
Hadronen-Quark Übergang und massive Hybridsterne

Hadron-quark crossover and massive hybrid stars

Bachelor-Thesis von Martin Jakob Steil

Darmstadt, September 2014



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Institut für Kernphysik
Schloßgartenstraße 9
64289 Darmstadt, Germany

Hadronen-Quark Übergang und massive Hybridsterne

Hadron-quark crossover and massive hybrid stars

Vorgelegte Bachelor-Thesis von Martin Jakob Steil

1. Gutachten: Priv.-Doz. Dr. Michael Buballa
2. Gutachten: Prof. Dr. Jochen Wambach

Tag der Einreichung: 29.09.2014

1. korrigierte Fassung vom 20.02.2015



Abstract

In this work two methods will be applied to construct hybrid equations of state out of different hadronic equations of state (HEoS) with hyperons and several quark equations of state (QEoS) with strange quarks, on the one hand the conventional approach of constructing a first order phase transition with constant pressure after Gibbs between stiff HEoS and soft QEoS, on the other hand a thermodynamic consistent, continuous but not unique interpolation between HEoS and QEoS.

Subsequently the Tolman-Oppenheimer-Volkoff equation is solved numerically with the different hybrid EoS. The resulting hybrid stars are compared to each other and with empirical data for neutron stars. Especially maximum mass, radius, central density and the structure, in form of pressure/density-radius curves, form the central issues of the analysis.

The constructed hybrid EoS with constant pressure phase transition prove to be too soft to describe massive neutron stars with masses at around two times the solar mass ($2M_{\odot}$). By using appropriate interpolation methods it is possible to construct stiff hybrid EoS with all HEoS and QEoS, which are suitable for describing massive $2M_{\odot}$ neutron stars. As long as the crossover windows have their centers at around three times the density of normal nuclear matter (ρ_0) and the strong interacting matter consisting of deconfined quarks and hadrons has a sufficiently stiff EoS in the crossover region.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden zwei Verfahren angewendet, um aus verschiedenen hadronischen Zustandsgleichungen (HEoS) mit Hyperonen und verschiedenen Quarkzustandsgleichungen (QEoS) mit Strange Quarks Hybridzustandsgleichungen zu konstruieren, zum einen das konventionelle Verfahren eines Phasenübergangs erster Ordnung nach Gibbs mit konstantem Druck zwischen harten HEoS und weichen QEoS, zum anderen eine thermodynamisch konsistente, kontinuierliche jedoch nicht eindeutige Interpolation zwischen HEoS und QEoS.

Mit diesen Zustandsgleichungen wird anschließend die Tolman-Oppenheimer-Volkoff Gleichung numerisch gelöst. Die resultierenden Hybridsterne werden untersucht, sowie miteinander und mit empirischen Daten zu Neutronensternen verglichen. Dabei sind vor allem Maximalmasse, Radius, zentrale Dichte und die Struktur der Sterne, in Form von Druck/Dichte-Radius Kurven, Kern der Untersuchungen.

Die konstruierten Hybridzustandsgleichungen mit Phasenübergang erweisen sich als zu weich zur Beschreibung von massiven Neutronensternen mit Massen von um die zwei Sonnenmassen ($2M_{\odot}$). Unter Verwendung entsprechender Interpolationsverfahren ist es möglich mit allen HEoS und QEoS harte Hybridzustandsgleichungen zu konstruieren, welche zur Beschreibung von massiven $2M_{\odot}$ Neutronensternen geeignet sind. Bei derartigen, harten Hybridzustandsgleichungen findet der kontinuierliche Übergang zwischen QEoS und HEoS bei etwa dreifacher Dichte normaler nuklearer Materie (ρ_0) statt und in der Übergangsregion ist die Zustandsgleichung der stark wechselwirkenden Materien recht steif.

Erklärung zur Eigenständigkeit

Hiermit versichere ich, die vorliegende Bachelorarbeit ohne Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Die schriftliche und elektronische Fassung stimmen überein. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Darmstadt, den 29.09.2014

(Martin Jakob Steil)

Danksagung

Zunächst möchte ich mich bei meinem Betreuer Priv.-Doz. Dr. Michael Buballa für den interessanten Themenvorschlag und für die Zeit, die er sich während der Einarbeitungsphase und auch im Verlauf der Arbeit für mich genommen hat, bedanken. Besonders sein Feedback gegen Ende der Arbeit war für meinen Arbeitsprozess sehr wichtig.

Des Weiteren bedanke ich mich bei Prof. Dr. Jochen Wambach und der NHQ Gruppe für die Möglichkeit meine Bachelor-Thesis in dieser Arbeitsgruppe zu schreiben.

Abschließend möchte ich mich bei meiner Familie und meinen Freunden für ihre Unterstützung bedanken.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretische Grundlagen	6
2.1	Geometrisierte Einheiten: <i>Gravitational Units</i>	6
2.2	Null-Temperaturnäherung	6
2.3	Allgemeine Relativitätstheorie	7
2.3.1	Grundlegende Konzepte der ART	7
2.3.2	Mathematische Grundbegriffe und allgemeine Relationen	7
2.3.3	Einsteinsche Theorie und Feldgleichungen	10
2.3.4	Metrik statischer, isotroper Raumzeit	10
2.3.5	Äußere Schwarzschild Lösung	11
2.3.6	Tolman-Oppenheimer-Volkoff Gleichung	12
2.4	TOV-Gleichung als Differentialgleichung des chemischen Potentials μ	13
2.5	Fermi-Gas Zustandsgleichung	14
2.6	Allgemeine Anforderungen und Kausalitätsbedingung an Zustandsgleichungen	16
3	Implementierung	17
3.1	Konstanten und Umrechnungsfaktoren	17
3.2	TOV Gleichung und Abbruchbedingung	18
3.3	Golden Maximum Methode zur Bestimmung der Maximalmasse	20
3.4	Interpolierte Zustandsgleichungen	21
4	Pure Neutronensterne	22
4.1	Masse-Radius Kurve und Maximalmasse	22
4.2	Struktur purer Neutronensterne	24
5	Neutronensterne mit hadronischer Zustandsgleichung	25
5.1	Kruste und BPS/NV Zustandsgleichung	25
5.2	Zustandsgleichungen für hadronische Materie	27
5.3	Masse-Radius/Baryonendichte-Kurven und Maximalmasse	30
5.4	Struktur eines Neutronensterns mit HEoS	33
6	Zustandsgleichung für Quarkmaterie und Quarksterne	34
6.1	Zustandsgleichungen für Quarkmaterie	34
6.2	Quarksterne	37
7	Hybridsterne	40
7.1	Phasenübergang erster Ordnung mit konstantem Druck	40
7.1.1	Masse-Radius/Baryonendichte-Kurven und Maximalmasse	43
7.1.2	Struktur eines Hybridsterns mit χ SU(3)-HK($g_v = 0$) + CS Phasenübergang	47
7.2	Interpolierte, gemischte Zustandsgleichungen	48
7.2.1	Vergleich zwischen ϵ - und p-Interpolation	51
7.2.2	Abhängigkeit der Hybridzustandsgleichung vom Übergangsfenster	54
7.2.3	Abhängigkeit von der Quark Zustandsgleichung	55
7.2.4	ϵ -Interpolation mit Farbsupraleitung	57
7.2.5	Abhängigkeit von der hadronischen Zustandsgleichung	61



7.2.6 Struktur eines Hybridsterns mit interpolierter EoS	63
8 Zusammenfassung und Ausblick	65
Anhänge	67
A Mathematica Code	68
A.1 TOV Stepper	68
A.2 Golden Maximum Methode	69
Literaturverzeichnis	70



1 Einleitung

Neutronensterne sind Überlebende einer Kernkollaps-Supernova, bei der der Kern eines schweren Sterns ($M > 8M_{\odot}$) implodiert, nachdem der Stern all seinen Brennstoff in der Nukleosynthese aufgebraucht hat. Thermonukleare Kernfusion ist exoenergetisch nur bis Eisen möglich. Der Strahlungsdruck, welcher den Stern gegen den Gravitationsdruck stabilisiert, nimmt mit Wachsen des Eisenkerns immer weiter ab. Es kommt schließlich zur Implosion des Kerns.

Während der Implosion des Kerns wird dieser extrem komprimiert. Wenn der Kern mehr als $M_{Cha} = 1.4$ Sonnenmassen M_{\odot} enthält, kann sich ein Neutronenstern bilden. Durch den inversen Beta-Zerfall



welcher bei den hohen Dichten im implodierenden Kern vermehrt stattfindet, neutronisiert der Kern. Dabei werden enorme Mengen an Neutrinos ν_e emittiert, was den Kern zunehmend kühlt. Der Kernkollaps wird schließlich vom Entartungsdruck der Neutronen aufgehalten.

Durch den Kollaps leichterer Kerne entstehen Weiße Zwerge, welche durch den Elektronen-Entartungsdruck stabilisiert werden. Die Maximalmasse eines Weißen Zwerges wird *Chandrasekhar-Grenze* $M_{Cha} = 1.4M_{\odot}$ genannt. Sie ist auch die Untergrenze für die Bildung von Neutronensternen.

Die Maximalmasse für Neutronensterne hängt von ihrer Zustandsgleichung (*EoS*) ab und wird im Folgenden für verschiedene Zustandsgleichungen thematisiert. Sterne, welche die aus dem jeweiligen Modell stammende Maximalmasse überschreiten, bilden schwarze Löcher.

Neutronensterne sind aus vielerlei Hinsicht hoch interessante Objekte. Sie haben Radien in der Größenordnung 10 km [1] und es wurden Neutronensterne mit Massen zwischen etwa 1.4 und $2.0M_{\odot}$ gemessen. Bis vor einigen Jahren waren nur leichtere Neutronensterne mit Massen um die 1.4 Sonnenmassen präzise vermessen. Ein sehr genau studierter, leichter Neutronenstern ist *PSR B1913+16* mit, nach [2], einer Masse von

$$M_{\text{PSR B1913+16}} = 1.4398(2)M_{\odot}. \quad (1.2)$$

In den letzten Jahren (2010 und 2013) wurden die Massen von zwei schweren Neutronensternen

$$\begin{aligned} M_{\text{PSR J1614-2230}} &= 1.97(4)M_{\odot}, \\ M_{\text{PSR J0348+0432}} &= 2.01(4)M_{\odot}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

mittels zweier unterschiedlicher Messverfahren in [3] und [4] präzise bestimmt.

Die Dichteunterschiede zwischen Rand und Kern eines Neutronensterns sind immens. Am Rand des Sternes herrschen nach Abschnitt 5.1 Baryonendichten⁽¹⁾ von $\rho_{Fe} = 4.730 \cdot 10^{-15} \text{ fm}^{-3}$ und korrespondierende Energiedichten von $\epsilon_{Fe} = 4.41 \cdot 10^{-12} \text{ MeV/fm}^3$.

Im Zentrum der Sterne kommen jedoch, je nach Zustandsgleichung, Baryonendichten vielfach höher als die *normale nukleare Baryonendichte* $\rho_0 = 0.17 \text{ fm}^{-3}$ vor. Man geht jedoch davon aus, dass die Baryonendichte im Kern von Neutronensternen $10\rho_0$ nicht übersteigt [5].

Alle bekannten Neutronensterne sind Pulsare. Es handelt sich dabei um rotierende, hoch magnetische Neutronensterne, welche elektromagnetische Strahlung emittieren.

⁽¹⁾ Bei der Baryonendichte handelt es sich um die Anzahldichte der Baryonen. Im Folgenden wird diese mit ρ bezeichnet. Wenn nicht explizit durch einen anderen Index gekennzeichnet handelt es bei ρ um die Gesamtbaryonendichte.

Die theoretische Beschreibung von Neutronensternen muss auf Grund der extremen Dichten im Inneren dieser Sterne im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie (ART) erfolgen. Im Jahr 1939 gelang es den Physikern Oppenheimer und Volkoff [6], nach Vorarbeit von Tolman [7], eine Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen für relativistische, statische und sphärisch-symmetrische Sterne im hydrostatischen Equilibrium zu finden, die heute als *Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)* Gleichung bekannt ist.

Es existieren auch komplexere Modelle, mit denen die Beschreibung von rotierenden Neutronensternen möglich ist [1, 8]. Im Rahmen dieser Arbeit werden jedoch nur statische Neutronensterne betrachtet, welche mittels der TOV Gleichung berechnet werden können.

Um die TOV Gleichung numerisch zu lösen wird eine Zustandsgleichung benötigt, welche die Energiedichte ϵ als Funktion des Druckes p liefert. Eine Zustandsgleichung für kalte Materie im β -Equilibrium für Dichten von ρ_{Fe} bis hin zu einigen ρ_0 zu bestimmen ist sowohl vom theoretischen als auch vom empirischen Standpunkt aus, vor allem für mittlere und hohe Dichte, äußerst anspruchsvoll.

Einen theoretischen Rahmen für die Beschreibung von Neutronensternmaterie liefert an sich die Quantenchromodynamik (QCD) als Theorie der starken Wechselwirkung. Vor allem die Materie im Kern eines Neutronensterns mit mittleren und hohe Dichten ($\rho > \rho_0$) ist aus Sicht der QCD hoch interessant.

Eine direkte Lösung der QCD ist aber für kalte Neutronensternmaterie nicht möglich [5]. Perturbative (störungstheoretische) QCD ist für die vorkommenden Dichten nicht anwendbar und auch Gitter/Lattice-QCD ist auf Grund des numerischen Vorzeichen-Problems (*numerical sign problem*) für kalte Neutronensternmaterie nicht möglich. Für verschiedene Dichten existieren daher verschiedene Modelle zur Beschreibung der Neutronensternmaterie.

- Für niedrige, subnukleare Dichten $\rho < \rho_0$ existieren zum Teil empirische Daten, welche Rückschlüsse auf die Struktur des Grundzustandes hadronischer Materie bei subnuklearen Dichten ermöglichen. In Abschnitt 5.1 werden zwei Zustandsgleichungen (BPS und NV) vorgestellt, welche die zum Großteil nukleare Materie der Kruste eines Neutronensterns gut beschreiben.
- Für mittlere Dichten $\rho_0 < \rho \lesssim 4\rho_0$ liegt die Materie in Form von Hadronen vor. Um diese Form von gebundener (*confined*) Quarkmaterie zu beschreiben, gibt es verschiedene, in Abschnitt 5.2 vorgestellte, Modelle. Diese liefern verschiedene hadronische Zustandsgleichungen (HEoS).
- Für hohe Dichten $\rho \gtrsim 4\rho_0$ ist die Gültigkeit der verschiedenen HEoS fraglich, da die Existenz gebundener Hadronen bei derartigen Dichten unwahrscheinlich ist. Für hohe Dichten wird heute eine Form der Materie namens stark-wechselwirkendes Quark-Gluonen Plasma (*strongly interacting quark-gluon plasma, kurz sQGP*) angenommen. Für kalte Materie liegt dieses Plasma in Form von stark wechselwirkender, deconfined Quarks vor. Diese Form von Quarkmaterie kann im Rahmen des $(2+1)$ -*flavor Nambu–Jona-Lasinio (NJL)* Modells auch unter Einbeziehung von Farbsupraleitung (*color superconductivity, kurz cs*) beschrieben werden [5, 9]. In Abschnitt 6.1 werden entsprechende Quark Zustandsgleichungen (QEoS) vorgestellt.

Diese Modelle liefern für höhere Dichten $\rho > \rho_0$ verschiedene hadronische und Quark Zustandsgleichungen. Um dieser Unsicherheit, in Bezug auf die HEoS und QEoS, Rechnung zu tragen, werden in dieser Arbeit verschiedene HEoS und QEoS aus verschiedenen Modellen verwendet. Neben den Unsicherheiten in der Beschreibung von hadronischer und Quarkmaterie besteht eine große Unsicherheit in Bezug auf den Übergang zwischen hadronischer und Quarkmaterie. Weder die genaue Art dieses Übergangs noch die zugehörigen Dichten sind genau bekannt. Damit ist die konkrete Struktur und Zustandsgleichung der Neutronensternmaterie für den Kern des Sterns nicht eindeutig bekannt.

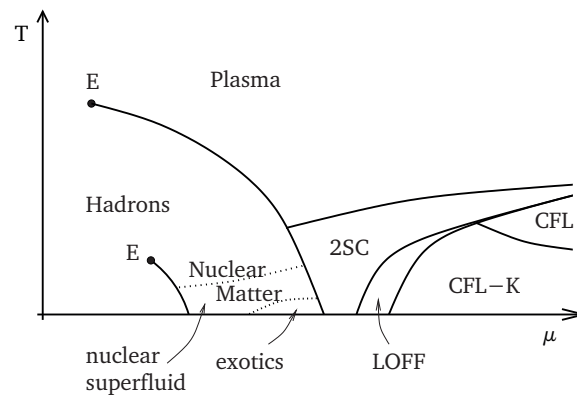


Abbildung 1.1: QCD Phasendiagramm in der T - μ -Ebene nach [10]. Neben der hadronischen und nuklearen Phase ist auch die Plasmaphase, bei hohen Temperaturen, dargestellt. Bei niedrigen Temperaturen und hohen chemischen Potentialen treten im Phasendiagramm farbsupraleitende Phasen (2SC und CFL) und eine kristalline LOFF-Phase auf [10].

Neutronensterne sind, auf Grund der vorliegenden Dichteunterschiede im Kern, $\rho_0 \lesssim \rho \lesssim 10\rho_0$, sehr gute Systeme zur Untersuchung dieses Übergangs zwischen hadronischer und Quarkmaterie. Um die Struktur massiver Neutronensterne zu beschreiben, konstruiert man sogenannte Hybridzustandsgleichungen aus den HEOs und QEOs. Der Vergleich der Lösungen der TOV Gleichung mit diesen Hybridzustandsgleichungen und den empirischen Daten zu Neutronensternen, wie Masse, zentrale Dichte oder auch Radius, lässt Rückschlüsse auf die Plausibilität dieser Hybridzustandsgleichungen zu. Damit sind Aussagen über die Kompatibilität der angewendeten Modellierung des Hadronen-Quark-Phasenübergangs und der QEOs/HEOs an sich mit den empirischen Daten zu Neutronensternen möglich. Daher liefern Neutronensterne ein geeignetes Labor zum Studium der komplexen Phasenstruktur der QCD [5].

Ziel dieser Arbeit ist zum einen die Konstruktion von Hybridzustandsgleichungen mit den verschiedenen vorgestellten HEOs und QEOs, zum anderen die Lösung der TOV Gleichung mit diesen Hybridzustandsgleichungen und der Vergleich der resultierenden Sterne mit den empirischen Daten, vor allem in Bezug auf die Kompatibilität der Hybridzustandsgleichungen mit den massiven $2M_\odot$ Neutronensternen PSR J1614-2230 und PSR J0348+0432. Die Konstruktion von Hybridzustandsgleichungen erfordert die Modellierung des Hadronen-Quark Übergangs.

Zur Konstruktion der Hybridzustandsgleichungen bzw. des Hadronen-Quark Übergangs werden in dieser Arbeit zwei sehr unterschiedliche Verfahren angewendet. Konventionell, nach [1, 5, 9], wird eine Hybridzustandsgleichung für Neutronensternmaterie über einen konstanten Druck (*constant pressure, kurz cp*) Phasenübergang erster Ordnung mit Gibbs Gleichgewichtsbedingungen zwischen einer hadronischen und einer Quark-Phase konstruiert. In dieser Arbeit wird von für sich genommen elektrisch neutraler hadronischer und Quarkmaterie ausgegangen. Daher kann der Phasenübergang unter Berücksichtigung des Baryonen chemischen Potentials μ_B allein konstruiert werden [1]. Ein cp-Phasenübergang nach Gleichung (7.1) tritt, nach Abschnitt 7.1, nur bei einigen der Zustandsgleichungen auf. Generell resultiert aus dem Phasenübergang eine weichere⁽²⁾ Zustandsgleichung und damit eine, im Vergleich zur reinen HEOs, geringere Maximalmasse. In der Regel gibt es bei einer EoS mit cp-Phasenübergang keine Neutronensterne mit stabilen Quark-Phasen.

⁽²⁾ Eine *weiche* Zustandsgleichung hat einen flachen p - ρ -Verlauf und einen steilen ϵ - p Verlauf, damit generiert eine weiche Zustandsgleichung einen niedrigen Druck bei einer gegebenen Energiedichte. Das entsprechende Gegenteil ist eine *harte* oder auch *steife* Zustandsgleichung, welche demnach bei gegebener Energiedichte höhere Drücke generiert. Weiche Zustandsgleichungen resultieren im Allgemeinen in Sternen mit geringer Maximalmasse. Harte/steife Zustandsgleichungen ermöglichen, im Gegensatz dazu, schwerere Sterne.

Die hadronischen Zustandsgleichungen werden mit dem Auftreten von Hyperonen generell weicher. Die Maximalmassen von HEoS mit Hyperonen streuen, nach Abschnitt 5.2, recht stark um die $1.5M_{\odot}$.

Damit sind weder rein hadronische Zustandsgleichungen noch QEOs-HEoS Hybridzustandsgleichungen mit cp-Phasenübergang mit den gemessenen Massen der massiven Neutronensterne kompatibel. Diese Zustandsgleichungen sind schlicht weg zu weich um schwere, stabile Stern mit Massen von um die zwei Sonnenmassen zu beschreiben.

Um eine steife/harte Hybridzustandsgleichung zu konstruieren, welche mit der Beobachtung von massiven $2M_{\odot}$ Neutronensternen kompatibel ist, wird von K. Masuda , T. Hatsuda und T. Takatsuka in ihrer Arbeit „*Hadron–quark crossover and massive hybrid stars*“ [5] eine neuartige Methode zur Konstruktion von harten Hybridzustandsgleichungen vorgeschlagen und untersucht.

Dazu wird von einem kontinuierlichen Übergang der hadronischen in die Quark-Phase ausgegangen. Abbildung 1.2 zeigt diesen Ansatz exemplarisch in einem p - ρ -Diagramm. Die Zustandsgleichung in der Übergangsregion (*crossover window*) wird durch eine stetige, glatte Interpolation zwischen HEoS und QEOs konstruiert. Damit wird die Materie in der Übergangsregion, bestehend aus stark wechselwirkenden Hadronen und Quarks, durch eine Mischung aus HEoS und QEOs beschrieben. Die Interpolation der EoS ist rein phänomenologisch motiviert. Aus den Modellen für HEoS und QEOs ist eine theoretische Beschreibung einer derartigen Mischphase nicht möglich. Dieses zweite Verfahren zur Konstruktion von Hybridzustandsgleichungen wird in dieser Arbeit aufgegriffen und untersucht.

Mittels der in Abschnitt 7.2 vorgestellten Interpolationsverfahren ist die Konstruktion von harten/steifen, thermodynamisch konsistenten und kausalen Zustandsgleichungen mit den verschiedenen HEoS und QEOs möglich, insofern die Übergänge je nach Zustandsgleichung und Interpolationsmethode entsprechend sinnvolle Übergangsfenster haben. Die Interpolation wird durch die Breite des Übergangsfensters 2Γ und dessen Zentrum $\bar{\rho}$ parametrisiert im Folgenden oft in der Form $(\bar{\rho}, \Gamma)$ notiert.

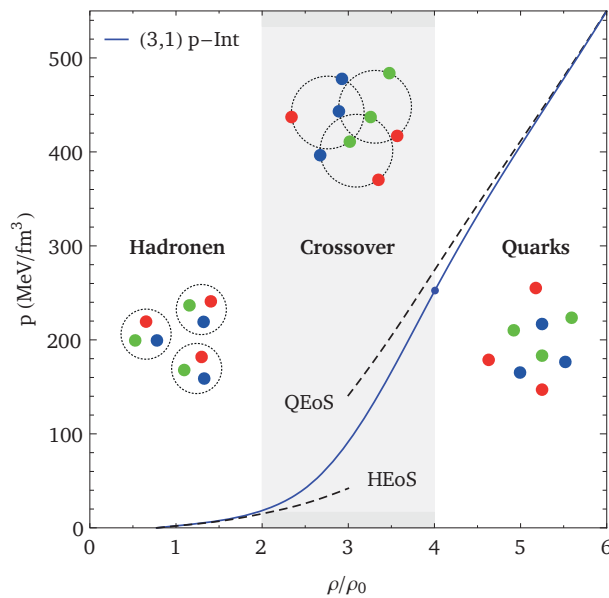


Abbildung 1.2: Schematische Darstellung des Druckes p über der Baryonen Dichte ρ für einen Hadronen-Quark Übergang. Die Übergangszone ist grau hinterlegt und entspricht einem Übergangsfenster von $(3\rho_0, 1\rho_0)$. In der Übergangszone wechselwirken die Hadronen mit den deconfined Quarks. Es handelt sich hier um eine exemplarische p -Interpolation zwischen der HEoS und der QEOs. Die gestrichelten Linien deuten die Druck-Baryonen Dichte Kurven der HEoS und QEOs an. Die Interpolation entspricht der in Abbildung 7.8 gezeigten $(3, 1)$ - p -Interpolation zwischen TN12u und HK($g_v = 1G_S$). Die Abbildung ist Abbildung 1 aus [5] nachempfunden.

Diese interpolierten Hybridzustandsgleichungen haben bei entsprechenden QEoS und plausiblen Übergangsfenstern von etwa $(3\rho_0, 1\rho_0)$ recht hohe Maximalmassen, welche, mit unter, mit den massiven $2M_\odot$ Neutronensternen vereinbar sind.

Diese Arbeit ist folgendermaßen strukturiert: In Kapitel 2 werden die für die TOV Gleichung und ihre Lösung nötigen theoretischen Grundlagen thematisiert. Kapitel 3 beschäftigt sich mit der Implementierung einer numerischen Lösungsmethode für die TOV Gleichung. Diese Implementierung wird in Kapitel 4 für pure Neutronensterne mit Fermi-Gas Zustandsgleichung erstmals angewandt. In Kapitel 5 werden verschiedene Zustandsgleichungen für die Kruste und die hadronische Materie innerhalb von Neutronensternen vorgestellt. Die Lösungen der TOV Gleichung mit diesen rein hadronischen Zustandsgleichungen werden vorgestellt und diskutiert. In analoger Weise werden in Kapitel 6 verschiedene Zustandsgleichungen für reine Quarkmaterie vorgestellt und diskutiert. In Kapitel 7 werden schließlich Hybridsterne mit gemischter Zustandsgleichung thematisiert. Sowohl der konventionelle Ansatz über einen Phasenübergang erster Ordnung mit konstantem Druck als auch die in [5] vorgestellten Interpolationsmethoden werden verwendet um Hybridzustandsgleichungen zu konstruieren. Die resultierenden Zustandsgleichungen und Sterne werden mit den Ergebnissen und Daten aus den vorherigen Kapiteln in Relation gesetzt. In Kapitel 8 werden die zentralen Ergebnisse der vorangegangenen Kapiteln zusammengefasst und mögliche Perspektiven aufgezeigt.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Geometrisierte Einheiten: *Gravitational Units*

Zur Vereinfachung von Berechnungen und zur besseren Übersicht in Gleichungen ist es hilfreich geometrisierte Einheiten zu verwenden. Der Kerngedanke ist, entscheidende Naturkonstanten auf eine dimensionslose Eins zu setzen:

$$\begin{aligned}1 &\stackrel{!}{=} c, \\1 &\stackrel{!}{=} G, \\1 &\stackrel{!}{=} \hbar, \\1 &\stackrel{!}{=} k_B.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Dadurch werden Gleichungen wesentlich übersichtlicher. Geometrisierte Einheiten, welche Gleichung (2.1) genügen, werden auch *Gravitational Units* genannt [1].

Für Berechnungen mit diesen geometrisierten Einheiten müssen die verschiedenen Größen durch Multiplikation einer geeigneten Kombination von c , G , k_B und \hbar in kompatible Einheiten umgerechnet werden. Die Anwendung und der Umgang mit diesen Einheiten wird in Abschnitt 3.1 thematisiert.

2.2 Null-Temperaturnäherung

Bereits kurz nach der Entstehung eines Neutronensternes fällt seine Temperatur auf etwa 10^{10} K [1]. Temperaturen dieser Größenordnung entsprechen einer thermischen Energie von rund 1 MeV. Nach weniger als einer Millionen Jahren sind die Neutronensterne sogar noch weiter abgekühlt auf etwa 10^6 K [1]. Auf einer nuklearen Energieskala sind Energien dieser Größenordnung klein.

Die im Inneren eines Neutronensternes auftretenden Energien und Energiedichten sind wesentlich größer als 1 MeV. Bis auf die äußeren Bereiche eines Neutronensternes kann die thermische Energie der Materie daher ohne Weiteres vernachlässigt werden. In Abschnitt 5.1 wird der Einfluss der Temperatur auf die äußeren Teile der Kruste kurz thematisiert.

Letztlich können die Sterne jedoch als gänzlich kalt angenommen werden, da die Temperatur keinen wesentlichen Einfluss auf die im Folgenden berechneten äußeren Eigenschaften, wie Masse und Radius, hat.

2.3 Allgemeine Relativitätstheorie

Ziel dieses Abschnittes ist es die wesentlichen Aspekte und mathematischen Konstrukte der allgemeinen Relativitätstheorie (ART) vorzustellen, welche zum Verständnis und der Herleitung der TOV-Gleichung in Abschnitt 2.3.6 nötig sind. Für weiterführende Informationen und ein tieferes Verständnis bietet sich zum Beispiel [11] als Lektüre an.

Die ART beschäftigt sich mit der Wechselwirkung zwischen Materie und der vier-dimensionalen Raumzeit. Energie und Impuls von Materie beeinflussen die Geometrie der Raumzeit. Die Gravitation kann im Rahmen dieser Theorie als geometrische Eigenschaft der gekrümmten Raumzeit verstanden werden.

2.3.1 Grundlegende Konzepte der ART

Die ART folgt drei grundlegenden Prinzipien: dem allgemeinen Relativitätsprinzip, dem Äquivalenzprinzip und dem Machschen Prinzip.

Das **allgemeine Relativitätsprinzip** verallgemeinert das bereits aus der speziellen Relativitätstheorie (SRT) bekannte Relativitätsprinzip von Inertialsystemen auf beliebig bewegte Bezugssysteme: Die allgemeinen Naturgesetze müssen in allen Koordinatensystemen gelten. In der speziellen Relativitätstheorie haben die Gesetze der Physik nur in gleichförmig bewegten Inertialsystemen die gleiche Form, in der ART haben sie auch in beschleunigten Koordinatensystemen die gleiche Form.

Das schwache **Äquivalenzprinzip** beschreibt die Äquivalenz von Trägheits- und Gravitationskräften. Notwendig dafür ist die Gleichheit von schwerer und träger Masse. Das von Einstein verallgemeinerte starke Äquivalenzprinzip besagt, dass ein homogenes Gravitationsfeld einer entsprechenden gleichmäßigen Beschleunigung in der flachen Raumzeit entspricht. Im Bezugssystem eines in einem Gravitationsfeld frei fallenden Beobachters sind auf hinreichend kleinen Raum- und Zeitskalen keine Gravitationsfelder vorhanden.

Eine beliebte Formulierung des **Machschen Prinzips** besagt, dass die Trägheitskräfte eines Körpers von dessen Bewegung relativ zu anderen Körpern/Massen abhängen, nicht von dessen Bewegung relativ zu einem absoluten Raum. Die Vereinbarkeit des Machschen Prinzips und der ART hängt im Detail jedoch stark von der genauen Formulierung des Prinzips ab und ist in der allgemeinen Form nicht gegeben.

2.3.2 Mathematische Grundbegriffe und allgemeine Relationen

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten mathematischen Grundbegriffe der ART eingeführt. Form und Notation der folgenden Ausführungen entsprechen der in [1] verwendeten. Die Funktion und Bedeutung der einzelnen Konstrukte wird in den folgenden Abschnitten deutlich.

Genau wie die SRT ist die ART auf dem nicht-euklidischen vier-dimensionalen Riemannschen Raum, dem Lorentz Raum der Raum-Zeit formuliert.

$$x^\mu = (ct, x^1, x^2, x^3) \quad (2.2)$$

Eine entscheidende Rolle in Rechnungen im Rahmen der ART spielt der *metrische Tensor* $g_{\mu\nu}$, welcher zur Transformation zwischen kovarianten und kontravarianten Größen dient:

$$\begin{aligned} A_\mu &= g_{\mu\nu} A^\nu \\ A^\mu &= g^{\mu\nu} A_\nu \end{aligned} \quad (2.3)$$

wobei $g^{\mu\nu}$ der inversen Transformation von $g_{\mu\nu}$ entspricht und A^ν, A_ν zwei beliebige kontra- bzw. kovariante Vektoren sind. Man spricht von „Hoch-“ und „Heruntersetzten“ der Indizes. Im Gegensatz zum *Minkowski Tensor* $\eta_{\mu\nu}$ der SRT, ist der metrische Tensor eine Funktion der vier-dimensionalen Raum-Zeit.

Die Beschreibung des folgenden Problems führt zu weiteren elementaren Grundbegriffen: Gesucht sind die Bewegungsgleichungen eines sich in einem frei fallenden Koordinatensystem befindlichen Teilchens, unter Einfluss eines beliebigen Gravitationsfeldes, in Einklang mit den in Abschnitt 2.3.1 vorgestellten Konzepten der ART. Beschrieben aus dem frei fallenden System mit den Relativkoordinaten ξ^α lässt sich die Bewegungsgleichung

$$0 = \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} \quad (2.4)$$

einfach aufstellen. Die Ausdrücke

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (2.5a)$$

$$= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.5b)$$

beschreiben das *invariante Intervall/Linienelement*, welches den Abstand von zwei benachbarten Ereignissen in beiden Koordinatensystemen angibt. Aus den Gleichungen (2.5) lässt sich die Relation

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (2.6)$$

für den Zusammenhang zwischen metrischen und Minkowski Tensor herstellen.

Die Relativkoordinaten des frei fallenden Systems ξ^α können als Funktionen der Koordinaten eines beliebigen Referenzsystems x^μ betrachtet werden. Mittels der Kettenregel

$$d\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \quad (2.7)$$

lässt sich die Bewegungsgleichung (2.4) über die Koordinaten des Referenzsystems ausdrücken

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \quad (2.8a)$$

$$= \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (2.8b)$$

$$= \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (2.8c)$$

über den sogenannten *affinen Zusammenhang* $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (2.9)$$

Vergleicht man die Bewegungsgleichung (2.4) im frei fallenden System mit der aus dem Referenzsystem (2.8c), so beschreibt der zweite Term aus (2.8c) die Effekte des Gravitationsfeldes auf das Teilchen.

Den durch Gleichung (2.8c) beschriebenen extremalen Pfad in der Raumzeit nennt man *Geodäte*. Gleichung (2.4) beschreibt den selben Pfad im frei fallenden Koordinatensystem. In diesem hat er die Form einer geraden Linie.

Mittels des *Christoffel Symbols* $\{\}$ lässt sich der affine Zusammenhang über den metrischen Tensor und dessen partielle Ableitungen ausdrücken:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} \left[\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} \right] \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} (g_{\kappa\nu,\mu} + g_{\kappa\mu,\nu} + g_{\mu\nu,\kappa}), \quad (2.10)$$

mit den partiellen Ableitungen in Kompaktnotation: $\partial g_{\kappa\nu} / \partial x^{\mu} \equiv g_{\kappa\nu,\mu}$.

