3}}n_b \quad (3.43)$$

Um die Bedingung (3.41) zu erfüllen, müssen

$$n_3 = 0 \quad \text{und} \quad n_8 = 0 \quad (3.44)$$

sein.

Allerdings wurde in [24] gezeigt, dass Fälle möglich sind, in denen zwar $n_3 = n_8 = 0$ gilt, die Phase aber trotzdem nicht farbneutral ist.

Um dies zu verdeutlichen, betrachten wir ein einfaches Beispiel:

Im Abschnitt 2.2.1 haben wir bei der Konstruktion der 2SC-Phase den Gap-Parameter $\Delta_{22}^{(s)}$ gewählt, also Paare aus grünen Up- und roten Down-Quarks gebildet. Die blauen Quarks blieben dabei ungepaart. In den Größen Δ_{22} , Δ_{25} und Δ_{27} ausgedrückt bedeutet das

$$\Delta_{22}^{(s)} \sim \langle \Psi^T C \gamma_5 \tau_2 \lambda_2 \Psi \rangle \neq 0 \quad (3.45)$$

$$\Delta_{25}^{(s)} \sim \langle \Psi^T C \gamma_5 \tau_2 \lambda_5 \Psi \rangle = 0 \quad (3.46)$$

$$\Delta_{27}^{(s)} \sim \langle \Psi^T C \gamma_5 \tau_2 \lambda_7 \Psi \rangle = 0 \quad (3.47)$$

Wir nehmen an, dass alle Quarks dasselbe chemische Potential haben. Das hat zur Folge, dass bei $T = 0$ MeV in einer solchen 2SC-Phase genau so viele rote wie grüne Quarks vorhanden sind [23], also $n_3 = 0$. Auf Grund

der Tatsache, dass die blauen Quarks ungepaart sind, haben sie eine andere Dichte.

Nun können wir, statt nur rote und grüne Up- und Down-Quarks zu paaren

$$\Delta_{22}^{(s)} \neq 0 \quad \Delta_{25}^{(s)} = 0 \quad \Delta_{27}^{(s)} = 0, \quad (3.48)$$

auch blaue Quarks an den Paarungen beteiligen:

$$\Delta_{22}^{(s)} \neq 0 \quad \Delta_{25}^{(s)} \neq 0 \quad \Delta_{27}^{(s)} \neq 0. \quad (3.49)$$

In einer solchen Situation ändern sich die Werte von n_3 und n_8 . In dem Fall, dass alle Farben gleich häufig an der Paarung beteiligt sind ($\Delta_{22}^{(s)} = \Delta_{55}^{(s)} = \Delta_{77}^{(s)}$), ergibt sich $n_3 = n_8 = 0$. Nun ist die physikalisch relevante Größe

$$\sqrt{\Delta_{22}^2 + \Delta_{25}^2 + \Delta_{27}^2} \quad (3.50)$$

und die beiden Ansätze sind physikalisch äquivalent. Also muss die Farbladung im zweiten Fall in einer anderen Größe versteckt worden sein. Tatsächlich wurde in [24] gezeigt, dass in diesem Fall die nichtdiagonalen Farbladungen

$$n_1, n_4, \text{ und } n_6 \quad (3.51)$$

ungleich null sind. Um sicher zu sein, dass eine Phase wirklich farbneutral ist, müssen wir nachweisen, dass alle n_i null sind.

3.4 β -Gleichgewicht

Ein System befindet sich im β -Gleichgewicht, wenn sich β -Zerfall und inverser β -Zerfall aufheben.

Damit die Reaktionen



einen Gleichgewichtszustand erhalten, müssen die chemischen Potentiale die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\mu_d = \mu_u + \mu_e^- \quad (3.54)$$

$$\mu_s = \mu_u + \mu_e^-. \quad (3.55)$$

Auf Grund der Ladungserhaltung ist dies allerdings ohne weitere Annahmen bereits durch die Konstruktion der chemischen Potentiale (Gl. 3.8 und Gl. 3.12 - 3.20) gegeben. Für die Neutrinos haben wir kein chemisches Potential, da wir annehmen, dass sie das System sofort verlassen, ihre Zahl also keine Erhaltungsgröße ist. Somit ist auch die Umwandlung von Elektronen in Myonen und umgekehrt



schon durch Gl. (3.8) berücksichtigt.

Kapitel 4

Das Nambu-Jona-Lasinio-Modell

4.1 Einige Eigenschaften des Modells

Das Nambu-Jona-Lasinio-Modell (NJL-Modell) wurde von Yoichiro Nambu und Giovanni Jona-Lasinio 1961 entwickelt [25] [26]. Ursprünglich zur Nukleonwechselwirkung gedacht, wird es seit Mitte der 80er Jahre zur Beschreibung der Wechselwirkung zwischen Quarks verwendet [27].

Das Modell enthält keine Gluonen, sondern verwendet 4- und 6-Punktwechselwirkungen. Die Lagrangedichte im NJL-Modell kann so gewählt werden, dass sie dieselben globalen Symmetrieeigenschaften wie die QCD-Lagrangedichte hat; dies ist eine der großen Stärken des Modells.

Eine Beschreibung von *Confinement* ist im NJL-Modell nicht möglich, so dass es nur in Situationen angewendet werden kann, in denen *Confinement* eine untergeordnete oder keine Rolle spielt.

Da das NJL-Modell nicht renormierbar ist, treten divergente Integrale auf, die wir in dieser Arbeit durch das Einführen eines maximalen Dreier-Impulses (*Cutoff*) regularisieren werden. Dieser Cutoff bricht die Lorentzinvarianz des Systems.

Der Cutoff wird so gewählt, dass empirische Konstanten reproduziert werden können. Eine gute Beschreibung des NJL-Modells wird in [28] gegeben, [10] zeigt sehr genau, wie das Modell auf Farbsupraleitung angewendet werden kann.

4.2 Die Lagrangedichte

Die in dieser Arbeit verwendete Lagrangedichte setzt sich aus vier Teilen zusammen:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_6 + \mathcal{L}_{\Psi\Psi}. \quad (4.1)$$

mit

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}(i\not{\partial} - \hat{m})\Psi \quad (4.2)$$

$$\mathcal{L}_4 = G \sum_{a=0}^8 \left[(\bar{\Psi}\tau_a\Psi)^2 + (\bar{\Psi}i\gamma_5\tau_a\Psi)^2 \right] \quad (4.3)$$

$$\mathcal{L}_6 = K \left[\det_f(\bar{\Psi}(1 + \gamma_5)\Psi) + \det_f(\bar{\Psi}(1 - \gamma_5)\Psi) \right] \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\Psi\Psi} = & H \sum_{A=2,5,7} \sum_{B=2,5,7} (\bar{\Psi}i\gamma_5\tau_A\lambda_B\mathcal{C}\bar{\Psi}^T) (\Psi^T\mathcal{C}i\gamma_5\tau_A\lambda_B\Psi) \\ & + H \sum_{A=2,5,7} \sum_{B=2,5,7} (\bar{\Psi}\tau_A\lambda_B\mathcal{C}\bar{\Psi}^T) (\Psi^T\mathcal{C}\tau_A\lambda_B\Psi) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Die Gell-Mann-Matrizen in Flavorraum bezeichnen wir mit τ_i , die in Farbraum mit λ_i . Die Felder Ψ enthalten die einzelnen Quarkfelder

$$\Psi = (u, d, s)^T \quad (4.6)$$

$$\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s) \otimes \mathbb{1}_c \otimes \mathbb{1}_D \quad (4.7)$$

stellt die diagonale Massenmatrix dar. Mit \det_f ist die Determinante im Flavorraum gemeint (siehe A.4 für eine genauere Darstellung).

Die vier Teile der Lagrangedichte beschreiben

- \mathcal{L}_0 als den freien Teil des Quarkfeldes,
- \mathcal{L}_4 als die Vierpunktwechselwirkung zwischen einem Anti-Quark und einem Quark.
- \mathcal{L}_6 stellt die sogenannte Sechs-Punkt 't Hooft-Wechselwirkung dar. Quarks aller Flavors wechselwirken an einem Punkt. Dieser Term bricht die $U(1)_A$ -Symmetrie.
- $\mathcal{L}_{\Psi\Psi}$ enthält die Quark-Quark-Wechselwirkung, die für Farbsupraleitung verantwortlich ist, dabei generiert das erste Produkt die skalaren und das zweite die pseudoskalaren Kondensate.

4.3 Meanfieldnäherung

In einem System mit sehr vielen Teilchen ist es unmöglich, die Wechselwirkungen aller Teilchen untereinander zu beschreiben. Eine Möglichkeit mit diesem Problem umzugehen ist eine so genannte Meanfieldnäherung durchzuführen. Dazu nimmt man an, dass jedes Teilchen sich in einem von den anderen Teilchen erzeugten mittleren Potential befindet. In unserem Fall erhalten wir so eine Näherung durch Linearisieren der Lagrangedichte und Einsetzen von Erwartungswerten.

Um eine linearisierte Meanfield-Lagrangedichte zu erhalten, schreiben wir zunächst die $\bar{q}q$ -Terme um:

$$\bar{u}u = \langle \bar{u}u \rangle + \delta(\bar{u}u) = \phi_u + \delta(\bar{u}u) \quad (4.8)$$

$$\bar{d}d = \langle \bar{d}d \rangle + \delta(\bar{d}d) = \phi_d + \delta(\bar{d}d) \quad (4.9)$$

$$\bar{s}s = \langle \bar{s}s \rangle + \delta(\bar{s}s) = \phi_s + \delta(\bar{s}s) \quad (4.10)$$

Wir betrachten keine Kondensate der Form $\langle \bar{q}_1 i \gamma_5 q_2 \rangle$ für alle q_1 und q_2 und ebenfalls keine Kondensate $\langle \bar{q}_1 q_2 \rangle$ mit $q_1 \neq q_2$. Also setzen wir die zugehörigen Erwartungswerte auf Null.

$$\bar{q}_1 i \gamma_5 q_2 = \delta(\bar{q}_1 i \gamma_5 q_2) \quad \text{für alle } q_1, q_2 \quad (4.11)$$

$$\bar{q}_1 q_2 = \delta(\bar{q}_1 q_2) \quad \text{für } q_1 \neq q_2 \quad (4.12)$$

Bei den Quark-Quark-Termen setzen wir den Proportionalitätsfaktor zwischen dem Erwartungswert und dem Kondensaten Δ auf $1/2H$, dies wird sich später als zweckmäßig erweisen.

$$\begin{aligned} \Psi i \gamma_5 \tau_A \lambda_A \mathcal{C} \bar{\Psi} &= \langle \Psi i \gamma_5 \tau_A \lambda_A \mathcal{C} \bar{\Psi} \rangle + \delta(\Psi i \gamma_5 \tau_A \lambda_A \mathcal{C} \bar{\Psi}) \\ &= \frac{1}{2H} \Delta_{AA}^{(s)} + \delta(\Psi i \gamma_5 \tau_A \lambda_A \mathcal{C} \bar{\Psi}) \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \Psi \tau_D \lambda_E \mathcal{C} \bar{\Psi} &= \langle \Psi \tau_D \lambda_E \mathcal{C} \bar{\Psi} \rangle + \delta(\Psi \tau_D \lambda_E \mathcal{C} \bar{\Psi}) \\ &= \frac{1}{2H} \Delta_{DE}^{(p)} + \delta(\Psi \tau_D \lambda_E \mathcal{C} \bar{\Psi}) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Nun Linearisieren wir die Lagrangedichte, das heißt, wir vernachlässigen Terme zweiter und höherer Ordnung in δ . So erhalten wir aus Gl. (4.8) - (4.12)

$$(\bar{q}q)^2 = -\phi_q^2 + 2\phi_q \bar{q}q + \mathcal{O}(\delta^2) \quad q \in \{u, d, s\} \quad (4.15)$$

$$(\bar{q}_1 q_2)^2 = \mathcal{O}(\delta^2) \quad q_1, q_2 \in \{u, d, s\} \text{ und } q_1 \neq q_2 \quad (4.16)$$

$$(\bar{q}_1 i \gamma_5 q_2)^2 = \mathcal{O}(\delta^2) \quad q_1, q_2 \in \{u, d, s\} \quad (4.17)$$

und aus Gl. (4.13) und Gl. (4.14)

