



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Institut fuer Kernphysik
Schlossgartenstr. 9
64289 Darmstadt

Bachelor-Thesis

korrigierte Version

Struktur rotierender Neutronensterne
Structure of Rotating Neutron Stars

Johanna Daub

Betreuung:

Professor Dr. Jochen Wambach
Dr. Haris Dapo

Darmstadt, Juni 2009

Inhalt

1	Einleitung	2
1.1	Historisches	2
2	Grundlagen	4
2.1	Neutronensterne	4
2.1.1	Kompakte Objekte	4
2.1.2	Entstehung eines Neutronensterns	5
2.1.3	Struktur eines Neutronensterns	7
2.1.4	Rotation von Neutronensternen	10
2.2	Allgemeine Relativitätstheorie	11
2.2.1	Grundprinzipien der ART	11
2.2.2	Einsteinsche Feldgleichungen	12
2.2.3	Schwarzschildmetrik	12
2.2.4	Lösung für schnell rotierende Neutronensterne	15
2.3	Zustandsgleichungen	16
2.3.1	Hyperon-Nukleon-(YN)-Wechselwirkung	16
2.3.2	Nukleon-Nukleon-(NN)-Wechselwirkung	17
2.3.3	FPS-Zustandsgleichung (eosFPS)	17
2.3.4	C-Zustandsgleichung (eosC)	18
2.3.5	Vergleich	18
2.3.6	Chemisches Potential	18
3	Berechnungen mit RNS	20
3.1	Allgemeines	20
3.2	Bereitstellung der Zustandsgleichung	20
4	Berechnung unterschiedlicher Neutronensternmodelle	21
4.1	Nicht rotierende Neutronensterne	21
4.1.1	Vergleich verschiedener Programme zur Berechnung von Neutronensternen (TOV vs. RNS)	21
4.1.2	Struktur nicht rotierender Neutronensterne bei verschiedenen Zustandsgleichungen	22
4.2	Rotierende Neutronensterne	23
4.2.1	Neutronensterne bei Keplerfrequenz	23
4.2.2	Winkelgeschwindigkeit bei konstanter Ruhemasse	24
4.2.3	Sequenzen konstanter Frequenz und Evolutionssequenzen	24
5	Zusammenfassung und Ausblick	31

1 Einleitung

Das Thema der vorliegenden Arbeit ist die Struktur statischer und rotierender Neutronensterne. Für die Berechnung dieser Struktur gibt es diverse Computerprogramme, unter anderem den von N. Stergioulas geschriebenen RNS-Code, der hier Verwendung findet.

Um Dichte, Masse oder Radius der Neutronensterne zu bestimmen, benötigt man Zustandsgleichungen. Gerade für den Kern bzw. den Bereich sehr hoher Dichte (oberhalb der Kernmateriedichte) der Neutronensterne ist das Aussehen der Zustandsgleichung ungewiss, da man bis heute nur Vermutungen bezüglich dessen Aufbau anstellen kann.

Zunächst werden ruhende Neutronensterne betrachtet, die mit Hilfe der TOV-Gleichung beschrieben werden können. Etwas komplizierter wird es, wenn rotierende Neutronensterne betrachtet werden. Es wird aufgezeigt, wie sich bei Rotation die Struktur der Neutronensterne ändert und wie sie die Stabilität beeinflusst.

Die theoretische Untersuchung und das Verständnis von Neutronensternen erfordert die Einbeziehung der Allgemeinen Relativitätstheorie und der theoretischen Kern- und Teilchenphysik.

1.1 Historisches

Bereits bevor 1932 das Neutron entdeckt wurde, vermutete 1931 der russische Physiker Lew Dawidowitsch Landau die Existenz von Neutronensternen. 1933 stellten Walter Baade und Fritz Zwicky während ihrer Untersuchung von Supernova-Explosionen die Theorie auf, dass es sich bei Neutronensternen um Endprodukte der Sternentwicklung handelt. Erweitert wurde das Modell des Neutronensterns 1939 durch die Berechnung ihrer maximalen Masse von 0,7 Sonnenmassen durch J. Robert Oppenheimer und Georg Michael Volkoff [13]. Diese Berechnung basierte auf der Arbeit von Richard C. Tolman [12]; man spricht daher bei dieser Masse auch von der Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Grenze (TOV-Grenze).

Ein historisch wichtiger Punkt war auch die Entdeckung von Radioimpulsen eines Pulsars 1967 durch die Astronomen Jocelyn Bell und Antony Hewish und insbesondere die Interpretation, dass es sich dabei um einen isolierten, rotierenden Neutronenstern handelt [7]. Für letzteres bekam A. Hewish 1974 den Nobelpreis.