Die kovariante Ableitung eines beliebigen kovarianten Vektors A_{μ} ist gegeben durch

$$A_{\mu;\nu} \equiv \frac{dA_{\mu}}{dx^{\nu}} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} A_{\lambda}, \quad (2.11)$$

während analog die kovariante Ableitung eines beliebigen kontravarianten Vektors gegeben ist durch

$$A^{\mu}{}_{;\nu} \equiv \frac{dA^{\mu}}{dx^{\nu}} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} A^{\sigma}. \quad (2.12)$$

Mit den eingeführten Grundbegriffen lässt sich der *Riemannsche Krümmungstensor*

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} \equiv \Gamma_{\sigma\nu,\mu}^{\rho} - \Gamma_{\sigma\mu,\nu}^{\rho} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\mu}^{\rho} - \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\rho} \quad (2.13)$$

formulieren. Aus diesem lassen sich unter anderem der *Ricci Tensor*,

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\nu\alpha} = \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}, \quad (2.14)$$

und der *Krümmungsskalar*,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

ableiten.

Aus den dritten kovarianten Ableitungen eines beliebigen kovarianten Vektors lassen sich für den Riemannschen Krümmungstensor die *Bianchi Identitäten*

$$R^{\alpha}{}_{\mu\nu\rho;\sigma} + R^{\alpha}{}_{\mu\sigma\nu;\rho} + R^{\alpha}{}_{\mu\rho\sigma;\nu} = 0 \quad (2.16)$$

ableiten. Durch Umformung der Bianchi Identitäten lässt sich folgender Ausdruck herleiten:

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right)_{;\nu} = 0. \quad (2.17)$$

Der Ausdruck in den Klammern in Gleichung (2.17),

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R, \quad (2.18)$$

wird *Einstein Tensor* genannt.

2.3.3 Einsteinsche Theorie und Feldgleichungen

Mit Hilfe der in Abschnitt 2.3.2 eingeführten Grundbegriffe lassen sich die Grundprinzipien der ART nach [12] folgendermaßen beschreiben:

Die Natur lässt sich über einen vier-dimensionalen Riemannschen Raum, den Lorentz Raum beschreiben. Im freien Raum ist die Raum-Zeit flach und in einer kartesischen Basis ist seine entsprechende Metrik die Lorentz Metrik. Zu jedem Ereignis im gekrümmten Raum existiert ein ebener Tangentialraum mit Lorentz Metrik.

Die Bahnen von Punktteilchen sind Geodäten im gekrümmten Raum, welche durch die sogenannte *Geodätengleichung* (2.8c) beschrieben sind.

Die sogenannten *Einsteinschen Feldgleichungen*,

$$G^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

beschreiben die Struktur des gekrümmten Raumes. Dabei ist $G^{\mu\nu}$ der in Gleichung (2.18) über den Ricci Tensor und den Krümmungsskalar hergeleitete Einstein Tensor, $T^{\mu\nu}$ ist der *Energie-Impuls Tensor* und k ist ein entsprechender Stärkefaktor. Die Einsteinschen Feldgleichungen beschreiben, in Form einer nicht-linearen Differentialgleichung, den Zusammenhang zwischen der Metrik des gekrümmten Raums und dem Energie-Impulstensor des betrachteten Systems.

Der Stärkefaktor k lässt sich durch den Vergleich der ART mit der Newtonschen Gravitationstheorie als $k = -8\pi G$ bestimmen. Damit folgt für die Feldgleichungen,

$$G^{\mu\nu} = -8\pi GT^{\mu\nu}, \quad (2.20)$$

mit der Gravitationskonstante G .

2.3.4 Metrik statischer, isotroper Raumzeit

In diesem Abschnitt wird zunächst die Metrik für statische, isotrope Raumzeit in sphärischen Koordinaten vorgestellt und anschließend werden die daraus resultierenden Komponenten des Ricci Tensors angegeben.

Für ein statisches Problem sind die Komponenten des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ zeitunabhängig. Zur Beschreibung der restlichen Komponenten werden sphärische Koordinaten,

$$x^0 \equiv t, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \phi, \quad (2.21)$$

verwendet, da sich diese für die in Abschnitt 2.3.5 und 2.3.6 folgenden Überlegungen anbieten. Das Linienelement $d\tau^2$ hat unter Erhaltung der sphärischen Symmetrie die Form

$$d\tau^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.22)$$

wobei λ und ν Funktionen des Radius r sind. Über Koeffizientenvergleich mit Gleichung (2.5) lassen sich die Komponenten des metrischen Tensors bestimmen:

$$g_{00} = e^{2\nu(r)}, \quad (2.23a)$$

$$g_{11} = -e^{2\lambda(r)}, \quad (2.23b)$$

$$g_{22} = -r^2, \quad (2.23c)$$

$$g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta, \quad (2.23d)$$

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = 0 \quad (\forall \mu \neq \nu). \quad (2.23e)$$

Über den metrischen Tensor lässt sich der affine Zusammenhang nach Gleichung (2.10) ausdrücken. Anschließend lässt sich mit dem affinen Zusammenhang der Ricci Tensor nach Gleichung (2.14) formulieren. Für die nicht verschwindenden Komponenten des Ricci-Tensors gilt

$$R_{00} = \left(-\nu'' + \lambda' \nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r} \right) e^{2(\nu-\lambda)}, \quad (2.24a)$$

$$R_{11} = \nu'' - \lambda' \nu' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r}, \quad (2.24b)$$

$$R_{22} = (1 + r \nu' - r \lambda') e^{-2\lambda} - 1, \quad (2.24c)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta, \quad (2.24d)$$

mit λ und ν als Funktionen des Radius r und ν'' , ν' und λ' als Ableitungen dieser Funktionen nach dem Radius. Mittels Gleichung (2.15) gilt für den Krümmungsskalar

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = e^{-2\nu} R_{00} - e^{-2\lambda} R_{11} - \frac{2}{r^2} R_{22} \\ &= e^{-2\lambda} \left\{ -2\nu'' + 2\lambda' \nu' - 2\nu'^2 - \frac{2}{r^2} + 4\frac{\lambda'}{r} - 4\frac{\nu'}{r} \right\} + \frac{2}{r^2}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

2.3.5 Äußere Schwarzschild Lösung

Die Einsteinschen Feldgleichungen haben außerhalb eines statischen Sterns eine einfache Form, da außerhalb des Sterns ($r > R$) Energiedichte ϵ und Druck p verschwinden. Damit verschwindet der Energie-Impuls Tensor und die entsprechenden Einsteinschen Feldgleichungen lauten

$$G^{\mu\nu} = 0. \quad (2.26)$$

Über Gleichung (2.18) lässt sich zeigen, dass aus dem Verschwinden des Einstein Tensors $G^{\mu\nu} = 0$ auch das Verschwinden des Ricci Tensors $R_{\mu\nu} = 0$ sowie das Verschwinden des Krümmungsskalars $R = 0$ folgt.

Im vorhergegangenen Abschnitt 2.3.4 wurden in Gleichung (2.24) die Komponenten des Ricci Tensors für statische, isotrope Raumzeit vorgestellt. Aus dem Verschwinden der ersten beiden Komponenten $R_{00} = R_{11} = 0$ folgt

$$\lambda' + \nu' = 0. \quad (2.27)$$

Für große Entfernungen zum Stern muss λ plus ν ebenfalls verschwinden,

$$\lambda + \nu = 0, \quad (2.28)$$

da der Raum in großer Entfernung zum Stern flach, das heißt von ihm nicht beeinflusst, sein muss. Mit Hilfe dieser beiden Gleichungen und dem Verschwinden von R_{22} erhält man

$$(1 + 2r \nu') e^{2\nu} = 1. \quad (2.29)$$

Diese Differentialgleichung lässt sich durch Integration lösen. Dabei wählt man im Hinblick auf die Newtonschen Gravitationstheorie als Integrationskonstante $c = MG$ mit der Masse des Sterns M und der Gravitationskonstante G . Es ergibt sich

$$e^{2\nu} = 1 - \frac{2GM}{r} \quad \text{für } r > R \quad (2.30)$$

als Lösung. Für $e^{2\lambda}$ folgt

$$e^{2\lambda} = e^{-2\nu} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \quad \text{für } r > R. \quad (2.31)$$

Mittels der Gleichungen (2.22) und (2.23) lässt sich aus den Lösungen für $e^{2\nu}$ und $e^{2\lambda}$ die sogenannte (*äußere*) Schwarzschild Lösung (K. Schwarzschild, 1916) für den Außenraum sphärischer, statischer Sterne formulieren

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad \text{für } r > R, \quad (2.32)$$

$$g_{00}(r) = 1 - \frac{2GM}{r} \quad \text{für } r > R, \quad (2.33a)$$

$$g_{11}(r) = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \quad \text{für } r > R, \quad (2.33b)$$

$$g_{22}(r) = -r^2, \quad (2.33c)$$

$$g_{33}(r, \theta) = -r^2 \sin^2 \theta, \quad (2.33d)$$

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = 0 \quad (\forall \mu \neq \nu). \quad (2.33e)$$

2.3.6 Tolman-Oppenheimer-Volkoff Gleichung

Im Inneren ($r < R$) eines Sterns verschwinden Energiedichte ϵ und Druck p nicht. Der Energie-Impuls-Tensor eines relativistischen, statischen, sphärisch symmetrischen Sterns im hydrostatischen Equilibrium hat in kartesischen Koordinaten die einfache Form:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Nach den Gleichungen (2.18) und (2.20) gilt

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -8\pi G T^{\mu\nu}. \quad (2.35)$$

Aus Abschnitt 2.3.4 sind der Ricci Tensor und der Krümmungsskalar für statische, isotrope Raumzeit nach den Gleichungen (2.24) und (2.25) bekannt. Setzt man diese Ausdrücke in die Feldgleichungen (2.35) mit dem entsprechenden Energie-Impuls-Tensor (2.34) ein, so lassen sich $e^{-2\lambda}$ und anschließend λ' , ν' , ν'' und ν'^2 als Funktionen von Druck p und Energiedichte ϵ ausdrücken [1]. Für $e^{-2\lambda}$ gilt

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{8\pi G}{r} \int_0^r \epsilon(\tilde{r}) \tilde{r}^2 d\tilde{r}. \quad (2.36)$$

An der Oberfläche des Sterns ($r = R$) muss die Lösung in die äußere Schwarzschild Lösung übergehen. Vergleicht man daher Gleichung (2.33) mit (2.36), so findet man für die bis zum Radius r eingeschlossene Masse $M(r)$ die Identität

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \epsilon(\tilde{r}) \tilde{r}^2 d\tilde{r}. \quad (2.37)$$

Die Masse des Sterns M , welche in der Herleitung der äußeren Schwarzschild Lösung als Integrationskonstante auftrat, entspricht $M(R)$. Damit gilt in Konsistenz mit der äußeren Schwarzschild Lösung

$$g_{11}(r) = -e^{2\lambda} = -\left(1 - \frac{2GM(r)}{r}\right)^{-1}. \quad (2.38)$$

Fasst man dieses Ergebnis mit den Ergebnissen für λ' , ν' , ν'' und ν'^2 zusammen [1], so erhält man die sogenannte *Tolman–Oppenheimer–Volkoff* Gleichung

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{[p(r) + \epsilon(r)][M(r) + 4\pi r^3 p(r)]}{r[r - 2M(r)]}, \quad (2.39)$$

in geometrisierten Einheiten ($G = c = 1$) nach Abschnitt 2.1.

In Kombination mit einer Zustandsgleichung, welche für die TOV Gleichung an sich nur die Energiedichte ϵ als Funktion des Druckes p liefern muss, und dem Ausdruck für die eingeschlossene Masse (2.37) bestimmt die TOV Gleichung die Struktur eines Sterns mit gegebenem Anfangswert ($p(r=0) \equiv p_c$) vollkommen. Unter Struktur in diesem Sinne sind sowohl äußere Eigenschaften, wie Masse M oder Radius R , als auch innere Eigenschaften, wie der Verlauf des Druckes $p(r)$ oder der Energiedichte $\epsilon(r)$, gemeint.

Neben der in Gleichung (2.39) gegebenen, kompakten Version der TOV-Gleichung in geometrisierten Einheiten, ist eine ausmultiplizierte Version mit den Konstanten G und c ebenfalls sehr geläufig

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G}{r^2} \left[\epsilon(r) + \frac{p(r)}{c^2} \right] \left[M(r) + 4\pi r^3 \frac{p(r)}{c^2} \right] \left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \right]^{-1}. \quad (2.40)$$

Diese Gleichung hat drei relativistische Faktoren der Ordnung $1/c^2$. Im nicht-relativistischen Grenzfall ($c \rightarrow \infty$) geht die TOV Gleichung (2.40) in die Gleichung des Newtonschen hydrostatischen Gleichgewichts

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \frac{\epsilon(r)}{c^2} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} \quad (2.41)$$

über. In Gleichung (2.41) mit $\rho(r)$ als klassische Massendichte.

2.4 TOV-Gleichung als Differentialgleichung des chemischen Potentials μ

In diesem Abschnitt soll die TOV Gleichung als Differentialgleichung des chemischen Potentials formuliert werden.

In den meisten thermodynamischen Modellen ist die Energiedichte ϵ als Funktion des Druckes p , wie sie für die TOV Gleichung in p benötigt wird, nicht einfach zugänglich. Oftmals sind ϵ und p als Funktionen des chemischen Potentials μ wesentlich einfacher zu erhalten. Dies ist zum Beispiel im Fall der Fermi-Gas Zustandsgleichung aus Abschnitt 2.5 zutreffend. Daher ist eine Formulierung der TOV Gleichung in μ in diesen Fällen wesentlich komfortabler als die Gleichung in p .

Für die folgende Herleitung werden einige elementare thermodynamische Relationen und Zusammenhänge verwendet, die auch für die folgenden Ausführungen zu Hybridsternen wichtig sind.

Die linke Seite der TOV Gleichung (2.39) lässt sich nach der Kettenregel formulieren als

$$\frac{dp}{dr} = \frac{dp}{d\mu} \frac{d\mu}{dr}. \quad (2.42)$$

Die Ableitung $dp/d\mu$ lässt sich aus der Gibbs-Duhem Gleichung

$$\sum_i N_i d\mu_i = -SdT + Vdp \quad (2.43)$$

ableiten, in sofern man von nur einer Teilchenart $i = 1$ und einem isothermen Prozess $dT = 0$ ausgeht. Im Rahmen dieser Arbeit werden nach Abschnitt 2.2 nur kalte Sterne ($T = 0$) betrachtet. Für die folgenden Rechnungen mit der TOV Gleichung in μ ist die Betrachtung von nur einem chemischen Potential ausreichend. Die Gibbs-Duhem Gleichung lautet für diesen Fall

$$Nd\mu = Vdp \iff \frac{dp}{d\mu} = \frac{N}{V} = \rho \quad (2.44)$$

mit $dT = 0$, $i = 1$ und der Teilchendichte ρ .

Der Druck ist allgemein definiert als

$$p = -\frac{\partial E}{\partial V}. \quad (2.45)$$

Diese Definition muss auch mikroskopisch, also für die Energie und das Volumen pro Teilchen, gelten. Damit können folgende Identitäten für den Druck hergeleitet werden

$$p = -\frac{\partial(E/N)}{\partial(V/N)} = -\frac{\partial}{\partial(1/\rho)}\left(\frac{\epsilon}{\rho}\right) = \rho^2 \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\epsilon}{\rho}\right) = \rho \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho} - \epsilon = \rho\mu - \epsilon, \quad (2.46)$$

wobei im letzten Schritt folgende elementare Definition des chemischen Potentials

$$\mu \equiv \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho} \quad (2.47)$$

verwendet wurde. Aus Gleichung (2.46) lässt sich eine weitere Identität des chemischen Potentials herleiten

$$\mu = \frac{\epsilon + p}{\rho}. \quad (2.48)$$

Mit den Gleichungen (2.42), (2.44) und (2.46) kann die TOV Gleichung (2.39) schließlich über das chemischen Potential formuliert werden

$$\frac{d\mu}{dr} = -\frac{\mu(M + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2M)}. \quad (2.49)$$

2.5 Fermi-Gas Zustandsgleichung

In diesem Abschnitt wird eine Zustandsgleichung für ein ideales, kaltes, entartetes Fermi-Gas aus Neutronen hergeleitet. Dieses einfache Modell für eine Zustandsgleichung eines reinen Neutronensterns, beschreibt ein Gas aus nicht wechselwirkenden Neutronen, welches sich bei jeder gegebenen Baryondichte ρ im energetisch niedrigsten Zustand befindet. Dieser Zustand wird *Equilibrium* genannt.

Neutronen sind Fermionen und unterliegen daher der Fermi-Dirac-Statistik und somit dem Pauli-Prinzip. Ein quantenmechanischer Zustand kann nur von einem Fermion besetzt werden. Daher werden alle Impuls-Eigenzustände bis zur Fermi-Kante/Fermi-Energie k_F/E_F bevölkert, man spricht von einem entarteten Fermi-Gas.

Gesucht ist zunächst ein Ausdruck für die Baryonendichte ρ bzw. die Teilchenzahl N . Dazu benötigt man einen Ausdruck für den Wellenvektor \vec{k}_n eines Teilchens in einem Würfel der Kantenlänge L :

$$\vec{k}_n = \frac{2\pi}{L} \vec{n} \quad (2.50)$$

mit $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$ für die den Raumrichtungen entsprechenden Einteilchenzuständen $\{|\vec{n}\rangle\}$ [13, 14]. Im Rahmen der eingeführten geometrisierten Einheiten ist der Wellenvektor gleich dem Impuls. Im thermodynamischen Limes, hier explizit im Grenzfall eines großen Systems, kann die Summation über alle Einteilchenzustände $\{|\vec{n}\rangle\}$ durch eine Integration ersetzt werden

$$\rho = \frac{N}{V} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} f(\vec{k}) \rightarrow \frac{1}{V} \int d^3k f(k) \frac{\partial(n_1, n_2, n_3)}{\partial(k_1, k_2, k_3)} \quad (2.51)$$

mit einer Verteilungs-/Besetzungsfunktion $f(\vec{k})$. Die Besetzungsfunktion gibt die Besetzungsdichte der Zustände an. Die partiellen Ableitungen lassen sich mit Gleichung (2.50) einfach bilden

$$\frac{\partial(n_1, n_2, n_3)}{\partial(k_1, k_2, k_3)} = \left(\frac{\partial n_1}{\partial k_1} \right) \left(\frac{\partial n_2}{\partial k_2} \right) \left(\frac{\partial n_3}{\partial k_3} \right) = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 = \frac{V}{(2\pi)^3}. \quad (2.52)$$

Für Fermionen mit Spin 1/2 kann jeder Impuls-Eigenzustand mit zwei Fermionen, eins mit Spin \uparrow und eins mit Spin \downarrow , besetzt werden. Die Zustände werden bis zur Fermi-Kante k_F besetzt. Damit hat die Besetzungsfunktion die Form einer Heaviside-Funktion

$$f(k) = 2\Theta(k_f - k). \quad (2.53)$$

Mit den beiden Gleichungen (2.52) und (2.53) kann Gleichung (2.51) in sphärischen Koordinaten integriert werden

$$\rho = \frac{1}{V} \int d^3k 2\Theta(k_f - k) \frac{V}{(2\pi)^3} = \int_0^{k_F} \frac{k^2}{\pi^2} dk = \frac{k_F^3}{3\pi^2}. \quad (2.54)$$

Die Entartung und damit die bisherigen Ausführungen gelten nur bei kleinen Temperaturen T ,

$$T \ll E_F = \sqrt{k_F^2 + m^2}, \quad (2.55)$$

da die Sterne jedoch generell als kalt ($T = 0$) angenommen werden, ist diese Bedingung ohne Weiteres erfüllt.

Die Energie pro Impuls-Eigenzustand ist gegeben durch

$$\epsilon_k = \sqrt{k^2 + m^2}. \quad (2.56)$$

Damit gilt es für die Energiedichte ein zu Gleichung (2.54) ähnliches Integral zu lösen

$$\epsilon = \frac{1}{V} \int d^3k 2\Theta(k_f - k) \sqrt{k^2 + m^2} \frac{V}{(2\pi)^3} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 \sqrt{k^2 + m^2} dk. \quad (2.57)$$

Die Lösung dieses Integrals kann in [15] nachgeschlagen werden. Des Weiteren ist sie in [1] ausführlich angegeben.

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{4\pi^2} \left[k_F \sqrt{k_F^2 + m^2} \left(k_F^2 + \frac{m^2}{2} \right) - \frac{m^4}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{k_F^2 + m^2} + k_F}{m} \right) \right] \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \left[k_F \mu (2\mu^2 - m^2) - m^4 \ln \left(\frac{\mu + k_F}{m} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.58)$$

Mit dem chemischen Potential

$$\mu = E_F = \sqrt{m^2 + k_F^2}, \quad (2.59)$$

welches für $T = 0$ genau der Fermi-Energie entspricht.

Der Druck lässt sich am besten über Gleichung (2.46) aus der Baryonendichte ρ , der Energiedichte ϵ und dem chemischen Potential μ mittels den Gleichungen (2.54), (2.58) und (2.59) herleiten

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{12\pi^2} \left[k_F \sqrt{k_F^2 + m^2} \left(k_F^2 - \frac{3m^2}{2} \right) + \frac{3m^4}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{k_F^2 + m^2} + k_F}{m} \right) \right] \\ &= \frac{1}{24\pi^2} \left[k_F \mu (2\mu^2 - 5m^2) + 3m^4 \ln \left(\frac{\mu + k_F}{m} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Die Gleichungen (2.58) und (2.60) können als Zustandsgleichungen für die TOV Gleichung in μ verwendet werden.

2.6 Allgemeine Anforderungen und Kausalitätsbedingung an Zustandsgleichungen

Eine *kausale* Zustandsgleichung erfüllt nach [1] drei wesentliche Kriterien:

- (1) Sie muss dem *Prinzip von Le Chatelier* folgen: Die Materie ist stabil gegen spontanen Kollaps oder Kontraktion. Für die Zustandsgleichung bedeutet dies $dp/d\epsilon \geq 0$, der Druck als Funktion der Energiedichte muss monoton steigen. Im Fall eines Phasenübergangs erster Ordnung gilt an diesem $dp/d\epsilon = 0$.
- (2) Die Schallgeschwindigkeit v_s muss kleiner sein als die Lichtgeschwindigkeit

$$\frac{v_s}{c} = \sqrt{\frac{dp}{d\epsilon}} < 1. \quad (2.61)$$

- (3) Eine Zustandsgleichung, welche Materie bei hohen Dichten $\rho > \rho_0$ beschreibt, muss bei niedrigen Dichten in eine Zustandsgleichung für "gewöhnliche" Materie übergehen. Diese ist in dieser Arbeit in Abschnitt 5.1 über die BPS/NV Zustandsgleichung gegeben.

Eine *thermodynamisch konsistente* Zustandsgleichung muss des Weiteren die verschiedenen thermodynamischen Größen, wie ρ , p , ϵ und μ , derart in Verbindung setzen, dass die grundlegend thermodynamischen Relationen erfüllt sind. Aus Abschnitt 2.4 wären dies insbesondere (2.46), (2.47) und (2.48).

Die Maximalmasse eines Sterns mit einer thermodynamisch konsistenten Zustandsgleichung für den kausalen Grenzfall $dp/d\epsilon = 0$ wird in [1] berechnet. Sie beträgt

$$M_{max} = 3.14M_{\odot} \quad (2.62)$$

und ist damit die höchste, für einen Neutronenstern mit kausaler Zustandsgleichung mögliche, Maximalmasse.

3 Implementierung

Sämtliche numerische Berechnungen wurden mit *Wolfram MATHEMATICA* 9.0.1 durchgeführt. Die zentralen Methoden zum Lösen der TOV-Gleichung und zum Auffinden der Maximalmassen sind elementar implementiert und verwenden keine höheren *MATHEMATICA* Methoden.

3.1 Konstanten und Umrechnungsfaktoren

Die in Tabelle 3.1 aufgelisteten Naturkonstanten und Größen wurden für die Berechnungen und für die Herleitung der Umrechnungsfaktoren verwendet.

Konstante	Symbol	Wert
Vakuumlichtgeschwindigkeit	c	$2.99792458 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$
Gravitationskonstante	G	$6.67384(80) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Boltzmann-Konstante	k_B	$1.3806488(13) \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$
Reduziertes Plancksches Wirkungsquantum	\hbar	$1.054571726(47) \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Elementarladung	e	$1.602176565(35) \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Elektronenmasse	m_e	$9.10938291(40) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Protonenmasse	m_p	$1.672621777(74) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Neutronenmasse	m_n	$1.674927351(74) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Solare Masse	M_\odot	$1.9884(2) \cdot 10^{30} \text{ kg}$

Tabelle 3.1: Naturkonstanten und Größen nach [1, 16, 17, 18]

Im System der in Abschnitt 2.1 vorgestellten geometrisierten Einheiten ist es, durch entsprechende Multiplikation bzw. Division von c , G , \hbar und k_B , möglich, die Dimensionen verschiedenster Größen umzurechnen:

$$1 \text{ s} = 1 \text{ s} * c = 2.99792 \cdot 10^8 \text{ m}, \quad (3.1a)$$

$$1 \text{ kg} = 1 \text{ kg} * \frac{G}{c^2} = 7.42565 \cdot 10^{-28} \text{ m}, \quad (3.1b)$$

$$1 \text{ K} = 1 \text{ K} * k_B = 1.38065 \cdot 10^{-23} \text{ J}, \quad (3.1c)$$

$$1 \text{ J} = 1 \text{ J} * \frac{G}{c^4} = 8.26215 \cdot 10^{-45} \text{ m}. \quad (3.1d)$$

Für die folgenden Berechnungen sind $\hbar c$ und der Umrechnungsfaktor zwischen MeV und km wichtig.

$$\hbar c = 197.327 \text{ MeVfm} \quad (3.2)$$

$$1 \text{ MeV} = 1.32374 \cdot 10^{-60} \text{ km} \quad (3.3)$$

Letzteren kann man aus Gleichung (3.1d) unter Verwendung der Elementarladung errechnen.

Für die folgenden Berechnungen ist es sinnvoll sowohl Druck als auch Energiedichte in der kernphysikalischen Einheit MeV/fm^3 anzugeben. Gleichung (3.4a) beschreibt den Zusammenhang

zwischen MeV/fm^3 und den mikroskopischen, kanonischen Einheiten für Druck (dyne/cm^2) und Dichte (g/cm^3).

$$1 \text{ MeV}/\text{fm}^3 = 1.60218 \cdot 10^{33} \text{ dyne}/\text{cm}^2 = 1.78266 \cdot 10^{12} \text{ g}/\text{cm}^3 \quad (3.4a)$$

$$= 1.32374 \cdot 10^{-6} \text{ km}^{-2} \quad (3.4b)$$

In der TOV Gleichung ist es praktikabel Drücke und Energiedichten in MeV/fm^3 , Radien in km und die Masse, nach Gleichung (3.1b), ebenfalls in km anzugeben. Damit ist der einzige, für die Lösung der TOV Gleichung in p , benötigte Umrechnungsfaktor der Zusammenhang zwischen MeV/fm^3 und km^{-2} , dieser ist in Gleichung (3.4b) angegeben und folgt direkt aus Gleichung (3.3).

Um die in den Berechnungen vorkommenden Massen zu relativieren, bietet sich als Referenzmasse die Masse der Sonne

$$M_{\odot} = 1.1154 \cdot 10^{60} \text{ MeV} = 1.4765 \text{ km} \quad (3.5)$$

an. Diese ist aus Tabelle 3.1 in Kilogramm bekannt und kann mittels Gleichung (3.1b) für Berechnungen im Rahmen der TOV Gleichung in Kilometer umgerechnet werden.

Der Umgang mit den Dimensionen in der TOV Gleichung wird in Abschnitt 3.2 angesprochen und explizit im Anhang A.1 erläutert.

Eine weitere vor allem im Zusammenhang mit Zustandsgleichungen auftretende Größe ist die *normale nukleare Baryondichte* ρ_0 , welche sich im Rahmen des *Tröpfchen-Modells* einfach abschätzen lässt

$$\rho_0 = \frac{3}{4\pi} r_0^{-3} = \frac{2}{3\pi^2} k_F^3 \approx 0.17 \text{ fm}^{-3}, \quad (3.6)$$

mit dem Fermi-Impuls $k_F \approx 1.36 \text{ fm}^{-1}$ nach [9]. Die entsprechende normale nukleare Energiedichte ϵ_0 lässt sich mit Hilfe der mittleren Bindungsenergie pro Nukleon $B/A \approx -16 \text{ MeV}$ nach [9] und der mittleren Nukleonenmasse $\bar{m} = (m_n + m_p)/2 = 938.9 \text{ MeV}$ abschätzen mit

$$\epsilon_0 = \left(\frac{B}{A} + \bar{m} \right) \rho_0 \approx 156.9 \text{ MeV}/\text{fm}^3. \quad (3.7)$$

3.2 TOV Gleichung und Abbruchbedingung

Um die Struktur eines Sternes, $p(r)$ und $\epsilon(r)$, sowie seine äußeren Eigenschaften, Masse $M = M(R) \equiv M_R$ und Radius R , zu bestimmen gilt es nach Abschnitt 2.3.6 die TOV Gleichung (2.39) mit der zugehörigen Bestimmungsgleichung der eingeschlossenen Masse (2.37) zu lösen.

Dazu wird die TOV Gleichung schrittweise von Innen ($r = 0$) nach Außen ($r = R$) gelöst. Als Anfangswert im Zentrum des Sterns muss der Initialdruck

$$p(r = 0) \equiv p_c \quad (3.8)$$

angegeben werden. Wählt man die Schrittweite Δr klein genug, ist die Annahme, dass p , ϵ und M während eines Schrittes konstant sind, gerechtfertigt. Der Differentialquotient dp/dr kann somit in einen Differenzenquotient $\Delta p/\Delta r$ umgeschrieben werden. Die TOV Gleichung (2.39) lässt sich damit nach der Änderung des Druckes Δp auflösen

$$\Delta p = - \frac{[p + \epsilon][M + 4\pi r^3 p]}{r[r - 2M]} \Delta r. \quad (3.9)$$

Für die Änderung der Masse gilt nach Differenzieren der Gleichung (2.37)

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi\epsilon(r)r^2. \quad (3.10)$$

Nach jedem Schritt Δr ändert sich der Druck um Δp und die Masse um eine Kugelschale der Dicke Δr und des Radius r . Die Masse ΔM einer solchen Schale ist damit abhängig von der Energiedichte

$$\epsilon(r) = \epsilon(p(r)), \quad (3.11)$$

welche über die Zustandsgleichung durch den Druck $p(r)$ gegeben ist, vom aktuellen Radius r und der Schrittweite Δr

$$\Delta M = 4\pi \int_r^{r+\Delta r} \epsilon \tilde{r}^2 d\tilde{r} = \frac{4}{3} \pi \epsilon \Delta r (3r^2 + 3r\Delta r + \Delta r^2). \quad (3.12)$$

Bei der Integration von Gleichung (3.10) ist die Annahme eines konstanten Druckes und damit auch einer konstanten Energiedichte während des Schrittes entscheidend, um die Integration zu Gleichung (3.12) auszuführen.

Im ersten Schritt von $r = 0$ ändert sich die Masse um

$$\Delta M_1 = \frac{4}{3} \pi \epsilon(p_c) \Delta r^3 \quad (3.13)$$

und die Druckänderung ist gegeben durch

$$\Delta p_1 = -\frac{[p_c + \epsilon(p_c)][4\pi r^3 p]}{r[r]} \Delta r = -4\pi r p_c [p_c + \epsilon(p_c)] = 0, \quad (3.14)$$

da für $r = 0$ keine Masse eingeschlossen ist. Im ersten Schritt ändert sich der Druck demnach nicht, es gilt für $p(r = \Delta r) = p_c$.

Für die Berechnungen im Rahmen dieser Arbeit wurde eine konstante Schrittweite von

$$\Delta r = 1 \text{ m} \quad (3.15)$$

gewählt. Proberechnungen mit kleineren Schrittweiten lieferten extrem ähnliche Ergebnisse. Eine Schrittweite von einem Meter bildet einen guten Kompromiss zwischen Leistung und adäquaten Ergebnissen.

Mit den Gleichungen (3.9) und (3.12) lässt sich die TOV Gleichung in einem Eulerverfahren schrittweise lösen.

Als Abbruchbedingung lässt sich Abschnitt 2.3.6 entsprechend $p = 0$ wählen. Im Inneren eines Sterns muss der Druck positiv sein, um dem Gravitationsdruck entgegen zu wirken [1]. An der Oberfläche des Sterns $r = R$ verschwindet der Druck. Damit hat der Stern eine Gesamtmasse von $M = M(R)$ und einen Radius R .

An der Oberfläche gilt sowohl die TOV Gleichung als auch die äußere Schwarzschild Lösung. Außerhalb des Sterns muss der Energie-Impuls Tensor $T^{\mu\nu}$ und damit auch Druck und Energiedichte verschwinden. Der Druck ist eine kontinuierliche Funktion, auch an der Oberfläche. Die Energiedichte ist nicht immer eine kontinuierliche Funktion am Rand.

Im Fall des idealen, kalten, entarteten Fermi-Gases aus Abschnitt 2.5 ist die Energiedichte auch am Rand kontinuierlich. Die über die Fermi-Gas Zustandsgleichung beschriebenen reinen Neutronensterne aus Kapitel 4 haben damit eine Atmosphäre. Der berechnete Radius entspricht somit dem äußersten Rand dieser Atmosphäre.

Im Falle der BPS Zustandsgleichung aus Abschnitt 5.1 für die Kruste eines Neutronensterns ist die Energiedichte am Rand nicht kontinuierlich. Außerhalb des Sternes verschwindet die Energiedichte, aber innerhalb des Sternes hat sie auch auf der Oberfläche einen nicht verschwindenden Wert. Im Falle der BPS Zustandsgleichung hat der Grundzustand hadronischer Materie bei $p = 0$ am Rand des Sternes die Energiedichte von Eisen 56 ($\epsilon_{Fe} = 7.861 \text{ g/cm}^3$). Ein Stern mit einer über die BPS Zustandsgleichung beschriebenen Kruste hat keine Atmosphäre sondern eine harte Oberfläche.

Im Anhang A.1 ist der MATHEMATICA Code, der hier im Abschnitt vorgestellten Implementierung, abgebildet und der explizite Umgang mit den vorkommenden Einheiten wird beschrieben.

3.3 Golden Maximum Methode zur Bestimmung der Maximalmasse

Um die maximale Masse eines Sterns bei gegebener Zustandsgleichung zu bestimmen, wird zunächst eine Methode benötigt, welche zu einer gegebenen Zustandsgleichung im Wesentlichen die resultierende Masse als Funktion des Zentraldrucks zurückliefert. Dazu wird eine abgewandelte Form der in Abschnitt 3.2 vorgestellten Methode zur Lösung der TOV-Gleichung verwendet, welche im Folgenden als *TOVpMR* bezeichnet wird. Anstatt das Ergebnis jedes einzelnen Schrittes zu speichern, werden nur die Masse und der zugehörige Radius zu einem eingegebenen Zentraldruck ausgegeben.