$$\begin{aligned} & (\bar{\Psi} i \gamma_5 \tau_A \lambda_A \mathcal{C} \bar{\Psi}^T) (\Psi^T \mathcal{C} i \gamma_5 \tau_A \lambda_A \Psi) \\ &= -\frac{\Delta_{AA}^{(s)*}}{2H} (\Psi^T \mathcal{C} \gamma_5 \tau_A \lambda_A \Psi) + \frac{\Delta_{AA}^{(s)}}{2H} (\bar{\Psi} \gamma_5 \tau_A \lambda_A \mathcal{C} \bar{\Psi}^T) + \left| \frac{\Delta_{AA}^{(s)}}{2H} \right|^2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} & (\bar{\Psi} \tau_A \lambda_B \mathcal{C} \bar{\Psi}^T) (\Psi^T \mathcal{C} \tau_A \lambda_B \Psi) \\ &= \frac{\Delta_{AB}^{(p)*}}{2H} (\Psi^T \mathcal{C} \tau_A \lambda_B \Psi) + \frac{\Delta_{AB}^{(p)}}{2H} (\bar{\Psi} \tau_A \lambda_B \mathcal{C} \bar{\Psi}^T) + \left| \frac{\Delta_{AB}^{(p)}}{2H} \right|^2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Nun können wir die linearisierte Langrangedichte schreiben als:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{MF}} &= \bar{\Psi} (i \not{\partial} - M) \Psi \\ &+ \sum_{A=2,5,7} \left[-\frac{1}{2} (\Psi^T \mathcal{C} \Delta_{AA}^{(s)*} \gamma_5 \tau_A \lambda_A \Psi) + \frac{1}{2} (\bar{\Psi} \Delta_{AA}^{(s)} \gamma_5 \tau_A \lambda_A \mathcal{C} \bar{\Psi}^T) \right] \\ &+ \sum_{\substack{A=2,5,7 \\ B=2,5,7 \\ A \neq B}} \left[\frac{1}{2} (\Psi^T \mathcal{C} \Delta_{AB}^{(p)*} \gamma_5 \tau_A \lambda_B \Psi) + \frac{1}{2} (\bar{\Psi} \Delta_{AB}^{(p)} \gamma_5 \tau_A \lambda_B \mathcal{C} \bar{\Psi}^T) \right] \\ &- 2G (\phi_u^2 + \phi_d^2 + \phi_s^2) + 4K \phi_u \phi_d \phi_s \\ &- \frac{1}{4H} \left(\sum_{A=2,5,7} \left| \Delta_{AA}^{(s)} \right|^2 - \sum_{\substack{A=2,5,7 \\ B=2,5,7 \\ A \neq B}} \left| \Delta_{AB}^{(p)} \right|^2 \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Wir haben neue Massen definiert, die wir Konstituentenmassen nennen und die neben den nackten Massen m_u, m_d und m_s auch weitere Terme der linearisierten Lagrangedichte enthalten:

$$\begin{aligned} M &= \text{diag}(m_u - 4G\phi_u + 2K\phi_d\phi_s, \\ &\quad m_d - 4G\phi_d + 2K\phi_u\phi_s, \\ &\quad m_s - 4G\phi_s + 2K\phi_u\phi_d) \end{aligned} \quad (4.21)$$

4.4 Nambu-Gorkov-Formalismus

Um die Lagrangedichte in eine handlichere Form zu bringen, führen wir den Nambu-Gorkov-Formalismus ein. Unsere Quarkfelder Ψ enthalten 36 Komponenten (vier Dirac-Komponenten für drei unterschiedliche Quark-Flavors mit drei verschiedenen Farben), aus diesen Felder konstruieren wir nun 72-komponentige Bispinorfelder:

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Psi \\ \mathcal{C} \bar{\Psi}^T \end{pmatrix}, \quad \bar{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\Psi}, \Psi^T \mathcal{C}). \quad (4.22)$$

In diesem Formalismus ergibt sich sehr kompakte Darstellung der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}^{\text{MF}} = \bar{q} \left(\begin{array}{cc} i\phi - M & \sum \Delta_{AA}^{(s)} \gamma_5 \tau_A \lambda_A + \sum \Delta_{AB}^{(p)} \tau_A \lambda_B \\ -\sum \Delta_{AA}^{(s)*} \gamma_5 \tau_A \lambda_A + \sum \Delta_{AB}^{(p)*} \tau_A \lambda_B & i\bar{\phi} - M \end{array} \right) q - V \quad (4.23)$$

mit

$$V = 2G (\phi_u^2 + \phi_d^2 + \phi_s^2) - K \phi_u \phi_d \phi_s + \frac{1}{4H} \left(\sum_{A=2,5,7} |\Delta_{AA}^{(s)}|^2 + \sum_{\substack{A=2,5,7 \\ B=2,5,7 \\ A \neq B}} |\Delta_{AB}^{(p)}|^2 \right). \quad (4.24)$$

So lässt sich die Lagrangedichte durch eine 72x72-Matrix und einen Potentialteil V charakterisieren.

Mit den fouriertransformierten Felder

$$q(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} q(p) \quad (4.25)$$

$$\bar{q}(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ipx} \bar{q}(p) \quad (4.26)$$

erhalten wir die Lagrangedichte im Impulsraum

$$\tilde{\mathcal{L}}^{\text{MF}} = \bar{q} \left(\begin{array}{cc} \not{p} - M & \sum \Delta_{AA}^{(s)} \gamma_5 \tau_A \lambda_A + \sum \Delta_{AB}^{(p)} \tau_A \lambda_B \\ -\sum \Delta_{AA}^{(s)*} \gamma_5 \tau_A \lambda_A + \sum \Delta_{AB}^{(p)*} \tau_A \lambda_B & \not{p} - M \end{array} \right) q - V \quad (4.27)$$

4.5 Das thermodynamische Potential

Alle wichtigen Größen, wie der Druck und die verschiedenen Dichten, können aus dem thermodynamischen Potential berechnet werden. Das thermodynamische Potential lässt sich folgendermaßen aus der Zustandssumme gewinnen:

$$\tilde{\Omega} = -T \ln Z. \quad (4.28)$$

Für uns interessant ist das thermodynamische Potential pro Volumen, also:

$$\Omega = \frac{\tilde{\Omega}}{V} = -\frac{T}{V} \ln Z. \quad (4.29)$$

Die großkanonische Zustandssumme ergibt sich aus:

$$Z = \text{Tr} \exp \left(-\beta \left(\int d^3 x \mathcal{H} - \mu_i N_i \right) \right) \quad (4.30)$$

mit $\beta = 1/T$.

Wir führen eine effektive Lagrangedichte ein

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\text{eff}}^{\text{MF}} = \tilde{\mathcal{L}}^{\text{MF}} + q^\dagger \begin{pmatrix} \gamma_0 \hat{\mu} & 0 \\ 0 & -\gamma_0 \hat{\mu} \end{pmatrix} q, \quad (4.31)$$

die die chemischen Potentiale

$$\hat{\mu} = \text{diag}(\mu_{u,r}, \mu_{u,g}, \mu_{u,b}, \mu_{d,r}, \mu_{d,g}, \mu_{d,b}, \mu_{s,r}, \mu_{s,g}, \mu_{s,b}) \otimes \mathbb{1}_{\text{dirac}} \quad (4.32)$$

enthält, also:

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\text{eff}}^{\text{MF}} = \bar{q} \underbrace{\begin{pmatrix} \not{p} - M + \gamma_0 \hat{\mu} & \sum \Delta_{AA}^{(s)} \gamma_5 \tau_A \lambda_A + \sum \Delta_{AB}^{(p)} \tau_A \lambda_B \\ -\sum \Delta_{AA}^{(s)*} \gamma_5 \tau_A \lambda_A + \sum \Delta_{AB}^{(p)*} \tau_A \lambda_B & \not{p} - M - \gamma_0 \hat{\mu} \end{pmatrix}}_{S^{-1}} q - V \quad (4.33)$$

Die 72x72-Matrix bezeichnen wir als inversen Propagator S^{-1} .

Geht man analog zu [29] vor, so lässt sich für Ω schreiben:

$$\Omega = -T \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \text{Tr} \ln (\beta S^{-1}(i\omega_n, \vec{p})) + V. \quad (4.34)$$

Dabei haben wir Matsubara-Frequenzen $\omega_n = (2n + 1)T$ eingeführt. Der Faktor 1/2 entsteht durch die Verdoppelung der Freiheitsgrade beim Einführen des Nambu-Gorkov-Formalismus.

4.6 Berechnung des thermodynamischen Potentials

Das thermodynamische Potential Ω lässt sich darstellen als

$$\Omega = -T \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \ln \det (\beta S^{-1}(i\omega_n, \vec{p})) + V. \quad (4.35)$$

Dabei haben wir neben Gl. (4.34) verwendet, dass für eine Matrix A mit den Eigenwerten a_i folgendes gilt

$$\text{Tr} \ln A = \ln \exp \left(\sum_i \ln a_i \right) = \ln \prod_i a_i = \ln \det A. \quad (4.36)$$

Somit müssen wir die Determinante des inversen Propagators bestimmen. Da die farbsupraleitenden Kondensate nicht vom Vierer-Impuls abhängen, können wir den inversen Propagator leicht in einen von p_0 abhängigen Teil und einen von p_0 unabhängigen Teil zerlegen. Der inverse Propagator lässt sich schreiben als

$$S^{-1} = \gamma_0 p_0 - M, \quad (4.37)$$

wobei M eine 72×72 -Matrix ist. Nun kann man die Determinante des inversen Propagators umformen:

$$\det \left(\frac{S^{-1}(i\omega_n, \vec{p})}{T} \right) = \det \left(\frac{\gamma_0 S^{-1}(i\omega_n, \vec{p})}{T} \right) = \det \left(\frac{i\omega_n - \gamma_0 M(\vec{p})}{T} \right) \quad (4.38)$$

Es existieren zwei unitäre Matrizen U und U^\dagger mit denen $\gamma_0 M$ diagonalisiert werden kann.

$$\det \left(\frac{S^{-1}(i\omega_n, \vec{p})}{T} \right) = \frac{1}{T^{72}} \det \left(U^\dagger (i\omega_n - \gamma_0 M) U \right) \quad (4.39)$$

$$= \frac{1}{T^{72}} \det \left(i\omega_n - \underbrace{U^\dagger \gamma_0 M U}_D \right) \quad (4.40)$$

Die Matrix ist jetzt diagonal, auf der Diagonalen stehen $i\omega_n$ und die Eigenwerte ϵ_i von $\gamma_0 M$. Die Determinante ist jetzt das Produkt der Diagonalelemente

$$\det \left(\frac{S^{-1}(i\omega_n, \vec{p})}{T} \right) = \frac{1}{T^{72}} \prod_{i=1}^{72} (i\omega_n - \epsilon_i) \quad (4.41)$$

Durch den Dirac-Anteil des inversen Propagator erhalten wir jeweils vier Eigenwerte mit dem selben Betrag, zwei mit positiven und zwei mit negativen Vorzeichen. Dies nutzen wir zum weiteren Vereinfachen aus:

$$\det \left(\frac{S^{-1}(i\omega_n, \vec{p})}{T} \right) = \frac{1}{T^{72}} \prod_{i=1}^{36} (i\omega_n - \epsilon_i) (i\omega_n + \epsilon_i) \quad (4.42)$$

$$= \frac{1}{T^{72}} \prod_{i=1}^{36} -(\omega^2 + \epsilon_i^2) \quad (4.43)$$

$$= \frac{1}{T^{72}} \prod_{i=1}^{18} (\omega^2 + \epsilon_i^2)^2 \quad (4.44)$$

Setzt man Gl. (4.44) in Gl. (4.35) ein, so erhält man:

$$\Omega = -\frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln \prod_{i=1}^{18} \frac{(\omega_n^2 - \epsilon_i^2)^2}{T^4} + V \quad (4.45)$$

und nach Ausführung der Matsubarasumme (Anhang B.1):

$$\Omega = - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_{i=1}^{18} \left(\frac{|\epsilon_i|}{2} + 2T \ln \left(1 + \exp \left(-\frac{|\epsilon_i|}{T} \right) \right) \right) + V \quad (4.46)$$

4.7 Das thermodynamische Potential der Leptonen

Das System, das betrachtet wird, enthält neben den Quarks, deren thermodynamisches Potential bereits in den vorangegangenen Abschnitten untersucht wurde, auch Elektronen und Myonen.