Durch die Entdeckung von Pulsaren in Doppelsternsystemen (durch Riccardo Giacconi, Herbert Gursky, Ed Kellogg, R. Levinson, E. Schreier und Harvey

Tananbaum) im Jahre 1971 war es möglich, die Massen zu bestimmen, und man erhielt Ergebnisse zwischen 1,3 und 1,5 Sonnenmassen. Damit und mit der Kenntnis, dass der Radius etwa 10km beträgt (was aus der Frequenz der Radiostrahlung ermittelt wurde) konnte man bestätigen, dass es sich bei Pulsaren um Neutronensterne handelt. 1993 gab es auch dafür einen Nobelpreis.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel soll der Leser in die theoretischen Grundlagen, die zum Verständnis dieser Arbeit notwendig sind, eingeführt werden. Dabei gibt es drei Schwerpunkte. Zunächst wird auf den astrophysikalischen Hintergrund eingegangen, in dem Neutronensterne und ihre Charakteristika beschrieben werden, speziell wird auf rotierende Neutronensterne eingegangen. Im nächsten Teil werden Aspekte der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) behandelt, da diese für eine adäquate Beschreibung von kompakten Objekten notwendig ist. Die ART liefert beispielsweise Formeln für die Berechnung der Struktur von Neutronensternen – z.B. die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung (TOV-Gleichung). Da diese Berechnungen abhängig von den verwendeten Zustandsgleichungen sind, wird zuletzt der Fokus auf diesen Bereich gelegt, und es werden verschiedene Zustandsgleichungen eingeführt.

2.1 Neutronensterne

Eine kurze Einführung in das Thema Neutronensterne wird in [2] gegeben, einen gelungenen Überblick liefern [5] und [6], und für tieferes Verständnis bieten sich [1], [4] und (speziell für die innere Struktur) [3] an.

2.1.1 Kompakte Objekte

Neutronensterne gehören neben Weißen Zwergen und Schwarzen Löchern zu den sogenannten (klassischen) kompakten Objekten in der Astronomie. Dies sind Objekte mit extrem hoher Dichte (ab etwa einer Million Gramm pro Kubikzentimeter). Sie sind so dicht, dass die Raumzeit stark gekrümmt wird und sie daher mit der Allgemeinen Relativitätstheorie beschrieben werden müssen.

Kompakte Objekte sind Endstadien normaler Sterne. Relevant für die Frage, welcher der drei Typen des kompakten Objekts als stabile Endkonfiguration im Gravitationskollaps entsteht, ist die Masse des ursprünglichen Sterns.

Weißer Zwerge, die von den genannten drei Typen die am wenigsten kompakten sind, entstehen aus relativ massearmen Vorläufersternen und werden bis zu einem bestimmten Massenlimit (der Chandrasekhar-Grenze) durch den Entartungsdruck der Elektronen stabilisiert.

Neutronensterne sind das Endprodukt der meisten Supernova-Ereignisse. Sie sind mit Dichten bis über $10^{15} \frac{g}{cm^3}$ wesentlich kompakter als Weiße Zwerge. Sie entstehen aus Sternen, die massereicher sind als die, aus denen Weiße Zwerge entstehen. Bevor diese massereichen Sterne kollabieren, bilden sie im

Innern einen Eisenkern, der typischerweise Massen zwischen 1,2 und 1,6 Sonnenmassen besitzt. Die so entstehenden Neutronensterne weisen Massen oberhalb der Chandrasekhar-Grenze und unterhalb der TOV-Grenze auf.

Die TOV-Grenze für ein reines ideales Neutronengas von 0,7 Sonnenmassen wurde 1939 berechnet. Später wurde diese Masse korrigiert, beispielsweise berechnete man aus der Allgemeinen Relativitätstheorie eine Grenze bei 3,2 Sonnenmassen; mit Hilfe der theoretischen Kernphysik schätzt man heute, dass die Maximalmasse zwischen 1,5 und 1,8 Sonnenmassen liegt. Die Unsicherheit bei der Bestimmung der Maximalmasse beruht darauf, dass das Innere des Neutronensterns noch nicht vollständig erforscht ist, insbesondere gibt es große Unsicherheiten bezüglich der Zustandsgleichung. (Werte entnommen aus [5].)

Bei solch großen Massen rührt die Stabilisierung nicht mehr von dem Entartungsdruck der Elektronen her. Vielmehr befinden sich der Gravitationsdruck und der Fermidruck der (partiell) entarteten Neutronen, die sich bei Unterschreitung eines bestimmten Abstandes gegenseitig abstoßen, im Gleichgewicht.

Zuletzt seien die Schwarzen Löcher genannt, die aus Sternen mit derart großen Massen entstehen, dass auch der Entartungsdruck der Neutronen den Kollaps nicht stabilisieren kann. Die gesamte Restmasse steckt in der intrinsischen Singularität des Loches. Man unterscheidet zwischen Schwarzschild-Löchern (statisch) und Kerr-Löchern (rotierend).

2.1.2 Entstehung eines Neutronensterns

Supernova-Explosion

Am Ende ihrer Lebenszeit explodieren Sterne in einer Supernova-Explosion. Man kann diese Explosionen grob bezüglich der Masse der Sterne (zum Zeitpunkt vor der Explosion) unterscheiden. Bei massereichen Sternen, die mehr als das achtfache der Sonne wiegen, kommt es zum Kernkollaps. Es entstehen kompakte Objekte. Bei masseärmeren Sternen kommt es hingegen zu einer sogenannten thermonuklearen Supernova (Typ Ia). Dies kommt jedoch nur in engen Doppelsternsystemen vor. Typischerweise entstehen vorerst ein Weißer Zwerg und ein Roter Riese. Durch Akkretion gewinnt der Weiße Zwerg an Masse, bis er die Chandrasekhar-Grenze erreicht. Anschließend kollabiert er, und es kommt zu einer Kohlenstofffusion, die den Stern zerstört.