Um die maximale Masse zu ermitteln, wird nun noch eine Methode benötigt, welche mit möglichst wenigen Aufrufen einer Funktion deren Maximum in einem gegebenen Intervall findet. Ein geeignetes Verfahren ist die sogenannte *Golden Section Search in One Dimension*, wie sie in [19] vorgestellt wird. Es handelt sich um ein elegantes und recht einfach zu implementierendes Verfahren, welches ein Maximum einer Funktion *func* auf einem gegebenen Intervall $[ax, cx]$ mit einem Aufpunkt bx schrittweise in immer kleiner werdenden Intervallen $[x0, x3]$ eingrenzt. Nach zwei anfänglichen Aufrufen der Funktion wird pro Schritt nur ein weiterer Aufruf der Funktion benötigt. Dazu wird in jedem Schritt eine neue Stützstelle im aktuellen Intervall gewählt. Die Stützstelle wird stets so gewählt, dass das aktuelle Intervall durch sie im *Goldenen Schnitt* (0.382 : 0.618) geteilt wird. Dadurch wird das Intervall, in dem sich das Maximum befindet, pro Schritt um 0.618 kleiner als das vorherige Intervall. Der kommentierte Code der Methode ist in Anhang A.2 zu finden. Bei der Methode handelt es sich um eine leicht abgewandelte Form des in [19] vorgestellten C-Codes.

Mit der entsprechenden Methode *TOVpMR* zur Lösung der TOV-Gleichung und der *Golden Maximum Methode* kann die Maximale Masse und der zugehörige Radius in nur wenigen Schritten bestimmt werden. Dazu muss nur ein passendes Trippel von Zentraldrücken eingegeben werden: $\{p_1, p_2, p_3\}$ mit $p_1 < p_2 < p_3$, derart dass der Zentraldruck des Sterns mit maximaler Masse zwischen p_1 und p_3 liegt.

3.4 Interpolierte Zustandsgleichungen

Die in den Kapiteln 5 und 6 vorgestellten Zustandsgleichungen liegen für Berechnungen nur in Form von tabellierten Werten vor. Baryonendichte ρ , Baryonen chemisches Potential $\mu_B^{(3)}$, Druck p und Energiedichte ϵ sind für Baryonendichten von etwa $[1\rho_0, 10\rho_0]$ tabelliert. Je nach Quelle mit unterschiedlichen Schrittweiten und Intervallen.

Um Berechnungen mit den Zustandsgleichungen anstellen zu können, wird durch die Datenpunkte interpoliert. Dazu wurde die MATHEMATICA Interpolationsmethode verwendet. Es wurde speziell eine *Spline* Interpolation *zweiter Ordnung* angewandt [20]. Diese liefert glatte *Interpolationsfunktionen*. Gerade zur Konstruktion von interpolierten Hybridzustandsgleichungen, nach Abschnitt 7.2, ist das MATHEMATICA Konstrukt der Interpolationsfunktion äußerst elegant. MATHEMATICA kann hinreichend glatte Interpolationsfunktionen nämlich ohne Weiteres numerisch differenzieren und integrieren.

Die interpolierten, reinen Zustandsgleichungen sind nach Abschnitt 2.6 thermodynamisch konsistent und erfüllen, in den Fällen der vorgestellten HEoS, QEoS und BPS/NV EoS, die Kausalitätsbedingungen.

⁽³⁾ Ähnlich wie bei der Baryonendichte wird das Baryonen chemische Potential μ_B im Folgenden manchmal auch nur mit μ bezeichnet. Wenn nicht explizit durch einen anderen Index gekennzeichnet, handelt es sich bei μ um das Baryonen chemische Potential μ_B .

4 Pure Neutronensterne

Die in Abschnitt 2.5 hergeleitete Zustandsgleichung für ein ideales, kaltes, entartetes Fermi-Gas aus Neutronen wird in diesem Abschnitt verwendet um die TOV Gleichung zu lösen. Die resultierenden Sterne werden *pure Neutronensterne* genannt, da sie ausschließlich aus Neutronen bestehen.

Da aus dem Modell direkt $\epsilon(\mu)$ und $p(\mu)$, aus den Gleichungen (2.58) und (2.60), zugänglich sind, bietet es sich an, die über das Baryonen chemische Potential formulierte Version der TOV Gleichung (2.49) zu verwenden. Die Gleichung kann ganz analog zur TOV Gleichung in p implementiert werden.

Die Energiedichte $\epsilon(\mu)$ und der Druck $p(\mu)$ sind nach den Gleichungen (2.58) und (2.60) streng monoton steigende Funktionen des chemischen Potentials μ mit einem minimalen chemischen Potential μ_0 bei

$$\mu_0 = m \equiv m_n = 939.56 \text{ MeV.} \quad (4.1)$$

In dem System, bestehend ausschließlich aus Neutronen, folgt dies direkt aus Gleichung (2.59) mit $k_F = 0$. Für die Energiedichte und den Druck gilt bei μ_0

$$\epsilon(\mu_0) = p(\mu_0) = 0. \quad (4.2)$$

4.1 Masse-Radius Kurve und Maximalmasse

Löst man die TOV-Gleichung mit verschiedenen Initialdrücken, in diesem Fall initial chemischen Potentials μ_c , so erhält man Sterne mit verschiedenen Massen und Radien. Trägt man die Massen M dieser Sterne über deren jeweiligen Radien R auf, erhält man eine *Masse-Radius Kurve*. Abbildung 4.1 zeigt die M-R Kurve der puren Neutronensterne mit Fermi-Gas Zustandsgleichung. Diese Kurve zeigt einige sehr interessante, für Neutronensterne bzw. sogar für kompakte Objekte generell, typische Eigenschaften.

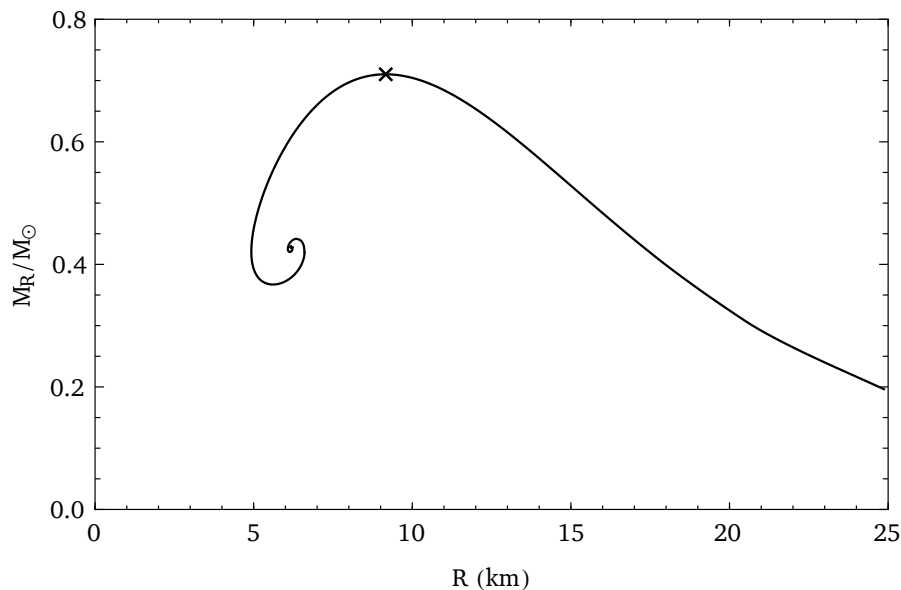


Abbildung 4.1: Masse-Radius Kurve purer Neutronensterne mit idealer, kalter, entarteter Fermi-Gas Zustandsgleichung. Die Maximalmasse M_{max} ist durch das Kreuz markiert und liegt bei $M_{max} = 0.71 M_\odot$ mit einem zugehörigen Radius $R = 9.16$ km und der zugehörige Stern hat den Zentraldruck $p_c = 226.1 \text{ MeV}/\text{fm}^3$. Die Sterne mit großem Radius haben geringere zentrale Drücke als die mit kleinem Radius.

M_{\max}/M_{\odot}	R (km)	μ_c (MeV)	ρ_c/ρ_0	p_c (MeV/fm ³)	ϵ_c (MeV/fm ³)
0.71	9.16	1223.1	12.41	226.1	2355.1

Tabelle 4.1: Masse, Radius und Initialwerte für einen puren Neutronenstern maximaler Masse.

Pure Neutronensterne sind *nicht-selbstgebundene* kompakte Objekte. Ohne die Gravitation würde sich auf Grund des Druckes des Fermi-Gases kein kompakter, gebundener Körper bilden. Sterne mit geringem zentralen Druck⁽⁴⁾ bilden leichte Sterne mit großem Radius. Die geringe Energiedichte im Kern führt zu geringen Gravitationsdrücken und daher wird das Sterngleichgewicht erst bei großen Radien erreicht. Analog führen hohe zentrale Drücke zu hohen Gravitationsdrücken und damit zu Sternen mit kleinen Radien.

Sterne mit mittleren zentralen Dichten haben mittlere Radien und hohe Massen. Es gibt einen zentralen Druck, aus dem ein Stern mit maximaler Masse M_{\max} resultiert. Dieser Druck stellt den idealen Kompromiss zwischen Radius und Energiedichte dar. In Tabelle 4.1 sind die Eigenschaften dieses Sterns mit maximaler Masse aufgeführt. Eine maximale Masse tritt nach [1] mit allen nach Abschnitt 2.6 konsistenten Zustandsgleichungen auf.

Eine notwendige aber nicht hinreichende Bedingung für stabile Sterne ist, dass eine Erhöhung der zentralen Energiedichte zu einer Erhöhung der Masse führt [1]. Damit sind Lösungen der TOV-Gleichung mit

$$\frac{\partial M}{\partial \epsilon_c} < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial p_c} < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial \rho_c} < 0^{(5)}. \quad (4.3)$$

instabil.

In Abbildung 4.1 erfüllen alle Sterne mit größerem Radius als der des Sterns mit maximaler Masse, $R > R(M_{\max})$, die notwendige Bedingung für Stabilität $\partial M/\partial \epsilon_c > 0$. Die Sterne mit einem Radius $R < R(M_{\max})$ und Massen zwischen M_{\max} und $0.37M_{\odot}$ sind instabil. Dann tritt ein interessanter Effekt auf: ab $0.37M_{\odot}$ steigt die Masse wieder mit Erhöhung der zentralen Energiedichte auf Teilstücken der Kurve. Diese Sterne mit zentralen Drücken $p_c \geq 1708.9\text{MeV/fm}^3$ und mit $\partial M/\partial \epsilon_c > 0$ sind hydrostatisch, im Sinne der TOV Gleichung, stabil. Weiterführende Analysen speziell dieser Lösungen in dynamischen Modellen führend jedoch zu dem Ergebnis, dass Lösungen mit einer derartigen Krümmung im M-R-Verlauf auf Grund instabiler radialer Vibrationsmoden (akustische Moden) keine stabilen Sterne darstellen [21].

Die berechnete Maximalmasse $0.71M_{\odot}$ und der entsprechende Radius 9.16 km des Fermi-Gas Modells stimmen gut mit anderen Ergebnissen zu diesem Modell überein [1]. In der Originalarbeit „On Massive Neutron Cores“ von Oppenheimer und Volkoff 1939 [6] zur TOV Gleichung wurden ebenfalls Rechnungen mit einem idealen Neutronengas angestellt. Oppenheimer und Volkoff errechneten eine Maximalmasse von etwa $0.7M_{\odot}$ bei einem Radius von etwa 9.5 km [6].

Es wird jedoch deutlich, dass eine adäquate Beschreibung von beobachteten Neutronensternen mit einer Masse von zum Beispiel $1.44M_{\odot}$ (PSR B1913+16) im Rahmen des Modells eines idealen, kalten, entarteten Fermi-Gases nicht möglich ist, von noch schwereren Neutronensternen ganz abgesehen.

Dies ist jedoch nicht weiter verwunderlich, da es sich um ein äußerst einfaches, stark idealisiertes Modell handelt, welches die möglichen Strukturen von Materie bei höheren Dichten nicht beschreiben kann.

⁽⁴⁾ Da Druck p , Energiedichte ϵ und auch die Baryonendichte ρ monoton steigende Funktionen in μ sind, resultieren aus niedrigen Drücken auch niedrige Energie- und Baryonendichten und vice versa.

⁽⁵⁾ Chemisches Potential, Druck und Baryonendichte sind für alle in dieser Arbeit verwendeten Zustandsgleichungen monoton steigende Funktionen, daher lässt sich die erste Aussage auch auf andere thermodynamische Größen analog umformulieren.

4.2 Struktur purer Neutronensterne

Neben der im vorhergegangenen Abschnitt diskutierten äußeren Eigenschaften der puren Neutronensterne mit den entsprechenden Initialwerten liefern die Lösungen der TOV Gleichung auch Erkenntnisse über die innere Struktur der Sterne. Masse, Druck und über die Zustandsgleichung auch die restlichen thermodynamischen Größen sind durch das schrittweise Lösen der TOV Gleichung für alle Radien $r \in [0, R]$ gegeben.

Eine entsprechende Auftragung des Druckes oder auch der Energiedichte über dem Radius liefert Erkenntnisse über den inneren Aufbau der Sterne. In Abbildung 4.2 sind die Druck-Radius Kurven dreier Sterne mit verschiedenen zentralen Drücken abgebildet. Der Druck sinkt monoton von seinem Anfangswert im Zentrum des Sterns auf Null am Rand des Sterns. Die Massen und Radien sind in Einklang mit den in Abschnitt 4.1 gemachten Aussagen.

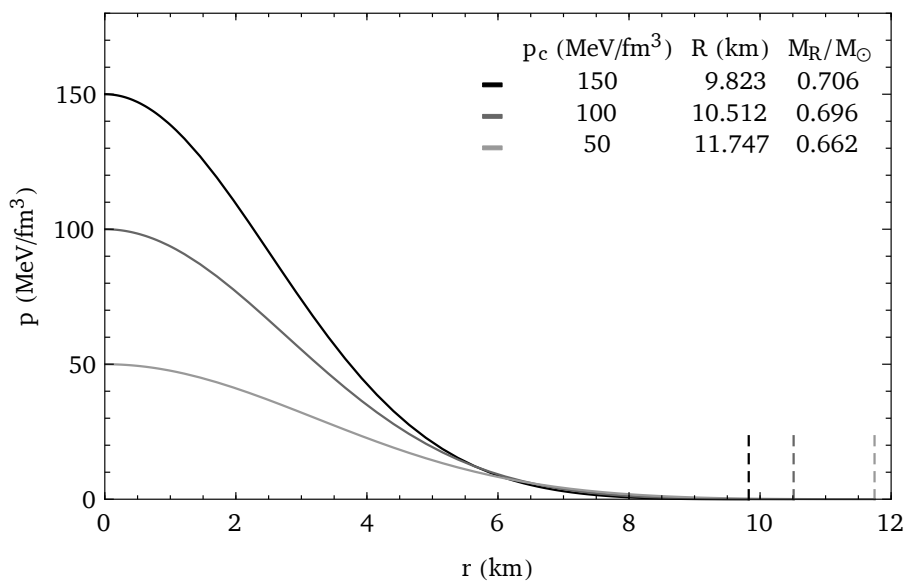


Abbildung 4.2: Druck-Radius Kurven für pure Neutronensterne mit idealer, kalter, entarteter Fermi-Gas Zustandsgleichung. Sterne mit höheren zentralen Drücken p_c haben kleinere Radien als Sterne mit niedrigeren p_c . Die drei beschriebenen Sterne sind stabil $p_c < p_c(M_{max})$ und demnach resultiert ein höherer zentraler Druck in einer höheren Masse.

5 Neutronensterne mit hadronischer Zustandsgleichung

Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit der Zustandsgleichung hadronischer Materie. Die Behandlung dieser Materie erfolgt in zwei Teilen. Zunächst wird die hadronische und zum Teil nukleare Materie bei niedrigen Dichten $\rho < \rho_0$ in Abschnitt 5.1 behandelt. Diese Dichten treten in den äußeren Bereichen der Sterne, der sogenannten *Kruste*, auf. Anschließend werden verschiedene Modelle und Zustandsgleichungen für hadronische Materie bei hohen und mittleren Dichten $\rho > \rho_0$ in Abschnitt 5.2 vorgestellt. Die aus der Zustandsgleichung für die Kruste und den hadronischen Zustandsgleichungen resultierenden Sterne werden in Bezug auf ihre Struktur und ihre äußeren Eigenschaften hin in den Abschnitten 5.4 und 5.3 untersucht.

5.1 Kruste und BPS/NV Zustandsgleichung

Die äußeren Schichten subnuklearer Dichte ($\rho < \rho_0$) kompakter Sterne bezeichnet man als Kruste. Die Kruste lässt sich, ihrer Struktur und ihren Bestandteilen entsprechend, grob in zwei Schichten unterteilen:

- (I) **Äußere Kruste:** Die Oberfläche eines Neutronensterns und damit die äußerste Schicht der äußeren Kruste besteht aus Fe^{56} . Eisen 56 stellt den energetisch niedrigsten Gleichgewichtszustand von hadronischer Materie dar. Am Rand des Sternes ist $p = 0$ und entsprechend beträgt die Energiedichte

$$\epsilon_{Fe} = 7.861 \text{ g/cm}^3 = 4.41 \cdot 10^{-12} \text{ MeV/fm}^3 \quad (5.1)$$

bei einer Baryonendichte von $\rho_{Fe} = 4.73 \cdot 10^{-15} \text{ fm}^{-3}$ [1].

Mit zunehmender Dichte werden die Atome ionisiert und es treten neben Eisen auch schwerere, neutronenreichere Elemente auf. Die Materie besteht aus einem festen Coulomb-Gitter der Ionen und einem relativistischen Elektronengas [22, 23].

Für die äußere Kruste gilt die in Abschnitt 2.2 geführte Argumentation zur Null Temperaturnäherung nicht ohne Weiteres. Es lässt sich jedoch zeigen [1, 22, 23], dass die Temperatur nur für die Beschreibung des äußeren Randes entscheidend ist. Nur an der Oberfläche des Sternes ist die Temperatur für die Eigenschaften der Materie wesentlich. Heiße Neutronensterne besitzen eine sehr dünne, geschmolzene Oberfläche aus voll ionisierten Atomen [1].

Die Beschaffenheit der Oberfläche eines Neutronensterns hängt neben der Temperatur auch stark von magnetischen Feldern und der Rotation der Sterne ab [23]. Mit der TOV Gleichung können jedoch nur statische, nicht magnetische Sterne beschrieben werden. Auf die in dieser Arbeit betrachteten Eigenschaften der Sterne, wie Masse, Radius oder die innere Struktur, hat die konkrete Beschaffenheit der Oberfläche keinen signifikanten Einfluss. Daher wird auch die gesamte äußere Kruste bis zum Rand des Sternes als kalt angenommen.

- (II) **Innere Kruste:** Ab einer Dichte von etwa

$$\epsilon_{Drip} = 4.3 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3 = 0.24 \text{ MeV/fm}^3 \quad (5.2)$$

bei einer Baryonendichte von $\rho_{Drip} = 0.25 \cdot 10^{-3} \text{ fm}^{-3}$ ist die rein in Kernen gebundene Form von Baryonen nicht mehr die energetische günstigste. Daher beginnen Neutronen bei

steigender Dichte zunehmend aus den Atomkernen auszufallen. Diese Neutronen bilden ein (super)fluides Neutronengas. Neben diesem Neutronengas existiert bis hin zu Dichten von etwa $0.8 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3 = 44.9 \text{ MeV/fm}^3$ ($\rho = 0.05 \text{ fm}^{-3}$) noch ein Gitter aus extrem neutronenreichen Kernen, wie z.B. Zr^{180} , Sn^{1100} und Zr^{1500} [24].

Bei höheren Dichten deformieren die Kerne zu Clustern von nuklearer Materie, welche die Form von Röhren, Platten oder Blasen annehmen. Dieser Bereich eines Neutronensterns wird *Mantel* genannt. Bis zu einer Dichte von etwa

$$\epsilon_K = 1.35 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3 = 75.9 \text{ MeV/fm}^3, \text{ mit } \rho_K = 0.08 \text{ fm}^{-3}, \quad (5.3)$$

existiert die nukleare Materie [25].

Neben dem Neutronengas und der nuklearen Materie existiert weiterhin ein relativistisches Elektronengas.

Ab einer Dichte von etwa ϵ_K beginnt der äußere Teil des Kerns:

- (III) **Äußerer Kern:** Bis hin zu nuklearer Dichte $\rho_0 = 0.17 \text{ fm}^{-3}$ besteht der äußere Kern hauptsächlich aus einem superfluiden Neutronengas [23]. Dieses wird durch eine entsprechende hadronische Zustandsgleichung beschrieben. Eine Auswahl an verschiedenen hadronischen Zustandsgleichungen wird in Abschnitt 5.2 vorgestellt.

Für Lösung der TOV-Gleichung ist die Kruste vor allem in Bezug auf den Radius bzw. die Abbruchbedingung von großer Bedeutung. Um realistische Radien bzw. sinnvolle Masse-Radius-Kurven zu erhalten, ist eine korrekte Beschreibung der Kruste erforderlich. Für die Kruste werden zwei kanonische Zustandsgleichungen verwendet.

Für die äußere Kruste wird die sog. BPS-Zustandsgleichung (*Baym, Pethick und Sutherland*) [22] entnommen aus [1] für $\rho \in [\rho_{Fe}, \dots, \rho_{Drip}]$ verwendet.

Für die innere Kruste wird die sog. NV-Zustandsgleichung (*Negle und Vautherin*) [24] entnommen aus [26] für $\rho \in (\rho_{Drip}, \dots, 0.08 \text{ fm}^{-3})$ verwendet.

Abbildung 5.1 zeigt die Zustandsgleichung (links) für die Kruste, sowie eine exemplarische Druck-Radius-Kurve (rechts). Die Neutronenkante bei ρ_{Drip} ist in beiden Graphen deutlich zu erkennen. In diesem Beispiel ist die äußere Kruste 0.59 km dick und die innere Kruste ist 0.79 km dick. Damit ist die gesamte Kruste 1.38 km stark. Sie macht somit 28.2% des Gesamtvolumens aus, trägt dabei aber nur 2.7% der Masse. Bei schwereren Sternen, höheren Initialdrücken, sind beide Anteile geringer. Generell sind das Volumen und die Masse der Kruste von der HEoS und dem Initialdruck abhängig: Leichtere Sterne haben größere Krusten als schwerere.

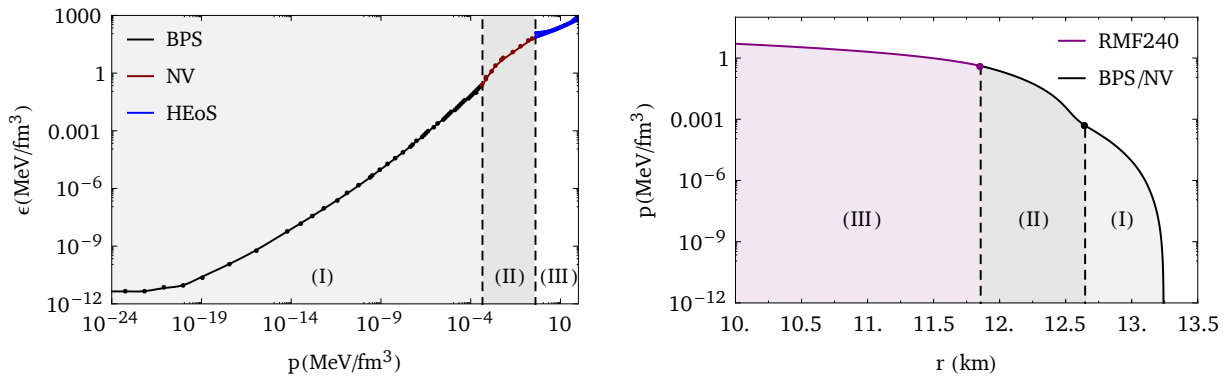


Abbildung 5.1: (Links:) Energiedichte über Druck: für die äußere Kruste BPS-EoS [22] bis zu $\rho_{Drip} = 0.25 \cdot 10^{-3} \text{ fm}^{-3}$ und für die innere Kruste NV-EoS [24] bis zu $\rho = 0.08 \text{ fm}^{-3}$. (Rechts:) Eine exemplarische Druck-Radius-Kurve mit RMF240 als HEoS für einen exemplarischen Stern mit $p_C = 50 \text{ MeV/fm}^3$, $M_R = 1.29 M_\odot$ und $R = 13.24 \text{ km}$.

5.2 Zustandsgleichungen für hadronische Materie

Bei Dichten zwischen $\rho_k = 0.47\rho_0 = 0.08 \text{ fm}^{-3}$ und ρ_0 besteht die Materie im Wesentlichen aus einem Gas von Nukleonen und Elektronen. Mit steigender Dichte sinkt der anfangs sehr hohe Neutronen-Anteil ρ_n zu Gunsten des Protonen-Anteils ρ_p . Mit ρ_p steigt auch der Anteil an Leptonen $\rho_l = \rho_e + \rho_\mu$. Mit weiter steigender Dichte sinkt der Anteil an Elektronen zu Gunsten von Myonen [1, 5]. Alle im Folgenden vorgestellten HEoS beschreiben bei subnuklearen Dichten ein solches Neutronen/Nukleonen Gas. Daher ähneln sich alle vorgestellten HEoS bei niedrigen Dichten $\rho \lesssim \rho_0$.

Bei Dichten zwischen $2-4\rho_0$ nimmt man heute an, dass Hyperonen auftreten [5, 27]. Bei den in den Kernen von stabilen Neutronensternen vorherrschenden Dichten treten dominant vor allem Σ^- und Λ auf [1, 27, 28]. Daher beschränken sich die meisten Modelle auf eine Beschreibung von hadronischer Materie bestehend nur aus p , n , Σ^- , Λ und den Leptonen e und μ . Schwere Hyperonen, wie Σ^0 , Σ^+ , Ξ^0 oder Ξ^+ , werden jedoch in einigen Modellen (RMF240 und χ SU(3)) mit berücksichtigt. Die dominant auftretenden leichten Hyperonen Σ^- und Λ werden in baryonischen Reaktion der Art



gebildet. Auf Grund ihrer negativen Ladung treten die Σ^- in vielen Modellen als erstes Hadron mit Strangeness auf, obwohl sie wesentlich schwerer als die neutralen Λ sind

$$M_{\Sigma^-} = 1197 \text{ MeV} > M_{\Lambda} = 1116 \text{ MeV} \quad (5.5)$$

[27]. Mit zunehmenden Dichten sinkt der Anteil an Leptonen zu Gunsten der negativen Hyperonen, vor allem Σ^- . Der Grenzwert in der Baryondichte ρ_{th} , bei welcher die ersten Hyperonen auftreten, hängt von der jeweiligen hadronischen Zustandsgleichung ab, speziell im Detail von der Modellierung der Nukleon-Hyperon-Wechselwirkung.

Die verschiedenen HEoS beschreiben die hadronische Materie in verschiedenen Modellen mit verschiedenen Nukleon-Nukleon (NN), Nukleon-Hyperon (NH) und Hyperon-Hyperon (HH) Wechselwirkungen. Daher unterscheiden sich die resultierenden Zustandsgleichungen bei höheren Dichten mitunter stark. Dennoch sind die verschiedenen hadronischen Zustandsgleichungen nach Abschnitt 2.6 thermodynamisch konsistent und kausal. Sie beschreiben alle kalte, hadronische Materie im β -Equilibrium.

Für ein Modell aus p , n , Σ^- , Λ und den Leptonen e und μ bedeutet dies: Für das β -Equilibrium des Nukleonen/Leptonen Gases

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e \quad (5.6a)$$

$$\mu_e = \mu_\mu \quad (5.6b)$$

und für das Gleichgewicht der Reaktionen (5.4)

$$2\mu_n = \mu_p + \mu_{\Sigma^-} \quad (5.7a)$$

$$\mu_n = \mu_{\Lambda}. \quad (5.7b)$$

Global gelten des Weiteren Ladungserhaltung/Neutralität

$$0 = \rho_p - \rho_e - \rho_\mu - \rho_{\Sigma^-} \quad (5.8)$$

und auch die Baryonenanzahl

$$\rho = \rho_n + \rho_p + \rho_{\Sigma^-} + \rho_{\Lambda} \quad (5.9)$$

ist erhalten. Für Modelle mit weiteren Hyperonen lassen sich die Gleichungen entsprechend erweitern.

Folgende in [9] und [5] verwendeten hadronischen Zustandsgleichungen wurden auch in dieser Arbeit benutzt:

- TNI2, TNI2u, TNI3, TNI3u [5, 29, 30]: TNI2 und TNI3 stammen aus *G-matrix* Berechnungen mit einem *Reid soft-core* Potential für die NN-Wechselwirkung und *Nijmegen type-D hard-core* Potentials für die NH und HH Wechselwirkung. Zusätzlich wurde eine Drei-Körper Kraft in Form einer effektiven NN Kraft phänomenologisch eingeführt um mit TNI2 und TNI3 den Sättigungspunkt von symmetrischer nuklearer Materie bei Inkompressibilitäten von $\kappa = 250$ MeV und 300 MeV zu reproduzieren. Bei TNI2u und TNI3u wurde die Drei-Körper-Kraft *universell* über effektive NN, NH und HH Kräfte eingeführt. Die TNI Zustandsgleichungen beinhalten nur die leichten Hyperonen Σ^- und Λ .
- BHF(N,l), BHF(N,H,l) [9, 27, 31]: BHF(N,l) beschreibt eine mikroskopische Zustandsgleichung, welche auf Berechnungen im Rahmen einer nicht-relativistischen *Brückner–Bethe–Goldstone Vielteilchentheorie* in der *Brückner–Hartree–Fock* Näherung beruht. Für die NN Wechselwirkung wurde das *Paris Potential* und für Drei-Körper Kraft das *Urbana Modell* verwendet. Die BHF(N,l) Zustandsgleichung beschreibt nur ein Nukleonengas und ein nicht wechselwirkendes Leptonengas. Erst die BHF(N,H,l) berücksichtigt auch die leichten Hyperonen Σ^- und Λ . Für die NH Wechselwirkung wurde das *Nijmegen soft-core Model* verwendet. Eine HH Wechselwirkung wurde nicht modelliert.
- RMF240 [1]: Diese HEoS beruht nicht auf den mikroskopischen Wechselwirkungen. Sie wurde im Rahmen eines *relativistischen mean-field Modells* hergeleitet. Die hier gewählte EoS reproduziert den Sättigungspunkt von symmetrischer nuklearer Materie bei einer Inkompressibilität von $\kappa = 240$ MeV. Sie enthält auch schwere Hyperonen.
- SCL3 $\Lambda\Sigma$ [5, 32]: SCL3 $\Lambda\Sigma$ ist eine auf einem *relativistischen mean-field Modell*, basierende Zustandsgleichung mit *chiraler SU(3) Symmetrie*. Sie enthält neben Nukleonen und Leptonen nur die leichten Hyperonen Σ^- und Λ . Das Model verwendet ein *logarithmisches Potential*, welches aus einem *lattice QCD Ansatz* motiviert ist.
- χ SU(3) [9, 28, 33, 34]: Die χ SU(3) Zustandsgleichung stammt aus einem aus der QCD motivierten hadronischen Modell mit *nicht-linearer Umsetzung der chiralen SU(3) Symmetrie*. Sie enthält auch schwere Hyperonen.

	κ (MeV)	$\rho_{th}(H)/\rho_0$	$p_{th}(\text{MeV}/\text{fm}^3)$
TNI2	250	2.83 (Σ^-)	35.67
TNI2u	250	4.01 (Λ)	87.50
TNI3	300	2.23 (Σ^-)	25.78
TNI3u	300	4.01 (Λ, Σ^-)	131.82
BHF(N,l)	281	-	-
BHF(N,H,l)	281	1.93* (Σ^-)	21.07
RMF240	240	1.92* (Σ^-)	26.57
SCL3 $\Lambda\Sigma$	211	2.24 (Λ, Σ^-)	34.46
χ SU(3)	276	2.33* (Σ^-)	47.68

Tabelle 5.1: Eigenschaften der verschiedenen HEoS: TNI2, TNI2u, TNI3, TNI3u [5, 29, 30], BHF(N,l), BHF(N,H,l) [9, 27, 31], RMF240 [1], SCL3 $\Lambda\Sigma$ [5, 32] und χ SU(3) [9, 28, 33, 34]: Mit nuklearer Inkompressibilität κ , Hyperon-Schwellenwert ρ_{th} in Vielfachen der normalen nuklearen Baryonendichte $\rho_0 = 0.17 \text{ fm}^{-3}$ für das zuerst auftretende Hyperon (H) und den zu ρ_{th} korrespondierenden Druck p_{th} . Die mit einem * markierten Schwellenwerte sind aus Abbildungen aus den jeweiligen Quellen abgelesen.

In Tabelle 5.1 sind einige Kenngrößen der verschiedenen Zustandsgleichungen aufgelistet. In den Abbildungen 5.2 und 5.3 sind die Verläufe von ϵ - p , p - ρ und p - μ_B der verschiedenen HEoS geplottet.

Bei niedrigen Dichten stimmen die HEoS noch gut überein, bei höheren Dichten hingegen divergieren sie, wie nach den bisherigen Ausführungen erwartet, zum Teil stark von einander.

Zwei Sachverhalte sind besonders interessant. Die HEoS TNI2 und TNI3 stimmen bis zu ihren Hyperon-Schwellenwerten ρ_{th} mit ihren entsprechenden universellen Zustandsgleichungen TNI2u und TNI3u überein. Erst jenseits der Hyperon-Schwelle verlaufen die universellen Zustandsgleichungen wesentlich flacher. Die universell eingeführte Drei-Körper-Kraft führt damit zu wesentlich härteren/steiferen Zustandsgleichungen mit wesentlich höheren ρ_{th} .

Die beiden Zustandsgleichungen BHF(N,l) und BHF(N,H,l) unterscheiden sich nur in der Behandlung der Hyperonfreiheitsgrade. Bis zur Hyperon-Schwelle $\rho_{th} = 1.93\rho_0$ sind die Zustandsgleichungen identisch. Die Zustandsgleichung ohne Hyperonen BHF(N,l) ist jenseits von ρ_{th} wesentlich härter als die Zustandsgleichung mit Hyperonen BHF(N,H,l). Die Hyperonen führen zu einer wesentlich weicheren Zustandsgleichung. Dies ist ein allgemeiner Effekt von Hyperonen auf Zustandsgleichungen [5, 9].

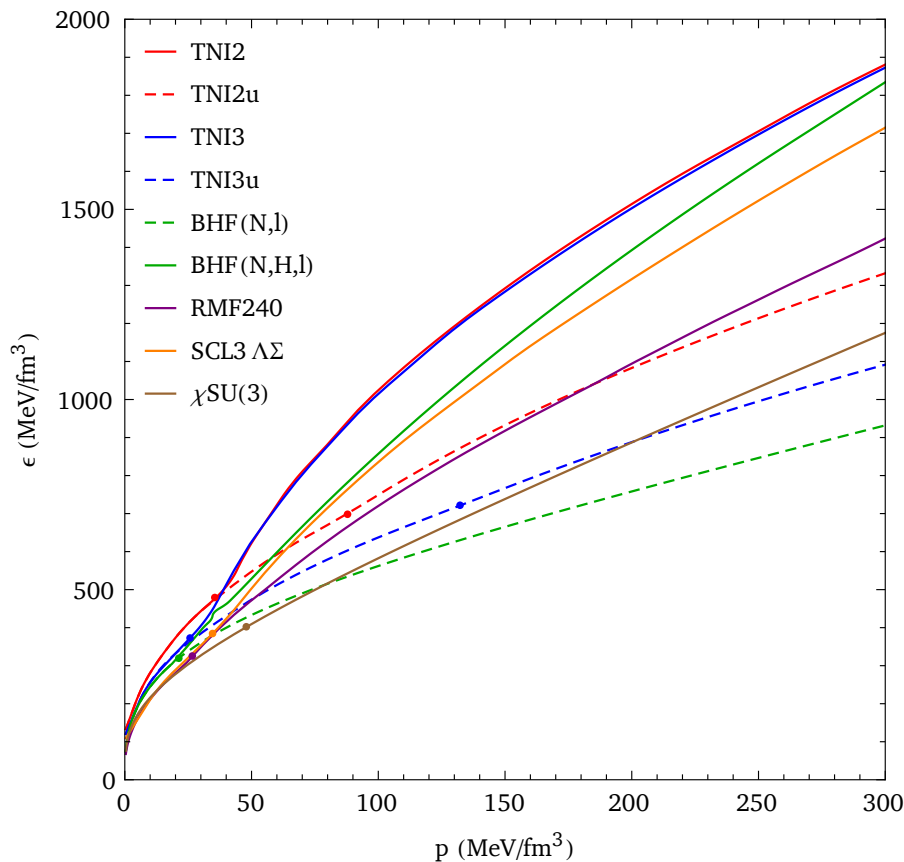


Abbildung 5.2: Energiedichte als Funktion des Druckes für die verschiedenen hadronischen Zustandsgleichungen. Die Schwellenwerte für das Auftreten von Hyperonen sind durch Punkte visualisiert.