Die Lagrangedichte für nicht wechselwirkende Fermionen ist gegeben durch:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\cancel{\partial} - m) \Psi \quad (4.47)$$

So kann man die Zustandssumme

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta(H - \mu N)} \quad (4.48)$$

schreiben als

$$Z = \int (i d\Psi^\dagger) (d\Psi) \exp \left(\int_0^\beta d\tau \int d^3x \bar{\Psi} \left(-\gamma_0 \frac{\partial}{\partial \tau} + i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - m + \mu\gamma_0 \right) \Psi \right). \quad (4.49)$$

Setzt man Fouriertransformierte Felder ein, so erhält man

$$Z = \left(\prod_n \prod_p \prod_\alpha \int i d\tilde{\Psi}_{\alpha,n}^\dagger(p) d\tilde{\Psi}_{\alpha,n}(p) \right) \exp \left(\sum_n \sum_p i \tilde{\Psi}_{\alpha,n}^\dagger(p) D_{\alpha\delta} \tilde{\Psi}_{\delta,n}(p) \right) \quad (4.50)$$

mit

$$D = -i\beta \left((-i\omega_n + \mu) - \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - m\gamma^0 \right) \quad (4.51)$$

und den Matsubara-Frequenzen

$$\omega_n = (2n + 1) T \quad (4.52)$$

Nutzt man jetzt die Eigenschaften eines Gauss'schen Integrals über fermionische Felder aus, so erhält man

$$Z = \det D \quad (4.53)$$

$$\tilde{\Omega} = \ln Z = \ln \det D = \text{Tr} \ln D \quad (4.54)$$

und nach weiteren Umformungen schließlich

$$\Omega = 2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\beta\omega + \ln \left(1 + e^{-\beta(\omega - \mu)} \right) + \ln \left(1 + e^{-\beta(\omega + \mu)} \right) \right) \quad (4.55)$$

Das totale thermodynamische Potential ist nun die Summe der einzelnen Beträge.

$$\Omega_{\text{total}} = \Omega_{\text{Quarks}} + \Omega_{e^-} + \Omega_{\mu^-}. \quad (4.56)$$

4.8 Die Ableitungen des thermodynamischen Potentials

Um das Minimum des thermodynamischen Potentials zu finden, müssen wir dessen Ableitungen berechnen. Für den leptonischen Fall ist das nicht weiter schwierig. Die Berechnung der Ableitungen des Quark-Anteils (Gl. (4.46)) wird hier gezeigt:

Im Folgenden sei $x \in \{\Delta_{AA}^{(s)} \Delta_{AB}^{(p)}, \mu_3, \mu_8, \mu_q, \phi_u, \phi_d, \phi_s, \dots\}$. Dann gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Omega = -T \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \left(\frac{1}{T} S^{-1} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} V \quad (4.57)$$

$$= -T \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(S \frac{\partial}{\partial x} S^{-1} \right) + \frac{\partial}{\partial x} V. \quad (4.58)$$

Auch hier verwenden wir, dass man p_0 von S^{-1} abtrennen kann.

$$S^{-1} = \gamma_0 (p_0 - M) \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} S^{-1} = \frac{\partial}{\partial x} \gamma_0 (p_0 - M) = \gamma_0 \frac{\partial}{\partial x} M \quad (4.60)$$

Mit Hilfe der unitären Matrizen U und U^\dagger (vergleiche Gl.(4.39)) können wir S^{-1} diagonalisieren

$$S^{-1} = \gamma_0 U(\vec{p}) \begin{pmatrix} i\omega_n + \epsilon_1(\vec{p}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & i\omega_n + \epsilon_N(\vec{p}) \end{pmatrix} U^\dagger(\vec{p}). \quad (4.61)$$

Invertieren führt zu:

$$S = U(\vec{p}) \begin{pmatrix} \frac{1}{i\omega_n + \epsilon_1(\vec{p})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{i\omega_n + \epsilon_N(\vec{p})} \end{pmatrix} U^\dagger(\vec{p}) \gamma_0 \quad (4.62)$$

Setzt man Gl. (4.62) in Gl. (4.58) ein, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial x} \Omega = -\frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left(U(\vec{p}) \begin{pmatrix} \frac{1}{i\omega_n + \epsilon_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{i\omega_n + \epsilon_N} \end{pmatrix} U^\dagger(\vec{p}) \frac{\partial M}{\partial x} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} \quad (4.63)$$

$$= -\frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_{i=1}^{72} \frac{1}{i\omega_i + \epsilon_i} \underbrace{\left(U^\dagger \frac{\partial M}{\partial x} U \right)}_{b_i} + \frac{\partial V}{\partial x} \quad (4.64)$$

$$= -\frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_{i=1}^{72} \frac{b_i}{i\omega_n + \epsilon_i} + \frac{\partial V}{\partial x} \quad (4.65)$$

Nun führen wir die Matsubarasumme aus (Anhang B.2) und erhalten:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_{i=1}^N \frac{b_i}{e^{-\epsilon_i/T} + 1} + \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (4.66)$$

Kapitel 5

Das Phasendiagramm

5.1 Numerik

Um eine stabile Lösung für eine der supraleitenden Phasen zu finden, muss das thermodynamische Potential (Gl. (4.46)) minimiert werden und gleichzeitig müssen Gl. (3.22) und (3.44) erfüllt sein, damit die Bedingungen eines Neutronensterns gewährleistet sind. Um dies zu erfüllen, wird mit einem Broydn-Algorithmus, wie er in [30] beschrieben ist, eine Lösung gesucht, bei der alle relevanten Ableitungen der thermodynamischen Potentials null sind sowie farb- und elektrische Neutralität gegeben ist. Zur Berechnung des Integrals in Gl. (4.65) wird eine Gauss-Legendre-Integration mit 256 Punkten verwendet. Die für den Broydn-Algorithmus notwendige Jacobi-Matrix wird aus den ersten Ableitungen numerisch berechnet.

5.2 Parameter

Unser NJL-Modell benötigt insgesamt sieben Parameter, die drei Quarkmassen (m_u, m_d, m_s), drei Kopplungskonstanten (G, K, H) und einen Cut-off für den Dreier-Impuls (Λ).

Wir verwenden die Werte aus [31], Tabelle 5.1. Diese sind so gewählt, dass im Vakuum $f_\pi = 92.4$ MeV, $m_\pi = 135.0$ MeV, $m_K = 197.7$ MeV und $m_{\eta'} = 957.8$ MeV durch das NJL-Modell reproduziert werden. Da wir durch das Anpassen der Parameter an die Eigenschaften von Mesonen keine Information über die Kopplungsstärke der für die Farbsupraleitung wichtigen Quark-Quark-Kopplung bekommen, nehmen wir hier zwei verschiedenen Fälle an. *Starke Kopplung*, hier ist die Quark-Quark-Kopplung (H) genau so stark wie die Quark-Antiquark-Kopplung (G). Und *mittlere Kopplung* bei der wir $H = \frac{3}{4}G$ wählen. Die Quark-Quark-Kopplung ist also etwas schwächer als die Quark-Antiquark-Kopplung.

m_u (MeV)	m_d (MeV)	m_s (MeV)	
5,5	5,5	140,7	
G	K	H	Λ (MeV)
$1,835/\Lambda^2$	$12,36/\Lambda^5$	$H = G/H = \frac{3}{4}G$	602,3

Tabelle 5.1: Parameter des verwendeten NJL-Modells, die Kopplung der farbsupraleitenden Kondensate wird entweder mit $H = G$ (starke Kopplung) oder mit $H = \frac{3}{4}G$ (mittlere Kopplung) angegeben.

5.3 Konstruktion der Phasengrenzen

An einer Phasengrenze befinden sich die aneinander grenzenden Phasen im Gleichgewicht, das heißt, Temperatur, Druck und alle chemischen Potentiale stimmen über ein.

Wir haben vier verschiedene chemische Potentiale (μ, μ_Q, μ_3, μ_8) so dass die Phasengrenzen Hyperflächen in einem fünf-dimensionalen¹ Raum sind. Wir gehen hier allerdings zunächst anders vor und fordern, dass alle Phasen sowohl elektrisch neutral als auch farbneutral sind. Damit sind bei gegebener Temperatur und gegebenem chemischen Potential μ die weiteren chemischen Potentiale μ_3, μ_8 und μ_Q automatisch festgelegt. So reduziert sich unser Phasendiagramm auf die $\mu - T$ -Ebene.

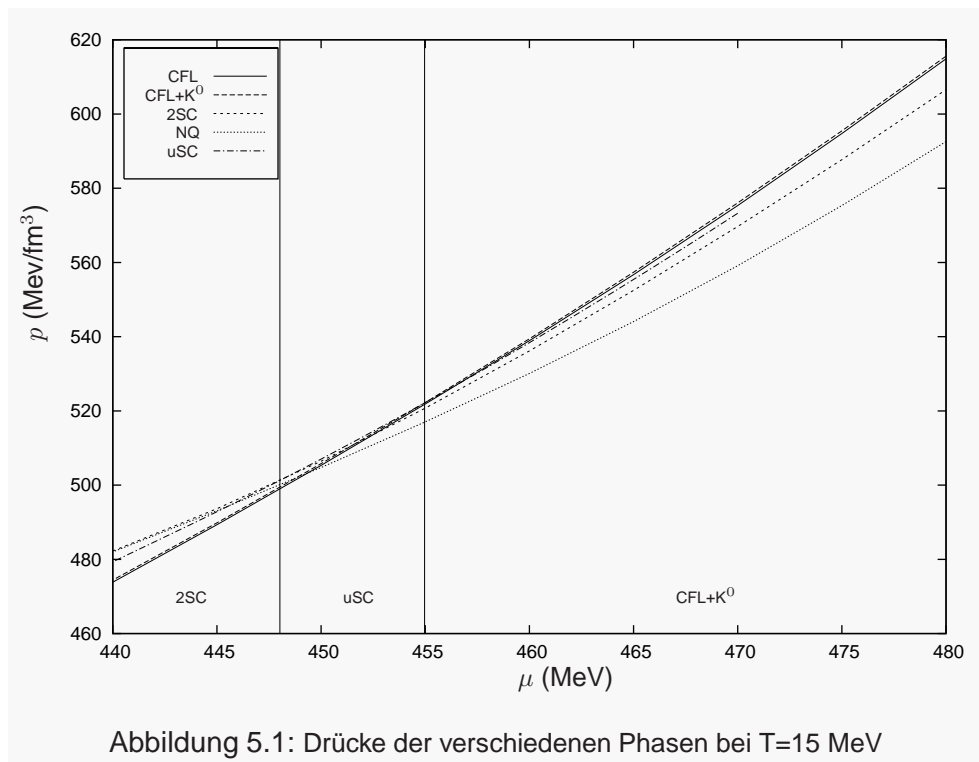
Später (in Kapitel 6) werden wir auch elektrisch geladene Phasen zulassen und werden dann auch μ_Q frei wählen können. Die elektrische Neutralität des Gesamtsystems werden wir dann durch Mischen gegensätzlich geladener Phasen erreichen.

Um ein Phasendiagramm konstruieren zu können, brauchen wir die Drücke der Phasen; der Druck ist das negative thermodynamische Potential

$$P = -\Omega. \quad (5.1)$$

Die Phase mit dem größeren Druck wird bevorzugt. Wir berechnen also den Druck für die verschiedenen Phasen an unterschiedlichen Stellen im $\mu - T$ -Diagramm und können so ermitteln, welche Phase bei einer gegebenen Temperatur und einem gegebenen chemischen Potential μ bevorzugt wird und an welchen Stellen die Phasenübergänge stattfinden (siehe zum Beispiel Abbildung 5.1).

¹vier chemische Potentiale und die Temperatur



5.4 Das $T = 0$ Problem

Leider ist es mit der hier vorgestellten Methode nicht möglich gewesen, Lösungen für gaplose Phasen bei $T = 0$ zu finden. Wir haben mit verschiedenen Ansätzen versucht, dieses Problem zu lösen; Vervielfachung der Stützstellen bei der Integration, Ändern der Integrationsmethode (Simpson-Methode), Verschieben des Startpunktes für das Minimieren des thermodynamischen Potentials. Nichts davon hat zum gewünschten Erfolg geführt.

In den meisten Fällen können wir das Problem umgehen, indem wir bei $T = 1$ MeV rechnen. In der Regel unterscheiden sich die Lösungen bei einer Temperatur von 1 MeV und 0 MeV nicht sehr stark. In Tabelle 5.2 sind beispielhaft die Werte für eine Lösung für die CFL+ K^0 -Phase bei $\mu = 480$ MeV, einer mittleren Kopplung und Temperaturen von 1 MeV und 0 MeV gegenübergestellt. Deshalb beginnen die dargestellten Phasendiagramme bei $T = 1$ MeV.

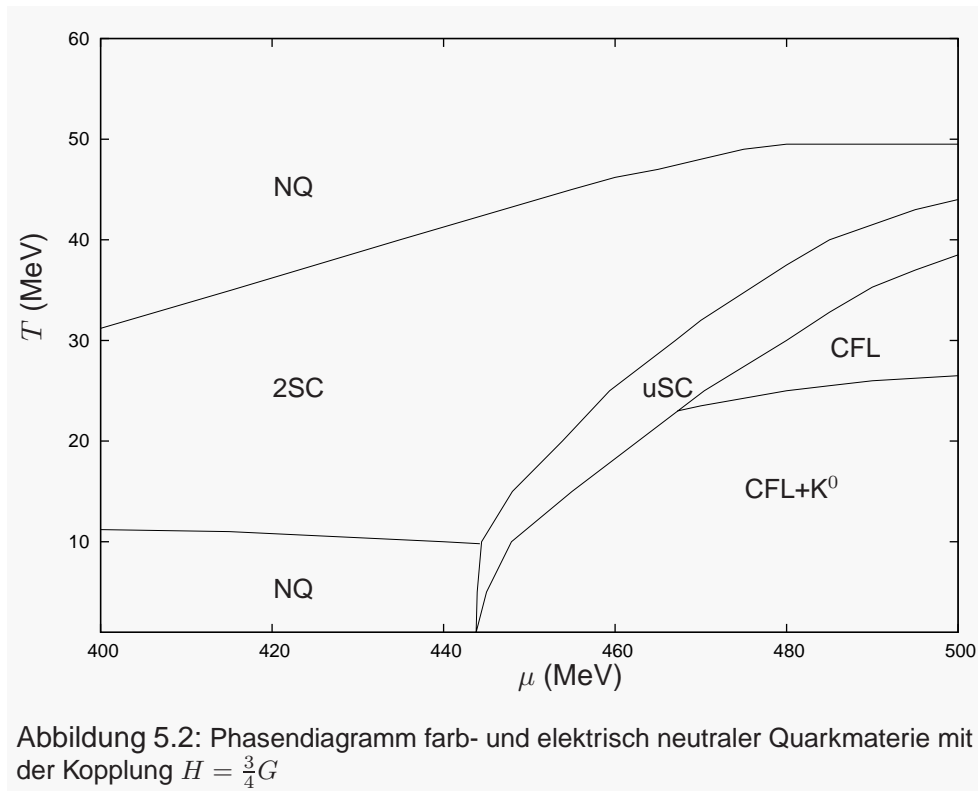
	T=0 MeV	T=1 MeV
$\Delta_{22}^{(s)}$	56.982968	56.982969
$\Delta_{55}^{(s)}$	51.680985	51.680984
$\Delta_{77}^{(s)}$	72.945255	72.945254
$\Delta_{25}^{(p)}$	-54.129641	-54.129640
$\Delta_{52}^{(p)}$	47.943390	47.943386
μ_Q	0.000000	0.000000
μ_3	-14.201643	-14.180709
μ_8	-10.112311	-10.100227
gap	23.142080	23.183945

Tabelle 5.2: Werte für eine CFL+K⁰-Phase bei $T = 1$ MeV und $T = 0$ MeV, einem chemischen Potential $\mu = 480$ MeV und mittlerer Kopplung ($H = \frac{3}{4}G$).