Kernkollaps-Supernova

Die für die Entstehung von Neutronensternen relevante Supernova-Explosion ist die erstgenannte, die Kernkollaps-Supernova. Es gibt hier unterschiedliche Typen (Ib, Ic, II), bei denen sich die Explosionen dadurch unterscheiden, welche Linien sich im Spektrum wiederfinden. Die Typen Ib und Ic können als Abweichungen der Typ-II-Supernova behandelt werden. Alle diese Typen werden jedoch durch einen Kernkollaps hervorgerufen. Der Typ Ib liegt vor, wenn vor der Explosion die Wasserstoffhülle abgestoßen worden ist, während bei Typ Ic auch die Heliumhülle abgestoßen wurde. Zu einem Kollaps kommt es nach Ablauf der Fusionsprozesse im Inneren eines Sterns, wenn der Kernbrennstoff für die Nukleosynthese verbraucht ist.

Bei massereichen Sternen erfolgt nach der Fusion von Wasserstoff zu Helium das Zustandekommen weiterer (schwererer) Elemente bis hin zu Eisen und Nickel.

Eisen weist die höchste Bindungsenergie pro Nukleon auf, jede weitere Fusion erforderte Energie, daher ist der Fusionsprozess mit dem entstandenen Eisenkern beendet.

Dies hat zur Folge, dass der Strahlungsdruck, der den Stern stabilisiert, indem er der Gravitation entgegenwirkt, abnimmt (Strahlung wird durch die thermonukleare Fusion erzeugt). Der massereiche Stern implodiert nun (er kollabiert in wenigen Millisekunden), wobei eine Stoßwelle ausgelöst wird, mit der die äußere Sternhülle abgestoßen werden kann (Wasserstoff, Helium...). Dies führt zu den oben beschriebenen verschiedenen Typen.

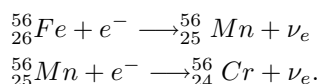
Der Kollaps kann jedoch durch den Entartungsdruck der Neutronen (bzw. unterhalb des Chandrasekhar-Limits durch den Entartungsdruck der Elektronen) aufgehalten werden, welcher den Neutronenstern (bei Elektronen den Weißen Zwerg) auch stabilisiert. Neutronen sind Fermionen, unterliegen damit dem Pauli-Prinzip. Sie können sich daher nicht beliebig nahe kommen, wodurch sich ein Druck aufbaut. Dieser kann über eine Phasenraumbeschreibung berechnet werden, indem man über die Fermikugel integriert. Daher spricht man bei diesem Druck auch von Fermi-Druck.

Neutronisierung

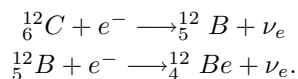
Beim Gravitationskollaps spielt die Dichte des Eisenkerns eine Rolle. Es gibt einen kritischen Wert von $1,14 \cdot 10^9 \text{ g/cm}^3$. Übersteigt die Dichte diesen Wert, setzt der inverse Beta-Zerfall ein:



Die Atomkerne fangen Elektronen ein, was die Materie nach und nach neutronisiert. So wandelt sich beispielsweise Eisen in Mangan und Mangan in Chrom um:



Man kann auch die kinetische Energie der Elektronen $(m_e^2 c^4 + c^2 p^2)^{\frac{1}{2}} - m_e c^2$ angeben, deren kritischer Wert $1,5 \cdot m_e c^2$ beträgt, um die Reaktion des inversen Beta-Zerfalls einzuleiten. Steigt die Dichte weiter, zerfällt auch Chrom (der kritische Wert hierfür ist $1,5 \cdot 10^{10} \text{ g/cm}^3$) oder sogar Kohlenstoff (bei $3,9 \cdot 10^{10} \text{ g/cm}^3$):



Während dieser Prozesse werden Neutrinos frei, die den Kollaps abkühlen. Man könnte annehmen, dass diese neutronenreichen Atomkerne schnell zerfallen und zu Betastrahlern werden. Im Neutronenstern ist jedoch die Fermienergie des entarteten Elektronengases (diese steigt mit größer werdender Dichte) so groß, dass alle Energieniveaus schon besetzt sind, die durch den Betazerfall erreichbar wären (Pauli-Prinzip).

2.1.3 Struktur eines Neutronensterns

Neutronensterne sind durch Eigenschaften wie Masse, Drehimpuls, Massen-Quadrupolmoment und magnetisches Moment charakterisiert.

Die Kompaktheit wurde bereits behandelt, man kann einem Radius von etwa 15km Massen in der Größenordnung der Sonnenmasse zuweisen. Als mittlere Dichte kann man von etwa $2 \cdot 10^{15} \frac{g}{cm^3}$ ausgehen.

Schalenmodell

Neutronensterne sind aus verschiedenen Materieformen aufgebaut, welche man sich – in dem in diesem Abschnitt beschriebenen Modell – kugelförmig in Schalen angeordnet vorstellen kann. Dabei muss man bedenken, dass eine solche Modell-Einteilung unsicher und unvollständig ist, man könnte in das hier vorgestellte Schalenmodell beispielsweise auch noch weitere Substrukturen einbauen. Ebenso unterliegen die unten angegebenen Werte von Radius und Dichte einer starken Unsicherheit und hängen vom gewählten Modell ab.