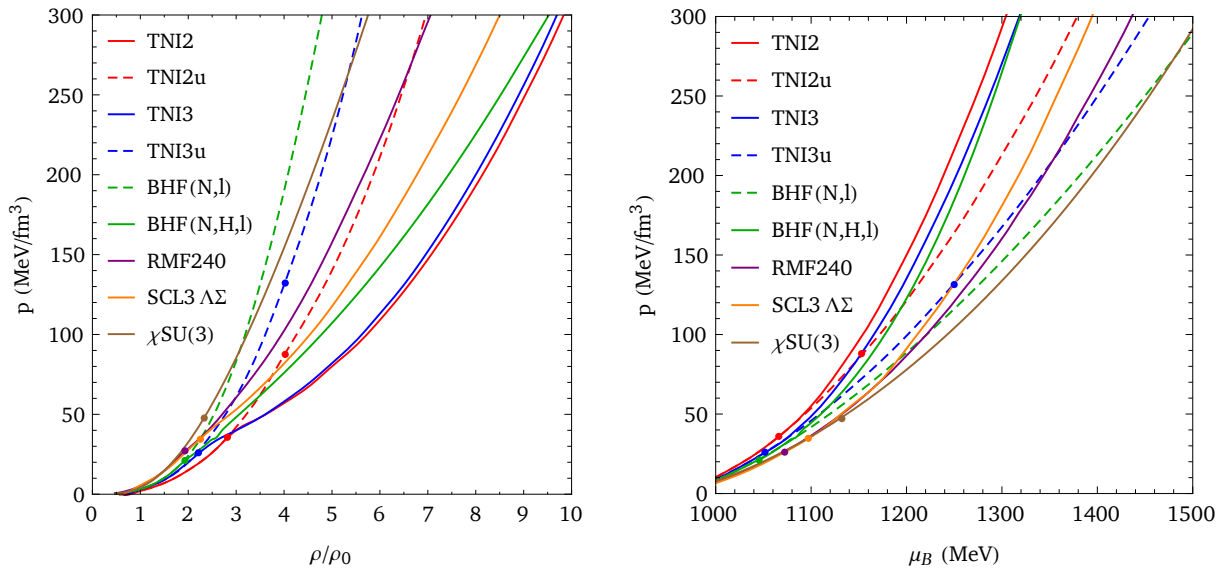


Abbildung 5.3: Druck der hadronischen Zustandsgleichungen als Funktion der Baryondichte (links) und des Baryonen chemischen Potentials (rechts). Die Schwellenwerte für das Auftreten von Hyperonen sind durch Punkte visualisiert.

5.3 Masse-Radius/Baryondichte-Kurven und Maximalmasse

Mit der BPS/NV Zustandsgleichung für die Kruste ($\rho < 0.47\rho_0$) nach Abschnitt 5.1 und den hadronischen Zustandsgleichungen nach Abschnitt 5.2 wurde die TOV Gleichung gelöst. Dabei wurde zwischen der Kruste und der hadronischen Phase ein cp-Phasenübergang bei $0.41 \text{ MeV}/\text{fm}^3$ angenommen. Dieser wurde nicht explizit nach Abschnitt 7.1 konstruiert, sondern für alle HEoS verwendet.

In Tabelle 5.2 sind die maximalen Massen der resultierenden Sterne mit den zugehörigen Radien und Zentraldrücken angegeben. Entsprechende Verläufe, Masse über Radius und Masse über zentraler Baryondichte, sind in den Abbildungen 5.4 und 5.5 dargestellt.

Die Zustandsgleichungen TNI2 und TNI3 mit der phänomenologisch motivierten Drei-Körper-Kraft resultieren in Sternen mit sehr geringen maximalen Massen und Radien. Diese beiden Zustandsgleichungen sind äußerst weich und sind daher nicht in der Lage maximale Massen in der Größenordnung von 1.4 Sonnenmassen zu produzieren.

Die entsprechenden HEoS TNI2u und TNI3u mit universell eingeführter Drei-Körper-Kraft hingegen liefern Neutronensterne mit Maximalmassen von $1.52M_\odot$ und $1.83M_\odot$.

Auch die SCL3 $\Lambda\Sigma$ und BHF(N, H, l) produzieren vergleichsweise leichte Sterne mit Maximalmassen von $1.36M_\odot$ und $1.25M_\odot$. Die TNI3u und die $\chi\text{SU}(3)$ Zustandsgleichungen sind die einzigen HEoS mit Hyperonen, welche mit $1.83M_\odot$ und $1.88M_\odot$ maximale Massen von an die $2M_\odot$ produzieren. Dennoch sind diese deutlich unterhalb der Fehlerbänder der beiden massiven Neutronensterne PSR J1614-2230 und PSR J0348+0432. Nur die harte/steife Zustandsgleichung ohne Hyperonen, BHF(N, l), hat eine Maximalmasse von über $2M_\odot$.

Rein hadronische Zustandsgleichungen mit Hyperonen sind für die Beschreibung von massiven $2M_\odot$ Neutronensternen schon auf Grund der geringen Maximalmassen nicht geeignet.

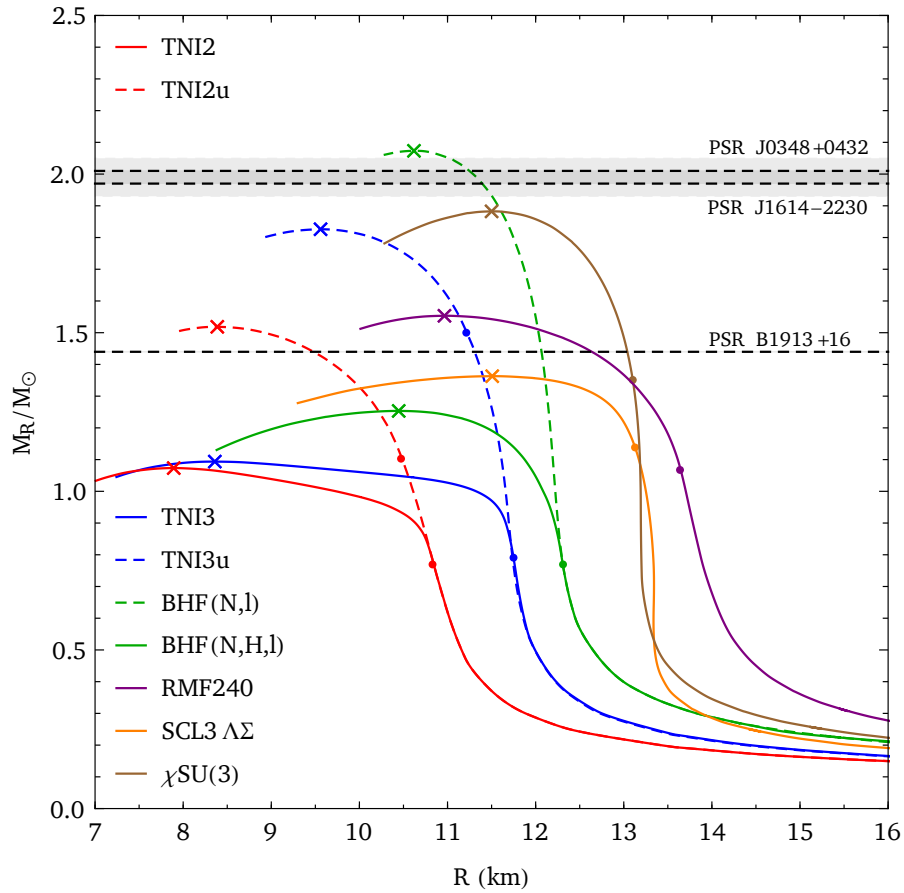


Abbildung 5.4: Masse-Radius-Kurven der verschiedenen Sterne mit reinen HEoS. Die Schwellenwerte für das Auftreten von Hyperonen sind durch Punkte visualisiert. Die Sterne maximaler Masse sind durch Kreuze markiert. Zum Vergleich sind die Massen der Neutronensterne PSR B1913+16, PSR J1614-2230 und PSR J0348+0432 mit Fehlerbalken eingezeichnet.

	M_{\max}/M_{\odot}	R (km)	ρ_c/ρ_0	p_c (MeV/fm ³)
TNI2	1.07	7.89	15.09	652.3
TNI2u	1.52	8.39	11.13	954.7
TNI3	1.09	8.36	13.67	573.4
TNI3u	1.83	9.56	8.15	784.7
BHF(N,l)	2.07	10.62	6.48	593.1
BHF(N,H,l)	1.25	10.45	7.67	210.5
RMF240	1.55	10.96	7.11	303.9
SCL3 $\Lambda\Sigma$	1.36	11.51	6.02	162.2
χ SU(3)	1.88	11.50	5.90	312.9

Tabelle 5.2: Maximallmasse, entsprechender Radius und die zugehörigen zentralen Baryonendichten/Drücke für Neutronensterne mit hadronischer Zustandsgleichung. Für die Kruste dieser Sterne wurde nach Abschnitt 5.1 die BPS/NV Zustandsgleichung verwendet.

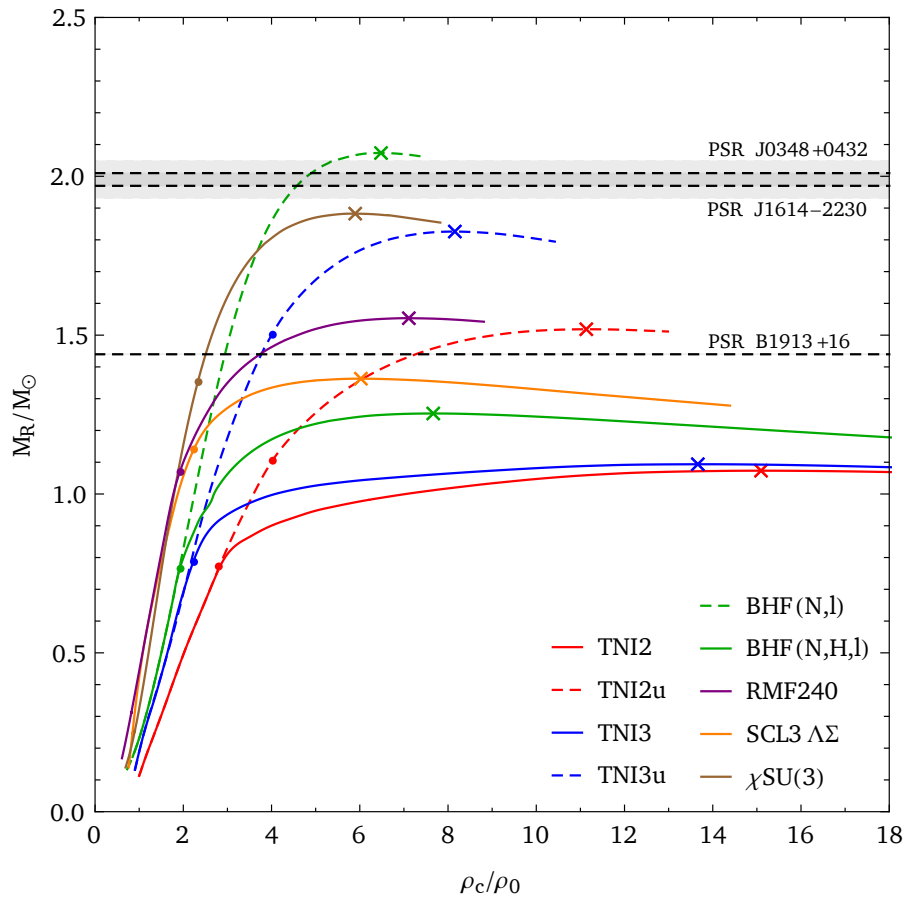


Abbildung 5.5: Masse-zentrale Baryondichte-Kurven der verschiedenen HEoS. Die Schwellenwerte für das Auftreten von Hyperonen sind durch Punkte visualisiert. Die Sterne maximaler Masse sind durch Kreuze markiert. Zum Vergleich sind die Massen der Neutronensterne PSR B1913+16, PSR J1614-2230 und PSR J0348+0432 mit Fehlerbalken eingezeichnet. Sterne mit höheren ρ_c als der Stern maximaler Masse sind nach Gleichung (4.3), $dM/d\rho_c < 0$, instabil.

Neben der maximalen Masse und den entsprechenden Radien sind auch die korrespondierenden zentralen (Baryonen)Dichten interessant. Abbildung 5.5 zeigt die M - ρ_c Kurven der verschiedenen HEoS. Nach Kapitel 1 sollte die Baryondichte im Kern eines Neutronensterns unter $10\rho_0$ liegen. Des Weiteren ist eine Beschreibung der Neutronensternmaterie durch eine hadronische Zustandsgleichung bei hohen Dichten $\rho \gtrsim 4\rho_0$ nicht mehr adäquat. Nach Abschnitt 1 liegt Materie bei derartigen Dichten nicht mehr nur in Form von gebundenen Hadronen vor. Damit ist eine adäquate Beschreibung von Neutronensternen durch äußerst weiche hadronische Zustandsgleichungen (TNI2 und TNI3) allein in Bezug auf die auftretenden Baryondichten nicht möglich. Für die härteren HEoS existieren nach Abbildung 5.5 stabile Neutronensterne mit zentralen Baryondichten von um die $7\rho_0$. Eine Beschreibung von Materie bei derartigen Dichten durch rein hadronische Zustandsgleichungen ist aus Sicht der QCD problematisch.

5.4 Struktur eines Neutronensterns mit HEoS

In Abbildung 5.6 ist die Struktur eines Neutronensterns mit rein hadronischer Zustandsgleichung in Form von exemplarischen p - r und ϵ - r Kurven gezeigt. Für die Kruste wurde die BPS/NV-Zustandsgleichung verwendet und für den Kern die SCL3 $\Lambda\Sigma$ Zustandsgleichung. Der mit einem zentralen Druck von $140 \text{ MeV}/\text{fm}^3$ stabile Neutronenstern hat eine Masse von $1.36M_{\odot}$ und einen Radius von 11.72 km . Der äußere Teil des Kerns besteht nur aus Nukleonen und Leptonen. Ab der Hyperonen-Schwelle ρ_{th} besteht der Kern aus Nukleonen, Hyperonen und zu einem geringen Anteil aus Leptonen. Für SCL3 $\Lambda\Sigma$ liegt diese Schwelle nach Tabelle 5.1 bei $2.24\rho_0$ mit einem entsprechenden Druck von $34.46 \text{ MeV}/\text{fm}^3$. Für den dargestellten Beispielstern wird dieser Druck bei einem Radius von 6.41 km erreicht.

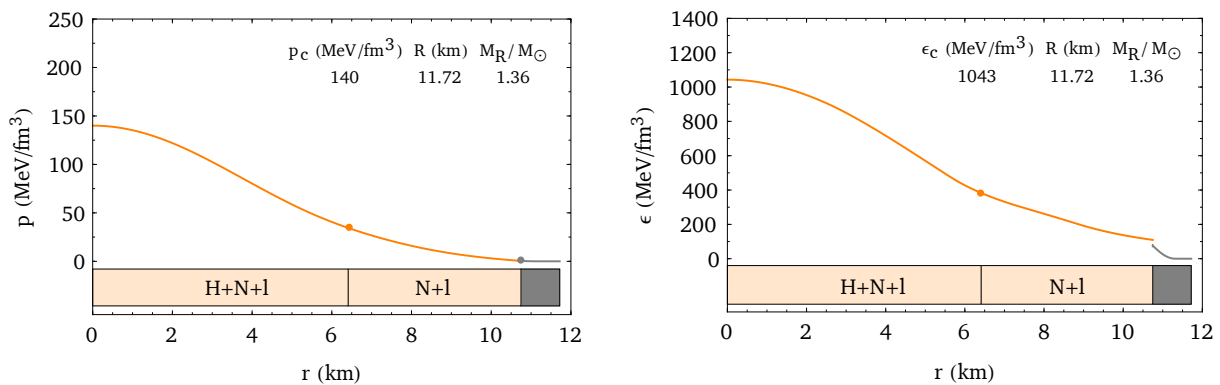


Abbildung 5.6: Exemplarische (links) Druck-Radius-Kurve und (rechts) Energiedichte-Radius-Kurve für einen stabilen Neutronenstern mit rein hadronischer Zustandsgleichung. Für die Kruste (in grau) wurde die BPS/NV Zustandsgleichung verwendet. Für den Kern wurde die SCL3 $\Lambda\Sigma$ Zustandsgleichung gewählt. Der innere Kern des Sterns besteht aus Nukleonen, Hyperonen und einem geringen Leptonen-Anteil. Der äußere Teil des Kerns besteht aus Nukleonen und Leptonen.

6 Zustandsgleichung für Quarkmaterie und Quarksterne

Im folgenden Kapitel werden zunächst einige aus dem $(2+1)$ -*flavor Nambu–Jona-Lasinio (NJL)* Modell stammende Zustandsgleichungen für kalte, stark wechselwirkende, deconfined Quarkmaterie vorgestellt.

Anschließend wird die TOV Gleichung für diese reine Quarkmaterie (mit und ohne hadronische BPS/NV Kruste) gelöst. Die daraus resultierenden Sterne, werden in dieser Arbeit, auf Grund ihrer Zustandsgleichung Quarksterne genannt. Diese Sterne sind nach der TOV Gleichung bis zu gewissen zentralen Dichten stabil. Die Anwendbarkeit der hier verwendeten QEOs ist bei niedrigen Dichten $\rho \lesssim 4\rho_0$, nach dem QCD Phasendiagramm aus Kapitel 1, anzuzweifeln. Die Möglichkeit für die Existenz solcher Sterne ist nicht Gegenstand dieser Arbeit. Grundlegende Überlegungen zur Existenz solcher Sterne werden in [1] gemacht.

Für diese Arbeit sind die Eigenschaften und die Struktur der Lösungen der TOV Gleichung mit reinen QEOs dennoch für das folgende Kapitel 7 zu Hybridsterne interessant. Da die Quark Zustandsgleichungen in Hybridsterne für hohe Dichten verwendet werden, sind sie entscheidend für die äußeren Eigenschaften, wie Masse und Radius, und auch für die Struktur der Hybridsterne bei hohen Dichten. Um diese Eigenschaften von Hybridsterne in Relation zu setzen wurden sowohl Sterne mit rein hadronischen Zustandsgleichungen als auch in diesem Kapitel welche mit reinen Quark Zustandsgleichungen berechnet.

6.1 Zustandsgleichungen für Quarkmaterie

Das $(2+1)$ -*flavor Nambu–Jona-Lasinio (NJL)* Modell ist eine komplexe, effektive Theorie der QCD. Mit ihr ist es möglich Zustandsgleichungen für kalte stark-wechselwirkendes Quark Materie, bestehend aus den drei Flavours/Quarks Up, Down und Strange, herzuleiten. Im NJL Modell können weder Gluonen-Freiheitsgrade noch das Confinement beschrieben werden. Bei kalter Quark Materie spielen die Confinement-Eigenschaft der QCD und die Gluon-Freiheitsgerade jedoch keine wesentliche Rolle [9]. Daher ist es möglich im Rahmen des NJL Modells kalte, stark-wechselwirkende, deconfined Quark Materie zu beschreiben. Das Modell an sich hat sechs unabhängige Parameter: die Massen der drei Quarks, $m_{u,d}, m_s$, den *UV cutoff*, Λ , sowie die drei Kopplungskonstanten, G_S, G_D und $g_V(G_V)$. Die Kopplungskonstante G_S ist mit der $U(3)_L \times U(3)_R$ *symmetrischen Vier-Fermion Wechselwirkung* verbunden. G_D beschreibt die Stärke der *Kobayashi–Maskawa–’t Hooft (KMT) Sechs-Fermion Wechselwirkung*. Die letzte Kopplungskonstante $g_V(G_V)$ ist mit den zwei Typen der Vektor-Wechselwirkung verbunden. Bis auf die letzte Kopplungskonstante der Vektor Wechselwirkung $g_V(G_V)$ sind die anderen Konstanten in verschiedenen Parametersätzen angegeben. Weit verbreitet sind der HK (*Hatsuda und Kunihiro*) und der RKH (*Rehberg, Klevansky und Hüfner*) Parametersatz.

	Λ (MeV)	$G_S \Lambda^2$	$G_D \Lambda^5$	$m_{u,d}$ (MeV)	m_s (MeV)
HK	631.4	3.67	9.29	5.5	135.7
RKH	602.3	3.67	12.36	5.5	140.7

Tabelle 6.1: HK (*Hatsuda und Kunihiro*) und RKH (*Rehberg, Klevansky und Hüfner*) Parametersätze des $(2+1)$ -*flavor NJL* Modells [5].

Die Größe der Vektor-Kopplungskonstante $g_\nu(G_V)$ ist nicht gut bestimmt. In [5] wird auf Basis neuerer Untersuchungen folgende Reichweite angenommen:

$$0 \leq \frac{g_\nu}{G_S} \leq 1.5. \quad (6.1)$$

Aus [5] wurden vier Quarkzustandsgleichungen übernommen. Ihre Bezeichnung beziehen sich auf den verwendeten Parametersatz und die angenommene Vektor-Kopplungs-Konstante: HK($g_\nu = 0$), HK($g_\nu = 1G_S$), HK($g_\nu = 1.5G_S$) und RKH($g_\nu = 0$).

Ähnlich wie für die Hyperonen, im Fall der hadronischen Zustandsgleichungen, gibt es auch in den Quark Zustandsgleichungen einen Schwellenwert für das Auftreten von Strange-Quarks. Dieser Schwellenwert ist nur vom Parametersatz, nicht von g_ν , abhängig und für den HK Parametersatz ist $\rho_{th} = 4\rho_0$ und für den RKH Parametersatz gilt $\rho_{th} = 3.9\rho_0$ [5]. Unterhalb der jeweiligen Strange-Quark-Schwelle besteht das System nur aus Up und Down Quarks und einem Leptonen(Elektronen)-Gas. Für Dichten oberhalb ρ_{th} bekommt das System Strangeness-Freiheitsgrade. Diese Schwelle wird erreicht, wenn das chemische Potential der s-Quarks die Masse der Strange Quarks überschreitet: $\mu_s > M_s$. Mit zunehmender Strange-Quark-Dichte nimmt die Elektronendichte ab.

Die Quarkmaterie befindet sich, wie auch die hadronische Materie, im β -Equilibrium

$$\mu_d = \mu_s = \mu_u + \mu_e \quad (6.2a)$$

$$(\mu_e = \mu_\mu). \quad (6.2b)$$

Global gelten des Weiteren Ladungserhaltung/Neutralität

$$0 = \frac{2}{3}n_u - \frac{1}{3}n_d - \frac{1}{3}n_s - n_e(-n_\mu), \quad (6.3)$$

und auch die Baryondichte

$$\rho = \frac{1}{3}(n_u + n_d + n_s) \quad (6.4)$$

ist erhalten. Für die Anteile n_i/n_{tot} der einzelnen Teilchen gilt $n_{tot} = n_u + n_d + n_s = 3\rho$. Myonen treten letztlich nicht auf, da $\mu_e < M_\mu$ für alle Dichten erfüllt ist.

In [9] wurde das (2+1)-flavor NJL Modell erweitert um die Effekte der Farbsupraleitung mit einzubeziehen. Bei niedrigen Dichten liegen keine Strange Quarks im System vor. Es bilden sich *Cooper-Paare* aus u und d Quarks, analog der Situation in einem metallischen Supraleiter nach der *BCS-Theorie*. Die Zustandsgleichung für Quarkmaterie in dieser sogenannten 2SC Phase ähnelt stark der Zustandsgleichung ohne Farbsupraleitung. Bei hohen Dichten treten Strange-Quarks auf und diese bilden mit den Up und Down Quarks ein sogenanntes *color-flavor locked (CFL)* Kondensat. Die Zustandsgleichung eines solchen CFL Kondensates ist zunächst wesentlich weicher als die der vorhergegangenen 2SC-Phase. In der CFL Phase beträgt der Anteil an s Quarks $n_s = 1/3n_{tot}$. Dahingegen befinden sich in der 2SC Phase kaum s Quarks [9]. Dieser sprunghafte Anstieg der s Quarks drückt sich in einem Phasenübergang erster Ordnung mit konstantem Druck zwischen der 2SC und CFL Phase aus.

Aus [9] wurden zwei Zustandsgleichungen verwendet, welche die Farbsupraleitung in zwei Phasen (2SC und CFL) für HK($g_\nu = 0$) und RKH($g_\nu = 0$) berücksichtigen. Der Phasenübergang zwischen 2SC und CFL Phase ist durch die in der folgenden Tabelle 6.2 angegebenen Größen charakterisiert.

QEoS	μ_B (MeV)	p (MeV/fm ³)	ρ_{2SC}/ρ_0	ρ_{CFL}/ρ_0	ϵ_{2SC} (MeV)	ϵ_{CFL} (MeV)
HK($g_v = 0$)	1257.0	110.6	3.96	5.69	736.0	1105.6
RKH($g_v = 0$)	1239.0	80.4	3.71	5.35	702.0	1046.3

Tabelle 6.2: Thermodynamische Größen am 2SC-CFL Phasenübergang von HK($g_v = 0$) + CS und RKH($g_v = 0$) + CS nach [9].

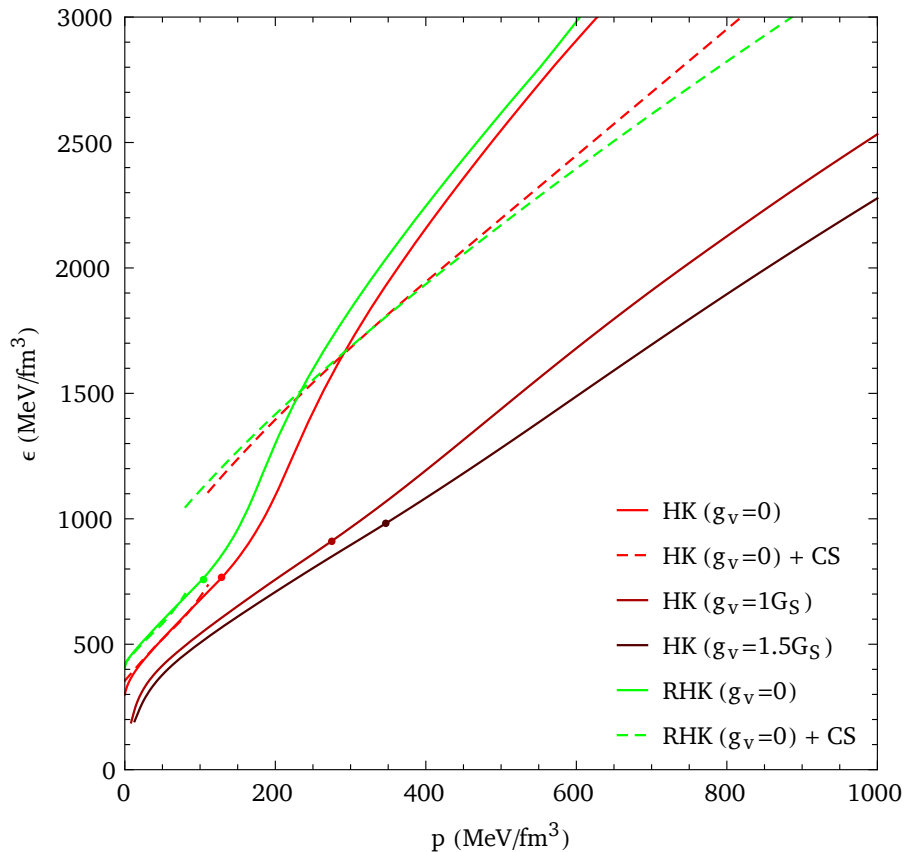


Abbildung 6.1: Energiedichte als Funktion des Druckes für die verschiedenen Quark Zustandsgleichungen. Die Schwellenwerte für das Auftreten von Strange Quarks sind durch Punkte visualisiert. Bei den Zustandsgleichungen mit Farbsupraleitung (HK($g_v = 0$) + CS und RKH($g_v = 0$) + CS) entspricht dieser Schwellenwert dem 2SC-CFL Phasenübergang. Dieser ist in der Auftragung deutlich als Phasenübergang erster Ordnung mit konstantem Druck erkennbar.

Die Abbildungen 6.1 und 6.2 zeigen die verschiedenen Zustandsgleichungen. Der cp-Phasenübergang zwischen der 2SC und CFL Phase der QEoS mit Farbsupraleitung (HK($g_v = 0$) + CS und RKH($g_v = 0$) + CS) ist deutlich erkennbar. Die entsprechenden QEoS ohne Farbsupraleitung (HK($g_v = 0$) und RKH($g_v = 0$)) weisen keinen derartigen Phasenübergang auf, da bei ihnen der Anteil an s Quarks kontinuierlich ab der ρ_{th} ansteigt.

Die Vektor-Kopplung (HK($g_v = 1G_S$) und HK($g_v = 1.5G_S$)) führt zu wesentlich härteren/steiferen Zustandsgleichungen.

Eine weitere charakteristische Eigenschaft haben alle QEoS ohne Vektorkopplung gemein: Bei verschwindenden Drücken $p = 0$ haben sie extrem hohe korrespondierende Energie- und Baryonendichten. Die Baryonendichten für $\rho(p = 0)$ erstrecken sich von etwa $1.7\rho_0$ bis hin zu etwa $2.2\rho_0$. Diese Tatsache hat enorme Auswirkungen auf die im folgenden, in Abschnitt 6.2, beschriebenen Sterne.

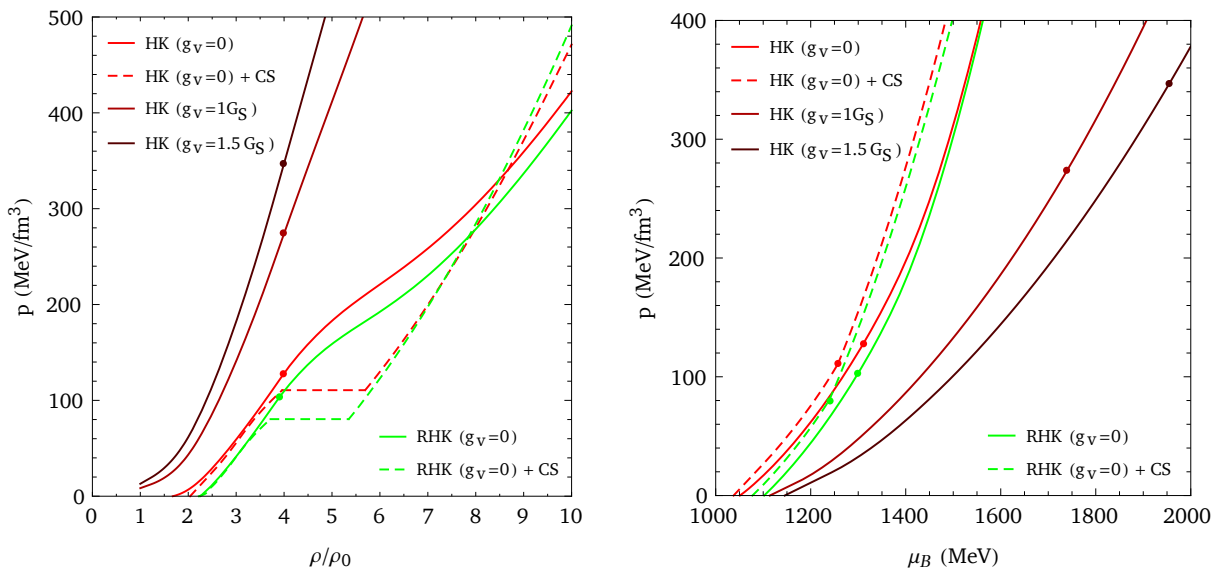


Abbildung 6.2: Druck der Quark Zustandsgleichungen als Funktion der Baryonendichte (links) und des Baryonen chemischen Potentials (rechts). Die Schwellenwerte für das Auftreten von Strange Quarks sind durch Punkte visualisiert. Bei den Zustandsgleichungen mit Farbsupraleitung (HK($g_V = 0$) + CS und RHK($g_V = 0$) + CS) entspricht dieser Schwellenwert dem 2SC-CFL Phasenübergang. Dieser ist in der Auftragnungen deutlich als Phasenübergang erster Ordnung mit konstantem Druck erkennbar.

6.2 Quarksterne

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit den Lösungen der TOV Gleichung mit Quark Zustandsgleichungen. Neben Sternen mit den reinen QEOs nach Abschnitt 6.1 werden auch Quarksterne mit einer BPS/NV-Kruste nach Abschnitt 5.1 berechnet.

Die Masse-Radius Kurven von „puren“ Quarksternen, welche aus den reinen Quark Zustandsgleichungen ohne Vektor-Kopplung resultieren, sind in Abbildung 6.3 (links) dargestellt. Es fällt ein bis dato atypischer Verlauf auf. Selbst für kleine Initialdrücke bilden sich gebundene, stabile Sterne. Diese Sterne haben geringe Massen und kleine Radien. Sie sind als Lösungen der TOV Gleichung möglich, da die durch die vorgestellten Zustandsgleichungen beschriebene Quark-Materie *selbst-bindend* ist: Die beschriebene Quark-Materie hat auch bei verschwindenden Drücken hohe Energiedichten, im Vergleich zu hadronischen Zustandsgleichungen. Daher bilden sich auch für beliebig kleine Initialdrücke nach der TOV Gleichung stabile reine Quarksterne. Diese reinen Quarksterne haben extrem harte Oberflächen [1].

Für die Zustandsgleichungen mit Vektor-Kopplung konnten keine reinen Quarksterne berechnet werden, da die Quarkzustandsgleichungen mit Vektor-Kopplung in [5] nur bis $1\rho_0$ tabelliert sind.

Um Masse-Radius-Kurven von Quarksternen mit den im folgenden Kapitel 7 vorkommenden Kurven vergleichen zu können, wurden auch noch Quarksterne mit einer nuklearen Kruste berechnet. Diese Sterne werden für niedrige Dichten $\rho < \rho_K = 0.08 \text{ fm}^{-3}$ mit der BPS/NV Zustandsgleichung beschrieben: analog zu Abschnitt 5.3 wurde für Drücke unter 0.41 MeV/fm^3 die BPS/NV Zustandsgleichung verwendet. An der Maximalmasse und damit den $M - \rho_c$ Kurven ändert dieser Ansatz nichts. Jedoch haben diese Quarksterne mit Kruste wieder die, in Abbildung 6.3 (rechts) dargestellten, typischen Masse-Radius Verläufe für nicht-selbstbindende kompakte Sterne.