5.5 Das Phasendiagramm

Da wir uns bei der Wahl der Parameter (Abschnitt 5.2) nicht auf eine Stärke für die Quark-Quark-Kopplung festgelegt haben, folgt ein Phasendiagramm für die “starke Kopplung” und eines für die “mittlere Kopplung”. Beginnen wir mit der mittleren Kopplung.

5.5.1 Phasendiagramm bei mittlerer Kopplung



Die Abbildung 5.2 zeigt das Phasendiagramm für die "mittlere" Quark-Quark-Kopplung ($H = \frac{3}{4}G$). Wie erwartet finden wir bei größerem chemischen Potential μ CFL- und CFL+ K^0 -Phasen, die dann in eine 2SC-Phase oder in nicht farbsupraleitende Materie (NQ=normal quark matter) übergehen. In diesem Übergang finden wir auch eine schmale uSC-Phase. Dieser Teil der Phasendiagramms befindet sich in guter Übereinstimmung mit dem in [32] gegebenen Diagramm.

Als Phase mit pseudoskalaren Kondensaten finden wir eine CFL+ K^0 -Phase. Der Übergang von normaler Quarkmaterie zur CFL+ K^0 -Phase findet - bei einer Temperatur von 1 MeV - bei einem chemischen Potential vom $\mu = 443.8$ MeV statt. Die CFL+ K^0 -Phase ersetzt nicht die komplette CFL-Phase, sondern ist nur bei Temperaturen unter ≈ 26 MeV bevorzugt. Dieser Teil stimmt gut mit dem in [14] gegebenen Phasendiagramm überein. Die in [14] gefundene pSC-Phase konnten wir allerdings nicht bestätigen.

Abbildung 5.4 zeigt die farbsupraleitenden Kondensate bei $T = 1$ MeV. Der Betrag der Kondensate mit Strange-Quarkbeteiligung nimmt bei kleinerem chemischen Potential ab.

Die Konstituentenmassen sind in Abbildung 5.5 dargestellt. Die Massen der

Up- und Down-Quarks ändern sich am Phasenübergang nur geringfügig, während sich die Masse des Strange-Quarks um mehr als 150 MeV erhöht.

In Abbildung 5.6 sind die verschiedenen chemischen Potentiale aufgetragen. In der normalen Quark-Phase sind μ_3 und μ_8 null, da hier keine Kondensate Einfluss auf die Farbneutralität haben. Durch das schwerere Strange-Quark ist das elektrische Ladungsgleichgewicht verschoben und die Phase muss durch ein negatives μ_Q neutralisiert werden.

In der CFL+K⁰-Phase ($\mu > 443.8$ MeV) sind die beiden farbchemischen Potentiale μ_3 und μ_8 von null verschieden, um eine farbneutrale Phase zu gewährleisten. Allerdings wird μ_Q für kleiner Werte von μ negativ. Ein solches Verhalten wurde auch in der Arbeit von Warringa [14] gefunden. In dem Bereich in dem μ_Q verschwindet erwarten wir eine gegappte CFL-K⁰-Phase (Abschnitt 3.2.2) und in dem Bereich, in dem $\mu_Q < 0$ ist eine gaplose CFL+K⁰-Phase. Warringa findet jedoch überall eine gegappte CFL+K⁰-Phase. Dieser Inkonsistenz wollen wir im Folgenden auf den Grund gehen. In Abbildung 5.3 ist das kleinste Gap des Anregungsspektrums und der Wert für μ_Q bei verschiedenen Temperaturen dargestellt. Bei Temperatur gleich null und μ kleiner als 458 MeV finden wir keine Lösungen. Schauen wir uns das Gap in bei $T = 0$ MeV an, so sehen wir, dass es mit abnehmendem μ immer kleiner wird und im Bereich um $\mu = 458$ MeV anscheinend ganz verschwindet. Wir nehmen an, dass in dem Bereich, in dem wir keine Lösung finden konnten, eine gaplose CFL+K⁰-Phase vorliegt. Die Ergebnisse von Warringa widersprechen nicht nur unseren Ergebnissen, sondern auch dem Argument zur Neutralität der CFL+K⁰-Phase bei $T = 0$ MeV (Abschnitt 3.2.2). Leider ist eine vollständige Klarstellung auf Grund der in Abschnitt 5.4 diskutierten numerischen Probleme nicht möglich.

In den Abbildungen 5.7 bis 5.9 stellen wir dieselbe Situation bei einer Temperatur von 25 MeV dar. Das Verhalten ist ähnlich dem bei $T = 1$ MeV. An Stelle von normaler Quarkmaterie finden wir hier eine 2SC-Phase. Zwischen der CFL+K⁰-Phase und der 2SC-Phase liegen schmale Bereiche der CFL- und uSC-Phasen.

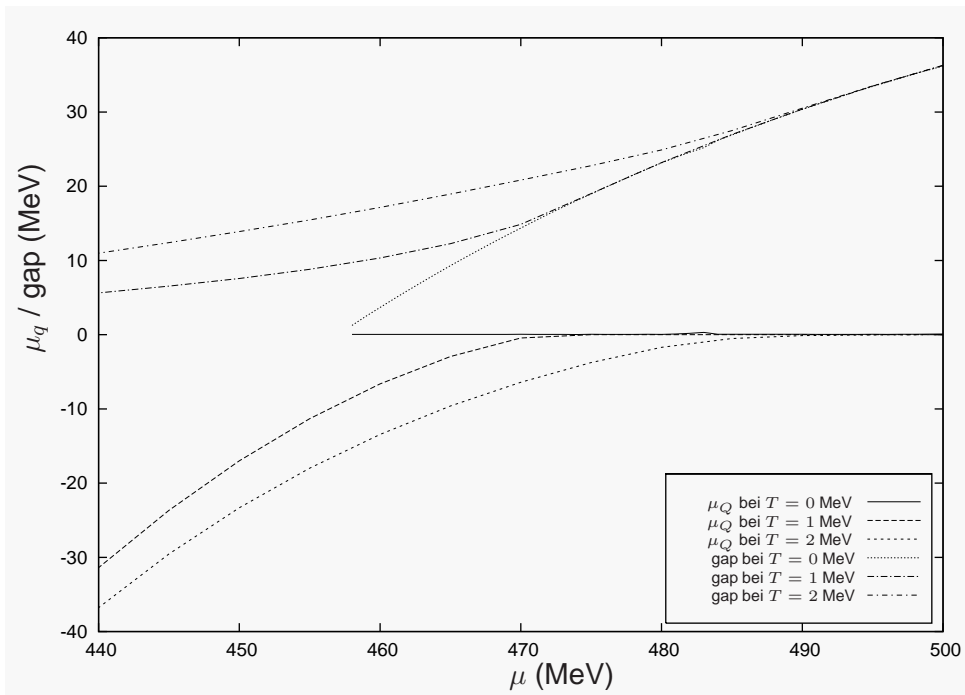


Abbildung 5.3: Das chemische Potential μ_Q und das *gap* der CFL+ K^0 -Phase in Abhängigkeit von μ bei unterschiedlichen Temperaturen und mittlerer Kopplung ($H = \frac{3}{4}G$). Für $T = 0$ MeV konnte bei $\mu < 458$ MeV keine Lösung gefunden werden.

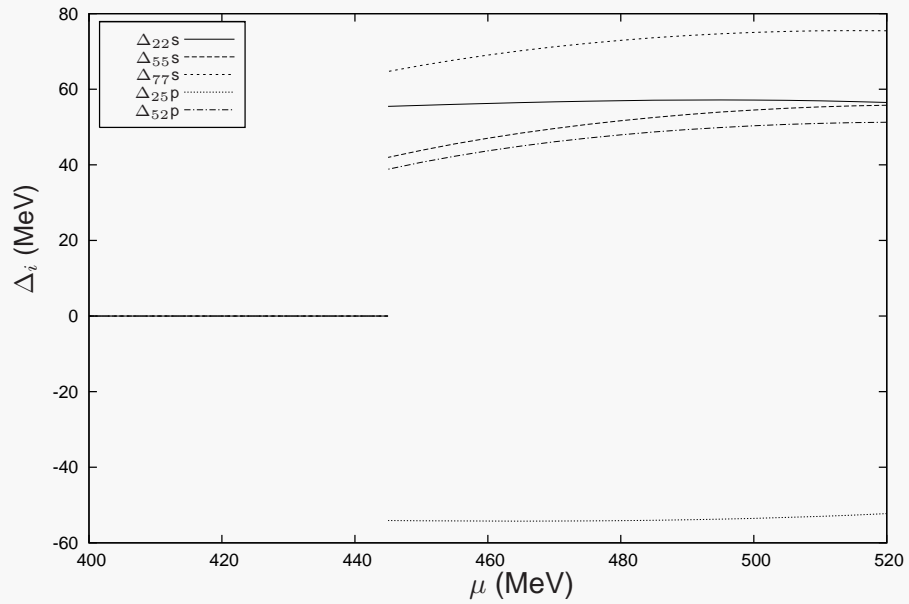


Abbildung 5.4: Farbsupraleitende Kondensate bei einer Temperatur von 1 MeV und der Kopplung $H = \frac{3}{4}G$

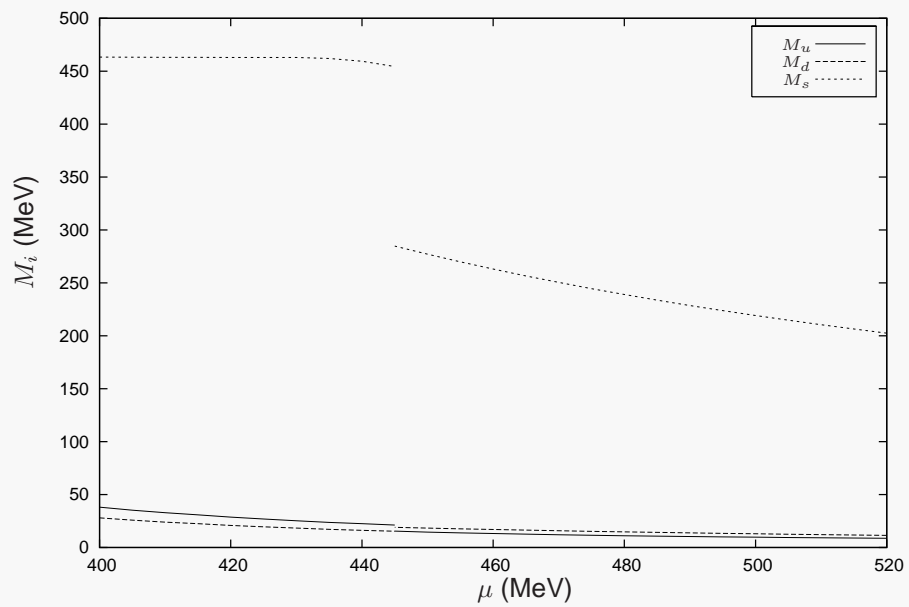


Abbildung 5.5: Die Konstituentenmassen bei $T = 1$ MeV und der Kopplung $H = \frac{3}{4}G$

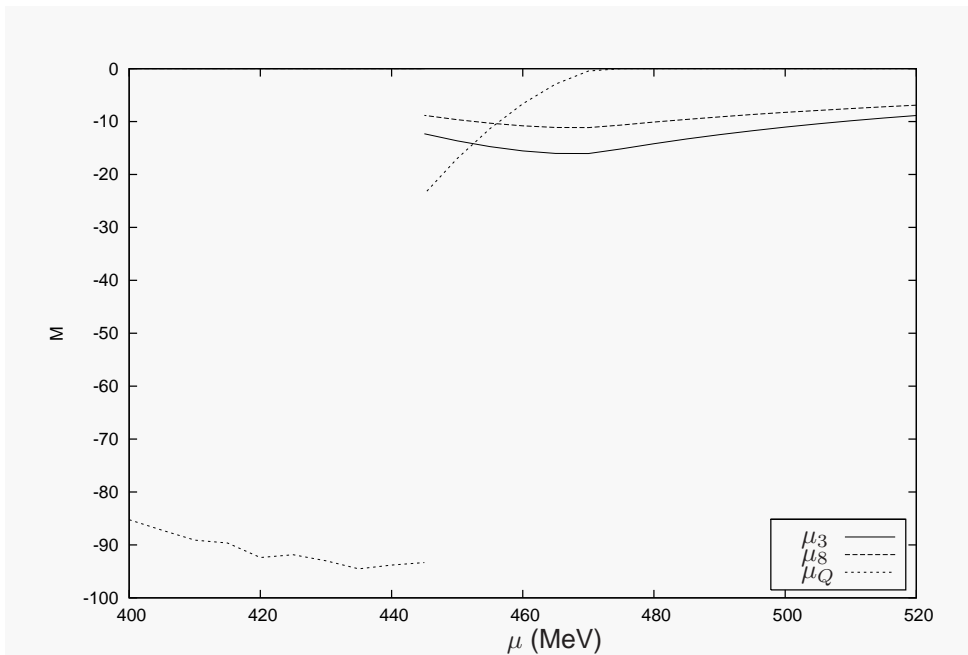


Abbildung 5.6: Die chemischen Potentiale bei $T = 1$ MeV und der Kopplung $H = \frac{3}{4}G$