Man kann den Neutronenstern zunächst grob in Kruste und Kern unterteilen; die Kruste (etwa 1km) besteht aus ^{56}Fe -Atomen (angeordnet im Coulomb-Gitter) und einem Fermigas aus Elektronen. Der Kern setzt sich vermutlich aus drei wesentlichen Phasen zusammen: der hadronischen Phase, einer Phase aus kondensierten Kaonen und einer Quark-Phase.

Während der Aufbau der Kruste (mit geringer Dichte) recht gut erklärt wird, gibt es für das sehr dichte Innere viele Erklärungsansätze, die auch exotische Materie (Hyperonen, Kaonen, reine Quarkmaterie) enthalten.

Abbildung 2.1 zeigt das Schalenmodell eines Neutronensterns.

Den Neutronenstern umgibt eine Atmosphäre mit einer Dicke von nur einigen Zentimetern.

Die Kruste lässt sich einteilen in äußere und innere Kruste.

Die äußere Kruste besteht im Wesentlichen aus den bereits genannten ^{56}Fe -Atomen, die von einem Fermigas entarteter Elektronen umgeben sind. Die Dichte steigt innerhalb weniger Zentimeter drastisch. Ab einer Dichte von etwa $10^6 \frac{g}{cm^3}$ beginnt die Neutronisierung der ^{56}Fe -Atome, die entstehenden neutronreichen Atomkerne sind aufgrund der hohen Dichten stabil (siehe Kap. 2.1.2 Neutronisierung).

Solche neutronenreiche Atomkerne – angeordnet im Gitter – bilden zusammen mit einer warmen Neutronenflüssigkeit die innere Kruste. Diese Neutronenflüssigkeit entsteht folgendermaßen: bei einer bestimmten Dichte (neutron drip density, etwa $4 \cdot 10^{11} \frac{g}{cm^3}$) verlassen die Neutronen in den neutronreichen Atomen aufgrund geringer Bindungsenergie bzw. hoher Fermienergie in "Tropfen" den Kernverbund. Die Übergangsdichte, bei der die innere Kruste endet, beträgt etwa $1,7 \cdot 10^{14} \frac{g}{cm^3}$. Bei dieser sind keine Atomkerne mehr vorhanden und die Neutronisierung ist abgeschlossen.

Auch der Kern lässt sich aufteilen in äußeren und inneren Kern.

Die gesamte Materie im äußeren Kern besteht nun aus einer Flüssigkeit aus entarteten Neutronen, Protonen, Elektronen und Myonen (elektrisch neutral, Betagleichgewicht).

Neutronenstern-Schalenmodell

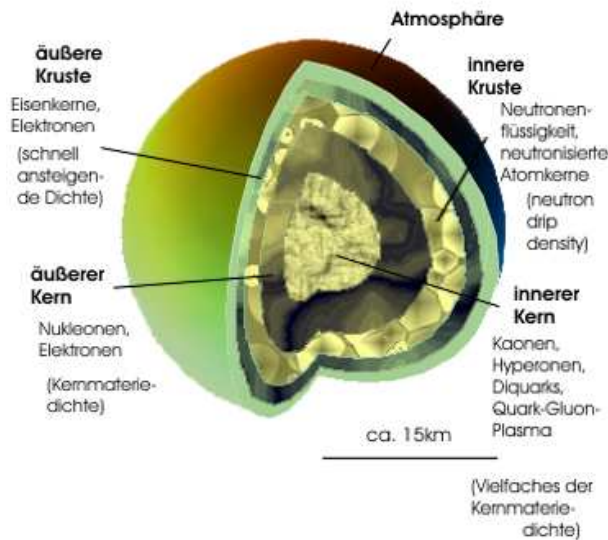


Abb. 2.1: Schalenmodell des Neutronensterns mit nach innen zunehmender Dichte

Beim Übergang zum inneren Kern (ab zwei- bis dreifacher Kernmateriedichte) vermutet man das Zustandekommen von Hyperonen und Kaonen (Hyperonisierung). Hyperonen sind massive Baryonen, die mindestens ein Strange-Quark enthalten. Bei noch höheren Dichten (ab der fünffachen Kernmateriedichte) erwartet man schließlich ein Quark-Gluonen-Plasma.

Hadronische Phase

Die hadronische Phase besteht aus neutronenreichen Atomkernen und einer Neutronenflüssigkeit und lässt sich zum Beispiel mit Hilfe der mikroskopischen nicht-relativistischen Vielteilchentheorie (siehe dazu Kap. 2.3.1, 2.3.2 bzw. z.B. [18]) oder der relativistischen Mean-Field-Theorie recht gut beschreiben. Bei letzterer wendet man den Brückner-Bethe-Goldstone-Formalismus an. Bei diesem wird die NN-Wechselwirkung mit dem Paris-Potential und die Drei-Körper-Kräfte mit dem Urbana-Modell beschrieben. Neben der NN-Wechselwirkung wird auch der Einfluss von Hyperonen berücksichtigt.

Auf die Untersuchung dieser Phase wird in dieser Arbeit ein Schwerpunkt gelegt, da die verwendeten Zustandsgleichungen teilweise mit Berücksichtigung der Hyperon-Nukleon-Wechselwirkung konstruiert wurden.