Die steifen QEOs mit Vektor-Kopplung haben erwartungsgemäß hohe Maximalmassen bei vergleichsweise niedrigen zentralen Dichten.

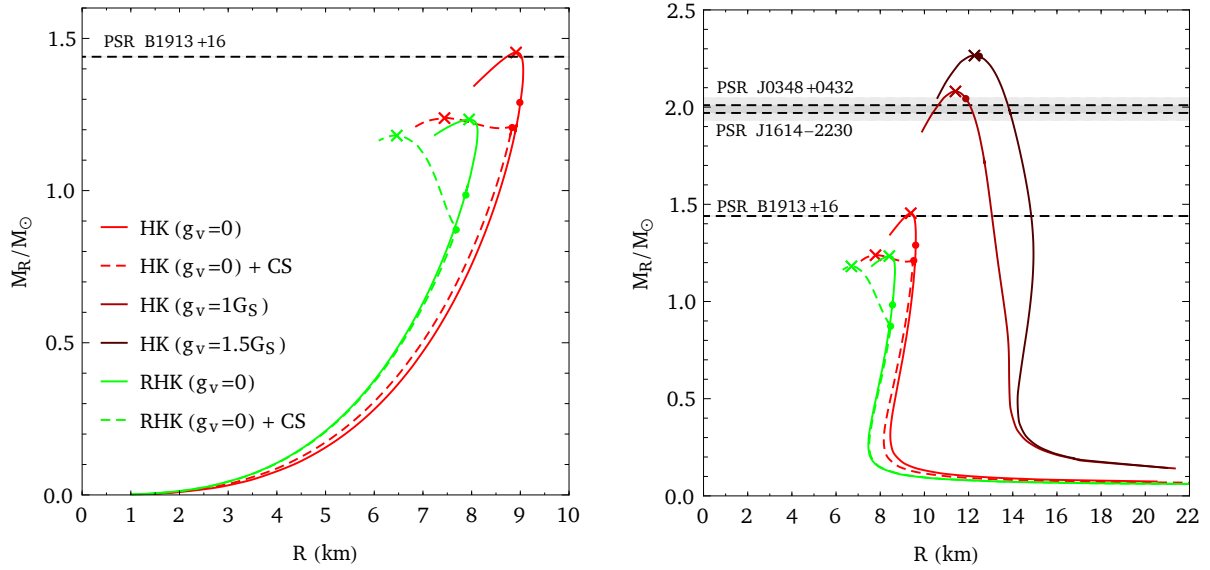


Abbildung 6.3: Masse-Radius-Kurven der verschiedenen QEOs. (Links) ohne hadronische Kruste und (rechts) mit hadronischer BPS/NV Kruste. Die Schwellenwerte für das Auftreten von Strange Quarks sind durch Punkte visualisiert. Die Sterne maximaler Masse sind durch Kreuze markiert. Zum Vergleich sind die Massen der Neutronensterne PSR B1913+16, PSR J1614-2230 und PSR J0348+0432 mit Fehlerbalken eingezeichnet.

Die Sterne mit farbsupraleitender Zustandsgleichung sind bis zum 2SC-CFL Übergang, denen ohne Farbsupraleitung äußerst ähnlich. Sterne mit CFL Phasen sind jedoch zu den korrespondierenden Sternen ohne Farbsupraleitung sehr verschieden. Auf Grund der zunächst wesentlich weicheren Zustandsgleichung nach dem Phasenübergang knicken die Masse-Radius und entsprechend auch die $M-\rho_c$ Kurven ab: $dM/d\rho_c$ ist am Phasenübergang nicht stetig. In der CFL-Phase ist $dM/d\rho_c$ wesentlich geringer als in der 2SC Phase. Die Ableitung nimmt mit steigender Dichte weiter ab bis in der CFL-Phase die Maximalmasse erreicht wird. Für die hier beschriebenen Quarksterne gibt es stabile CFL Phasen. $dM/d\rho_c$ ist zwar nicht stetig aber für alle Sterne mit $\rho_c < \rho_c(M_{max})$ echt größer Null. Die Sterne mit CFL Phasen im inneren Kern haben jedoch mitunter extrem hohe (Baryonen)Dichten.

In Tabelle 6.3 sind die Maximalmassen mit den zugehörigen zentralen Drücken und Baryondichten der verschiedenen Quarksterne angegeben. Zudem sind auch die zu M_{max} korrespondierenden Radien für Sterne mit und ohne Kruste angegeben.

Die Struktur eines exemplarischen Sterns mit stabiler CFL Phase ist in Abbildung 6.5 dargestellt.

	M_{max}/M_\odot	R_{pure} (km)	R_{Kruste} (km)	ρ_c/ρ_0	p_c (MeV/fm ³)
HK($g_v = 0$)	1.45	8.91	9.38	7.08	251.7
HK($g_v = 0$) + CS	1.24	7.44	7.79	12.45	719.4
HK($g_v = 1G_S$)	2.08	-	11.40	5.08	422.3
HK($g_v = 1.5G_S$)	2.26	-	12.26	4.33	406.1
RKH($g_v = 0$)	1.23	7.95	8.41	8.13	285.7
RKH($g_v = 0$) + CS	1.18	6.46	6.59	15.50	1268.8

Tabelle 6.3: Maximalmasse und die zugehörigen zentralen Baryondichten/Drücke für Sterne mit Quark Zustandsgleichung. R_{pure} bezieht sich auf den zu M_{max} korrespondierenden Radius für den Fall eines puren Quarksterns. R_{Kruste} bezieht sich auf den Radius eines entsprechenden Quarksterns mit Kruste, nach Abschnitt 5.1 durch die BPS/NV Zustandsgleichung beschrieben.

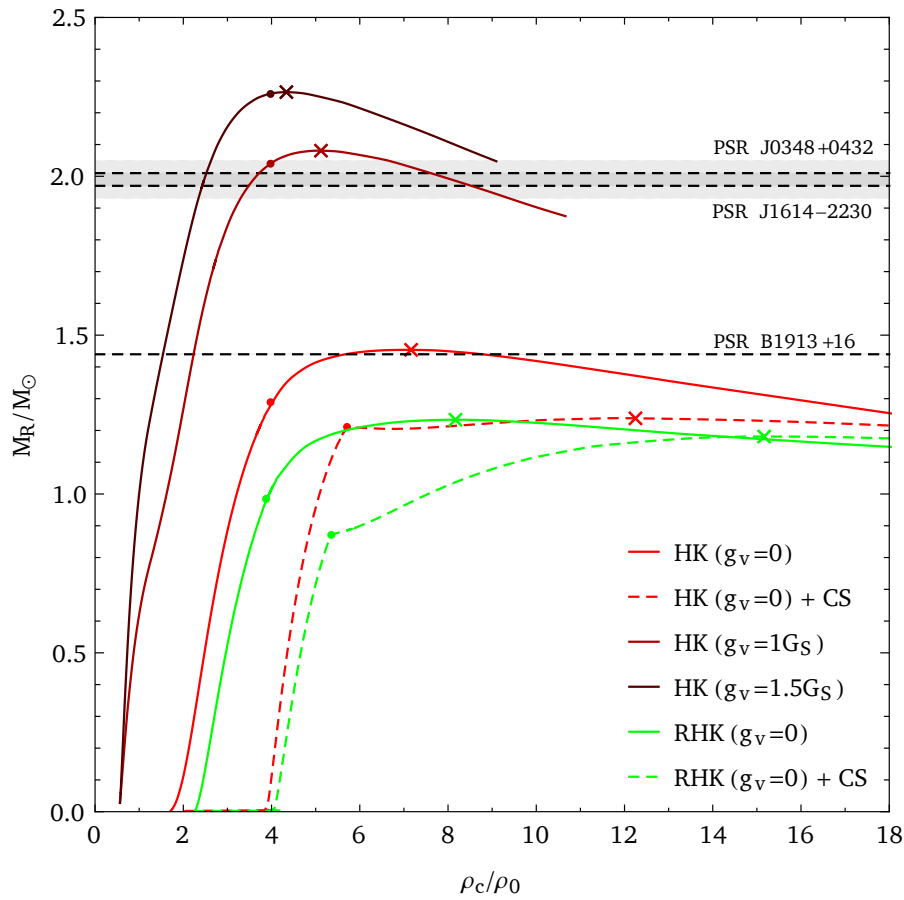


Abbildung 6.4: Masse-zentrale Baryondichte-Kurven der verschiedenen QoS. Auf diesen Verlauf hat die Kruste keinen signifikanten Einfluss. Die Schwellenwerte für das Auftreten von Strange Quarks sind durch Punkte visualisiert. Die Sterne maximaler Masse sind durch Kreuze markiert. Zum Vergleich sind die Massen der Neutronensterne PSR B1913+16, PSR J1614-2230 und PSR J0348+0432 mit Fehlerbalken eingezeichnet.

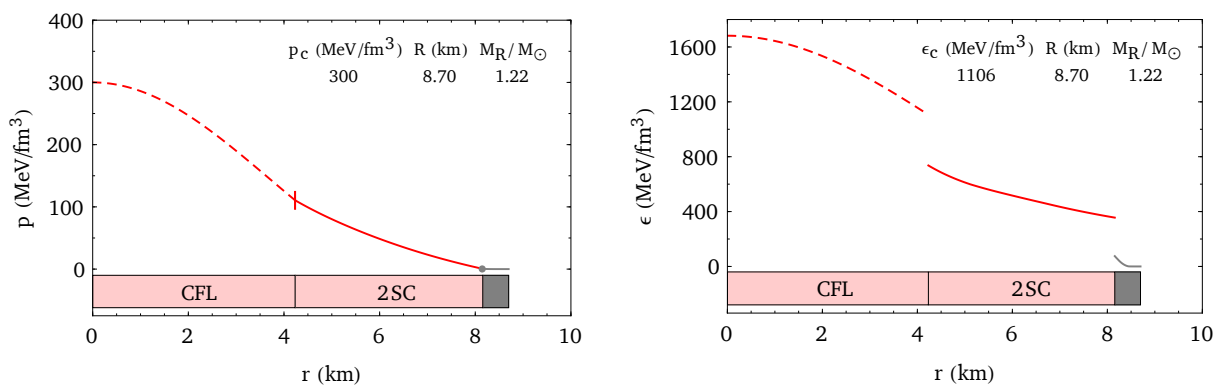


Abbildung 6.5: Struktur eines Quarksterns mit Kruste: Es handelt sich um einen stabilen Quarkstern mit $HK(g_v = 0) + CS$ Zustandsgleichung und einem zentralen Druck von 300 MeV/fm^3 . Der Stern hat eine Stabile CFL Phase im inneren Kern und im äußeren Kern eine entsprechende 2SC Phase. Die Phasenübergänge zwischen den Quarkphasen und der BPS/NV EoS sind in der p - r -Kurve (links) markiert und in der ϵ - r -Kurve (rechts) deutlich zu erkennen.

7 Hybridsterne

Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit sogenannten Hybridsternen. Diese Art von Neutronensternen wird durch eine Hybridzustandsgleichung beschrieben. Derartige Zustandsgleichungen verwenden bei niedrigen und mittleren Dichten eine hadronische Zustandsgleichung nach Kapitel 5 und bei höheren Dichten eine Quarkzustandsgleichung nach Kapitel 6.

In den folgenden zwei Abschnitten werden zwei Verfahren zur Konstruktion einer nach Abschnitt 2.6 thermodynamisch konsistenten und kausalen Hybridzustandsgleichung vorgestellt und angewendet. Die resultierenden Hybridsterne werden mit den Ergebnissen für rein hadronische und Quarksterne verglichen und in Bezug zu den empirischen Daten für Neutronensterne gesetzt.

7.1 Phasenübergang erster Ordnung mit konstantem Druck

Die konventionelle, weit verbreitete Methode zur Konstruktion einer Hybridzustandsgleichung bestand bisher darin zwischen hadronischer und Quark-Phase einen Phasenübergang erster Ordnung mit konstantem Druck (*constant pressure, kurz cp*) zu konstruieren [1]. In den zwei Phasen sind nach Gibbs am Phasenübergang die Drücke, Baryonen chemische Potentiale und Temperaturen gleich:

$$\mu_H = \mu_Q, \tag{7.1a}$$

$$T_H = T_Q, \tag{7.1b}$$

$$p_H = p_Q. \tag{7.1c}$$

Diese Gleichungen beschreiben ein chemisches, thermales und mechanisches Gleichgewicht zwischen der hadronischen (H) und Quark (Q) Phase [1]. Energie und Baryondichte sind in den beiden Phasen nicht gleich.

Bei einem derart modellierten Phasenübergang gehen die als Punktteilchen betrachteten Hadronen als unabhängige Freiheitsgerade ein. Diese Beschreibung ist jedoch nicht vollkommen gerechtfertigt, da Hadronen selbst aus Sicht der QCD ausgedehnte Objekte aus confined Quarks und Gluonen sind [5]. Außerdem müsste ein solches System aus Hadronen und Quarks in der gemischten Phase stark wechselwirken. Diese Wechselwirkung zwischen den Hadronen und den deconfined Quarks wird weder in der rein hadronischen, noch in der reinen Quark Zustandsgleichung berücksichtigt. Damit ist die Gültigkeit der HEoS und QEoS um den Phasenübergang fraglich [5].

Betrachtet man elektrisch neutrale hadronische und Quarkmaterie so genügt eine Konstruktion nach Gleichung (7.1). Es ist jedoch auch möglich, elektrische Neutralität in der Mischphase durch eine positiv geladene hadronische und negativ geladene Quarkphase zu erreichen [21]. In diesem Fall muss ein Phasenübergang unter Berücksichtigung des Elektronen chemischen Potentials μ_e konstruiert werden: $p_H(\mu_B, \mu_e) = p_Q(\mu_B, \mu_e)$. Eine derartige Konstruktion wird unter anderem in [21] thematisiert.

Unabhängig von diesen eher theoretischen Problemen mit dem cp-Phasenübergang ist die Konstruktion eines solchen nicht mit allen HEoS/QEoS möglich. Da in dieser Arbeit nur kalte Materie ($T = 0$) beschrieben wird, ist das thermale Gleichgewicht nach Gleichung (7.1b) für alle HEoS und QEoS gegeben. Damit bleibt die notwendige Bedingung eines Schnittpunktes von HEoS und QEoS in der μ - p -Ebene für einen Phasenübergang nach Gleichung (7.1). Dies führt zu der Tatsache, dass nur zwischen harten hadronischen und weichen Quark Zustandsgleichungen cp-Phasenübergänge konstruiert werden können. Abbildung 7.1 illustriert diesen Zusammenhang: nur zwischen den vier härtesten HEoS TNI3u, BHF(N,1), RMF240 und χ SU(3) und den weicheren QEoS ohne Vektor-Kopplung

sind cp-Phasenübergänge möglich. Abbildung 7.2 zeigt die Phasenübergänge/Schnittpunkte in der μ - p -Ebene für die verschiedenen HEoS mit den QEOs $\text{HK}(g_v = 0)|N$, $\text{HK}(g_v = 0) + \text{CS}$, $\text{RKH}(g_v = 0)|N$ und $\text{RKH}(g_v = 0) + \text{CS}$. In Tabelle 7.1 sind die Baryonen chemische Potentiale und die Drücke dieser Phasenübergänge mit den Energie- und Baryondichten der hadronischen und Quark-Phasen angegeben.

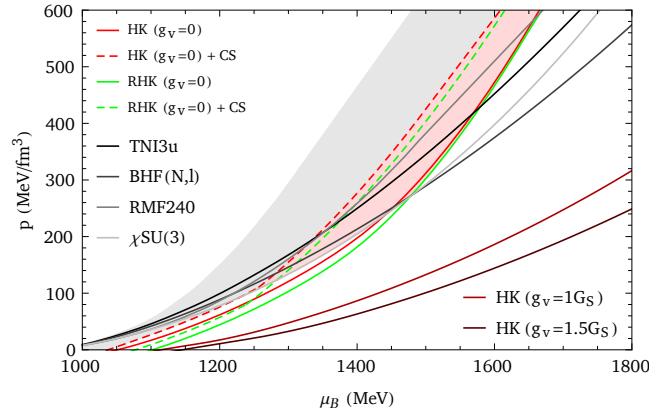


Abbildung 7.1: Die QEOs und die vier harten HEoS TNI3u, BHF(N, l), RMF240 und $\chi\text{SU}(3)$ in der μ - p -Ebene. Die hellgraue Zone entspricht dem Verlauf der restlichen, weicheren HEoS und die rote Zone markiert den Teil der μ - p -Ebene, in welchem cp-Phasenübergänge zwischen den weichen QEOs und harten HEoS möglich sind.

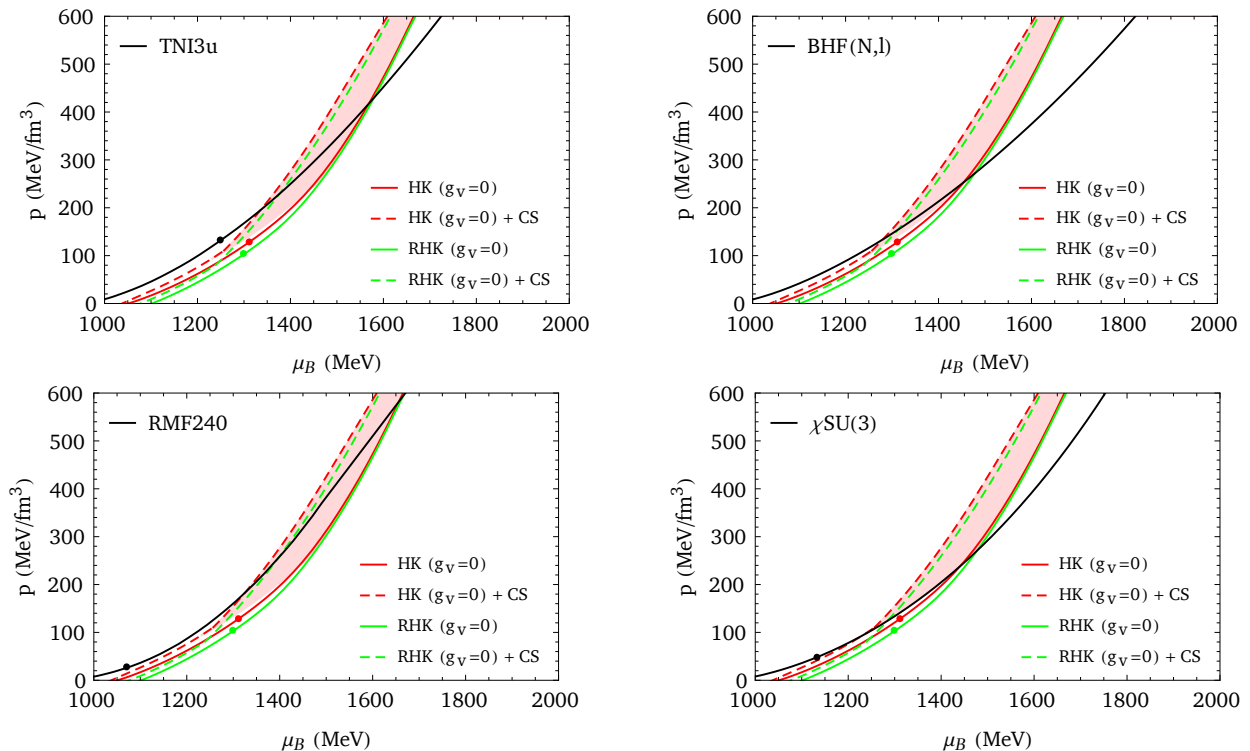


Abbildung 7.2: Phasenübergänge zwischen den HEoS TNI3u, BHF(N, l), RMF240 und $\chi\text{SU}(3)$ und den QEOs $\text{HK}(g_v = 0)|N$, $\text{HK}(g_v = 0) + \text{CS}$, $\text{RKH}(g_v = 0)|N$ und $\text{RKH}(g_v = 0) + \text{CS}$ in der μ - p -Ebene. Die Punkte markieren die Schwellenwerte für das Auftreten von Strange Quarks bzw. Hyperonen und im Falle der QEOs mit Farbsupraleitung den 2SC-CFL Phasenübergang. Der rötliche Bereich markiert generell den Bereich, in welchem die cp-Phasenübergänge zwischen HEoS und QEOs möglich sind.

Die Phasenübergänge finden in der Regel bei Drücken zwischen 130 und 300 MeV/fm³ statt. Dabei liegen in den hadronischen Phasen Baryondichten von 3.5 bis 5.5ρ₀ vor. Nach dem Phasenübergang liegen in den Quarkphasen relativ hohe Baryondichten zwischen 6 und 8ρ₀ vor. Nur die Phasenübergänge von TNI3u und RMF240 in die Quarkphasen ohne Farbsupraleitung, HK(g_v = 0)|N und RKH(g_v = 0)|N, finden erst bei wesentlich höheren Drücken statt.

Der Phasenübergang von χSU(3) in die HK(g_v = 0) + CS ist einzigartig. Von allen Phasenübergängen zwischen den QeoS mit Farbsupraleitung und den vier harten HEOs ist dieser der einzige, der in der 2SC Phase der HK(g_v = 0) + CS stattfindet. Damit ist die χSU(3)- HK(g_v = 0) + CS - Hybridzustandsgleichung die einzige EoS die eine 2SC-Phase enthält.

HEoS	QEoS	μ _B (MeV)	p (MeV/fm ³)	ρ _H /ρ ₀	ρ _Q /ρ ₀	ε _H (MeV)	ε _Q (MeV)
TNI3u	HK(g _v = 0) N	1568.8	417.5	6.41	9.92	1291.6	2229.0
	HK(g _v = 0) CFL	1335.9	195.4	4.72	6.94	877.4	1381.6
	RKH(g _v = 0) N	1579.8	429.7	6.48	10.39	1310.8	2359.7
	RKH(g _v = 0) CFL	1376.2	228.8	5.04	7.38	951.2	1496.6
BHF(N,1)	HK(g _v = 0) N	1454.2	253.3	4.47	6.87	852.2	1446.0
	HK(g _v = 0) CFL	1280.5	134.1	3.53	6.07	633.8	1186.2
	RKH(g _v = 0) N	1478.3	272.0	4.60	7.87	884.3	1706.7
	RKH(g _v = 0) CFL	1312.3	153.8	3.70	6.43	672.4	1281.6
RMF240	HK(g _v = 0) N	1656.6	582.4	10.79	12.18	2379.0	2846.8
	HK(g _v = 0) CFL	1325.5	183.3	5.40	6.78	1034.4	1344.4
	RKH(g _v = 0) N	1666.0	594.4	10.94	12.56	2419.3	2960.1
	RKH(g _v = 0) CFL	1396.5	254.8	6.46	7.67	1278.2	1567.1
χSU(3)	HK(g _v = 0) N	1441.4	238.7	5.05	6.50	999.8	1353.0
	HK(g_v = 0) 2SC	1230.0	93.1	3.12	5.40	560.2	660.7
	RKH(g _v = 0) N	1477.4	270.8	5.43	7.85	1091.8	1701.1
	RKH(g _v = 0) CFL	1283.6	123.6	3.58	6.01	657.39	1188.5

Tabelle 7.1: Phasenübergänge zwischen den HEOs TNI3u, BHF(N,1), RMF240 und χSU(3) und den QEoS HK(g_v = 0)|N, HK(g_v = 0) + CS, RKH(g_v = 0)|N und RKH(g_v = 0) + CS.

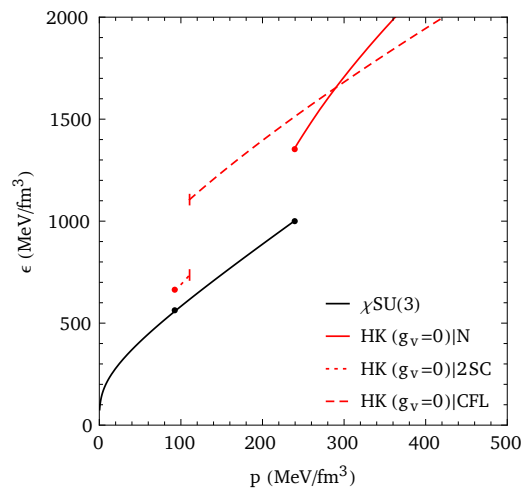


Abbildung 7.3: Energiedichte als Funktion des Druckes für die χSU(3) cp-Hybridzustandsgleichungen mit HK(g_v = 0)|N und HK(g_v = 0) + CS QEoS. Es sind deutlich die Phasenübergänge von der HEOs in die entsprechenden Quarkphasen sichtbar. Im Fall der HK(g_v = 0) + CS erfolgt der Phasenübergang in die 2SC Phase. Der 2SC-CFL Phasenübergang der HK(g_v = 0) + CS ist ebenfalls deutlich erkennbar.

7.1.1 Masse-Radius/Baryonendichte-Kurven und Maximalmasse

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit den aus den Hybridzustandsgleichungen mit cp -Phasenübergang resultierenden Hybridsternen. Diese haben große Ähnlichkeit mit den Neutronensternen mit rein hadronischer Zustandsgleichung aus Kapitel 5. Bis zum Phasenübergang stimmen die hadronische und Hybridzustandsgleichung überein. Die leichten Hybridsterne, mit einem zentralen Druck kleiner dem am Phasenübergang, haben keine Quarkphase und werden komplett über die HEoS beschrieben. Erst massivere Sterne mit höheren zentralen Drücken besitzen eine Quarkphase.

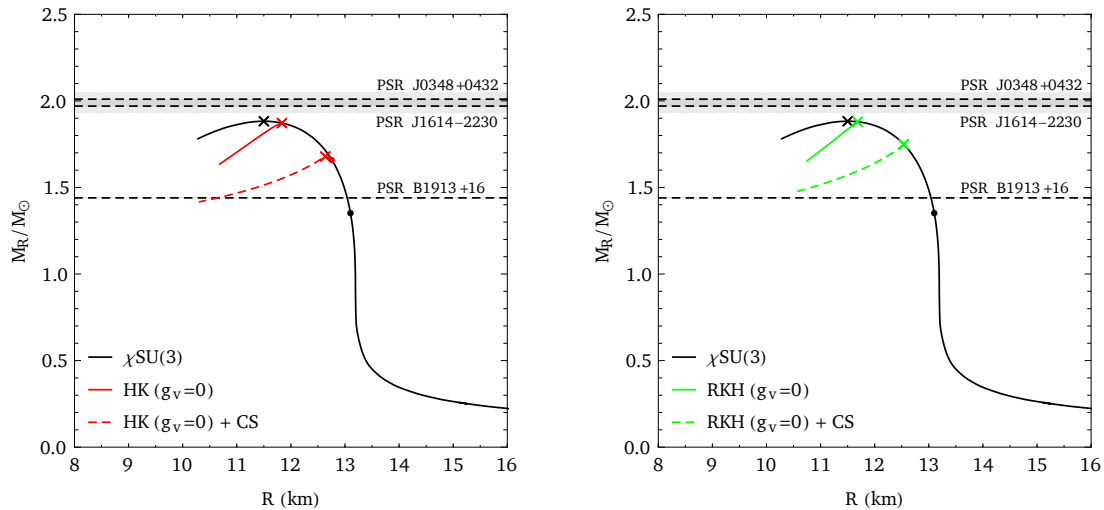


Abbildung 7.4: Masse-Radius-Kurven für cp -Hybridsterne mit χ SU(3) HEoS. In schwarz ist der entsprechende M-R-Verlauf des rein hadronischen Sterns abgebildet. In rot sind die M-R-Kurven der $HK(g_v = 0)$ und in grün die der $RKH(g_v = 0)$ Hybridzustandsgleichungen abgebildet. Die Schwellenwerte für das Auftreten von Hyperonen sind durch Punkte visualisiert. Die Sterne maximaler Masse sind durch Kreuze markiert.

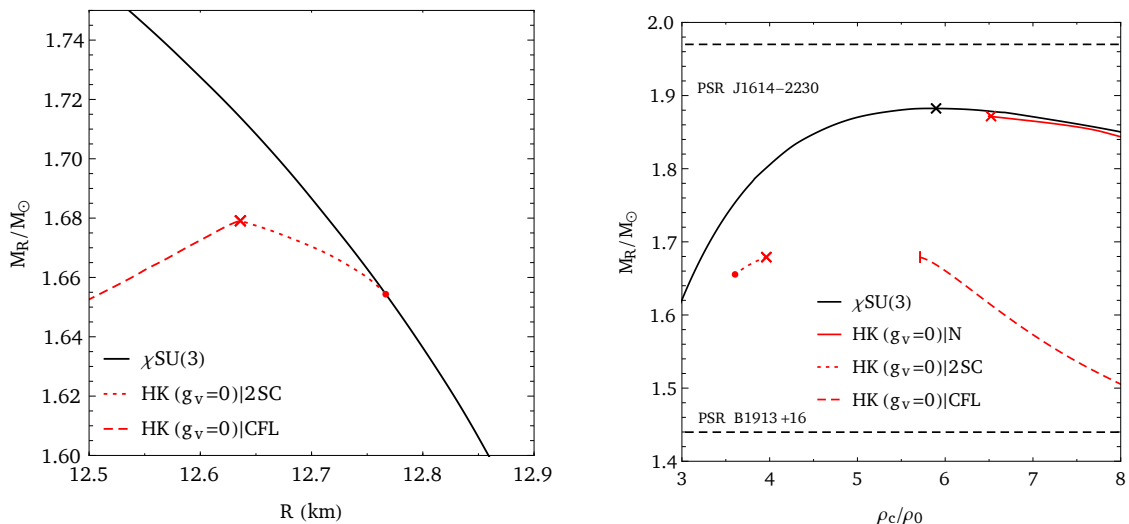


Abbildung 7.5: (Links) die Masse-Radius Kurve der 2SC Phase der χ SU(3)- $HK(g_v = 0) + CS$ Hybridsterne im Detail. (Rechts) die Masse über der zentralen Baryonendichte für χ SU(3)- $HK(g_v = 0) + CS$ und χ SU(3)- $HK(g_v = 0)|N$ cp -Hybridsterne. Im ρ_c -R-Verlauf sieht man deutlich die beiden Phasenübergänge von χ SU(3) in die Quarkphasen und von 2SC in die CFL Phase im Fall der $HK(g_v = 0) + CS$.

Die Abbildungen 7.4 und 7.6 zeigen die Masse-Radius Kurven der Hybridsterne im Vergleich mit den entsprechenden Neutronensternen mit rein hadronischer Zustandsgleichung.

Bis auf den cp-Hybridstern mit χ SU(3)-HK($g_v = 0$) + CS Hybridzustandsgleichung haben alle anderen Hybridsterne keine stabile Quarkphase. Nach dem Phasenübergang in die Quarkphase sind alle resultierenden Sterne instabil. Daher sind die Maximalmassen der Hybridsterne geringer als die maximalen Massen der entsprechenden rein hadronischen Sterne. Am Phasenübergang zwischen HEoS und QEOs steigen Energie und Baryondichte stark an, im Fall der Energiedichte um mehrere $100 \text{ MeV}/\text{fm}^3$. Dies führt zu den Knicken in den Masse-Radius Kurven an den Phasenübergängen. Der hohe Dichteunterschied zwischen den beiden Phasen führt dazu, dass die Quarkphasen instabil sind.

Nur im Fall des χ SU(3)-HK($g_v = 0$) + CS Phasenübergangs ist der Dichteunterschied mit nur $\epsilon_Q - \epsilon_H = 100.5 \text{ MeV}/\text{fm}^3$ vergleichsweise gering. Dies liegt daran, dass dieser Übergang nicht direkt in die CFL Phase, sondern erst in die 2SC Phase, erfolgt. Damit ist die χ SU(3)-HK($g_v = 0$) + CS Hybridzustandsgleichung die einzige Zustandsgleichung, die in Sternen mit einer stabilen 2SC Quarkphase resultiert. Diese Phase, der HEoS-2SC und der folgende 2SC-CFL Phasenübergang sind in Abbildung 7.5 im Detail zu sehen.

Generell haben die Hybridsterne mit cp-Phasenübergang eine geringere Maximalmasse als die korrespondierenden Neutronensterne mit rein hadronischer Zustandsgleichung. In Tabelle 7.2 sind die Maximalmassen, die zugehörigen Radien und zentrale Drücke der Hybridsterne aufgelistet. Zum Vergleich sind die Maximalmassen der rein hadronischen Sterne angegeben. Die Sterne maximaler Masse treten in der Regel bei dem initialen Zentraldruck auf, bei dem auch der Phasenübergang stattfindet. Nur bei den χ SU(3)-HK($g_v = 0$) + CS, RMF240-HK($g_v = 0$)|N und RMF240-RKH($g_v = 0$)|N Hybridzustandsgleichungen ist dies nicht der Fall. Im Fall der χ SU(3)-HK($g_v = 0$) + CS Hybridzustandsgleichung tritt der Stern maximaler Masse am 2SC-CFL Phasenübergang auf. In den Fällen der RMF240 HEoS mit den QEOs ohne Farbsurpaleitung tritt der Phasenübergang erst bei so hohen Drücken auf, dass entsprechende Sterne bereits nach der HEoS instabil sind. Daher ist im Fall der RMF240-HK($g_v = 0$)|N und RMF240-RKH($g_v = 0$)|N cp-Hybridsterne die Maximalmasse die gleiche, wie im Fall einer reinen RMF240 HEoS.

HEoS	$M_{\text{max}}^{\text{HEoS}}/M_{\odot}$	QEOs	$M_{\text{max}}^{\text{Hybrid}}/M_{\odot}$	R^{Hybrid} (km)	p_c^{Hybrid} (MeV/fm^3)
TNI3u	1.83	HK($g_v = 0$)	1.79	10.24	417.5
		HK($g_v = 0$) CFL	1.64	10.94	195.4
		RKH($g_v = 0$)	1.79	10.21	429.7
		RKH($g_v = 0$) CFL	1.68	10.81	228.8
BHF(N, l)	2.07	HK($g_v = 0$)	1.95	11.44	253.3
		HK($g_v = 0$) CFL	1.71	11.86	134.1
		RKH($g_v = 0$)	1.97	11.38	272.0
		RKH($g_v = 0$) CFL	1.77	11.78	153.8
RMF240	1.55	HK($g_v = 0$) CFL	1.53	11.69	183.3
		RKH($g_v = 0$) CFL	1.55	11.22	254.8
χ SU(3)	1.88	HK($g_v = 0$)	1.87	11.83	238.7
		HK($g_v = 0$) + CS	1.67	12.64	110.6
		RKH($g_v = 0$)	1.88	11.68	270.8
		RKH($g_v = 0$) CFL	1.75	12.54	123.6

Tabelle 7.2: Maximalmassen, Radien und zentrale Drücke der cp-Hybridsterne mit maximaler Masse der entsprechenden Neutronensterne mit rein hadronischer EoS im Vergleich.

Die über einen Phasenübergang erster Ordnung mit konstantem Druck konstruierten Zustandsgleichungen sind nach Abschnitt 2.6 kausal und thermodynamisch konsistent. Da der Phasenübergang, nach Gleichung (7.1), nach Gibbs einen Übergang beschreibt, an welchem sich die beiden Phasen im Gleichgewicht befinden und da sowohl die HEoS und als auch QEoS kausal und konsistent sind, sind auch die cp-Hybridzustandsgleichungen kausal und thermodynamisch konsistent.