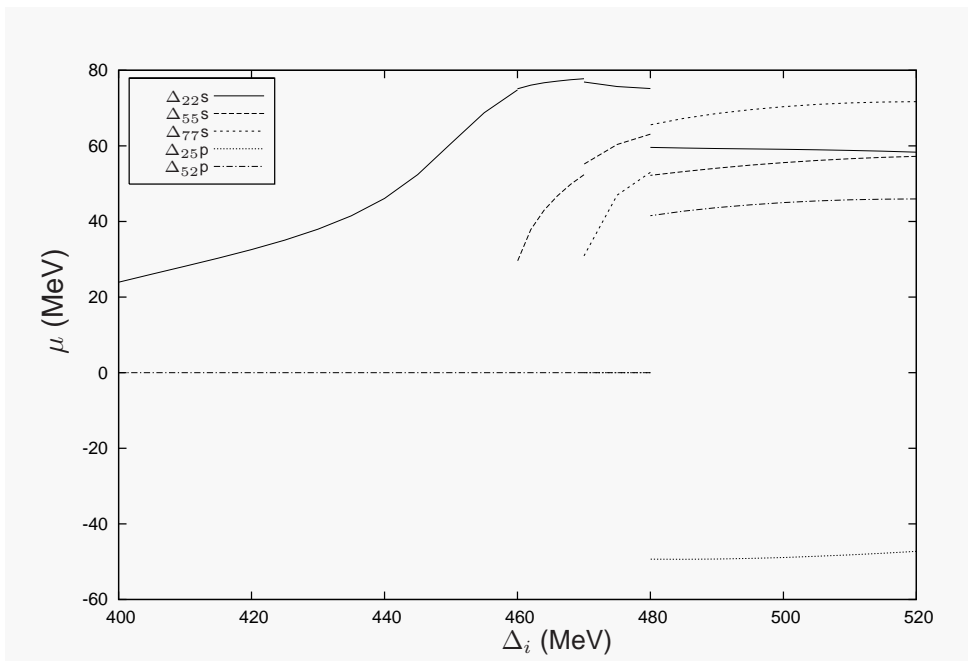


Abbildung 5.7: Farbsupraleitende Kondensate bei einer Temperatur von 25 MeV und der Kopplung $H = \frac{3}{4}G$

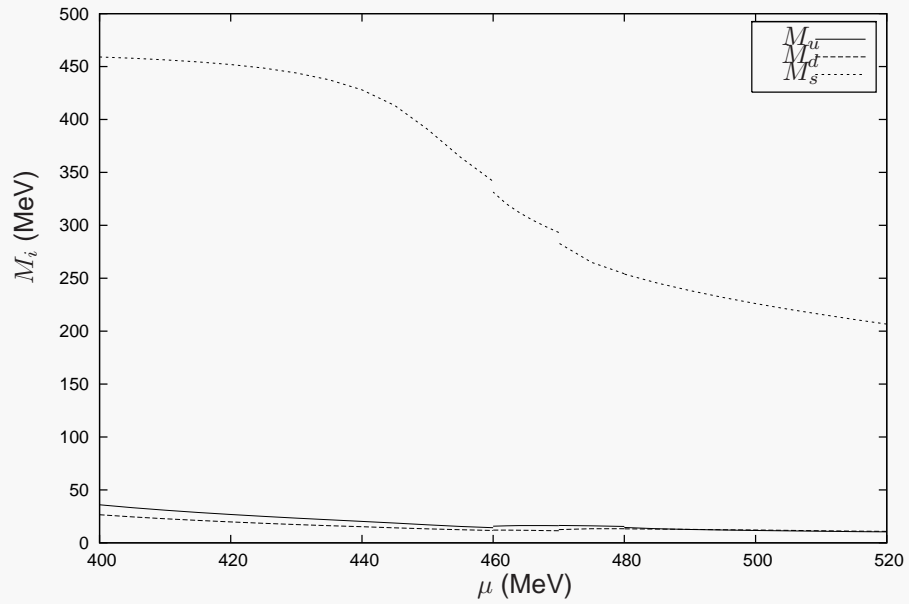


Abbildung 5.8: Die Konstituentenmassen bei $T = 25$ MeV und der Kopplung $H = \frac{3}{4}G$

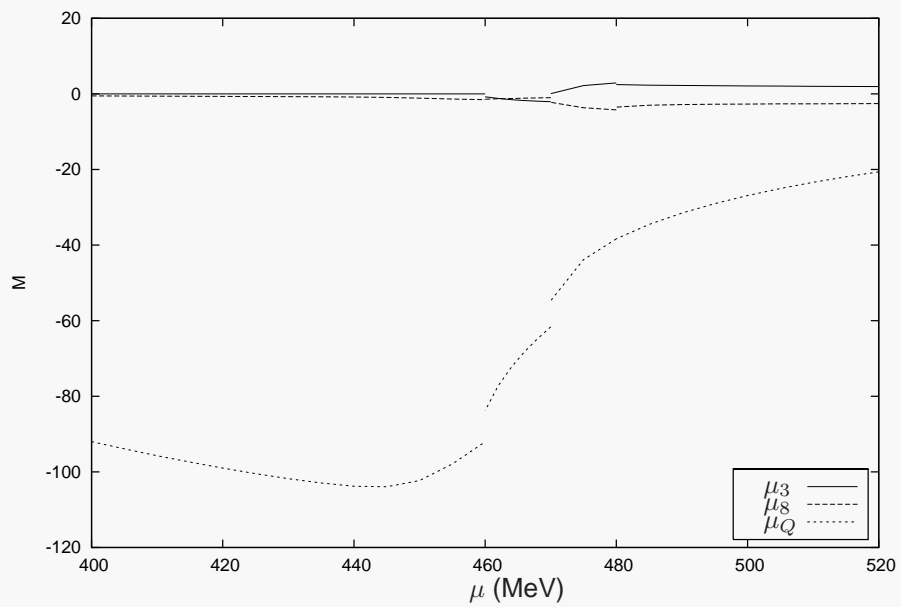
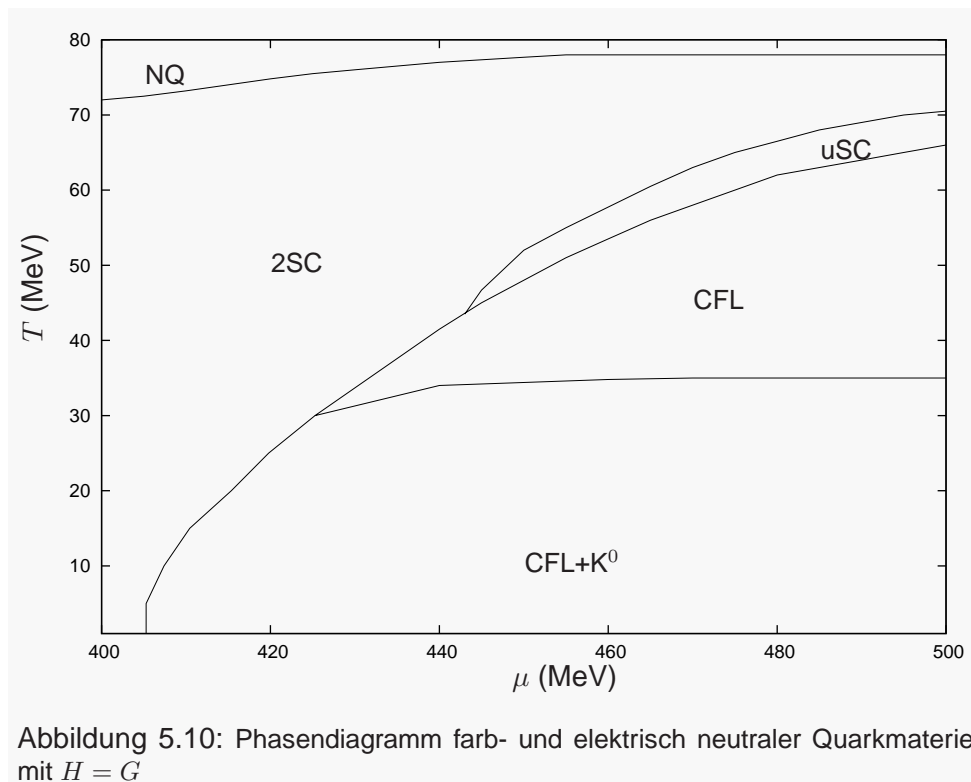


Abbildung 5.9: Die chemischen Potentiale bei $T = 25$ MeV und der Kopplung $H = \frac{3}{4}G$



5.5.2 Phasendiagramm bei starker Kopplung

Wir haben das Phasendiagramm auch für die stärkere Quark-Quark-Kopplung ($H = G$) berechnet (siehe Abbildung 5.10). Ein großer Unterschied zum Phasendiagramm mit schwächerer Kopplung sind, dass die CFL+ K^0 - und die CFL-Phase bis zu deutlich kleineren chemischen Potentialen bevorzugt sind. Auch wird normale Quark-Phase durch die 2SC-Phase ersetzt. Bei der "mittleren" Kopplung liegt der Übergang von der CFL+ K^0 -Phase zu normaler Quarkmaterie (bei einer Temperatur von 1 MeV) bei 443.8 MeV. Ist die Kopplung stärker, so verschiebt sich der Übergang, der von der CFL+ K^0 -Phase zur 2SC-Phase geht, zu kleineren chemischen Potentialen und liegt für $H = G$ bei 405,3 MeV.

Kapitel 6

Gemischte Phasen

Zu den Bedingungen in einem Neutronenstern gehört, dass die Materie sowohl elektrisch neutral als auch farbneutral sein muss. Um dies zu erreichen wurden bisher in dieser Arbeit Lösungen gesucht, die gleichzeitig die Neutralitätsbedingungen (3.22) und (3.41) erfüllen. Für elektrische Neutralität ist es allerdings auch denkbar, an Stelle einer homogenen neutralen Phase, eine Phase, die aus zwei elektrisch geladenen Phasen besteht, zu konstruieren. Das Verhältnis der verschiedenen Phasen wird dann so gewählt, dass die Mischung elektrisch neutral ist. Zudem müssen die einzelnen Phasen farbneutral sein. Mischungen in denen nicht jede Phase für sich farbneutral ist, sondern nur das Gesamtsystem, wurde in [33] untersucht.

Mischungen aus der CFL- und der 2SC-Phase sind zum Beispiel in [34] beschrieben. Dadurch dass die CFL-Phase bei niedrigen Temperaturen an sich elektrisch neutral ist (siehe Abschnitt 3.2.1), kann eine elektrisch negativ geladene CFL-Phase nur durch das Hinzufügen von Elektronen und Myonen erzeugt werden. Da die 2SC-Phase in dem für eine Mischung interessanten Bereich an sich schon stark positiv geladen ist, besteht eine neutrale Mischung zu einem großen Teil aus der CFL-Komponente, der nur ein geringer Anteil einer 2SC-Phase beigemischt ist. Ein solches Mischungsverhältnis wirkt sich ungünstig auf die Oberflächen- und Coulombenergie aus, die aufgewendet werden muss, um eine solche Mischung zu erzeugen.

Betrachtet man auch pseudoskalare Kondensate, dann verändert sich diese Situation. Mit der $CFL+\pi^-$ -Phase hat man eine Phase, die bei gleichem μ_Q stärker negativ geladen ist als die CFL-Phase. So kann ein günstigeres Mischungsverhältnis erreicht werden. Mit einer solchen gemischten Phase wollen wir uns in diesem Kapitel befassen.