Kaonen

Kaonen bestehen aus einem Quark und einem Antiquark, gehören also zur Gruppe der Mesonen. Sie sind wie auch die Quark-Kondensation Folge der spontanen Brechung der chiralen Symmetrie. Die Kaonen spielen eine Rolle bei der Kaon-Nukleon-Wechselwirkung, die es neben der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung gibt. Dadurch werden Zustandsgleichungen, in denen dies berücksichtigt ist, weicher. Der Grund hierfür ist, dass Kaonen Bosonen sind und solche keinen Beitrag zum Druck liefern, da sie nicht dem Pauliprinzip unterliegen. Die Maximalmasse für Neutronensterne ist also niedriger.

Quark-Gluonen-Plasma

Eine Dichte von $2 \cdot 10^{15} \frac{g}{cm^3}$ ist ein Vielfaches der Kernmateriedichte. Unter dieser extremen Bedingung kann Quark-Gluonen-Plasma (QGP) zustandekommen. In diesem kommen Quarks auch ungebunden vor. Das confinement wird aufgebrochen und die Quarks sind quasi-frei. Man geht davon aus, dass es im Inneren des Neutronensterns zu einem Übergang zu Quarkmaterie kommt, bestehend aus QGP und farb-supraleitenden Quarkpaaren (Diquarks).

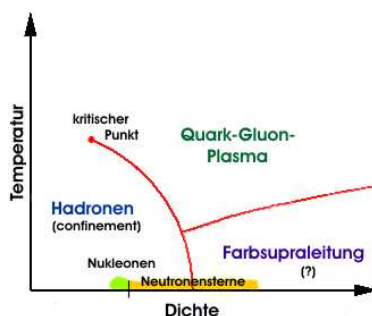


Abb. 2.2: QCD-Phasendiagramm

Abbildung 2.2 zeigt ein QCD-Phasendiagramm, das die drei Phasen im Kerninneren enthält. Der Bereich, der für Neutronensterne existiert, ist markiert. In den meisten Phasendiagrammen ist das chemische Potential aufgetragen. Da in dieser Arbeit jedoch ausschließlich mit Energie- bzw. Massendichten gearbeitet wird, werden auch im Phasendiagramm die Bereiche in Abhängigkeit von der Dichte und nicht vom chemischen Potential dargestellt.

Dichte, Masse, Radius

Im obigen Abschnitt wurden bereits die markanten Dichten wie z.B. neutron drip density benannt. Abbildung 2.3 fasst die Aussagen (für das vorgestellte Modell) noch einmal zusammen. Interessant ist die Masse-Radius-Relation (typischerweise $R \propto M^{-3}$). Es gibt eine Obergrenze für die Masse. Übersteigt der Stern diese Maximalmasse, überschreitet er damit sein Stabilitätslimit und kollabiert. Er wird dann wahrscheinlich ein Schwarzes Loch. Diese Obergrenze ist durch

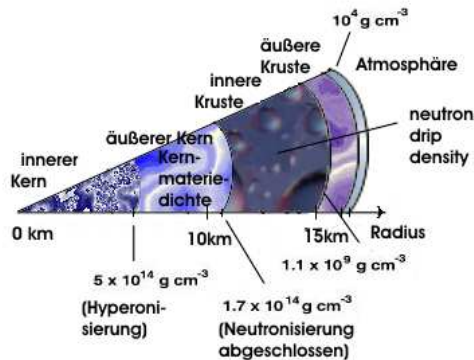


Abb. 2.3: Schematische Darstellung der Dichte eines Neutronensterns

die TOV-Gleichung gegeben. Allerdings ist es nicht möglich, eine klare Maximalmasse zu benennen wie es bei der Chandrasekhar-Grenze der Fall ist. Dieses Phänomen ist auf die Unsicherheit in den Zustandsgleichungen zurückzuführen. Abbildung 4.2 zeigt einige typische Masse-Radius-Kurven.

2.1.4 Rotation von Neutronensternen

1967 wurden erstmals rotierende Neutronensterne entdeckt. Man detektierte Radioquellen, die periodische Strahlung pulsformig sandten (darauf beruht auch die Bezeichnung Pulsare für schnell rotierende Neutronensterne).

Die gepulste Strahlung lässt sich dadurch erklären, dass die Rotationsachse nicht mit der Magnetfeldachse übereinstimmt. Daher rotiert ein Bikonus (Doppelkegel) emittierter Strahlung mit der Rotationsperiode des Sterns mit. Die Strahlung selbst ist Synchrotronstrahlung, welche hauptsächlich von relativistischen Elektronen und Positronen in den hohen Magnetfeldern der Pulsarmagnetosphäre entsteht. Haben die Magnetfelder eine Stärke von über 10^{14} Gauß, bezeichnet man den Neutronenstern als Magnetar.

Die Rotationsfrequenzen der Pulsare können sehr hoch sein, der schnellste bisher entdeckte Pulsar rotiert mit 1122Hz (XTE J1739-285). Der Neutronenstern übernimmt den Drehimpuls seines Vorläufersterns (bzw. des Vorläufer-Sternkerns), da dieser auch beim Kollaps nahezu erhalten bleibt. Die Rotationsgeschwindigkeit des Neutronensterns ist jedoch viel höher, da er natürlich kompakter als der Vorläuferstern ist (dies nennt man Pirouetteneffekt).