Die Hybridsterne mit den HEoS TNI3u, RMF240 und χ SU(3) enthalten Hyperonen. Die Maximalmasse wird im Vergleich zu den Sternen mit rein hadronischer Zustandsgleichung jedoch verringert. Selbst im Ausnahmefall von χ SU(3)-HK($g_v = 0$) + CS ist die stabile 2SC-Quarkphase sehr klein, so dass auch in diesem Fall die Maximalmasse verringert wird. Damit haben die Hybridsterne mit Hyperonen Maximalmassen von um die $1.7M_\odot$. Es ist also nicht möglich massive $2M_\odot$ Neutronensterne mit cp-Hybridzustandsgleichungen mit Hyperonen zu beschreiben. Im Fall der BHF(N,1) Hybridzustandsgleichungen sind die Maximalmassen trotz instabiler Quarkphase recht hoch, da diese Zustandsgleichung ohne Hyperonen immer noch sehr hart ist.

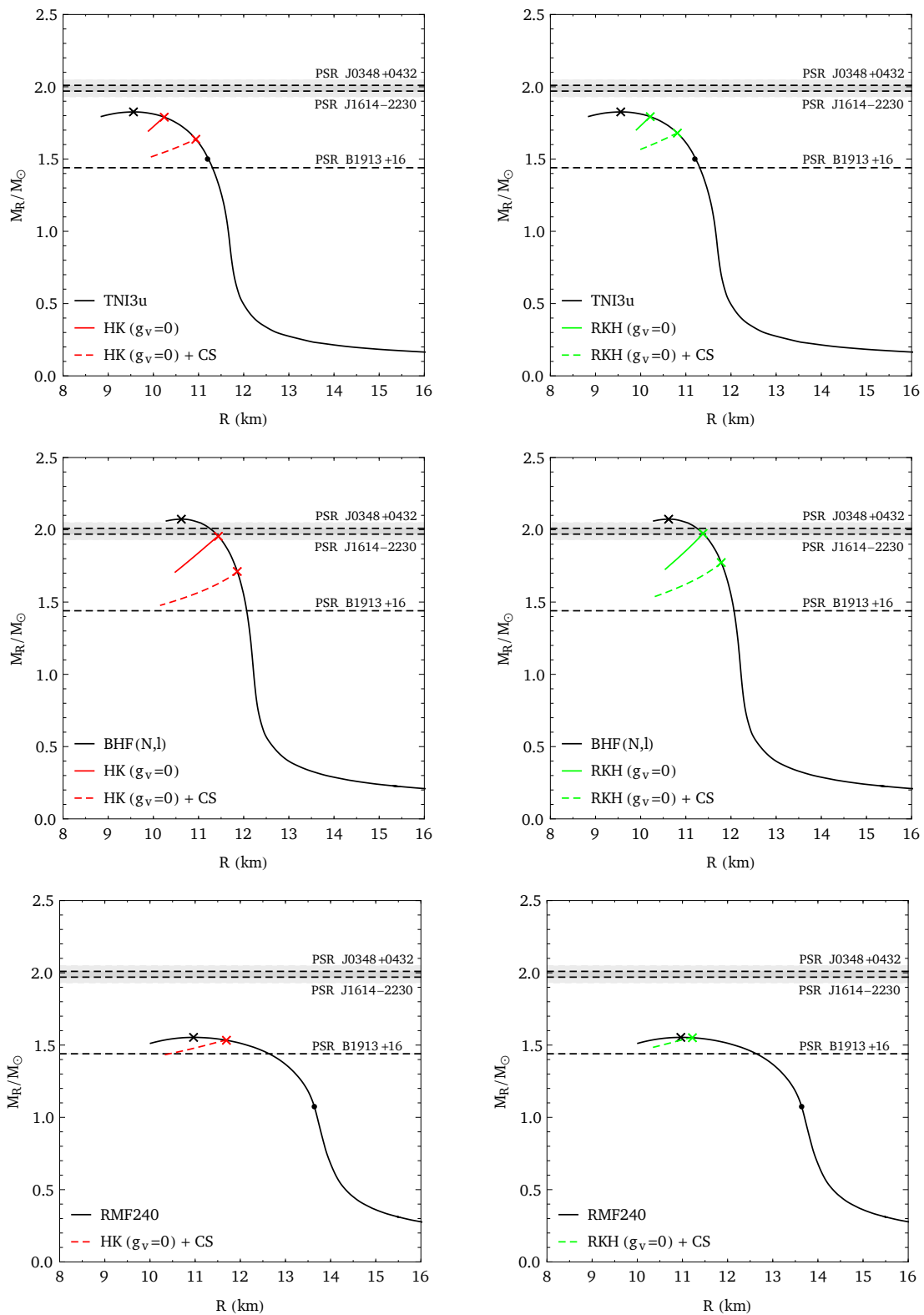


Abbildung 7.6: Masse-Radius-Kurven für cp-Hybridsterne mit TNI3u, BHF(N, l) und RMF240 HEoS. In schwarz sind die entsprechenden M-R-Verläufe der rein hadronischen Sterne abgebildet. Die Schwellenwerte für das Auftreten von Hyperonen sind durch Punkte visualisiert. Die Sterne maximaler Masse sind durch Kreuze markiert. Zum Vergleich sind die Massen der Neutronensterne PSR B1913+16, PSR J1614-2230 und PSR J0348+0432 mit Fehlerbalken eingezeichnet.

7.1.2 Struktur eines Hybridsterns mit χ SU(3)-HK($g_v = 0$) + CS Phasenübergang

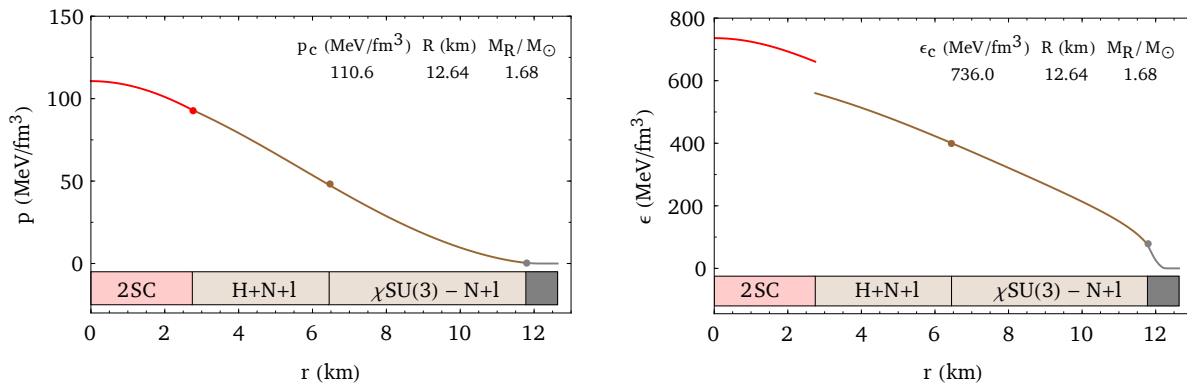


Abbildung 7.7: (Links:) Druck-Radius-Kurve und (rechts) Energiedichte-Radius-Kurve für einen χ SU(3)-HK($g_v = 0$) + CS cp-Hybridstern maximaler Masse. Für die Kruste (in grau) wurde die BPS/NV Zustandsgleichung verwendet. Der innere Kern des Sterns besteht aus einer farbsupraleitenden HK($g_v = 0$)|2SC Phase mit kaum Strange Quarks. Der mittlere hadronische Kern besteht aus Nukleonen, Hyperonen und einem geringen Leptonen-Anteil. Der äußere Teil des Kerns besteht aus Nukleonen und Leptonen. Der Phasenübergang zwischen hadronischer und Quark-Phase ist im ϵ - r -Verlauf deutlich zu erkennen.

Die obige Abbildung 7.7 zeigt die Struktur eines Hybridsterns maximaler Masse mit χ SU(3)-HK($g_v = 0$) + CS cp-Phasenübergang. Für Drücke unterhalb des HEoS-QEoS Phasenübergangs gleicht die Struktur der eines rein hadronischen Neutronensterns aus Abschnitt 5.4. Für Drücke oberhalb des Phasenübergangs $p > 93.1$ MeV/fm³ existiert eine stabile 2SC Quarkphase. Dies unterscheidet die χ SU(3)-HK($g_v = 0$) + CS Hybridsterne von sämtlichen anderen Hybridsternen mit cp-Phasenübergang. Im ϵ - r Verlauf ist der Phasenübergang durch den Sprung in der Energiedichte deutlich zu erkennen.

7.2 Interpolierte, gemischte Zustandsgleichungen

Um eine harte/steife Hybridzustandsgleichung zu konstruieren wurde von K. Masuda, T. Hatsuda und T. Takatsuka in ihrer Arbeit „*Hadron–quark crossover and massive hybrid stars*“ [5] eine Interpolation zwischen der hadronischen und der Quark Zustandsgleichung vorgeschlagen. Der Kerngedanke besteht darin die HEoS und die QEoS über eine Interpolation bei mittleren Baryondichten ($\sim 4\rho_0$) zu verbinden. Aus dem QCD-Phasendiagramm wird bei diesen Dichten eine Form von stark wechselwirkenden Hadronen und Quarks angenommen. Diese Form der Materie wird rein phänomenologisch durch eine Mischung aus HEoS und QEoS beschrieben, welche durch eine kontinuierliche Interpolation zwischen HEoS und QEoS modelliert wird.

Die Form einer solchen Interpolation ist nicht eindeutig: Verschiedene Verfahren und Interpolationsmethoden wären vorstellbar. Im Folgenden werden zwei Interpolationsverfahren behandelt, welche in [5] vorgestellt wurden. Kern beider Verfahren ist die Interpolationsfunktion

$$f_{\pm}(\rho) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \tanh \left(\frac{\rho - \bar{\rho}}{\Gamma} \right) \right). \quad (7.2)$$

Diese stetige Funktion ist geeignet um zwei Funktionen in einem durch Γ und $\bar{\rho}$ charakterisierten Fenster

$$\bar{\rho} - \Gamma \lesssim \rho \lesssim \bar{\rho} + \Gamma \quad (7.3)$$

zu mischen. Die HEoS wird mit f_- gewichtet und die QEoS mit f_+ . Die Mischphase, in der Quarks und Hadronen stark wechselwirken, hat damit eine Breite von ungefähr 2Γ mit einem Zentrum bei $\bar{\rho}$. Das System ist in diesem Bild eines Hadronen-Quark-Übergangs stets einheitlich: f_- und f_+ geben nur Aufschluss über den Grad zu dem HEoS und QEoS in die Hybridgleichung bei gegebener Baryondichte eingehen. Es gilt $f_-(\rho) + f_+(\rho) = 1$ für alle Dichten. Bevor auf die beiden Interpolationsverfahren eingegangen wird, sei noch die Ableitung der Interpolationsfunktion

$$f'_{\pm}(\rho) = \pm \frac{2}{\Gamma} \left(e^{-\frac{\rho - \bar{\rho}}{\Gamma}} + e^{\frac{\rho - \bar{\rho}}{\Gamma}} \right)^{-2} \equiv \pm g(\rho) \quad (7.4)$$

erwähnt. Diese wird in den beiden Interpolationsverfahren ebenfalls eine entscheidende Rolle spielen.

Die zwei in dieser Arbeit verwendeten Interpolationsverfahren sind die sogenannte p- und ϵ -Interpolation. Bei der p-Interpolation wird zwischen dem Druck als Funktion der Baryondichte mittels f_{\pm} interpoliert und bei der ϵ -Interpolation wird zwischen der Energiedichte als Funktion der Baryondichte interpoliert. In beiden Fällen muss dies jedoch thermodynamisch konsistent geschehen. Um dies zu gewährleisten wird je nach Interpolation die Energiedichte (bei der p-Interpolation) oder der Druck (bei der ϵ -Interpolation) thermodynamisch konsistent konstruiert. Dafür ist die in Abschnitt 2.4 vorgestellte Gleichung (2.46):

$$p = \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\epsilon}{\rho} \right) \quad (7.5)$$

entscheidend. Aus ihr lassen sich für den Druck und die Energiedichte zwei zentrale Identitäten

$$p = \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} - \epsilon \quad (7.6a)$$

$$\frac{\epsilon}{\tilde{\rho}} \Big|_{\bar{\rho}}^{\rho} = \int_{\bar{\rho}}^{\rho} \frac{p}{\tilde{\rho}^2} d\tilde{\rho} \quad (7.6b)$$

ableiten. Die Relation für den Druck ist direkt aus Gleichung (7.5) gegeben und die Relation für die Energiedichte kann durch Integration der Gleichung einfach hergeleitet werden. Mit diesen Identitäten und der Interpolationsfunktion lassen sich die ϵ - und die p-Interpolation wie folgt konstruieren.

ϵ -Interpolation

Es seien $\epsilon_H(\rho)$ und $\epsilon_Q(\rho)$ die nach Gleichung (7.5) thermodynamisch konsistenten Zustandsgleichungen für hadronische und Quark-Materie. Zwischen den Zustandsgleichungen wird mittels der Interpolationsfunktion f_{\pm} interpoliert mit einem durch $\bar{\rho}$ und Γ charakterisierten Übergangsfenster:

$$\epsilon(\rho) = \epsilon_H(\rho)f_-(\rho) + \epsilon_Q(\rho)f_+(\rho). \quad (7.7)$$

Um thermodynamisch konsistent den entsprechenden Druck zu erhalten, wendet man Gleichung (7.6a) auf die ϵ -Interpolation nach Gleichung (7.7) an⁽⁶⁾:

$$p(\rho) = \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} - \epsilon \quad (7.8a)$$

$$= \rho \frac{\partial}{\partial \rho}(\epsilon_H f_-) + \rho \frac{\partial}{\partial \rho}(\epsilon_Q f_+) - \epsilon_H f_- - \epsilon_Q f_+ \quad (7.8b)$$

$$= \rho (\epsilon'_H f_- + \epsilon_H f'_-) + \rho (\epsilon'_Q f_+ + \epsilon_Q f'_+) - \epsilon_H f_- - \epsilon_Q f_+ \quad (7.8c)$$

$$= \underbrace{(\rho \epsilon'_H - \epsilon_H)}_{\equiv p_H} f_- + \underbrace{(\rho \epsilon'_Q + \epsilon_Q)}_{\equiv p_Q} f_+ + \rho \epsilon_Q f'_+ + \rho \epsilon_H f'_- \quad (7.8d)$$

$$= p_H f_- + p_Q f_+ + \rho (\epsilon_Q - \epsilon_H) g \quad (7.8e)$$

$$= p_H(\rho)f_-(\rho) + p_Q(\rho)f_+(\rho) + \Delta p(\rho). \quad (7.8f)$$

Mit einem in der Übergangs-Region konzentriertem Δp mit $\Delta p(0) = \Delta p(\infty) = 0$.

$$\Delta p(\rho) = \rho \left[\epsilon_Q(\rho) - \epsilon_H(\rho) \right] g(\rho) = \frac{2\rho}{\Gamma} \left[\epsilon_Q(\rho) - \epsilon_H(\rho) \right] \left[e^{-\frac{\rho - \bar{\rho}}{\Gamma}} + e^{\frac{\rho - \bar{\rho}}{\Gamma}} \right]^{-2} \quad (7.9)$$

p-Interpolation

Es seien $p_H(\rho)$ und $p_Q(\rho)$ die nach Gleichung (7.5) thermodynamisch konsistenten Zustandsgleichungen für hadronische und Quark-Materie. Zwischen den Zustandsgleichungen wird mittels der Interpolationsfunktion f_{\pm} interpoliert mit einem durch $\bar{\rho}$ und Γ charakterisierten Übergangsfenster:

$$p(\rho) = p_H(\rho)f_-(\rho) + p_Q(\rho)f_+(\rho). \quad (7.10)$$

⁽⁶⁾ In den folgenden Herleitungen ist in den Zwischenschritten die Baryonendichte ρ als Argument der verschiedenen Funktionen zu Gunsten einer besseren Übersicht weggelassen worden. Generell sind Druck p , Energiedichte ϵ und auch die Interpolationsfunktion f_{\pm} sowie alle auftretenden Ableitungen dieser Funktionen als Funktionen der Baryonendichte aufzufassen. Die Ableitungen nach ρ werden mit unter abgekürzt: z.B. $\partial \epsilon_H / \partial \rho \equiv \epsilon'_H$.

Um thermodynamisch konsistent die entsprechende Energiedichte zu erhalten, integriert man die p -Interpolation in Gleichung (7.10) nach Gleichung (7.6b) partiell:

$$\left. \frac{\epsilon}{\tilde{\rho}} \right|_{\tilde{\rho}}^{\rho} = \int_{\tilde{\rho}}^{\rho} \frac{p}{\tilde{\rho}^2} d\tilde{\rho} \quad (7.11a)$$

$$= \int_{\tilde{\rho}}^{\rho} \left(\frac{p_H}{\tilde{\rho}^2} \right) f_- d\tilde{\rho} + \int_{\tilde{\rho}}^{\rho} \left(\frac{p_Q}{\tilde{\rho}^2} \right) f_+ d\tilde{\rho} \quad (7.11b)$$

$$= \left[\underbrace{\int \left(\frac{p_H}{\tilde{\rho}^2} \right) d\tilde{\rho}}_{\equiv \epsilon_H / \tilde{\rho}} f_- \right]_{\tilde{\rho}}^{\rho} - \int_{\tilde{\rho}}^{\rho} \left(\underbrace{\int \left(\frac{p_H}{\tilde{\rho}^2} \right) d\tilde{\rho}}_{\equiv \epsilon_H / \tilde{\rho}} \right) f'_- d\tilde{\rho} \\ + \left[\underbrace{\int \left(\frac{p_Q}{\tilde{\rho}^2} \right) d\tilde{\rho}}_{\equiv \epsilon_Q / \tilde{\rho}} f_+ \right]_{\tilde{\rho}}^{\rho} - \int_{\tilde{\rho}}^{\rho} \left(\underbrace{\int \left(\frac{p_Q}{\tilde{\rho}^2} \right) d\tilde{\rho}}_{\equiv \epsilon_Q / \tilde{\rho}} \right) f'_+ d\tilde{\rho} \quad (7.11c)$$

$$= \left[\frac{\epsilon_H f_- + \epsilon_Q f_+}{\tilde{\rho}} \right]_{\tilde{\rho}}^{\rho} + \int_{\tilde{\rho}}^{\rho} \frac{(\epsilon_H - \epsilon_Q)}{\tilde{\rho}} g d\tilde{\rho} \quad (7.11d)$$

$$\frac{\epsilon(\rho)}{\rho} - \frac{\epsilon(\bar{\rho})}{\bar{\rho}} = \frac{\epsilon_H(\rho) f_-(\rho) + \epsilon_Q(\rho) f_+(\rho) + \Delta\epsilon(\rho)}{\rho} - \frac{\epsilon_H(\bar{\rho}) f_-(\bar{\rho}) + \epsilon_Q(\bar{\rho}) f_+(\bar{\rho})}{\bar{\rho}}. \quad (7.11e)$$

Aus Gleichung (7.11e) lässt sich schließlich

$$\epsilon(\rho) = \epsilon_H(\rho) f_-(\rho) + \epsilon_Q(\rho) f_+(\rho) + \Delta\epsilon(\rho) \quad (7.12)$$

identifizieren. Der Korrekturterm $\Delta\epsilon(\rho)$, welcher für $\rho \rightarrow 0$ und auch für $\rho \rightarrow \infty$ endlich ist, erhöht die Energiedichte für $\rho < \bar{\rho}$ und verringert sie für $\rho > \bar{\rho}$.

$$\Delta\epsilon(\rho) = \rho \int_{\tilde{\rho}}^{\rho} \frac{\epsilon_H(\tilde{\rho}) - \epsilon_Q(\tilde{\rho})}{\tilde{\rho}} g(\tilde{\rho}) d\tilde{\rho} = \frac{2\rho}{\Gamma} \int_{\tilde{\rho}}^{\rho} \frac{\epsilon_H(\tilde{\rho}) - \epsilon_Q(\tilde{\rho})}{\tilde{\rho}} \left[e^{-\frac{\tilde{\rho}-\bar{\rho}}{\Gamma}} + e^{\frac{\tilde{\rho}-\bar{\rho}}{\Gamma}} \right]^{-2} d\tilde{\rho} \quad (7.13)$$

Dieser ist damit jedoch nicht im Übergangsfenster konzentriert, wie Δp , sondern beeinflusst die Hybridzustandsgleichung auf dem gesamten Definitionsbereich.

In den folgenden Abschnitten werden mit den beiden Interpolationsverfahren Hybridzustandsgleichungen für verschiedene HEoS und QEoS konstruiert. Diese sind nach Konstruktion thermodynamisch konsistent. Die Kausalität nach Abschnitt 2.6 ist aus der Konstruktion nicht zwingend gegeben. Für entsprechende Übergangsfenster, welche nicht zu schmal sind und nicht bei zu hohen Baryondichten ansetzen, und entsprechenden QEoS ist jedoch auch die Kausalität gegeben. In den Abschnitten 7.2.1 und 7.2.3 wird auf die Kausalität der Hybridzustandsgleichungen weiter eingegangen.

Im Folgenden wird oft eine Kompaktnotation für die Interpolationen verwendet: Das Übergangsfenster nach Gleichung 7.3 mit einem Zentrum bei $\bar{\rho}\rho_0$ und einer Gesamtbreite $2\Gamma\rho_0$ wird abgekürzt mit $(\bar{\rho}, \Gamma)$. Die ϵ - und p -Interpolation werden oft als ϵ -Int und p -Int abgekürzt.

7.2.1 Vergleich zwischen ϵ - und p -Interpolation

In diesem Abschnitt werden die generellen Eigenschaften der beiden Interpolationsmethoden exemplarisch mit TNI2u als HEoS und $\text{HK}(g_v = 1G_S)$ als QEOs untersucht. TNI2u stellt eine HEoS mittlerer Härte dar, während $\text{HK}(g_v = 1G_S)$ zu den härteren QEOs zählt. Der Einfluss der hadronischen und Quark Zustandsgleichung auf die Hybridzustandsgleichung wird in den anschließenden Abschnitten näher untersucht werden. Als Übergangsfenster wurde $(\bar{\rho} = 3\rho_0, \Gamma = 1\rho_0)$ gewählt.

Abbildung 7.8 zeigt die resultierenden Hybridzustandsgleichungen. Anhand der der p - ρ und ϵ - ρ Kurven lässt sich die Konstruktion der Interpolationsmethoden nachvollziehen.

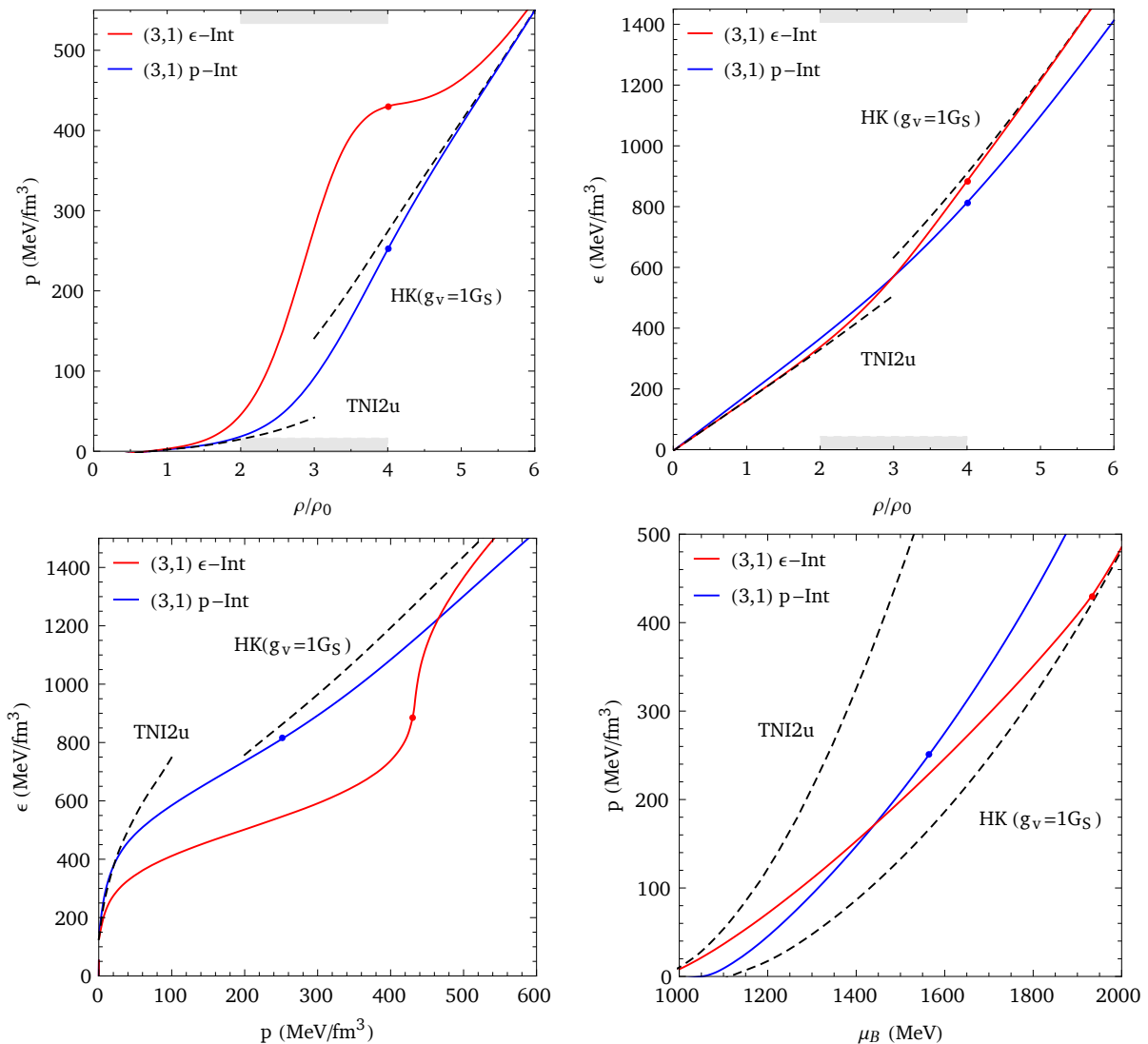


Abbildung 7.8: Übersicht über die aus einer (3,1) ϵ/p -Interpolation resultierenden Hybridzustandsgleichungen mit TNI2u als HEoS und $\text{HK}(g_v = 1G_S)$ als QEOs. In rot die ϵ -Interpolation, in blau die p -Interpolation und in schwarz, gestrichelt die reinen HEoS und QEOs. Die Punkte markieren die Schwellenwerte für das Auftreten von Strange Quarks. Im Fall der TNI2u HEoS liegt $\rho_{th}^H = 4.01\rho_0$ für das Auftreten von Hyperonen extrem hoch. Daher treten im Fall der $\text{HK}(g_v = 1G_S)$ QEOs deconfined Strange Quarks knapp vor Hyperonen auf bei $\rho_{th}^S = 4.00\rho_0$. Das Übergangsfenster ist mit grauen Balken auf den horizontalen ρ -Achsen angedeutet.

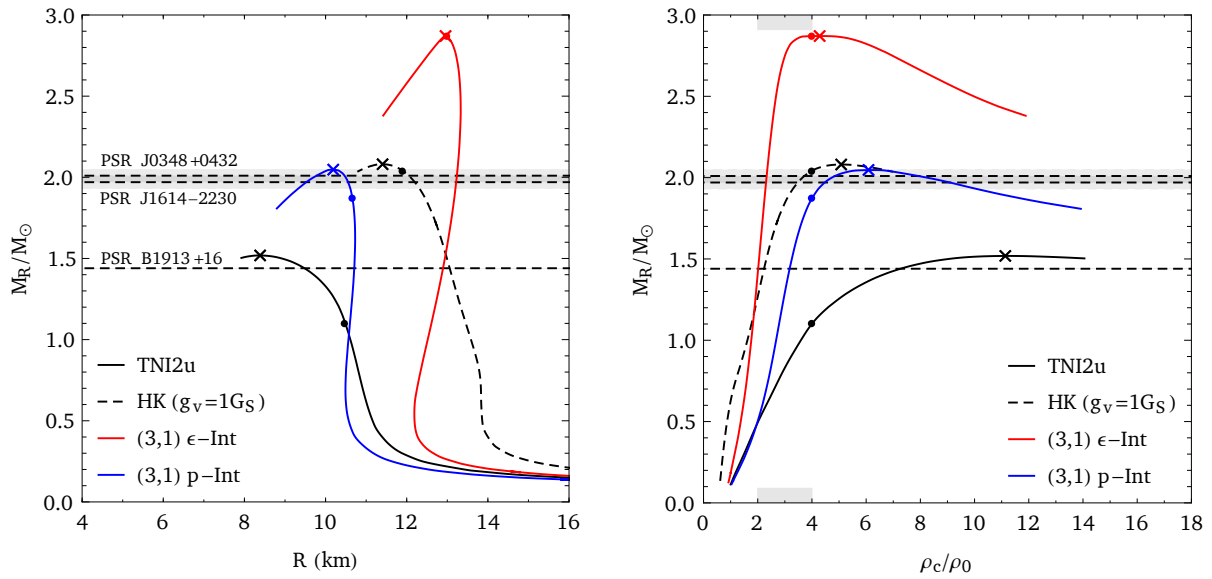


Abbildung 7.9: Masse-Radius-Kurve (links) und Masse-zentrale Baryonendichte-Kurve (rechts) für Hybridsterne mit (3,1) ϵ /p-Interpolation mit TNI2u HEOs und $HK(g_v = 1G_S)$ QEOs. In schwarz ist der Verlauf für rein hadronische TNI2u Sterne und in schwarz-gestrichelt der für reine $HK(g_v = 1G_S)$ Quarksterne zum Vergleich abgebildet. Die Hybridsterne mit p-Interpolation ähneln den entsprechenden puren Quarksterne bei hohen Dichten. Die Hybridsterne mit ϵ -Interpolation ähneln weder den Quark, noch den Sternen mit rein hadronischen EoS, da durch Δp die EoS in der Übergangsregion enorm versteift wird. Die resultierenden Sterne haben ausgesprochen hohe Massen. Das Übergangsfenster ist mit grauen Balken auf den horizontalen ρ -Achsen angedeutet.

Im Fall der ϵ -Interpolation wird zwischen $\epsilon_H(\rho)$ und $\epsilon_Q(\rho)$ direkt interpoliert. Dementsprechend folgt die Hybridzustandsgleichung in ϵ - ρ -Ebene bei niedrigen Baryonendichten der HEOs und bei hohen der QEOs. In der Übergangsregion wird mittels $f_{\pm}(\rho)$ interpoliert. Auch in der μ - p -Ebene folgt die ϵ -Interpolation bei niedrigen chemischen Potentialen der HEOs und bei hohen der QEOs. Der Einfluss des Korrekturterms wird weder in der ϵ - ρ noch in μ - p -Ebene deutlich. In der p - ρ und in der ϵ - p -Ebene zeigt sich der Einfluss des Korrekturterms Δp . Er versteift die Zustandsgleichung in der Übergangsregion enorm. Außerhalb der Übergangsregion geht die Hybridzustandsgleichung allerdings wieder in die entsprechenden $p_H(\rho)$ und $p_Q(\rho)$, beziehungsweise $\epsilon_H(\rho)$ und $\epsilon_Q(\rho)$, über.

Im Fall der p-Interpolation entspricht der Verlauf der Hybridzustandsgleichung in der p - ρ -Ebene der direkten Interpolation zwischen $p_H(\rho)$ und $p_Q(\rho)$ mittels $f_{\pm}(\rho)$. In der ϵ - ρ -Ebene zeigt sich die Wirkung des Korrekturterms $\Delta \epsilon$. Bei niedrigen Baryonendichten ($\rho < \bar{\rho}$) wird die Energiedichte leicht erhöht. Dieser Effekt ist jedoch so gering, dass er aus den Kurven nicht ersichtlich wird. Für hohe Baryonendichten ($\rho > \bar{\rho}$) wird die Energiedichte verringert. Dieser Effekt ist deutlich sichtbar. Allerdings werden sich die Steigungen der Hybridzustandsgleichung und der QEOs bei höheren Baryonendichten wieder sehr ähnlich. Analog zur Wirkung des Korrekturterms in der ϵ - ρ -Ebene verringert dieser in der ϵ - p -Ebene die Energiedichte bei hohen Drücken im Vergleich zur Energiedichte der reinen QEOs. In der μ - p -Ebene verläuft die p-Interpolation zwischen den Kurven der HEOs und QEOs wobei sich die Steigung der interpolierten Zustandsgleichung für niedrige chemische Potentiale der der HEOs und für hohe μ_B der der QEOs annähert. Bei gegeben chemischen Potential ist der Druck der p-Interpolierten Zustandsgleichung stets höher als der entsprechende der QEOs und niedriger als der der HEOs.

Abbildung 7.9 zeigt die Masse-Radius- und Masse-zentrale Baryonendichte-Kurven der aus den vorgestellten Hybridzustandsgleichung resultierenden Sterne. Zum Vergleich sind die entsprechenden Sterne mit rein hadronischer und reiner Quarkzustandsgleichung mit abgebildet.

Bei hohen Dichten ähnelt der Hybridstern mit p-Interpolation dem korrespondierenden Quarkstern und bei niedrigen Dichten dem Neutronenstern mit HEoS. Die p-Interpolation stellt damit auch in Bezug auf die Sterne eine Mischung der beiden korrespondierenden Sterne dar. Dies war auf Grund der Zustandsgleichung abzusehen.

Die Hybridzustandsgleichung mit ϵ -Interpolation ähnelt in der Übergangsregion den Ausgangszustandsgleichungen nicht auf Grund des äußerst dominanten Korrekturterms Δp . Dieser versteift die EoS in der Übergangsregion enorm. Die resultierenden Sterne sind äußerst schwer. Für die harten QEoS HK($g_v = 1G_S$) und HK($g_v = 1.5G_S$) sind die Hybridzustandsgleichungen in der Übergangsregion bei plausiblen Übergangsfenstern $\sim (2-3, 1-1.5)$ nicht kausal. Sie erfüllen in der Übergangsregion nicht die nach Abschnitt 2.6 gestellten Kausalitätsbedingungen: $v_s/c = \sqrt{dp/d\epsilon} < 1$ und $dp/d\epsilon \geq 0$. Damit ist die ϵ -Interpolation an sich ungeeignet zur Konstruktion von Hybridzustandsgleichungen mit harter n QEoS bei plausiblen Übergangsfenstern. Für die weicheren QEoS ohne Vektor-Kopplung ist sie jedoch sehr gut zur Konstruktion harter Hybridzustandsgleichungen geeignet. Gerade die Eigenschaft, dass die ϵ -Interpolation außerhalb der Übergangsfensters stark den Ausgangszustandsgleichungen ähnelt, wird sich im Abschnitt 7.2.4 bei der Konstruktion von Hybridzustandsgleichungen mit Farbsupraleitung als äußerst praktisch erweisen.

7.2.2 Abhängigkeit der Hybridzustandsgleichung vom Übergangsfenster

Die Wahl des Übergangsfensters hat auf das Aussehen der Hybridzustandsgleichung und damit auf die resultierenden Sterne durchaus Einfluss. Dieser wird im Folgenden untersucht. Aus dem QCD-Phasendiagramm nach Kapitel 1 erwartet man ein Zentrum der Übergangsfenster bei um die $3\rho_0$ [5]. Allerdings ist dies nur eine grobe Abschätzung. Aus Sicht der QEOs sollte das Fenster nicht bei zu niedrigen Baryondichten gewählt werden. Damit scheiden die harten QEOs mit Vektor-Kopplung ($\text{HK}(g_v = 1G_S)$ und $\text{HK}(g_v = 1.5G_S)$) nach den vorherigen Ausführungen für die ϵ -Interpolation aus. Im Folgenden wird der Einfluss des Übergangsfensters auf die Hybridzustandsgleichung für eine Übergangsregion von $2\rho_0 \leq \bar{\rho} - \Gamma < \bar{\rho} + \Gamma \leq 7\rho_0$ untersucht.