6.1 Neutrale gemischte Phasen

Um zwei Phasen mischen zu können, müssen beide Phasen das gleiche thermodynamische Potential und dieselben chemischen Potentiale μ und μ_Q besitzen. Da wir voraussetzen, dass jede Phase für sich farbneutral ist, haben wir verschiedene μ_3 und μ_8 in den beiden Phasen.

$$\Omega^{(1)}(\mu, \mu_q, \mu_3^{(1)}, \mu_8^{(1)}, T) = \Omega^{(2)}(\mu, \mu_q, \mu_3^{(2)}, \mu_8^{(2)}, T) \quad (6.1)$$

In einem μ - μ_Q -Phasendiagramm, wie es in Abbildung 6.1 gezeigt wird, ist diese Bedingung jeweils an den Phasengrenzen erfüllt. Ist $n_Q^{(1)}$ die Ladungsdichte der ersten Phase und $n_Q^{(2)}$ die der zweiten Phase, so ergibt sich für eine gemischte neutrale Phase mit dem Volumenanteilen $x^{(1)}$ und $x^{(2)} = 1 - x^{(1)}$

$$0 = x^{(1)}n_Q^{(1)} + x^{(2)}n_Q^{(2)} \quad (6.2)$$

und damit

$$x^{(1)} = \frac{n_Q^{(2)}}{n_Q^{(2)} - n_Q^{(1)}}. \quad (6.3)$$

In dem μ - μ_Q -Phasendiagramm (Abbildung 6.1) können wir erkennen, dass in dem Bereich $427,2 \text{ MeV} < \mu < 460,2 \text{ MeV}$ und $-86 \text{ MeV} < \mu_Q < 0 \text{ MeV}$ ein Phasenübergang zwischen der positiv geladenen 2SC- und der (leicht) negativ geladenen CFL+ K^0 -Phase existiert. Allerdings erwarten wir von der CFL+ K^0 -Phase ein ähnliches Verhalten wie das der CFL-Phase in [34].

Betrachten wir das μ - μ_Q -Phasendiagramm im Bereich $\mu < 427,2 \text{ MeV}$, $\mu_Q < -86 \text{ MeV}$, ist eine Mischung aus 2SC und CFL+ π^- möglich. Die gemischte Phase ist gegenüber der homogenen Phase deutlich bevorzugt. Die homogene Phase ist bei $\mu > 405,3$ CFL+ K^0 und bei $\mu < 405,3$ 2SC. Die Differenz $\delta\Omega = \Omega_{\text{hom}} - \Omega_{\text{mix}}$ ist in Abbildung 6.2, der Anteil der 2SC-Phase in Abbildung 6.3 dargestellt.

6.2 Oberflächen- und Coulombenergie

In den bisherigen Überlegungen haben wir weder Oberflächen- noch Coulomb-Energie beachtet, die aufgebracht werden müssen, um eine solche Mischung aus zwei geladenen Phasen zu erzeugen. Ohne Oberflächen- und Coulombenergie ist an einem Phasenübergang zwischen zwei unterschiedlich geladenen Phasen eine gemischte Phase auf jeden Fall bevorzugt.

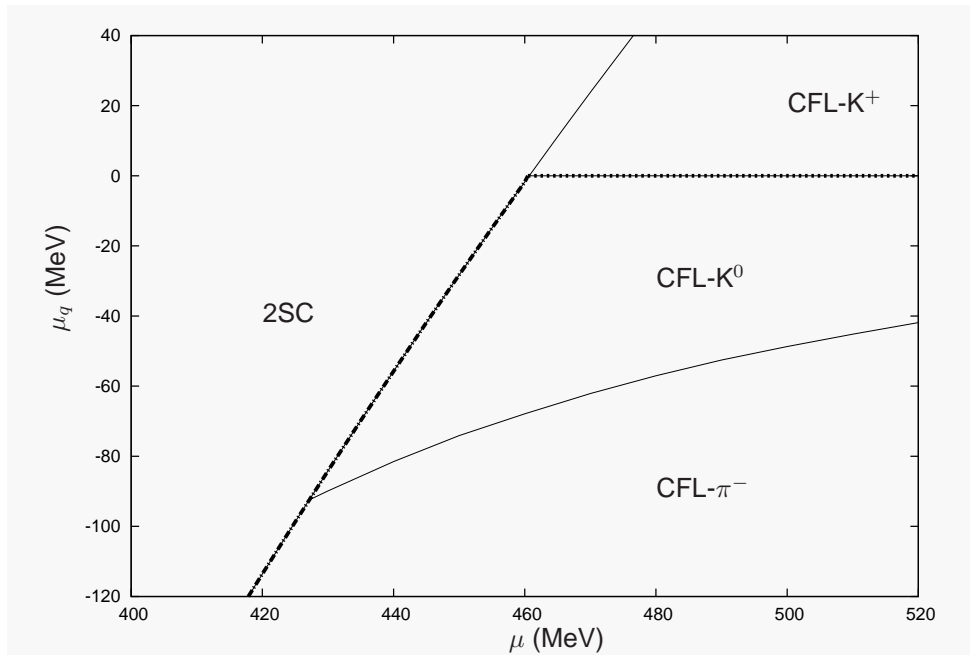


Abbildung 6.1: Das $\mu - \mu_Q$ -Phasendiagramm für $H = G$. Die dicke gestrichelte Linie gibt an, wo die Phasen elektrisch neutral (Punkte) sind, bzw eine neutrale Mischung (Strich-Punkte) möglich ist.

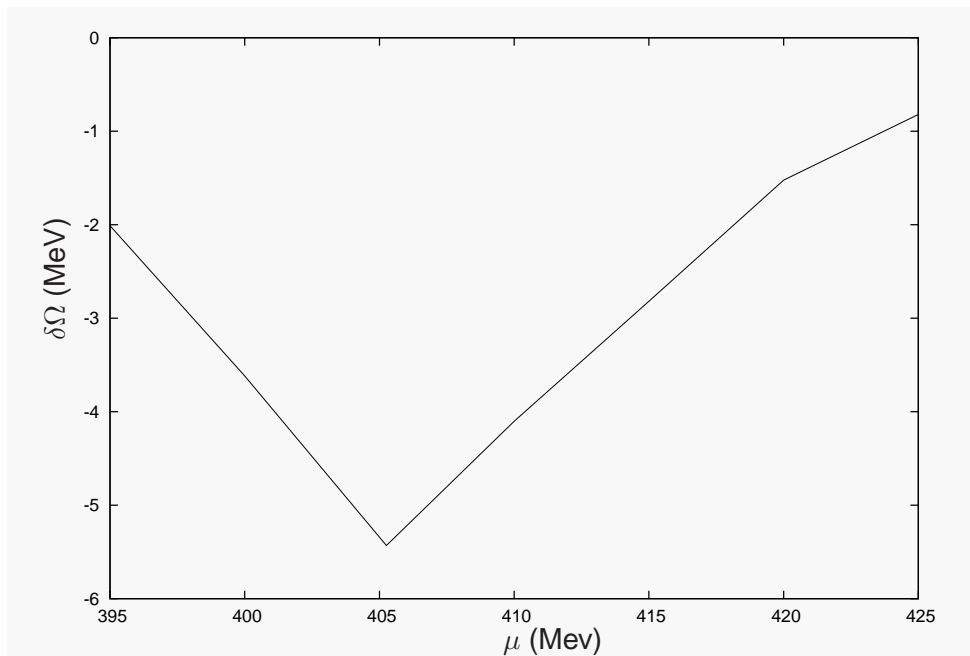


Abbildung 6.2: Differenz im thermodynamischen Potential zwischen der gemischten und der jeweiligen homogenen Phasen

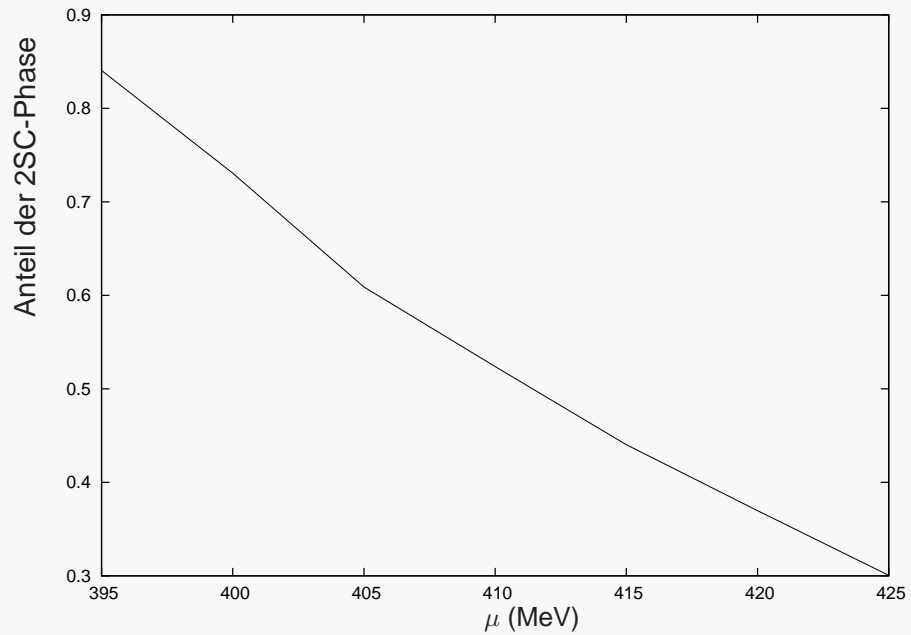


Abbildung 6.3: Anteil der 2SC-Phase an dem 2SC-CFL+ π^- - Gemisch bei $T=1$ MeV.

Wir wollen für die geometrischen Formen der Strukturen die drei Möglichkeiten berücksichtigen, die in [35] gegeben werden. Dies sind *Plättchen*, *Stäbchen* und *Tropfen*.

Oberflächenenergie So ergibt sich für die Oberflächenenergie

$$E_S = \frac{\sigma dx}{r} \quad (6.4)$$

wobei

$$x = \begin{cases} x^{(1)} & \text{wenn } x^{(1)} < x^{(2)} \\ x^{(2)} & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.5)$$

der Volumenanteil der weniger beteiligten Phase ist. Die Ausdehnung der Struktur geht als r , die Form als d ein.

$$d = \begin{cases} 1 & \text{Plättchen} \\ 2 & \text{Stäbchen} \\ 3 & \text{Tropfen} \end{cases} \quad (6.6)$$

Die Oberflächenspannung σ ist am schwierigsten zu bestimmen, die Schätzungen reichen von $10 - 15 \text{ MeV/fm}^2$ [36], [34] bis $\approx 300 \text{ MeV/fm}^2$ [37]. Wir werden

deshalb verschiedene Werte für σ berücksichtigen und betrachten, bis zu welchem Wert eine gemischte Phase bevorzugt ist.

Coulombenergie Die Coulombenergie ist gegeben durch

$$E_C = 2\pi\alpha_{\text{em}}f_d(x)x(\Delta n_Q)^2r^2 \quad (6.7)$$

x, r und d sind die selben Größen wie in Gl. 6.4, Δn_Q ist die Differenz in der Ladungsdichte, $\alpha_{\text{em}} = 1/137$ die Feinstrukturkonstante und

$$f_d(x) = \frac{1}{d+2} \left(\frac{2-dx^{1-2/d}}{d-2} + x \right) \quad (6.8)$$

ein geometrischer Faktor, der durch die Art der Ladungsverteilung im Raum entsteht[35].

Die räumliche Ausdehnung der Strukturen in der gemischten Phase wird sich so einstellen, dass die Summe aus Coulomb- und Oberflächenenergie minimal wird

$$\frac{\partial}{\partial r} (E_S + E_C) = -\frac{\sigma dx}{r^2} + 4\pi\alpha_{\text{em}}f_d(x)x(\Delta n_Q)^2r = 0 \quad (6.9)$$

$$\Rightarrow r_{\text{min}} = \left(\frac{d\sigma}{4\pi\alpha_{\text{em}}f_d(x)(\Delta n_Q)^2} \right)^{1/3} \quad (6.10)$$

und

$$E_S(r_{\text{min}}) + E_C(r_{\text{min}}) = \frac{3}{2} (4\pi\alpha_{\text{em}}d^2f_d(x)x^2)^{1/3} (\Delta n_Q)^{2/3} \sigma^{2/3}. \quad (6.11)$$

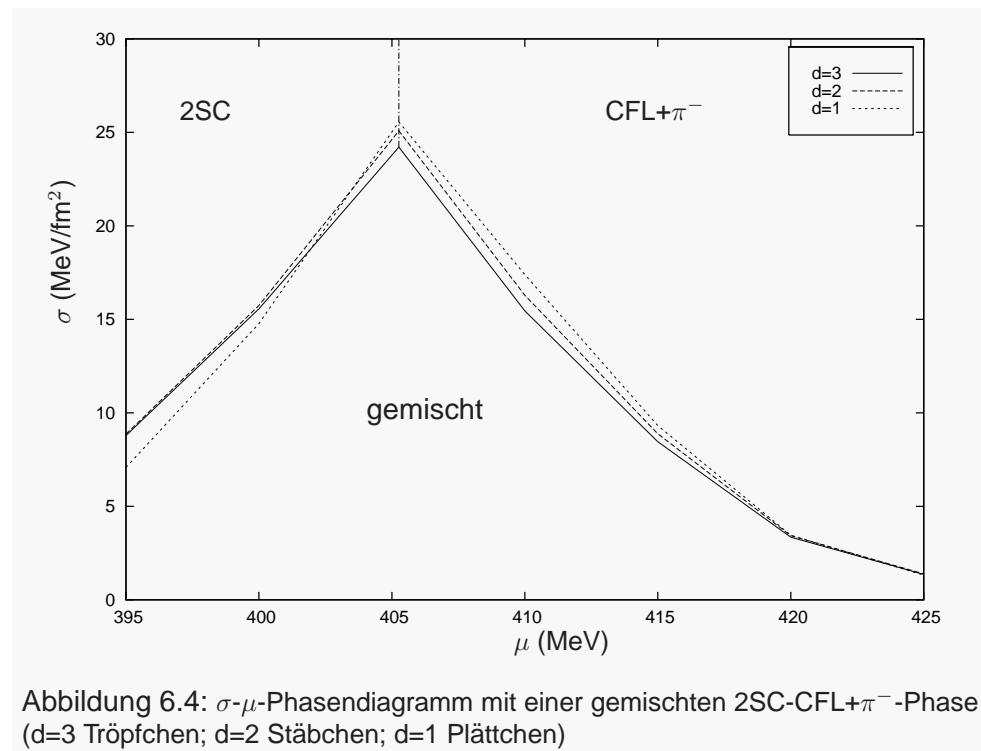
Die gemischte Phase ist also nur dann bevorzugt, wenn

$$\Omega_{\text{mix}} + E_S(r_{\text{min}}) + E_C(r_{\text{min}}) < \Omega_{\text{hom}} \quad (6.12)$$

gilt.