Zu den sehr schnellen Rotationen der Millisekunden-Pulsare kommt es in Doppelsternsystemen, wenn der Neutronenstern einen zusätzlichen Drehimpuls aus der Akkretionsscheibe übernimmt. Die Rotation wird mit der Zeit abgebremst, da der Pulsar auf Kosten der Rotationsenergie elektromagnetische Strahlung abgibt. Außerdem werden die Magnetfelder durch den gravitomagnetischen Dynamo verstärkt, was die Rotation auch verringert.

2.2 Allgemeine Relativitätstheorie

Wie schon im vorherigen Kapitel angedeutet, ist für die Beschreibung der Neutronensterne Kenntnis der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) unerlässlich. Dieses Kapitel soll einen Einblick in die Bereiche der ART geben, die für die Neutronenstern-Beschreibung relevant sind. Für ein tieferes Verständnis kann beispielsweise [8] hinzugezogen werden, für die Auseinandersetzung mit der ART im astrophysikalischen Kontext empfiehlt sich [9].

Die ART dient der relativistischen Verallgemeinerung der Newtonschen Gravitationstheorie, vergleichbar ist dies mit dem Übergang von der Elektrostatik zur Elektrodynamik (es gibt daher viele Gemeinsamkeiten zwischen der ART und der Elektrodynamik). Die Gravitation kann als eine Eigenschaft der Geometrie von Raum und Zeit (vierdimensionale Raumzeit) beschrieben werden. Die Krümmung der Raumzeit wird mit Hilfe der Differentialgeometrie beschrieben. Sie ist bedingt durch den Einfluss der Energie und des Impulses von Materie auf die Geometrie der Raumzeit. Die Einsteinschen Feldgleichungen beschreiben diese Beziehung zwischen Krümmung der Raumzeit und Energie-Impuls-Tensor.

2.2.1 Grundprinzipien der ART

Äquivalenzprinzip

Die Kernaussage dieses Prinzips ist zunächst die Äquivalenz von Gravitationskräften und Trägheitskräften, was voraussetzt, dass schwere und träge Masse gleich sind. Dies hat zur Folge, dass in einem Lokalen Inertialsystem ohne Gravitation die Gesetze der Speziellen Relativität (SRT) gelten, was man zum Aufstellen relativistischer Gleichungen in der ART, also mit Gravitation, benutzen kann. Dabei führt man eine Koordinatentransformation vom SRT-Gesetz ohne Gravitation zum ART-Gesetz mit Gravitation durch.

Die Gleichheit von schwerer und träger Masse ist Inhalt des schwachen Äquivalenzprinzips. Einstein hat dieses zum starken Äquivalenzprinzip verallgemeinert und postuliert, dass in einem frei fallenden Koordinatensystem alle Vorgänge wie ohne Gravitationsfeld ablaufen können. Dieses gilt auch für inhomogene Gravitationsfelder und nicht nur in der Mechanik.

Allgemeines Relativitätsprinzip

Auch das aus der speziellen Relativitätstheorie bekannte Relativitätsprinzip ist in der ART erweitert. Während in der SRT die Gesetze der Physik in allen Inertialsystemen die gleiche Form haben, haben sie in der ART in allen Koordinatensystemen, die auf der Raumzeit möglich sind, die gleiche Form. Das heißt, die SRT gilt nur für gleichförmig bewegte Inertialsysteme, die ART auch für beschleunigte.

Machsches Prinzip

Eine Formulierung des Machschen Prinzips (neben einigen anderen) ist, dass Massen nur relativ zueinander wechselwirken und nicht etwa in Wechselwirkung mit einem absoluten Raum stehen. Dieses Prinzip motivierte Einstein bei der

Entwicklung der ART. Die ART und das Machsche Prinzip sind jedoch nicht vollständig miteinander vereinbar.

2.2.2 Einsteinsche Feldgleichungen

Energie-Impuls-Tensor

Wie oben erwähnt, ist das Gravitationsfeld vom Energie-Impuls-Tensor abhängig, was Inhalt der Einsteinschen Feldgleichungen ist. Der Energie-Impuls-Tensor charakterisiert die Materie, da er sowohl deren Massendichte als auch die Energiedichte in der nullten Komponente enthält.

Mathematische Beschreibung

Die Einsteinschen Feldgleichungen lauten

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8G\pi}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

wobei $R_{\mu\nu}$ der Ricci-Tensor, R das Krümmungsskalar, $g_{\mu\nu}$ der metrische Tensor, Λ die kosmologische Konstante, G die Gravitationskonstante, c die Lichtgeschwindigkeit und $T_{\mu\nu}$ der Energie-Impuls-Tensor ist.