Für die Betrachtungen die p-Interpolation betreffend wurde exemplarisch die TNI2u EoS als HEOs mittlere Härte gewählt und als QEOs die harte $\text{HK}(g_v = 1G_S)$ mit Vektor-Kopplung um relativ massive Sterne ($\sim 2M_\odot$) zu betrachten. Im Fall der ϵ -Interpolation wurde ebenfalls die TNI2u EoS als HEOs verwendet aber als QEOs die weiche $\text{HK}(g_v = 0)$.

Abbildung 7.10 zeigt die Resultate mit den verschiedenen Übergangsfenstern für ϵ - und p-Interpolation.

Im Fall der p-Interpolation bewirkt ein Übergangsfenster mit niedrigerem Zentrum ($\bar{\rho}$) einen größeren Einfluss der QEOs. Für die QEOs, welche härter sind als die HEOs, bedeutet dies im Fall der p-Interpolation eine Erhöhung der Maximalmasse. Ein breiteres Fenster bei ansonsten gleichem Zentrum führt generell zu einer weicheren Hybridzustandsgleichung mit geringeren Maximalmasse.

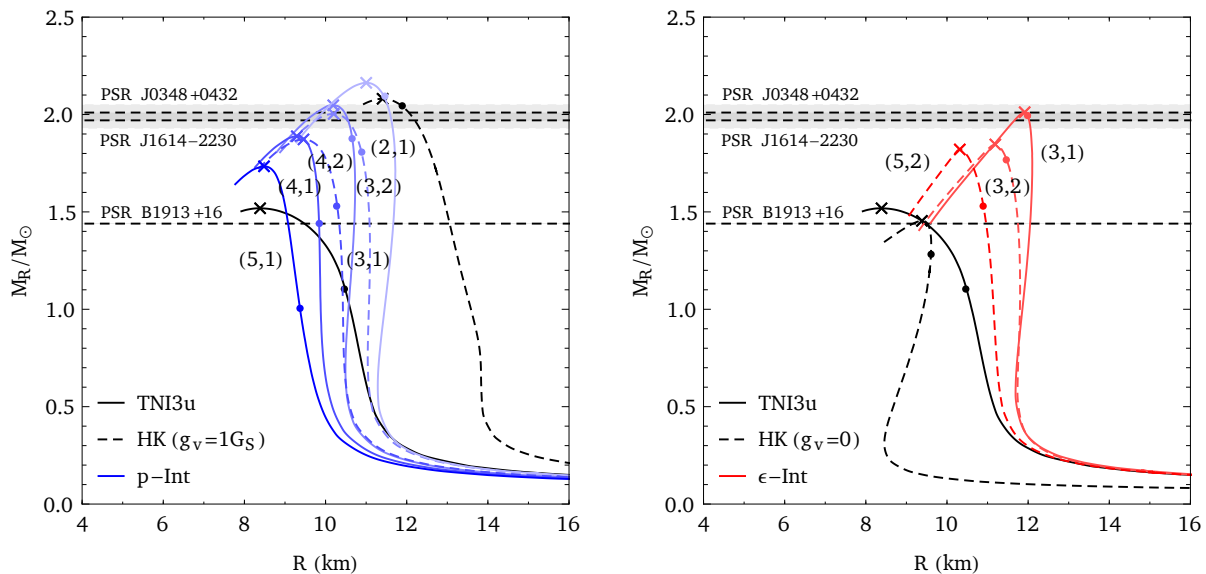


Abbildung 7.10: Masse-Radius Kurven für: (links) p-Interpolation zwischen TNI2u- $\text{HK}(g_v = 1G_S)$ und (rechts) ϵ -Interpolation zwischen TNI2u- $\text{HK}(g_v = 0)$ mit verschiedenen Übergangsfenstern. Die intensiveren Farben entsprechen höheren $\bar{\rho}$ und die gestrichelten Verläufe breiteren Γ . Im Allgemeinen gilt: Ein in der Baryondichte höher gelegenes Übergangsfenster resultiert in niedrigeren Maximalmassen und ein verbreitertes Übergangsfenster verringert die maximale Masse ebenfalls. Der Effekt der Breite ist im Falle der ϵ -Interpolation wesentlich ausgeprägter.

Die ϵ -Interpolation mit den harten QEOs zeigt ein ähnliches Verhalten bezüglich des Übergangsfensters. Hier führt ein in der Baryondichte höher gelegenes Übergangsfenster zu einer weicheren EoS und damit zu einer niedrigeren Maximalmasse. Die Breite des Fensters spielt jedoch bei der ϵ -Interpolation eine wesentlich stärkere Rolle als bei der p-Interpolation. Ein breiteres Fenster führt zu einer deutlich weicheren EoS und damit ebenfalls zu einer geringeren Maximalmasse. Bei hohen Zentren des Übergangsfensters ist der Einfluss von $\Delta\epsilon$ auf die Hybridzustandsgleichung nicht so stark.

7.2.3 Abhängigkeit von der Quark Zustandsgleichung

Aus den vorhergegangenen Abschnitten ist bereits bekannt, dass die QEOs entscheidend ist für das Aussehen der interpolierten Hybridzustandsgleichung bei hohen und mittleren (Baryonen)Dichten. In diesem Abschnitt wird dieser Einfluss der QEOs ohne Farbsupraleitung genauer betrachtet. Die QEOs mit Farbsupraleitung werden im nächsten Abschnitt 7.2.4 in Bezug auf die Möglichkeit einer interpolierten Hybridzustandsgleichung hin untersucht.

Aus der einleitenden Diskussion für die ϵ - und die p-Interpolation ist bereits bekannt, dass eine ϵ -Interpolation mit den steifen QEOs mit Vektor-Kopplung keine kausale Zustandsgleichung liefert, zumindest nicht mit einem plausiblen Übergangsfenster. Daher wird die ϵ -Interpolation im Folgenden nur mit den weicheren EoS HK($g_v = 0$) und RHK($g_v = 0$) betrachtet. Als HEoS wurde wieder die TNI2u gewählt. Als Übergangsfenster wurde sowohl für die ϵ - als auch für die p-Interpolation $(3, 1)\rho_0$ gewählt. Dieses liefert nach Abschnitt 7.2.2 steife Hybridzustandsgleichungen und ist mit den generellen Überlegungen zum Hadronen-Quark Übergang aus Kapitel 1 gut vereinbar. In Abbildung 7.11 sind die Masse-Radius Kurven der verschiedenen interpolierten Hybridzustandsgleichungen zu sehen.

Wie zu erwarten ähneln die Sterne mit p-Interpolation bei höheren Massen/Drücken stark den korrespondierenden reinen Quarksternen aus Kapitel 6.2. Damit kommen für die Beschreibung von massiven $2M_\odot$ Neutronensternen über eine p-Interpolierte Hybridzustandsgleichung nur die QEOs mit Vektor-Kopplung in Frage. Die resultierenden Hybridsterne mit HK($g_v = 1G_S$) und HK($g_v = 1.5G_S$) als QEOs ähneln sich sehr. Die Sterne mit HK($g_v = 1.5G_S$) haben nur eine etwas höhere maximale Masse als die mit HK($g_v = 1G_S$) QEOs. Aus einer (3,1) p-Interpolation in die HK($g_v = 1G_S$) oder

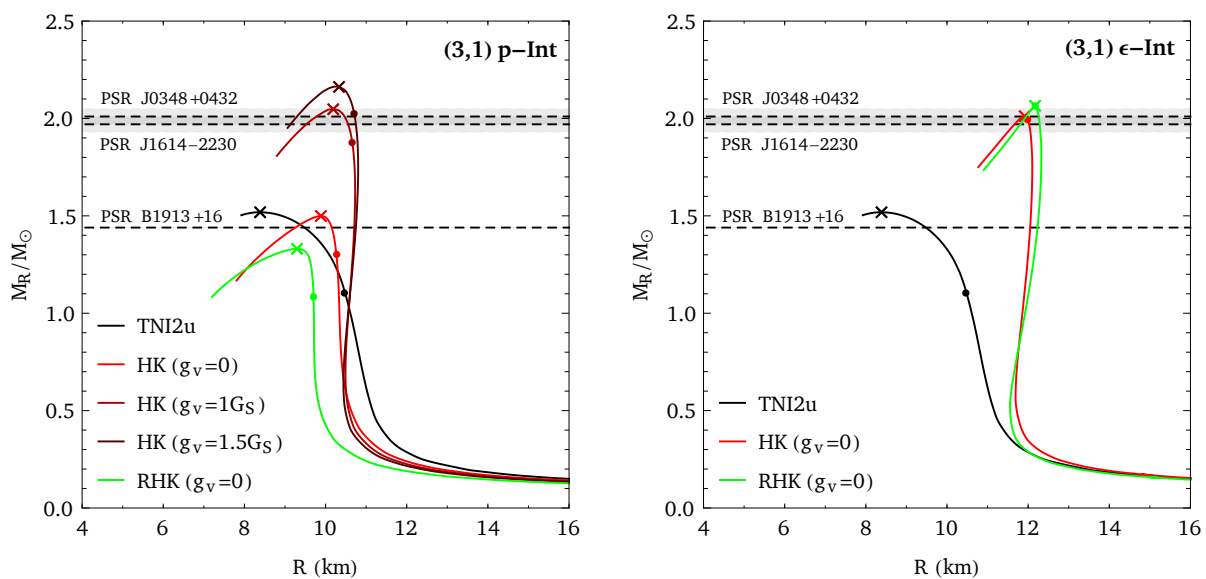


Abbildung 7.11: Masse-Radius Kurven für die (3,1) p-Interpolation (rechts) und die (3,1) ϵ -Interpolation (links). In schwarz ist der Verlauf für rein hadronische TNI2u Sterne zum Vergleich abgebildet.

HK($g_v = 1.5G_S$) folgt eine hinreichend steife Hybridzustandsgleichung, mit welcher die Beschreibung massiver $2M_\odot$ Neutronensterne möglich ist.

Die Hybridsterne mit (3,1) ϵ -Interpolation ähneln sich im Fall der beiden weichen QEoS ohne Vektor-Kopplung sehr stark. Auch mit der (3,1) ϵ -Interpolation in die HK($g_v = 0$) oder RKH($g_v = 0$) Quarkphase sind hinreichend steife Hybridzustandsgleichung zur Beschreibung massiver Neutronensterne möglich.

In den Tabellen 7.3 und 7.4 sind die Maximalmassen, Radien und die zentralen Baryonendichten/-Drücken für die verschiedenen Interpolationen angegeben.

Zum Abschluss dieses Abschnittes werden die konstruierten Hybridzustandsgleichungen noch einmal explizit auf ihre Kausalität geprüft. Nach Abschnitt 2.6 muss sowohl $dp/d\epsilon \geq 0$ als auch $v_s/c = \sqrt{dp/d\epsilon} < 1$ für alle Baryonendichten gelten. Durch eine Auftragung der Schallgeschwindigkeit v_s über der Baryonendichte lassen sich die Hybridzustandsgleichungen auf Kausalität prüfen. Abbildung 7.12 zeigt die Verläufe für die p- und die ϵ -Interpolation. Alle in diesem Abschnitt konstruierten Hybridzustandsgleichungen sind kausal. Vor allem im Fall der p-Interpolation ist auch der Zusammenhang zwischen der Steifigkeit einer Zustandsgleichung und der Schallgeschwindigkeit zu erkennen: steife Zustandsgleichungen haben höhere Schallgeschwindigkeiten.

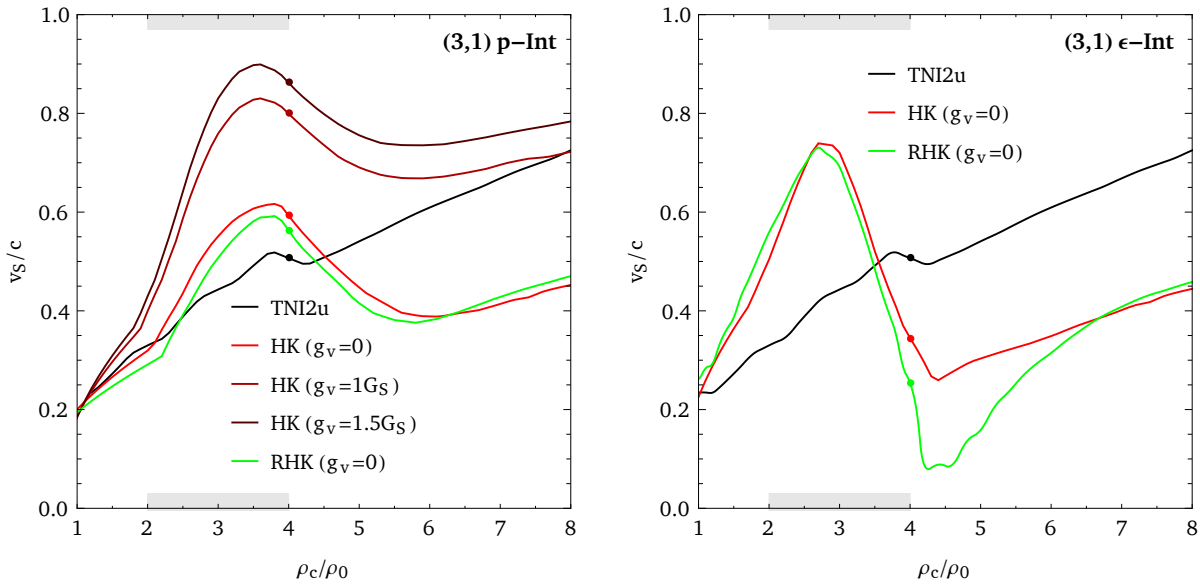


Abbildung 7.12: Schallgeschwindigkeit über der Baryonendichte für die verschiedenen Hybridzustandsgleichungen: (links) mit (3,1)p-Interpolation und rechts mit (3,1) ϵ -Interpolation.

QEoS	M_{\max}/M_\odot	R (km)	ρ_c (MeV/fm ³)	p_c (MeV/fm ³)
HK($g_v = 0$)	1.50	9.88	7.18	266.2
HK($g_v = 1G_S$)	2.05	10.19	6.09	562.4
HK($g_v = 1.5G_S$)	2.16	10.33	5.42	599.5
RKH($g_v = 0$)	1.33	9.30	7.80	268.2

Tabelle 7.3: Maximale Masse, Radius sowie zentrale Baryonendichte und Druck für TNI2u-QEoS (3,1) p-Interpolation.

QEOs	M_{\max}/M_{\odot}	R (km)	ρ_c (MeV/fm ³)	p_c (MeV/fm ³)
HK($g_v = 0$)	2.01	11.91	5.09	200.8
RKH($g_v = 0$)	2.09	12.17	5.16	184.8

Tabelle 7.4: Maximale Masse, Radius sowie zentrale Baryonendichte und Druck für TNI2u-HK($g_v = 0$)/RKH($g_v = 0$)(3,1) ϵ -Interpolation.

7.2.4 ϵ -Interpolation mit Farbsupraleitung

Die Konstruktion einer interpolierten Hybridzustandsgleichung mit einer QEOs mit Farbsupraleitung ist ohne Weiteres im Wesentlichen aus zwei Gründen nicht möglich. Ein Grund hat mit den Eigenschaften der Interpolationsmethoden zu tun und einer liegt bei den QEOs. Die QEOs mit Farbsupraleitung, HK($g_v = 0$) + CS und RKH($g_v = 0$) + CS, haben einen cp-Phasenübergang zwischen der 2SC und CFL Phase. An diesem Phasenübergang erster Ordnung steigen die Baryonendichte und die Energiedichte von der 2SC in die CFL Phase sprunghaft an. Für die Interpolationsmethoden werden aber sowohl Druck als auch Energiedichte als stetige Funktionen über der Baryonendichte benötigt. Daher ist es an sich nur möglich in eine Phase der farbsupraleitenden QEOs zu interpolieren.

Um die wesentlichen Eigenschaften der QEOs zu erhalten, kommt nur eine Interpolation in die, in der Baryonendichte niedriger gelegene, 2SC-Phase in Frage. Um jedoch sicher zustellen, dass zwischen der HEoS-2SC Mischphase und der CFL-Phase ein Phasenübergang konstruierbar ist, empfiehlt sich eine (3-1) ϵ -Interpolation. Diese beeinflusst die QEOs außerhalb der Übergangsfensters nur gering.

Die Abbildung 7.13 zeigt eine solche Interpolation anhand der χ SU(3) HEoS und der HK($g_v = 0$) + CS QEOs.

Zwischen diesen beiden Zustandsgleichungen ließ sich nach Abschnitt 7.1 auch ein cp-Phasenübergang zwischen hadronischer und 2SC-Phase konstruieren. Diese cp-Phasenübergang Hybridzustandsgleichung ist zum Vergleich in Abbildung 7.13 in (schwarz) mit abgebildet. Der 2SC-CFL HK($g_v = 0$) Phasenübergang findet im Fall der interpolierten EoS bei einem niedrigeren Druck von

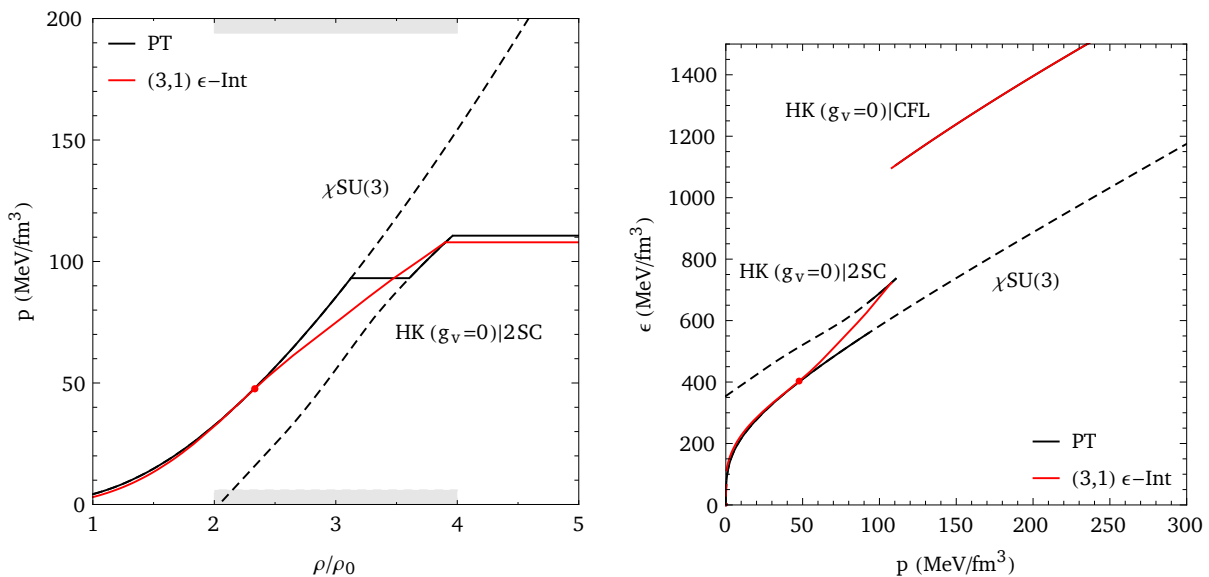


Abbildung 7.13: Exemplarische (3,1) ϵ -Int mit QEOs mit Farbsupraleitung zwischen χ SU(3) und HK($g_v = 0$) + CS. In schwarz die korrespondierende Hybridzustandsgleichung mit cp-Phasenübergang und in schwarz-gestrichelt die reinen HEoS und QEOs.

107.9 MeV/fm³ statt. Im Fall einer reinen farbsupraleitenden QEoS finden die 2SC-CFL Phasenübergänge nach Tabelle 6.2 bei Drücken von 110.6 MeV/fm³ im Fall der HK($g_v = 0$) + CS und bei 80.4 MeV/fm³ im Fall der RKH($g_v = 0$) + CS statt.

In Abbildung 7.14 sind die Masse-Radius Kurven der Sterne mit rein hadronischer χ SU(3) EoS, mit cp-Hybridzustandsgleichung und mit der (3,1) ϵ -interpolierten Hybridzustandsgleichung abgebildet. Der χ SU(3)-HK($g_v = 0$) + CS Fall stellt auch hier wieder einen Spezialfall dar. Die Maximalmasse der interpolierten EoS ist etwas geringer als die der EoS mit cp-Phasenübergang.

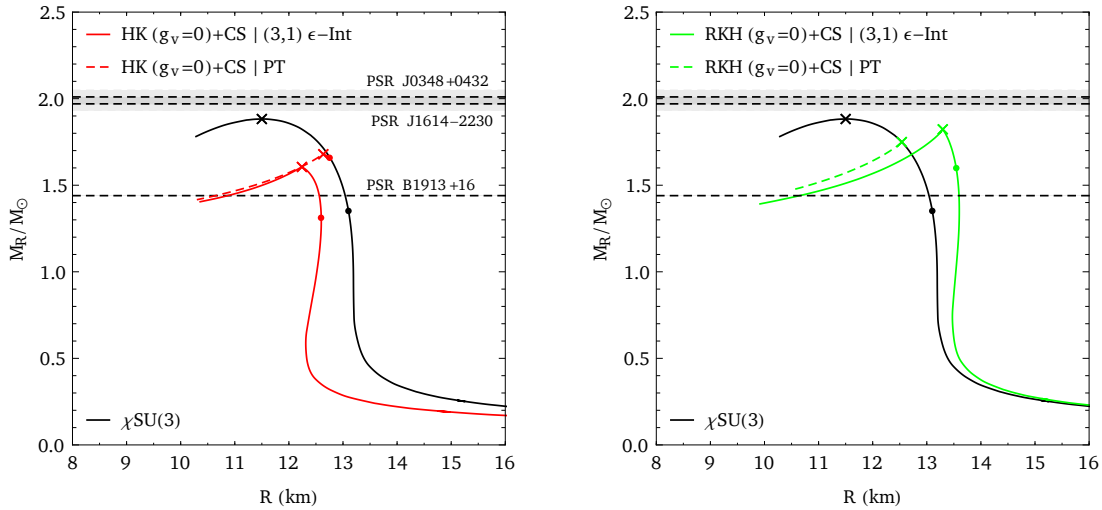


Abbildung 7.14: Masse-Radius-Kurven XSU3: rein hadronische EoS in (schwarz), Hybridzustandsgleichungen mit cp-Phasenübergang (gestrichelt) und Hybridzustandsgleichungen mit (3,1) ϵ -Interpolation als durchgezogene Linien. Die Schwellenwerte für das Auftreten von Hyperonen sind durch Punkte visualisiert. Die Sterne maximaler Masse sind durch Kreuze markiert. Zum Vergleich sind die Massen der Neutronensterne PSR B1913+16, PSR J1614-2230 und PSR J0348+0432 mit Fehlerbalken eingezeichnet.

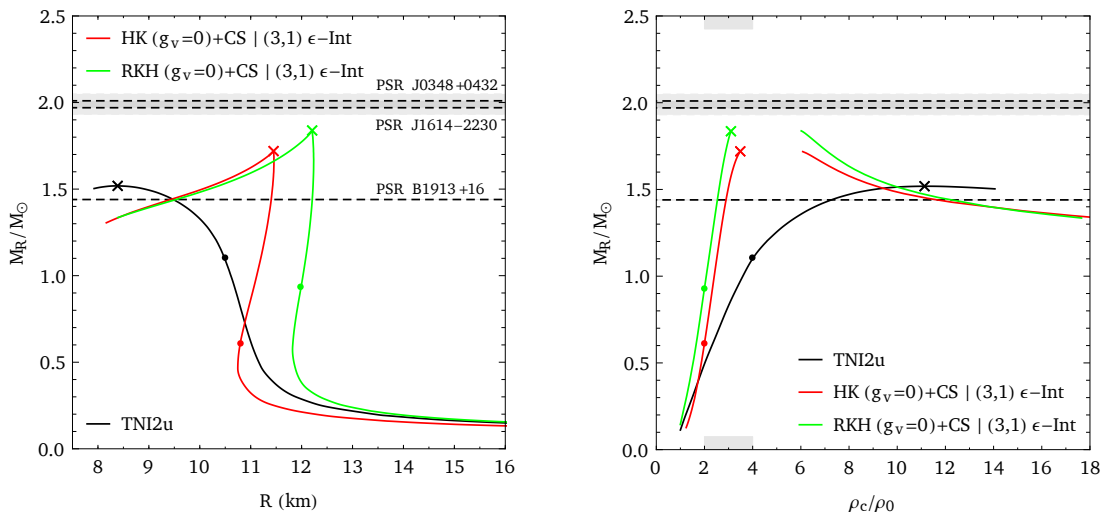


Abbildung 7.15: Masse-Radius Krueve (links) und Masse-zentrale Baryondichte Kurve (rechts) für TNI2u: rein hadronische EoS in (schwarz) und Hybridzustandsgleichungen mit (3,1) ϵ -Interpolation als durchgezogene Linien. Die Schwellenwerte für das Auftreten von Hyperonen sind durch Punkte visualisiert. Die Sterne maximaler Masse sind durch Kreuze markiert. Zum Vergleich sind die Massen der Neutronensterne PSR B1913+16, PSR J1614-2230 und PSR J0348+0432 mit Fehlerbalken eingezeichnet.

Generell sind (3,1) ϵ -Interpolationen zwischen allen HEoS und den beiden farbsupraleitenden QEoS möglich. Die resultierenden Hybridsterne haben im Allgemeinen eine hadronische Phase, dann bei mittleren Baryonendichten eine HEoS-2SC Mischphase im Übergangsfenster $2\rho_0 \leq \rho \leq 4\rho_0$ und dann bei leicht erhöhten Drücken, im Vergleich zum Phasenübergang zweier purer Quarkphasen, den CFL-Phasenübergang. Alle Sterne haben eine stabile HEoS-2SC Mischphase.

Abbildung 7.15 zeigt die M - R und M - ρ_c Kurve für einen Hybridstern mit Farbsupraleitung und TNI2u HEoS. Diese Hybridsterne mit (3,1) ϵ -Interpolation haben keine korrespondierenden Hybridsterne mit cp-Phasenübergang. In der Auftragung über der Baryonendichte ist der Phasenübergang zwischen HEoS-2SC Mischphase und CFL Quarkphase deutlich zu erkennen.

In Abbildung 7.16 sind die Masse-Radius Kurven der Hybridsterne mit TNI3u, BHF(N,1) und RMF240 HEoS mit Farbsupraleitung abgebildet. Mit diesen drei HEoS gibt es sowohl Hybridsterne mit (3,1) ϵ -Interpolation als auch welche mit cp-Phasenübergang. Wobei es im Fall des cp-Phasenübergangs keine Sterne mit stabiler Quarkphase gibt.

In Tabelle 7.5 sind die Maximalmassen, Radien und zentralen Drücke für die (3,1) ϵ -interpolierten Hybridzustandsgleichungen mit Farbsupraleitung angegeben. Zum Vergleich sind auch die Maximalmassen der rein hadronischen Sterne und, insofern existent, die Maximalmassen der Sterne mit cp-Phasenübergang zwischen HEoS und QEoS angegeben.

Eine (3,1) ϵ -Interpolation in die $HK(g_v = 0)|2SC$ Phase führt zu Sternen mit einer maximalen Masse von $\sim 1.65M_\odot$. Entsprechende Sterne mit $RKH(g_v = 0)|2SC$ Mischphase haben etwas höhere maximale Massen von $\sim 1.81M_\odot$. Damit sind im Rahmen der hier vorgestellten interpolierten Hybridzustandsgleichung mit Farbsupraleitung keine massiven $2M_\odot$ Neutronensterne beschreibbar.

HEoS	$M_{\max}^{\text{HEoS}}/M_\odot$	QEoS	$M_{\max}^{\text{CP}}/M_\odot$	$M_{\max}^{\text{Int}}/M_\odot$	R^{Int} (km)	p_c^{Int} (MeV/fm ³)
TNI3u	1.83	$HK(g_v = 0) + CS$	1.64	1.69	11.70	122.9
		$RKH(g_v = 0) + CS$	1.68	1.84	12.52	114.3
BHF(N,1)	2.07	$HK(g_v = 0) + CS$	1.71	1.68	11.89	114.2
		$RKH(g_v = 0) + CS$	1.77	1.83	12.79	106.7
RMF240	1.55	$HK(g_v = 0) + CS$	1.53	1.57	12.10	116.5
		$RKH(g_v = 0) + CS$	1.55	1.78	13.25	102.5
χ SU(3)	1.88	$HK(g_v = 0) + CS$	1.67	1.61	12.24	107.9
		$RKH(g_v = 0) + CS$	1.75	1.82	13.29	95.4
TNI2	1.07	$HK(g_v = 0) + CS$	-	1.71	11.44	132.7
		$RKH(g_v = 0) + CS$	-	1.83	12.20	122.8
TNI2u	1.52	$HK(g_v = 0) + CS$	-	1.72	11.50	132.0
		$RKH(g_v = 0) + CS$	-	1.84	12.21	122.7
TNI3	1.09	$HK(g_v = 0) + CS$	-	1.67	11.58	129.2
		$RKH(g_v = 0) + CS$	-	1.82	12.44	117.9
BHF(N, H, 1)	1.25	$HK(g_v = 0) + CS$	-	1.66	11.63	126.7
		$RKH(g_v = 0) + CS$	-	1.80	12.59	114.4
SCL3 $\Lambda\Sigma$	1.88	$HK(g_v = 0) + CS$	-	1.55	11.92	117.6
		$RKH(g_v = 0) + CS$	-	1.75	12.98	103.0

Tabelle 7.5: Maximalmassen, Radien und zentralen Druck für die (3,1) ϵ -interpolierten Hybridzustandsgleichungen mit Farbsupraleitung. Zum Vergleich sind auch die Maximalmassen der rein hadronischen Sterne und, insofern existent, die Maximalmassen der Sterne mit cp-Phasenübergang zwischen HEoS und QEoS angegeben.

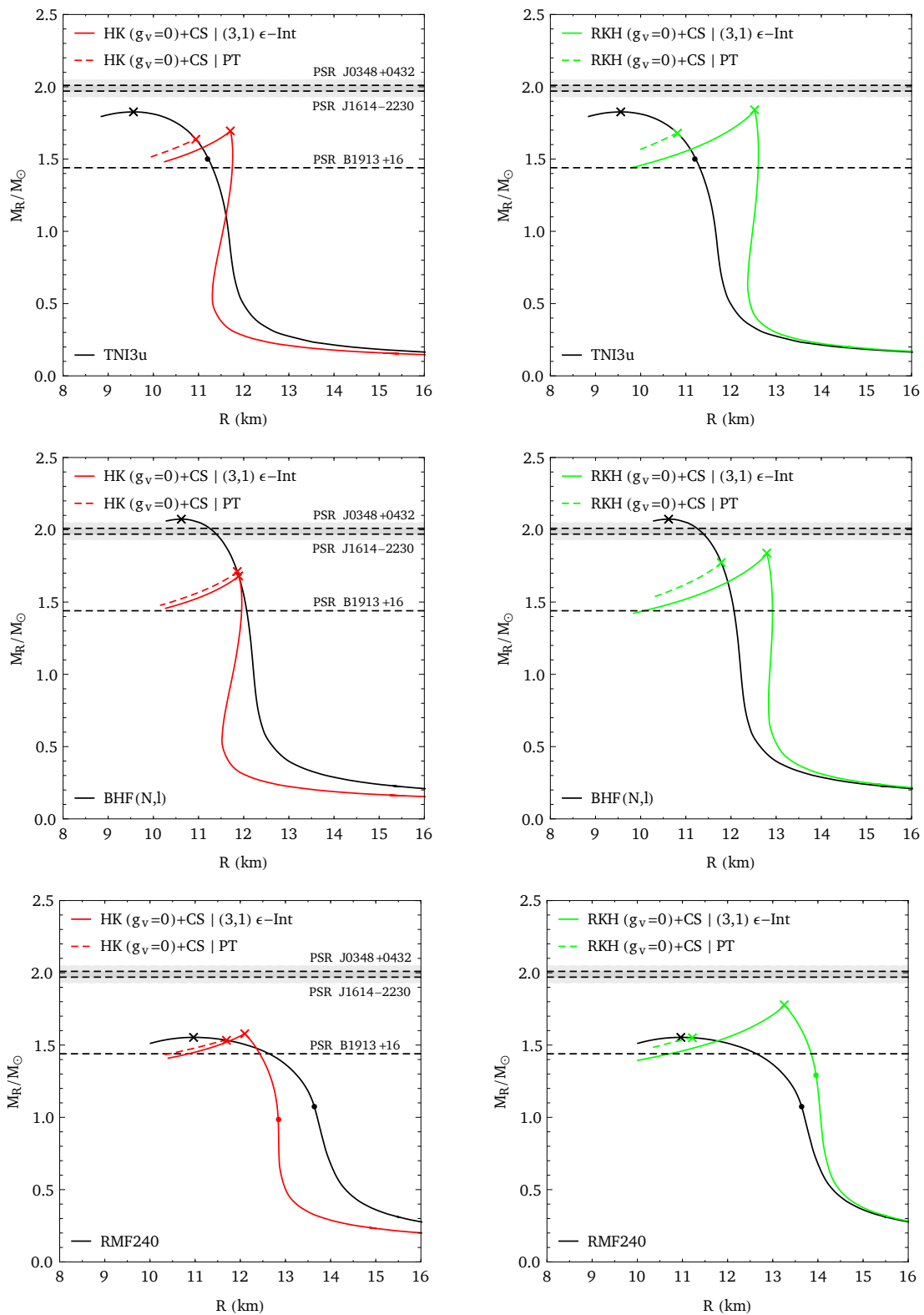


Abbildung 7.16: Masse-Radius Kurven für TNI3u, BHF(N,1) und RMF240: rein hadronische EoS in (schwarz), Hybridzustandsgleichungen mit cp -Phasenübergang (gestrichelt) und Hybridzustandsgleichungen mit (3,1) ϵ -Interpolation als durchgezogene Linien. Die Schwellenwerte für das Auftreten von Hyperonen sind durch Punkte visualisiert. Die Sterne maximaler Masse sind durch Kreuze markiert. Zum Vergleich sind die Massen der Neutronensterne PSR B1913+16, PSR J1614-2230 und PSR J0348+0432 mit Fehlerbalken eingezeichnet.

7.2.5 Abhängigkeit von der hadronischen Zustandsgleichung

Aus Abschnitt 7.2.3 sind bereits geeignete QEOs und Übergangsfenster für die Konstruktion steifer Hybridzustandsgleichungen bekannt. Für die p-Interpolation ist bei einem Übergangsfenster von $(3, 1)\rho_0$ die harte $HK(g_v = 1G_S)$ QEOs geeignet. Für die $(3,1)$ ϵ -Interpolation ist die weiche $HK(g_v = 0)$ QEOs gut geeignet. Mit diesen QEOs und Interpolationsverfahren werden nun für alle HEoS Hybridzustandsgleichungen konstruiert. Die entsprechenden Masse-Radius Kurven sind in Abbildung 7.17 zu sehen. Die Tabellen 7.6 und 7.7 enthalten die entsprechenden Maximalmassen, Radien und zentralen Baryondichten/Drücke.

Wie bereits im Abschnitt 7.2.1 beim Vergleich von ϵ - und p-Interpolation festgestellt, haben die HEoS nur Einfluss auf Bereiche geringerer (Baryonen)Dichten und Drücke. Auf die maximale Masse hat die Wahl der HEoS einen vergleichsweise geringen Einfluss. Für die Struktur der Sterne hat die Wahl der HEoS jedoch eine entscheidende Bedeutung. Dieser Aspekt wird im folgenden Abschnitt 7.2.6 thematisiert.