6.3 Gemischt 2SC-CFL+ π^i -Phase

Berücksichtigen wir nun die Beiträge aus Oberflächen- und Coulombenergie, so können wir mit Hilfe von Gl. 6.11 ein σ - μ -Phasendiagramm (Abbildung 6.4) erstellen, aus dem wir ablesen können, wie groß der maximale Wert der Oberflächenspannung σ sein kann, so dass noch eine gemischte Phase auftritt. Mit einem Wert von maximal ≈ 25 MeV/fm² kann die Oberflächenspannung durchaus realistische Werte annehmen und die gemischte Phase bleibt stabil.



In Abbildung 6.6 haben wir dargestellt, welche geometrische Form bei einer Oberflächenspannung von 10 MeV/fm^2 am günstigsten ist. Wir finden, dass bei μ zwischen ca. 403 und 423 MeV Tröpfchen die günstigste Form sind, ausserhalb dieses Bereiches sind es Plättchen. Die Gleichung (6.10) erlaubt es uns die Größe der vorhandenen Struktur zu bestimmen. Abbildung 6.5 zeigt r für verschiedene μ . Die Tröpfchen in der gemischten Phase haben einen Radius von ca. 8 fm bis ca. 11 fm.

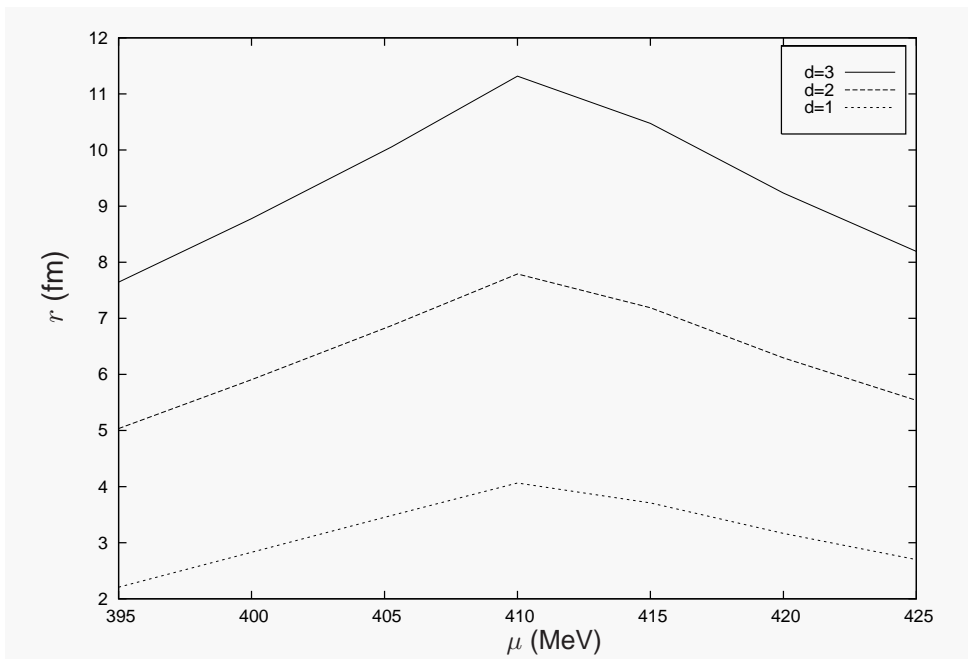


Abbildung 6.5: Größe der Strukturen in der gemischten Phase ($d=3$ Tröpfchen; $d=2$ Stäbchen; $d=1$ Plättchen) bei einer Oberflächenspannung von $\sigma = 10 \text{ MeV/fm}^2$

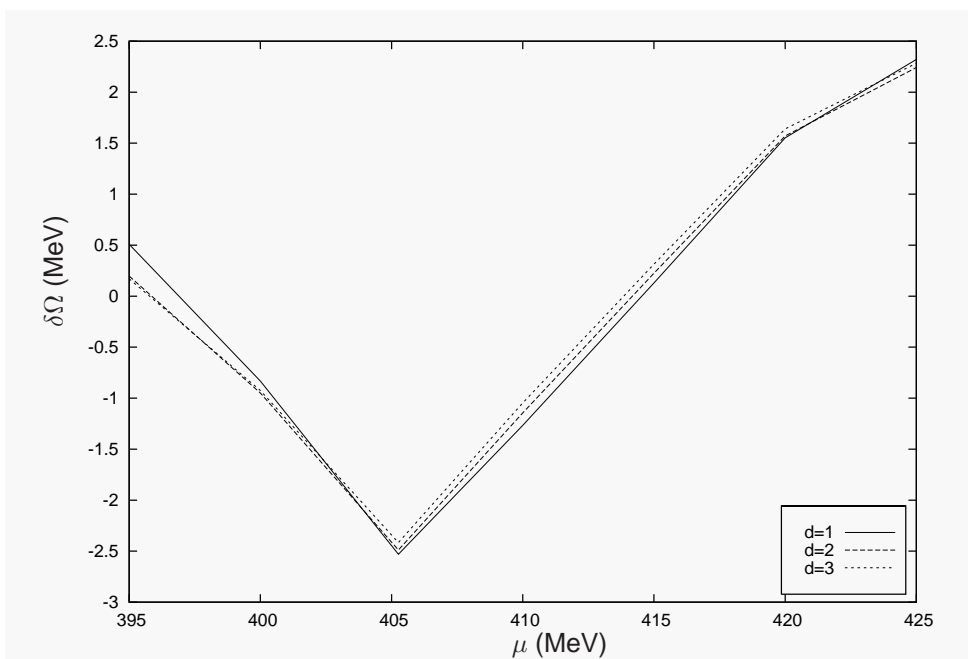


Abbildung 6.6: Differenz im thermodynamischen Potential zwischen der gemischten und der jeweiligen homogenen Phase, für verschiedene Geometrien ($d=3$ Tröpfchen; $d=2$ Stäbchen; $d=1$ Plättchen) bei einer Oberflächenspannung von $\sigma = 10 \text{ MeV/fm}^2$

Kapitel 7

Zusammenfassung

Wir haben uns die verschiedenen farbsupraleitenden Phasen und ihre Eigenschaften angesehen. Besonderes Augenmerk wurde dabei auf die Phasen mit pseudoskalaren Kondensaten gelegt. Um die Phasen unter den Bedingungen eines Neutronensternes betrachten zu können, haben wir uns mit den Neutralitätseigenschaften der Phasen und den Auswirkungen des β -Gleichgewichts befasst.

Um das Phasendiagramm zu berechnen, wurde ein NJL-Modell verwendet, mit dessen Hilfe wir das thermodynamische Potential berechnen konnten. Um das thermodynamische Potential minimieren und physikalische Größen bestimmen zu können, haben wir die Ableitungen des thermodynamischen Potentials analytisch berechnet.

Bei der Suche nach Lösungen für die Gap-Gleichungen sind wir auf das Problem gestoßen, dass wir bei einer Temperatur von null, dort wo wir eine gaplose Phase erwarten, keine Lösung finden konnten. Die Eigenschaften bei $T = 0$ MeV werden auch in dem Preprint [14] von H. Warringa nicht befriedigend geklärt. Aus diesem Grund haben wir unsere T - μ -Phasendiagramme bei einer Temperatur von 1 MeV begonnen. Wir erwarten allerdings keine großen Abweichungen im Verhalten bei $T = 1$ MeV und bei $T = 0$ MeV.

Die Phasendiagramme elektrisch neutraler und farbneutraler Materie haben wir für zwei unterschiedliche Quark-Quark-Kopplungsstärken erstellt. So konnte gezeigt werden, dass die CFL+ K^0 -Phase in beiden Fällen in einem großen Bereich gegenüber der CFL-Phase bevorzugt ist. Andere Phasen mit pseudoskalaren Kondensaten haben wir im Phasendiagramm neutraler Quark-Materie nicht gefunden.

Anschließend haben wir uns mit der Möglichkeit einer aus der negativ geladenen CFL+ π^- -Phase und der positiv geladenen 2SC-Phase gemischten

Phase bei einer Temperatur von einem MeV befasst. Ob so eine Phase gegenüber einer homogenen Phase bevorzugt ist, hängt von der Oberflächenspannung ab. Da wir keine zuverlässigen Angaben für die Oberflächenspannungen der beteiligten Phasen haben, können wir keine konkrete Aussage zur Existenz einer solchen gemischten Phase machen. Eine gemischte Phase ist bis zu einer Oberflächenspannung von $25 \text{ MeV}/\text{fm}^2$ möglich. Damit ist eine CFL+ π^- -2SC-Mischung ein guter Kandidat.

Für die Zukunft bleibt auf jeden Fall noch das Problem der gaplosen Phasen bei $T = 0 \text{ MeV}$ zu lösen. Dann kann auch mit etwas mehr Computerleistung ein besser aufgelöstes Phasendiagramm erstellt werden.

Genauere Kenntnisse der Oberflächenspannung würden es ermöglichen, zuverlässigere Ergebnisse zu gemischten Phasen zu erhalten. Wir haben nur gemischte Phase bei starker Kopplung betrachtet, ganz analog kann man auch bei mittlerer Kopplung vorgehen. Auch haben wir nur den Fall bei $T = 1 \text{ MeV}$ betrachtet. Geht man zu anderen Temperaturen, kann ein $\mu-T$ -Phasendiagramm erstellt werden, in dem sowohl homogene als auch gemischte Phasen vertreten sind.

Anhang A

Konventionen

A.1 Konstanten

Alle Größen in dieser Arbeit sind so angegeben, dass gilt:

$$c = 1, \quad \hbar = 1, \quad k_B = 1. \quad (\text{A.1})$$

A.2 Dirac'sche γ -Matrizen

Für die γ -Matrizen wird die Standarddarstellung verwendet:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A.3 Gell-Mann Matrizen

Für die Erzeugenden der Gruppe SU(3) wählen wir

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zusätzlich wird die Matrix

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verwendet.

A.4 \det_f

Unter \det_f ist folgendes zu verstehen:

$$\det_f(\bar{q}(1 \pm \gamma_5)q) = \det \begin{pmatrix} \bar{u}(1 \pm \gamma_5)u & \bar{u}(1 \pm \gamma_5)d & \bar{u}(1 \pm \gamma_5)s \\ \bar{d}(1 \pm \gamma_5)u & \bar{d}(1 \pm \gamma_5)d & \bar{d}(1 \pm \gamma_5)s \\ \bar{s}(1 \pm \gamma_5)u & \bar{s}(1 \pm \gamma_5)d & \bar{s}(1 \pm \gamma_5)s \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} &= (\bar{u}(1 \pm \gamma_5)u)(\bar{d}(1 \pm \gamma_5)d)(\bar{s}(1 \pm \gamma_5)s) \\ &+ (\bar{u}(1 \pm \gamma_5)d)(\bar{d}(1 \pm \gamma_5)s)(\bar{s}(1 \pm \gamma_5)u) \\ &+ (\bar{u}(1 \pm \gamma_5)s)(\bar{d}(1 \pm \gamma_5)u)(\bar{s}(1 \pm \gamma_5)d) \\ &- (\bar{u}(1 \pm \gamma_5)u)(\bar{d}(1 \pm \gamma_5)s)(\bar{s}(1 \pm \gamma_5)d) \\ &- (\bar{u}(1 \pm \gamma_5)d)(\bar{d}(1 \pm \gamma_5)u)(\bar{s}(1 \pm \gamma_5)s) \\ &- (\bar{u}(1 \pm \gamma_5)s)(\bar{d}(1 \pm \gamma_5)d)(\bar{s}(1 \pm \gamma_5)u) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Anhang B

Matsubarasummen

Sowohl zur Berechnung des thermodynamischen Potentials als auch bei der Berechnung der Ableitungen müssen wir Matsubarasummen auswerten.