Den Ricci-Tensor erhält man aus dem Riemannschen Krümmungstensor. Dieser beschreibt die Krümmung der Riemannschen Mannigfaltigkeiten in der Differentialgeometrie. Er kann mit Hilfe der Christoffelsymbole (Gleichung (2.11)) formuliert werden:

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}. \quad (2.2)$$

Verwendet man die Einsteinsche Summenkonvention, ergibt sich der Ricci-Tensor

$$R_{\mu\nu} = \pm R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}. \quad (2.3)$$

2.2.3 Schwarzschildmetrik

Für die Beschreibung von statischen Neutronensternen in der ART eignet sich die Schwarzschildmetrik. Diese bezeichnet eine Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen für den sphärisch symmetrischen Fall. Aus der Schwarzschildmetrik kann die TOV-Gleichung hergeleitet werden.

Man unterscheidet zwischen äußerer Schwarzschildlösung – der Vakuumlösung der Einsteinschen Feldgleichungen für den Raum außerhalb eines Sterns – und innerer Lösung, bei der auch das Innere des Sterns – gedacht als statische homogene Flüssigkeitskugel mit der Masse $M(r) = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r')$ – miteinbezogen wird.

Ausgangspunkt für die Berechnung der Schwarzschildmetrik ist das Linienelement in allgemeiner Form (unter Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention):

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0\alpha}dx^0dx^{\alpha} + g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}. \quad (2.4)$$

Mit Kugelkoordinaten lässt sich das Linienelement schreiben als:

$$ds^2 = e^{2\nu(r)}dt^2 - e^{2\lambda(r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2. \quad (2.5)$$

Daraus ergibt sich also

$$g_{00} = e^{2\nu(r)} \quad (2.6)$$

$$g_{11} = -e^{-2\lambda(r)} \quad (2.7)$$

$$g_{22} = -r^2 \quad (2.8)$$

$$g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta \quad (2.9)$$

$$g_{\mu\nu} = 0 \text{ für } \mu \neq \nu. \quad (2.10)$$

Mit Hilfe des Christoffelsymbols

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\mu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}) \quad (2.11)$$

lassen sich nun die Komponenten des Ricci-Tensors berechnen:

$$R_{00} = (-\nu'' + \lambda' \nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r}) e^{2(\nu-\lambda)} \quad (2.12)$$

$$R_{11} = \nu'' - \lambda' \nu' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r} \quad (2.13)$$

$$R_{22} = (1 + r\nu' - r\lambda') e^{-2\lambda} - 1 \quad (2.14)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta, \quad (2.15)$$

wobei $x' = \frac{dx}{dr}$ verwendet wird.

Äußere Schwarzschildlösung

Für die Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen außerhalb einer Massenverteilung gilt: $R_{\mu\nu} = 0$. Wertet man nun (2.12) bis (2.15) aus, erhält man nach Integration aus (2.6) und (2.7):

$$g_{00} = e^{2\nu(r)} = 1 - \frac{2GM}{r} \quad (2.16)$$

$$g_{11} = e^{2\lambda(r)} = -\frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}}. \quad (2.17)$$

Dabei sind M und G Integrationskonstanten. Das Wegelement der Schwarzschildmetrik ergibt sich aus (2.8), (2.9), (2.16) und (2.17) zu:

$$ds^2 = (1 - \frac{r_s}{r}) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.18)$$

Dabei bezeichnet $r_S = \frac{2GM}{c^2}$ den Schwarzschildradius.

Innere Schwarzschildlösung

Auch für die Herleitung der inneren Schwarzschildlösung kann man von Gleichung (2.5) ausgehen. Für die innere Schwarzschildmetrik eines Sterns, dessen Inneres durch eine ideale Flüssigkeit genähert ist, ist die Feldgleichung

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} g_{\mu\nu}) \quad (2.19)$$

von Relevanz.

Der Energie-Impuls-Tensor dafür lautet:

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}, \quad (2.20)$$

wobei P den Druck, ρ die Massendichte, und u_μ das Geschwindigkeitsfeld bezeichnen. Für den statischen, sphärischen Fall gilt für die räumlichen Geschwindigkeitskomponenten $u^i(x) = 0$. Als Nebenbedingung an die Geschwindigkeit erhält man aus $c^2 = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = g_{00}(u^0)^2$:

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{e^{2\nu(r)}}}, u_0 = c\sqrt{e^{2\nu(r)}}.$$

Dies ergibt für den Energie-Impuls-Tensor in Matrixform

$$(T_{\mu\nu}) = \text{diag}\left(\rho c^2 e^{2\nu(r)}, P e^{2\lambda(r)}, P r^2, P r^2 \sin^2\theta\right) \quad (2.21)$$

und für die Metrik in Matrixform

$$(g^{\mu\nu}) = \text{diag}\left(\frac{1}{e^{2\nu(r)}}, -\frac{1}{e^{2\lambda(r)}}, -\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\right). \quad (2.22)$$

Durch Einsetzen der Gleichung (2.19) in (2.12) bis (2.15) findet man

$$e^{2\lambda(r)} = \frac{1}{1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}}. \quad (2.23)$$

Aus den Feldgleichungen folgt die Bedingung $T_{|\nu}^{\mu\nu} = 0$. Daraus erhält man den weiteren Zusammenhang

$$\nu'(r) = -\frac{P'}{\rho c^2 + P} \quad (2.24)$$

und

$$\nu(r) = -\frac{G}{c^2 r^2} \int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2} \frac{M(r') + \frac{4\pi r'^3 P(r')}{c^2}}{1 - \frac{2GM(r')}{c^2 r'}}. \quad (2.25)$$