Ein weiterer interessanter Punkt ist der, dass die Maximalmasse eines Neutronensterns nicht direkt von der nuklearen Kompressibilität κ der HEoS abhängt. Dies ist der Fall, da es mit allen HEoS möglich ist, im Rahmen einer interpolierten Hybridzustandsgleichung, massive Neutronensterne zu beschreiben. Auch mit HEoS mit geringen κ , wie TNI2, TNI2u, RMF240 oder SCL3 $\Lambda\Sigma$, können massive Neutronensterne beschrieben werden. Die Kompressibilitäten der genannten HEoS sind nach Tabelle 5.1 mit dem in [5] gegebenen empirischen Wert von $\kappa_{exp} = (200 \pm 20)\text{MeV}$ kompatibel.

Die Maximalmasse hängt im Fall der interpolierten Hybridzustandsgleichungen im wesentlichen von deren Steifigkeit/Härte in oder jenseits des Übergangsfensters ab.

Es wurden in diesem Abschnitt nur Sterne mit QEOs mit HK-Parametersatz berechnet. Berechnungen mit dem RKH-Parametersatz liefern ähnliche Ergebnisse, welche aus dem Abschnitt 7.2.3 zum Einfluss der QEOs ersichtlich werden. Im Fall der ϵ -Interpolation haben die Hybridsterne mit $RKH(g_v = 0)$ QEOs leicht höhere Maximalmassen und im Fall der p-Interpolation etwas geringere.

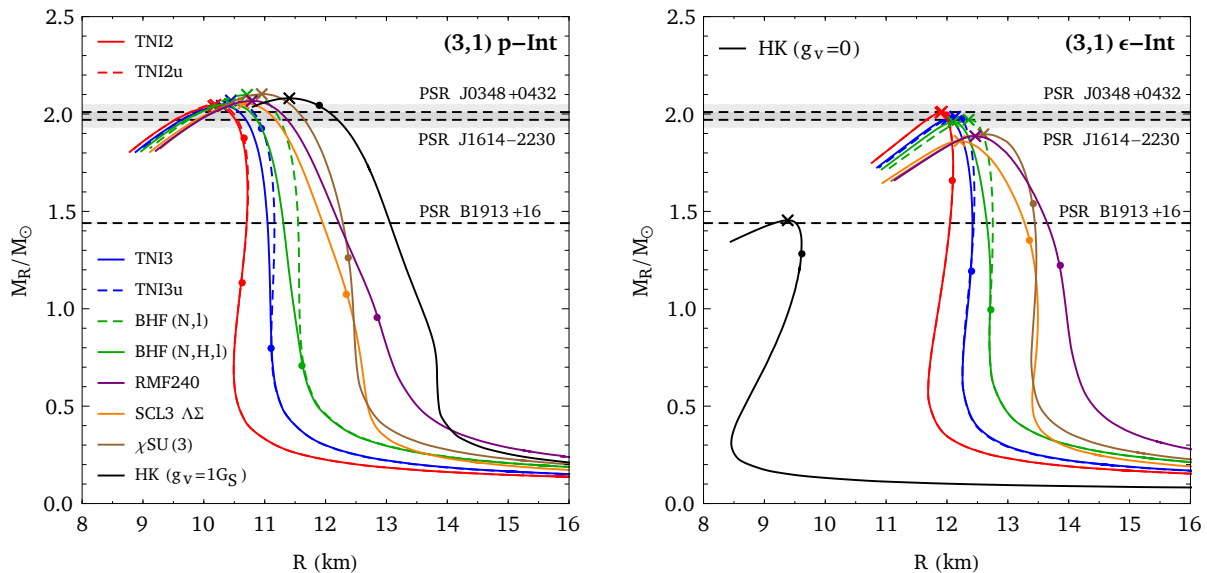


Abbildung 7.17: Masse-Radius Kurven für die verschiedenen HEoS: Links mit $(3,1)$ p-Interpolation mit der $HK(g_v = 1G_S)$ QEOs und rechts mit $(3,1)$ ϵ -Interpolation mit der $HK(g_v = 0)$ QEOs. In schwarz je die korrespondierende reine QEOs. Die Schwellenwerte für das Auftreten von Hyperonen sind durch Punkte visualisiert. Die Sterne maximaler Masse sind durch Kreuze markiert. Zum Vergleich sind die Massen der Neutronensterne PSR B1913+16, PSR J1614-2230 und PSR J0348+0432 mit Fehlerbalken eingezeichnet.

HEoS	M_{\max}/M_{\odot}	R (km)	ρ_c (MeV/fm ³)	p_c (MeV/fm ³)
TNI2	2.04	10.16	6.14	570.0
TNI2u	2.05	10.19	6.09	562.4
TNI3	2.04	10.29	6.09	562.4
TNI3u	2.07	10.44	5.91	536.3
BHF(N,1)	2.10	10.71	5.70	507.7
BHF(N,H,1)	2.05	10.43	6.02	552.2
RMF240	2.07	10.79	5.85	527.5
SCL3 $\Lambda\Sigma$	2.05	10.65	5.92	537.6
χ SU(3)	2.10	10.95	5.66	500.5

Tabelle 7.6: Maximale Masse, Radius sowie zentrale Baryondichte und Druck für HEoS-HK($g_v = 1G_S$) (3,1) p -Interpolation.

HEoS	M_{\max}/M_{\odot}	R (km)	ρ_c (MeV/fm ³)	p_c (MeV/fm ³)
TNI2	2.01	11.89	5.12	203.4
TNI2u	2.01	11.91	5.09	200.8
TNI3	1.97	12.01	5.15	202.5
TNI3u	1.99	12.13	4.94	191.2
BHF(N,1)	1.97	12.36	4.77	179.1
BHF(N,H,1)	1.96	12.1	5.13	201.3
RMF240	1.89	12.47	5.06	193.0
SCL3 $\Lambda\Sigma$	1.86	12.21	5.20	199.0
χ SU(3)	1.90	12.60	4.71	173.5

Tabelle 7.7: Maximale Masse, Radius sowie zentrale Baryondichte und Druck für HEoS-HK($g_v = 0$) (3,1) ϵ -Interpolation.

Die Hybridsterne mit der (3,1) ϵ -Interpolation und der weicheren QEoS haben im Vergleich relativ geringe zentrale Drücke und Baryondichten. Daraus resultieren etwa 2 km größere Radien und je nach HEoS zwischen 0.03 bis $0.2M_{\odot}$ geringere Maximalmassen. Diese Tatsache hat Einfluss auf die im folgenden Abschnitt 7.2.6 beschriebene Struktur der massiven Hybridsterne mit ϵ -Interpolation.

Die beiden, in diesem Abschnitt angewendeten, Interpolationsverfahren ermöglichen die Beschreibung von massiven $2M_{\odot}$ Neutronensternen mit allen HEoS und QEoS. Die in den Zentren der Hybridsterne auftretenden (Baryonen)Dichten sind mit den Annahmen zu massiven Neutronensternen, nach Kapitel 1, kompatibel. Auch die Radien sind plausibel.

7.2.6 Struktur eines Hybridsterns mit interpolierter EoS

Durch das Übergangsfenster ist die grobe Struktur des Sterns vorgegeben. Er besteht aus einem Kern, welcher hauptsächlich durch die QEoS beschrieben wird, der Übergangszone aus stark wechselwirkenden Quarks und Hadronen und dem äußeren Kern, welcher hauptsächlich durch die HEoS beschrieben wird. Diese Struktur haben alle Hybridsterne mit interpolierter Zustandsgleichung gemein.

Hybridsterne, vergleichbarer Masse, mit ϵ - und p-Interpolation unterscheiden sich in Bezug auf ihre Struktur. Die Hybridsterne mit ϵ -Interpolation haben, auf Grund der im Übergangsfenster wesentlich steiferen EoS, eine wesentlich ausgeprägtere Übergangsphase. Die Abbildungen 7.18 und 7.19 zeigen Hybridsterne maximaler Masse mit BHF(N, H, 1)-HK($g_v = 1G_S$) (3,1) p-Interpolation und BHF(N, H, 1)-HK($g_v = 0$) (3,1) ϵ -Interpolation.

Für die Struktur der Hybridsterne im Detail ist die HEoS von großer Bedeutung. Sie hat zwar nur einen geringen Einfluss auf die Masse aber für die konkrete Zusammensetzung des Sterns ist sie entscheidend. Vor allem in Bezug auf das Auftreten von Hyperonen. Die Schwellenwerte für das Auftreten von Hyperonen sind nach Tabelle 5.1 für die verschiedenen HEoS mit Hyperonen sehr unterschiedlich, da noch immer eine große Unsicherheit die Nukleon-Hyperon-Wechselwirkung betreffend besteht. Die Schwellenwerte streuen zwischen $1.92\rho_0$ und $4.01\rho_0$. Je nach HEoS kann der Anteil an Hyperonen in einem Hybridstern daher stark schwanken. Dieser Anteil ist jedoch für einige Prozesse von großer Bedeutung, wie zum Beispiel für das Abkühlen realer Neutronensterne über die "*hyperon direct URCA*"-Kühlung [5].

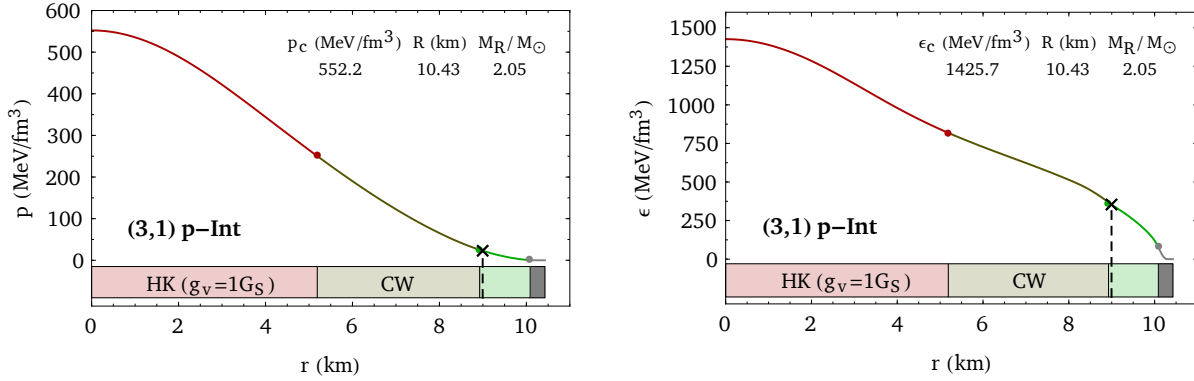


Abbildung 7.18: Exemplarische (links) Druck-Radius-Kurve und (rechts) Energiedichte-Radius-Kurve für einen Hybridstern maximaler Masse mit BHF(N, H, l)-HK($g_v = 1G_S$) (3,1) p-Interpolation. Der graue Punkt markiert den Übergang zwischen BHF(N, H, l) und der Zustandsgleichung für die Kruste BPS/NV. Der grüne und der rote Punkt markieren Anfang und Ende des Übergangsfensters. Das schwarze Kreuz bzw. die schwarz-gestrichelte Linie markieren die Hyperonen-Schwelle der BHF(N, H, l) HEoS bei $p_{th} = 21.07 \text{ MeV/fm}^3$.

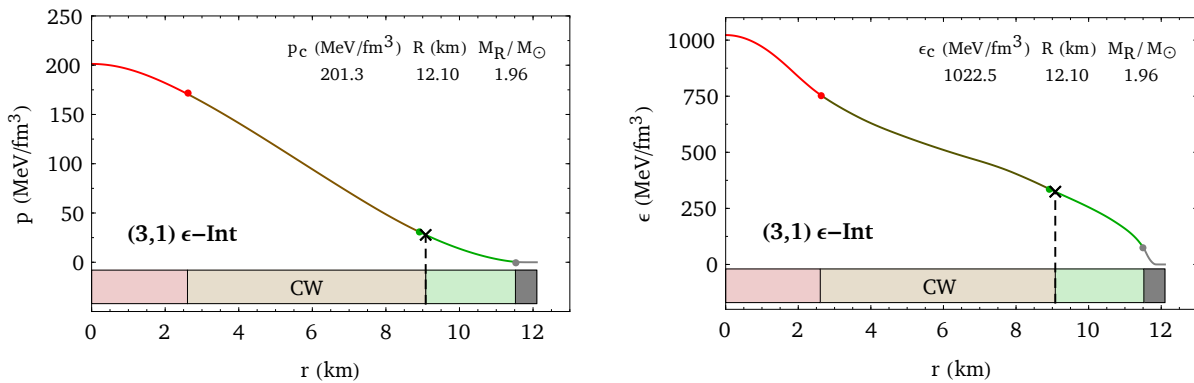


Abbildung 7.19: Exemplarische (links) Druck-Radius-Kurve und (rechts) Energiedichte-Radius-Kurve für einen Hybridstern maximaler Masse mit BHF(N, H, l)-HK($g_v = 0$) (3,1) ϵ -Interpolation. Der graue Punkt markiert den Übergang zwischen BHF(N, H, l) und der Zustandsgleichung für die Kruste BPS/NV. Der grüne und der rote Punkt markieren Anfang und Ende des Übergangsfensters. Das schwarze Kreuz bzw. die schwarz-gestrichelte Linie markieren die Hyperonen-Schwelle der BHF(N, H, l) HEoS bei $p_{th} = 21.07 \text{ MeV/fm}^3$.

8 Zusammenfassung und Ausblick

Im Verlauf dieser Arbeit wurde die TOV Gleichung für verschiedenste Zustandsgleichungen gelöst. Die entsprechenden Lösungen, resultierenden Sterne, wurden miteinander und mit den in der Einleitung genannten empirischen Daten über Neutronensterne verglichen.

Wie zu erwarten war die in Kapitel 4 vorgestellte einfache Zustandsgleichung eines idealen, degenerierten Fermi-Gases aus Neutronen nicht geeignet, um Neutronensternmaterie adäquat, in Hinblick auf typische Massen, zu beschreiben. Dennoch zeigten die Ergebnisse mit dieser einfachen EoS einige generelle Eigenschaften der Lösungen der TOV Gleichung, wie zum Beispiel den für nicht-selbstgebundene, kompakte Sterne typischen Masse-Radius-Verlauf.

In Kapitel 5 wurden verschiedene Zustandsgleichungen zur Beschreibung von hadronischer Materie vorgestellt. Diese wurden durch das Auftreten von Hyperonen bei höheren Dichten ($\rho \approx 2.5\rho_0$) weicher. Neutronensterne mit HEoS, welche Hyperonen berücksichtigen, haben maximale Massen von um die $1.5M_\odot$. Sterne mit derartigen Massen haben in der Beschreibung über eine HEoS sehr hohe zentrale Dichten, bei denen nach dem QCD Phasendiagramm die Existenz von rein hadronischer Materie nicht klar ist.

Verschiedene Quark Zustandsgleichungen wurden in Kapitel 6 vorgestellt. Mit diesen Zustandsgleichungen wurden Quarksterne berechnet, um für die späteren Überlegungen zu Hybridsternen sowohl die Ergebnisse für rein hadronische Sterne als auch für Sterne aus reiner Quark-Materie zu haben. Die steifen QEoS mit Vektor-Kopplung resultierten in schweren Sternen mit um die zwei Sonnenmassen, bei moderaten zentralen Baryondichten von um die $6\rho_0$. Die weicheren QEoS ohne Vektor-Kopplung resultierten in leichteren Sternen mit $M_{max} < 1.5M_\odot$. Die Quark Zustandsgleichungen mit Farbsupraleitung stellten die weichsten Zustandsgleichungen dar. Die berechneten Sterne mit Kernen aus farbsupraleitender Quarkmaterie waren die leichtesten Quarksterne mit den höchsten zentralen Dichten. Im Bereich um die Maximalmassen waren diese Baryondichten mit $\rho > 10\rho_0$ für realistische Neutronensterne zu hoch.

In Kapitel 7 wurden schließlich Hybridzustandsgleichungen aus hadronischer und Quarkmaterie konstruiert.

In Abschnitt 7.1 zunächst mittels des konventionellen Verfahrens eines Phasenübergangs erster Ordnung mit konstantem Druck nach Gibbsbedingungen. Ein solcher Phasenübergang zwischen den HEoS und QEoS ließ sich jedoch nur in einigen Fällen konstruieren und das nur mit den weicheren Quark Zustandsgleichungen. Dies hatte zur Folge, dass die resultierenden Hybridzustandsgleichungen noch weicher als die reinen HEoS wurden. Die resultierenden Hybridsterne wurden demnach noch leichter als die entsprechenden hadronischen Neutronensterne. Die Beschreibung von massiven $2M_\odot$ Neutronensternen ist im Rahmen einer EoS mit cp-Phasenübergang aus hadronischer Materie mit Hyperonen und Quarkmaterie nicht möglich. Nur die Hybridzustandsgleichung mit der steifen BHF(N, 1), welche keine Hyperonen enthält, resultierten in Hybridsternen mit Massen um die $2M_\odot$. Bis auf einen Sonderfall (χ SU(3) mit $HK(g_v = 0) + CS$) waren die Quarkphasen aller Hybridsterne instabil. Nur die χ SU(3) HEoS hat mit der $HK(g_v = 0) + CS$ QEoS einen Phasenübergang in die farbsupraleitende 2SC Phase der $HK(g_v = 0) + CS$ und damit eine sehr kleine stabile Quarkphase.

In Abschnitt 7.2 wurden schließlich die beiden in [5] vorgestellten Interpolationsverfahren nachvollzogen und auf die verschiedenen HEoS und QEoS angewendet. Generell ist es mit der p- und der ϵ -Interpolation möglich hinreichend steife, thermodynamisch konsistente und, nach Abschnitt 2.6, kausale Hybridzustandsgleichungen zu konstruieren.

Mit einer (3,1)-p-Interpolation und den steifen QEoS mit Vektor-Kopplung, $HK(g_v = 1G_s)$ oder $HK(g_v = 1.5G_s)$, ist es mit jeder HEoS möglich steife Hybridzustandsgleichungen zu konstruieren, welche in Sternen mit Massen von um die $2M_\odot$ bei plausiblen zentralen Baryondichten von um die

$6\rho_0$ resultieren. Generell ähneln die Sterne mit p-Interpolation bei hohen Dichten stark den entsprechenden reinen Quarksternen. Daher sind auch die steifen QEOs nötig um massive Hybridsterne zu ermöglichen.

Die ϵ -Interpolation ist in vielerlei Hinsicht äußerst interessant: Die ϵ -Interpolation versteift die Zustandsgleichung auf Grund ihres Korrekturterms in p mitunter enorm in der Übergangsregion. Die resultierenden Hybridsterne ähneln nicht den entsprechenden Quarksternen. Sie sind wesentlich massiver. Daher sind auch mit den weicheren QEOs, $\text{HK}(g_v = 0)$ oder $\text{RKH}(g_v = 0)$, und einer (3,1)- ϵ -Interpolation massive Hybridsterne von um die $2M_\odot$ mit plausiblen zentral Dichten möglich.

Mit der ϵ -Interpolation ist es auch möglich Hybridsterne mit farbsupraleitender QEOs zu konstruieren. Bei diesen Hybridsternen ist es wichtig, dass die farbsupraleitende QEOs außerhalb der Übergangsregion nicht oder nur geringfügig von der Interpolation beeinflusst wird, damit der 2SC-CFL-Phasenübergang erhalten bleibt. Eine (3,1)- ϵ -Interpolation in die 2SC-Phasen der QEOs $\text{HK}(g_v = 0) + \text{CS}$ und $\text{RKH}(g_v = 0) + \text{CS}$ ist mit allen HEOs möglich ohne den 2SC-CFL-Phasenübergang wesentlich zu verschieben. Damit können Hybridzustandsgleichungen mit einer Mischphase aus hadronischer und 2SC-farbsupraleitender Quarkmaterie konstruiert werden. Die resultierenden Hybridsterne haben, nach der TOV Gleichung, alle eine stabile HEOs-2SC-Mischphase und eine Maximalmasse am 2SC-CFL-Phasenübergang. Damit sind stabile CFL Phasen in Hybridsternen auch mit interpolierten Zustandsgleichungen nicht möglich. Dies beschränkt die möglichen Massen der Hybridsterne mit Farbsupraleitung auf unter $1.8M_\odot$.

Die HEOs hat für die äußeren Eigenschaften der Hybridsterne mit interpolierter EoS, wie Masse und Radius, einen nur geringen Einfluss. Für diese Eigenschaften und die Struktur bei hohen Dichten ist die verwendete QEOs ausschlaggebend. Für die Struktur bei niedrigen Dichten ist die HEOs jedoch entscheidend, vor allem im Hinblick auf das Auftreten von Hyperonen.

Zusammenfassend kann man festhalten, dass die beiden vorgestellten Interpolationsverfahren mit unterschiedlichen QEOs und Übergangsregionen zwischen 2 und $4\rho_0$ für alle HEOs hinreichend steife Hybridzustandsgleichungen erzeugen, mit denen auch die Beschreibung von massiven $2M_\odot$ Neutronensternen möglich ist. Die nukleare Inkompressibilität κ der HEOs hat dabei keinen wesentlichen Einfluss auf die Maximalmassen der Hybridsterne mit interpolierter EoS. Dabei sind die Baryondichten im Kern der Sterne für die Hybridzustandsgleichungen mit der Annahme, dass in Neutronensternen keine Materie vorkommt, die dichter als $10\rho_0$ ist, kompatibel. Mit entsprechenden Zustandsgleichungen für die Kruste (BPS/NV) sind auch die errechneten Radien der Hybridsterne von um die 10 km plausibel.

Für weiterführende Untersuchungen mit interpolierten Zustandsgleichungen wären Berechnungen mit Modellen für rotierende Neutronensterne interessant. Besonders im Fall der Hybridsterne mit Farbsupraleitung aus Abschnitt 7.2.4. Für die Hybridsterne mit $\text{RKH}(g_v = 0)|_{2\text{SC}}$ QEOs würde die Beschreibung in einem Modell eines rotierenden Sterns die Maximalmasse wahrscheinlich hinreichend erhöhen um mit $2M_\odot$ Neutronensternen kompatibel zu sein. Ausgehend von den typischen Effekten der Rotation auf die äußeren Eigenschaften der Sterne: nach [1] etwa 10% höhere Maximalmassen und 1.5 – 2 km größere äquatoriale Radien bei einer Rotation mit Kepler Frequenz.

Generell wären auch genauere Untersuchungen zur Struktur der Mischphase hochinteressant. Die Beschreibung der stark-wechselwirkenden Hadronen-Quark-Materie erfolgt im Rahmen der Interpolation, rein durch eine phänomenologisch motivierte, glatte Interpolation zwischen HEOs und QEOs in einer thermodynamisch konsistenten Weise. Über die genauere, innere Struktur dieser Phase sind, im Rahmen dieser Arbeit, keine Aussagen möglich.

Anhänge

A Mathematica Code

In den folgenden beiden Abschnitten wird der Code der zwei in Kapitel 3 beschriebenen zentralen Methoden zum numerischen Lösen der TOV Gleichung und zum Auffinden der Maximalmasse angegeben. Es handelt sich um MATHEMATICA 9.0.1 Input [20].

A.1 TOV Stepper

Der in Abbildung A.1 angegebene Code entspricht dem in Abschnitt 3.2 beschriebenen Eulerverfahren zur schrittweisen Lösung der TOV Gleichung.

Aus dem Code wird der explizite Umgang mit den Einheiten ersichtlich. Mittels der in Abschnitt 3.1 vorgestellten Umrechnungsfaktoren werden mit Drücken und Energiedichten in MeV/fm^3 gerechnet. Die Massen werden für die Berechnungen selbst in Kilometern angegeben. Daher ist es nötig für die Energiedichte in Gleichung (3.12) und den Druck in der zweiten Klammer des Zählers von (3.9) die MeV/fm^3 in km^{-2} umzurechnen. Dazu wird der Umrechnungsfaktor MeVfm3km2 aus Gleichung (3.4b) verwendet. Die Radien werden in Kilometern berechnet. Zur Ausgabe werden alle Massen über die Sonne als Referenzmasse nach Gleichung (3.5) relativiert.

Die zentrale Methode TOVpStepperEuler berechnet unter Angabe einer EoS efunct , eines initialen Druckes $p_c \equiv p_0$ und einer Schrittweite Δr die Lösung der TOV Gleichung bis zu einem Radius von R . Dieser Radius des Sterns ist über die Abbruchbedingung aus Abschnitt 3.2 gegeben. Um Endlosschleifen zu verhindern wird die Anzahl der Schritte und damit der maximale Radius mit einer Angabe von

```
MeVfm3km2 = 1.32374**^-6 ; (* km^-2 / (MeVfm^-3) *)
MSkm = 1.47652 (* km *) ;

ApEuler[p_, efunct_, M_, r_, Δr_] := - (M + 4 π * r^3 * p * MeVfm3km2) (efunct[p] + p) / (r (r - 2 M)) Δr (* Druckänderung *)
AMEuler[p_, efunct_, r_, Δr_] := 4/3 π * efunct[p] * MeVfm3km2 * Δr (3 r^2 + 3 r Δr + Δr^2) (* Massenänderung *)

TOVpStepperEuler[p0_, efunct_, Δr_, steps_] := Module[{p, M, r, output, pStep, mStep},
  output = {
    {0, 0, p0, efunct[p0]}, (* Anfangswerte *)
    {Δr * 1000, AMEuler[p0, efunct, 0, Δr] / MSkm, p0, efunct[p0]} (* 1. Schritt *)
  };
  r = Δr; (* 1. Schritt *)
  p = p0; (* 1. Schritt *)
  M = AMEuler[p0, efunct, 0, Δr]; (* 1. Schritt *)
  For[i = 1, i < steps, i++,
    pStep = ApEuler[p, efunct, M, r, Δr];
    mStep = AMEuler[p, efunct, r, Δr];
    r = r + Δr;
    p = p + pStep;
    M = M + mStep;
    output = Append[output, {r * 1000, M / MSkm, p, efunct[p]}];
    If[p ≤ 0, Break[]] (* Abbruchbedingung *)
  ];
  output
]
```

Abbildung A.1: Eulerverfahren zur schrittweisen Lösung der TOV Gleichung im Druck p nach Abschnitt 3.2

maximalen Schritten *steps* begrenzt. Zu Endlosschleifen kann es kommen, wenn p_c extrem klein gewählt wird oder die EoS fehlerhaft ist und so die Abbruchbedingung nicht erfüllt wird. Als Schrittweite wird für die in dieser Arbeit gezeigten Ergebnisse ein Meter verwendet.

A.2 Golden Maximum Methode

Der Code in Abbildung A.2 entspricht der in Abschnitt 3.3 vorgestellten *Golden Maximum Methode* nach [19]. Diese Methode wird zum Auffinden der Maximalmasse einer Zustandsgleichung verwendet.

```
GoldenMaxFunc [{ax_, bx_, cx_}, func_, steps_] := Module[{f1, f2, x0, x1, x2, x3, cR, cC, max},
  cR = N@GoldenRatio - 1; (* 0.618 *)
  cC = 1 - cR; (* 0.382 *)

  x0 = ax; (* linke Intervallgrenze *)
  x3 = cx; (* rechte Intervallgrenze *)
  If[Abs[cx - bx] > Abs[bx - ax], (* Bestimmung der beiden mittleren Stützstellen x1 und x2,
                                so dass |x0-x1| ≤ |x2-x3| *)
    x1 = bx;
    x2 = bx + cC * (cx - bx);,
    (* Else → *)
    x2 = bx;
    x1 = bx - cC * (bx - ax);
  ];

  f1 = func[x1]; (* initiale Funktionswerte *)
  f2 = func[x2];

  Do[ (* Loop mit step Aufrufen *)
    If[f2[[1]] > f1[[1]],
      x0 = x1; x1 = x2; x2 = cR * x1 + cC * x3; (* neues Fenster {x0,x1,x2} *)
      f1 = f2; f2 = func[x2];, (* neue Funktionswerte {f1,f2} *)
      (* Else → *)
      x3 = x2; x2 = x1; x1 = cR * x2 + cC * x0; (* neues Fenster {x3,x2,x1} *)
      f2 = f1; f1 = func[x1] (* neue Funktionswerte {f1,f2} *)
    ], {steps}];

  max = If[f2[[1]] > f1[[1]], {x1, f1}, {x2, f2}]; (* Auswahl der aktuellen Maximums: Wahl aus:
                                                    (x1,f1) oder (x2,f2) *)

  max (* Rückgabe des Maximums *)
]
```

Abbildung A.2: Golden Maximum Methode, nach Abschnitt 3.3, zum Auffinden eines in (ax, bx, cx) befindlichen lokalen Maximums einer Funktion *funct* mit einer gegebenen Anzahl an Schritten *steps*.

Literaturverzeichnis

- [1] N.K. GLENDENNING, *Compact Stars*, 2. ed. Springer, 2000.
- [2] J. M. WEISBERG, D. J. NICE und J. H. TAYLOR, *Timing Measurements of the Relativistic Binary Pulsar PSR B1913+16*, in: *Astrophys. J.* **722.2** (2010) 1030.
- [3] P. B. DEMOREST, T. PENNUCCI, S. M. RANSOM, M. S. E. ROBERTS und J. W. T. HESSELS, *Shapiro delay measurement of a 2 solar mass neutron star*, in: *Nature* **467** (2010) 1081.
- [4] J. ANTONIADIS, P.C.C. FREIRE, N. WEX, T.M. TAURIS, R.S. LYNCH u. a., *A Massive Pulsar in a Compact Relativistic Binary*, in: *Science* **340** (2013) 6131.
- [5] K. MASUDA, T. HATSUDA und T. TAKATSUKA, *Hadron–quark crossover and massive hybrid stars*, in: *Prog. Theor. Exp. Phys.* (2013) 073D01.
- [6] J.R. OPPENHEIMER und G.M. VOLKOFF, *On Massive Neutron Cores*, in: *Phys. Rev.* **55** (1939) 374.
- [7] R.C. TOLMAN, *Static Solutions of Einstein’s Field Equations for Spheres of Fluid*, in: *Phys. Rev.* **55** (1939) 364.
- [8] P. HAENSEL, A.Y. POTEKHIN und D.G. YAKOVLEV, *Neutron Stars 1 - Equation of State and Structure*, Springer, 2007.
- [9] M. BUBALLA, *NJL-model analysis of dense quark matter*, in: *Phys. Rept.* **407** (2005) 205.
- [10] T. SCHAEFER, *Quark Matter*, in: *ArXiv High Energy Physics - Phenomenology e-prints* (2003), arXiv: hep-ph/0304281.
- [11] T. FLIESSBACH, *Allgemeine Relativitätstheorie*, 6. ed. Springer Spektrum, 2012.
- [12] J. WAMBACH, *Vorlesungskriptum Allgemeine Relativitätstheorie*, Technische Universität Darmstadt, 2014.
- [13] G. ALBER, *Vorlesungskriptum Theoretische Physik IV: Statistische Mechanik*, Technische Universität Darmstadt, 2013.
- [14] F. WEGNER, *Vorlesungskriptum Theoretische Physik IV: Statistische Mechanik*, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, 2014.
- [15] I.N. BRONSTEIN, K.A. SEMENDJAJEW, G. MUSIOL und M.MÜHLIG, *Taschenbuch der Mathematik*, 7. ed. Verlag Harri Deutsch, 2008.
- [16] NATIONAL INSTITUTE OF STANDARDS AND TECHNOLOGY, *CODATA Internationally recommended values of the Fundamental Physical Constants*, 05.06.2014, <http://physics.nist.gov/cuu/Constants/>.
- [17] UNITED STATES NAVAL OBSERVATORY (USNO), *Selected Astronomical Constants, 2014*, 05.06.2014, http://asa.usno.navy.mil/static/files/2014/Astronomical_Constants_2014.txt.
- [18] H. STÖCKER, *Taschenbuch der Physik*, 6. ed. Verlag Harri Deutsch, 2010.
- [19] W.H. PRESS, S.A. TEUKOLSKY, W.T. VETTERLING und B.P. FLANNERY, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, 3. ed. Cambridge University Press, 2007.
- [20] WOLFRAM RESEARCH, *Wolfram Mathematica 9 Documentation Center*, 2014, <http://reference.wolfram.com/mathematica/guide/Mathematica.html>.

-
- [21] K. SCHERTLER, C. GREINER, J. SCHAFFNER-BIELICH und M.H. THOMA, *Quark phases in neutron stars and a “third family” of compact stars as a signature for phase transitions*, in: Nucl. Phys. A **463** (2000), arXiv: astro-ph/0001467.
- [22] G. BAYM, C. PETHICK und P. SUTHERLAND, *The ground state of matter at high densities: equation of state and stellar models*, in: Astrophys. J. **170** (1971) 299.
- [23] V.R. PANDHARIPANDE, D. PINES und R.A. SMITH, *Neutron Star Structure: Theory, Observation and Speculation*, in: Astrophys. J. **208** (1976) 550.
- [24] J.W. NEGLE und D. VAUTHERIN, *Neutron Star Matter at sub-nuclear Densities*, in: Nucl. Phys. **A207** (1973) 298.
- [25] W.G. NEWTON, *Neutron stars: A taste of pasta?*, in: Nat. Phys. **9** (2013) 396.
- [26] LEONARD E PARKER CENTER FOR GRAVITATION, COSMOLOGY AND ASTROPHYSICS, *eosNV - Negele and Vautherin-1973-Nucl. Phys. A207-298*, 20.08.2014,
<http://www.gravity.phys.uwm.edu/rns/source/eos/eosNV>.
- [27] M. BALDO, G.F. BURGIO und H.-J. SCHULZE, *Hyperon stars in the Brueckner-Bethe-Goldstone theory*, in: Phys. Rev. C **61** (2000) 055801.
- [28] P. PAPAZOGLU, S. SCHRAMM, J. SCHAFFNER-BIELICH, H. STÖCKER und W. GREINER, *Chiral Lagrangian for strange hadronic matter*, in: Phys. Rev. C **57** (1998) 2576.
- [29] S. NISHIZAKI, Y. YAMAMOTO und T. TAKATSUKAA, *Effective YN and YY Interactions and Hyperon-Mixing in Neutron Star Matter*, in: Prog. Theor. Phys. **105** (2001) 607.
- [30] S. NISHIZAKI, Y. YAMAMOTO und T. TAKATSUKAA, *Hyperon-Mixed Neutron Star Matter and Neutron Stars*, in: Prog. Theor. Phys. **108** (2002) 703.
- [31] M. BALDO, I. BOMBACI und G.F. BURGIO, *Microscopic nuclear equation of state with three-body forces and neutron star structure*, in: Astron. Astrophys. **328** (1997) 274.
- [32] K. TSUBAKIHARA, H. MAEKAWA, H. MATSUMIYA, und A. OHNISHI, *Λ hypernuclei and neutron star matter in a chiral $SU(3)$ relativistic mean field model with a logarithmic potential*, in: Phys. Rev. C **81** (2010) 065206.
- [33] P. PAPAZOGLU, ZSCHIESCHE, S. SCHRAMM, J. SCHAFFNER-BIELICH, H. STÖCKER, und W. GREINER, *Nuclei in a chiral $SU(3)$ model*, in: Phys. Rev. C **59** (1999) 411.
- [34] M. HANAUSKE, D. ZSCHIESCHE, S. PAL, S. SCHRAMM, H. STÖCKER und W. GREINER, *Neutron star properties in a chiral $SU(3)$ model*, in: Astrophys. J. **537** (2000) 958.