B.1 Matsubarasumme des thermodynamischen Potentials

Bei der Berechnung des thermodynamischen Potentials tritt der Term der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{\omega_n^2 + Z^2}{T^2} \right) \quad (\text{B.1})$$

auf. ω_n sind die Matsubara-Frequenzen

$$\omega_n = (2n + 1)\pi T \quad (\text{B.2})$$

und Z sei eine beliebige reelle Zahl. Diesen Ausdruck können wir umformen zu

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{\omega_n^2 + Z^2}{T^2} \right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_1^{Z^2/T^2} \frac{dx}{(2n + 1)^2 \pi^2 + x} \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left((2n + 1)^2 \pi^2 + 1 \right). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Nun wollen wir das Integral

$$\int_{C_1} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{e^\omega + 1} \frac{1}{\omega^2 - x} \quad (\text{B.4})$$

entlang eines geschlossenen Weges um die imaginäre Achse berechnen (Abbildung B.1). Wir wählen dieses Integral, da $1/(e^\omega + 1)$ Pole bei $(2n+1)\pi i$

hat. Wir erhalten nach der Integration:

$$\int_{C_1} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{e^\omega + 1} \frac{1}{\omega^2 - x} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \pi^2 + x}, \quad (\text{B.5})$$

also den Integranden der rechten Seite von Gl. (B.3).

Verändern wir die Form des Wegs zu C_2 (Abbildung B.2), bleibt der Wert der Integrale gleich. Nun werten wir statt der Pole auf der imaginären Achse die Pole bei $\pm\sqrt{x}$ aus und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{e^\omega + 1} \frac{1}{\omega^2 - x} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\frac{1}{e^{\sqrt{x}} + 1} - \frac{1}{e^{-\sqrt{x}} + 1} \right) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{x}} \left(1 - \frac{2}{e^{\sqrt{x}} + 1} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

also

$$- \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \pi^2 + x} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \left(1 - \frac{2}{e^{\sqrt{x}} + 1} \right). \quad (\text{B.7})$$

Dieses Ergebnis können wir nun in B.3 einsetzen.

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{\omega_n^2 + Z^2}{T^2} \right) &= \int_1^{Z^2/T^2} dx \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(1 - \frac{2}{e^{\sqrt{x}} + 1} \right) \\ &\quad - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left((2n+1)^2 \pi^2 + 1 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Den zweite Term in Gl. (B.8) vernachlässigen wir, da alle physikalischen Größen aus den Ableitungen des thermodynamischen Potentials berechnet werden, konstante Terme also unerheblich sind. Nun können wir das Integral in Gl. (B.8) auswerten, weitere Konstanten wegstreichen und erhalten:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{\omega_n^2 + Z^2}{T^2} \right) = \frac{2}{T} \left(\frac{1}{2} |Z| + T \ln \left(1 + e^{-|Z|/T} \right) \right). \quad (\text{B.9})$$

B.2 Die Matsubarasumme in den Ableitungen

Wir wollen die Summe

$$-\frac{T}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_i}{i\omega_n + \epsilon_i} \quad (\text{B.10})$$

berechnen. Um die Matsubara-Summe auszuführen, benutzen wir

$$-\sum_n f((2n+1)\pi i) = \int_C \frac{dx}{2\pi i} \frac{f(x)}{e^x + 1}. \quad (\text{B.11})$$

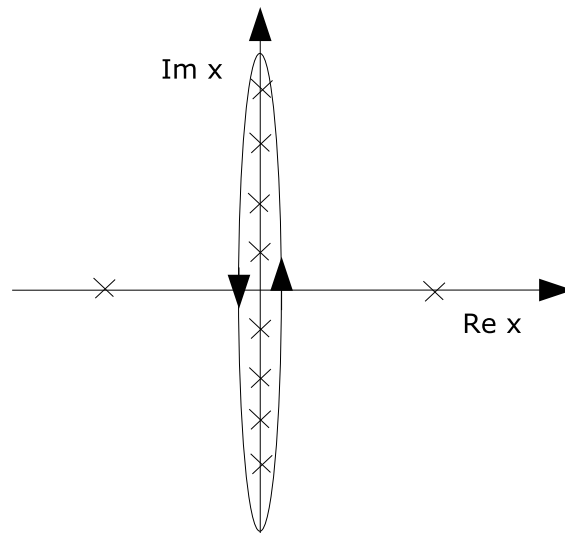


Abbildung B.1: Der Integrationsweg C_1

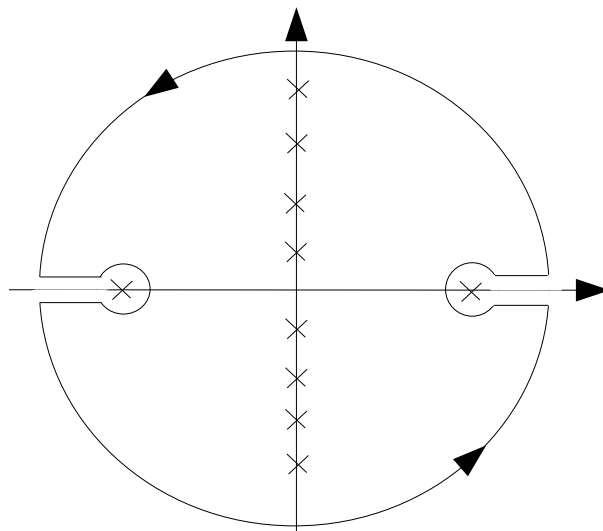


Abbildung B.2: Der Integrationsweg C_2

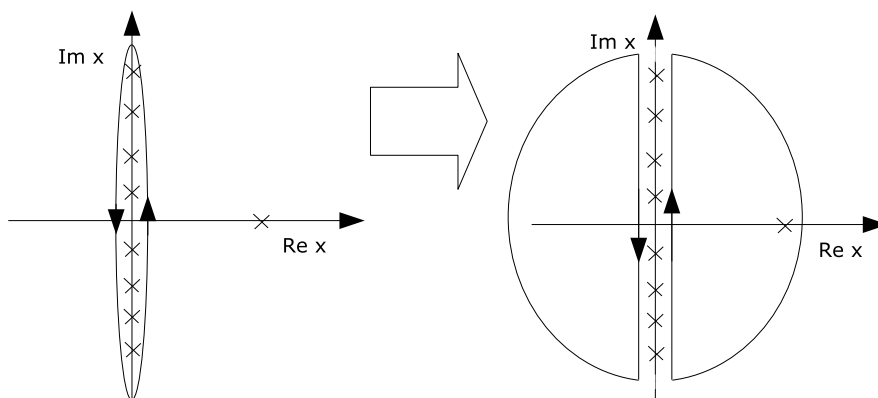


Abbildung B.3: Änderung der Integrationsweges in Gl. (B.13)

C ist dabei ein geschlossener Weg um die imaginäre Achse (Abbildung B.3 links), der die Pole von $(e^x + 1)^{-1}$ bei $x = (2n + 1)\pi i$ einschließt. Diese Pole haben Residuen -1 . Somit können wir die Summe in ein Integral überführen.

$$-\frac{T}{2} \sum_n \frac{b_i}{i(2n+1)\pi T + \epsilon_i} = \frac{1}{2} \int_C \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{e^{\omega/T} + 1} \frac{b_i}{\omega + \epsilon_i} \quad (\text{B.12})$$

Ändern wir die Form des Integrationsweges (Abbildung B.3), so dass nur der Pol bei $\omega = -\epsilon$ innerhalb des Weges liegt, so erhalten wir:

$$\frac{1}{2} \int_C \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{e^{\omega/T} + 1} \frac{b_i}{\omega + \epsilon_i} = \frac{1}{2} \frac{b_i}{e^{-\epsilon_i/T} + 1}, \quad (\text{B.13})$$

und damit

$$-\frac{T}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_i}{i\omega_n + \epsilon_i} = \frac{1}{2} \frac{b_i}{e^{-\epsilon_i/T} + 1} \quad (\text{B.14})$$

Literaturverzeichnis

- [1] M. Gell-Mann, "A Schematic model of baryons and mesons," *Phys. Lett.* **8** (1964) 214–215.
- [2] W. M. Yao et al., "Review of Particle Physics," *Journal of Physics G* **33** (2006) 1.
- [3] J. C. Collins and M. J. Perry, "Superdense Matter: Neutrons or Asymptotically Free Quarks?," *Phys. Rev. Lett.* **34** (1975), no. 21, 1353–1356.
- [4] B. Barrois *Nucl. Phys. B* **129** (1977) 390.
- [5] S. C. Frautschi, "ASYMPTOTIC FREEDOM AND COLOR SUPERCONDUCTIVITY IN DENSE QUARK MATTER,". Presented at Workshop on Hadronic Matter at Extreme Energy Density, Erice, Italy, Oct 13-21, 1978.
- [6] D. Bailin and A. Love *Phys. Rep.* **107** (1984) 325.
- [7] K. Rajagopal and F. Wilczek, "The condensed matter physics of QCD," [hep-ph/0011333](#).
- [8] T. Schäfer, "Quark matter," [hep-ph/0304281](#).
- [9] M. G. Alford, "Color superconducting quark matter," *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **51** (2001) 131–160, [hep-ph/0102047](#).
- [10] M. Buballa, "NJL model analysis of dense quark matter," *Phys. Rept.* **407** (2005) 205–376, [hep-ph/0402234](#).
- [11] D. H. Rischke, "The quark-gluon plasma in equilibrium," *Prog. Part. Nucl. Phys.* **52** (2004) 197–296, [nucl-th/0305030](#).
- [12] I. A. Shovkovy, "Two lectures on color superconductivity," *Found. Phys.* **35** (2005) 1309–1358, [nucl-th/0410091](#).
- [13] N. K. Glendenning, *Compact Stars*, ch. 3. Springer, 2nd ed., 2000.

- [14] H. J. Warringa, “The phase diagram of neutral quark matter with pseudoscalar condensates in the color-flavor locked phase,” [hep-ph/0606063](#).
- [15] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, “Broken Symmetries,” *Phys. Rev.* **127** (1962), no. 3, 965–970.
- [16] S. Weinberg, *The quantum theory of fields*, vol. II. Cambridge University Press, 1996.
- [17] P. Bedaque and T. Schäfer *Nucl. Phys. A* **697** (2002) 802.
- [18] D. B. Kaplan and S. Reddy, “Novel phases and transitions in color flavor locked matter,” *Phys. Rev. D* **65** (2002), no. 5, 054042.
- [19] M. Buballa, “NJL-model description of Goldstone boson condensation in the color-flavor locked phase,” *Phys. Lett.* **B609** (2005) 57–67, [hep-ph/0410397](#).
- [20] M. Kitazawa, D. H. Rischke, and I. A. Shovkovy, “Stable gapless superconductivity at strong coupling,” *Phys. Lett.* **B637** (2006) 367–373, [hep-ph/0602065](#).
- [21] M. Alford, C. Kouvaris, and K. Rajagopal, “Gapless color-flavor-locked quark matter,” *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 222001, [hep-ph/0311286](#).
- [22] A. W. Steiner, S. Reddy, and M. Prakash, “Color-neutral superconducting quark matter,” *Phys. Rev.* **D66** (2002) 094007, [hep-ph/0205201](#).
- [23] K. Rajagopal and F. Wilczek, “Enforced Electrical Neutrality of the Color-Flavor Locked Phase,” *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001), no. 16, 3492–3495.
- [24] M. Buballa and I. A. Shovkovy, “A note on color neutrality in NJL-type models,” *Phys. Rev.* **D72** (2005) 097501, [hep-ph/0508197](#).
- [25] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, “Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. I,” *Phys. Rev.* **122** (1961) 345–358.
- [26] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, “Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. II,” *Phys. Rev.* **124** (1961) 246–254.
- [27] T. Hatsuda and T. Kunihiro, “Possible critical phenomena associated with the chiral symmetry breaking,” *Physics Letters B* **145** (1984) 7–10.

- [28] T. Hatsuda and T. Kunihiro, "QCD Phenomenology based on a Chiral Effective Lagrangian," *Phys. Rept.* **247** (1994) 221.
- [29] J. I. Kapusta, *Finite-temperature field theory*. Cambridge University Press, 1989.
- [30] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge (UK) and New York, 2nd ed., 1992.
- [31] P. Rehberg, S. P. Klevansky, and J. Hübner, "Hadronization in the SU(3) Nambu Jona-Lasinio model," *Phys. Rev. C* **53** (1996), no. 1, 410–429.
- [32] S. B. Ruster, V. Werth, M. Buballa, I. A. Shovkovy, and D. H. Rischke, "The phase diagram of neutral quark matter: Self-consistent treatment of quark masses," *Phys. Rev.* **D72** (2005) 034004, [hep-ph/0503184](#).
- [33] F. Neumann, M. Buballa, and M. Oertel, "Mixed phases of color superconducting quark matter," *Nucl. Phys.* **A714** (2003) 481–501, [hep-ph/0210078](#).
- [34] V. Werth, *Farbsupraleitung in Neutronen- und Protoneutronensternen*. Diplomarbeit, TU Darmstadt, 2004.
- [35] D. G. Ravenhall, C. J. Pethick, and J. R. Wilson, "Structure of Matter below Nuclear Saturation Density," *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983), no. 26, 2066–2069.
- [36] S. Reddy and G. Rupak, "Phase structure of 2-flavor quark matter: Heterogeneous superconductors," *Phys. Rev.* **C71** (2005) 025201, [nucl-th/0405054](#).
- [37] M. G. Alford, K. Rajagopal, S. Reddy, and F. Wilczek, "The minimal CFL-nuclear interface," *Phys. Rev.* **D64** (2001) 074017, [hep-ph/0105009](#).