Damit ergibt sich für das Wegelement:

$$ds^2 = \exp\left\{-\frac{2G}{c^2 r^2} \int_0^\infty \frac{dr'}{r'^2} \frac{M(r') + \frac{4\pi r'^3 P(r')}{c^2}}{1 - \frac{2GM(r')}{c^2 r'}}\right\} c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.26)$$

Sterngleichgewicht

Im Sterngleichgewicht gilt: $P_{grav} = P_{mat}$. Der Gravitationsdruck und der Druck der Materie (der Fermidruck der Neutronen) sind identisch. Mit Hilfe der Eulergleichung $\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}\right) = -\nabla P + \mathbf{f}_0$ und der Kraftdichte $\mathbf{f}_0 = \frac{d\mathbf{F}}{dV} = -\rho \nabla \Phi$ erhält man im statischen kugelsymmetrischen Fall (mit verschwindendem Geschwindigkeitsfeld ($\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0$ und $P(\mathbf{r}) = P(r)$) folgende Beziehung für den Gravitationsdruck:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r). \quad (2.27)$$

Im letzten Schritt wurde die Newtonsche Feldgleichung integriert und eingesetzt.

Den Druck der Materie erhält man durch Wahl einer geeigneten Zustandsgleichung $P(\varepsilon)$ (siehe Abschnitt 2.3).

TOV-Gleichung

Im Rahmen der inneren Schwarzschildmetrik erhält man die TOV-Gleichung, die das Sternleichgewicht im relativistischen Fall angibt. Es gilt

$R_{22} = -\frac{4\pi G}{c^4}(\rho c^2 - P)e^{2\lambda}$, was gleichzusetzen ist mit (2.14). Einsetzen von (2.23) und (2.24) in R_{22} führt zur TOV-Gleichung:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2} \frac{\left(1 + \frac{P}{\rho c^2}\right)\left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{Mc^2}\right)}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}. \quad (2.28)$$

Durch die relativistischen Effekte in der TOV-Gleichung wird die Instabilität für $R \rightarrow \frac{9}{8}r_s$ verursacht. Wird der Druck höher, ergibt sich $\frac{dP}{dr} \propto -P^2$; das heißt, der Druck wird (sich selbst verstärkend) größer, je kleiner der Radius wird, und divergiert bei $R \rightarrow \frac{9}{8}r_s$.

2.2.4 Lösung für schnell rotierende Neutronensterne

Die Schwarzschildlösung gilt nur für statische Neutronensterne, da diese sphärisch symmetrisch sind. Bei schneller Rotation kommt es allerdings zu einer Abplattung des Sterns. Dafür konstruierten Manko et al. 2000 eine exakt analytische Lösung [11] für den Außenraum des Sterns; inwieweit diese geeignet ist, wird in [4] erläutert.

2.3 Zustandsgleichungen

Die essentielle Vorgabe zur Berechnung der Eigenschaften eines Neutronensterns ist die Zustandsgleichung.

In Kapitel 2.1.3 wurde bereits auf das Innere des Neutronensterns eingegangen, das durch Zustandsgleichungen beschrieben wird.

Durch das Verhalten der Zustandsgleichung bei hohen Dichten (Vielfaches der Kernmateriedichte) kann die Maximalmasse eines Neutronensterns bestimmt werden. Analog kann man über die Maximalmasse Annahmen zur Zustandsgleichung, die einen Neutronenstern beschreibt, machen – so erreichen beispielsweise Zustandsgleichungen, die auf reiner Nukleon-Nukleon-(NN)-Wechselwirkung basieren, zu geringe Dichten für die Betrachtung der Maximalmasse. Daher werden in dieser Arbeit neben solchen "NN-Zustandsgleichungen" auch Zustandsgleichungen verwendet, die eine zusätzliche effektive Hyperon-Nukleon-(YN)-Wechselwirkung enthalten. Dass Hyperonen ein Ansteigen der Dichte bewirken, wurde bereits 1960 in [19] vorgeschlagen.

In den folgenden Unterkapiteln werden die verwendeten Zustandsgleichungen kurz vorgestellt. Die Bezeichnungen der Zustandsgleichungen aus Kap. 2.3.1 und 2.3.2 basiert auf den verwendeten Werten für Inkompressibilität ($K_0=200\text{MeV}$ bzw. $K_0=300\text{MeV}$) und der Symmetrieenergie ($a_t=32\text{MeV}$) (siehe Kap. 2.3.2). Die ausführliche Beschreibung und Konstruktion dieser Zustandsgleichungen und der verwendeten (Einteilchen-)Potentiale findet man in [16] und [17] für 200.32.NN, 300.32.NN, 200.32.60, 300.32.60, 200.32.Nf und 300.32.Nf bzw. in [15] für eosC und in [14] für eosFPS. Für die Zustandsgleichungen aus Kap. 2.3.1 und 2.3.2 wurden im Bereich niedriger Dichte (Atmosphäre und äußere Kruste) die Zustandsgleichung von Baym, Pethick und Sutherland [20] verwendet, für die innere Kruste die von Negele und Vautherin [21].

2.3.1 Hyperon-Nukleon-(YN)-Wechselwirkung

Mit Hilfe der Zustandsgleichungen 200.32.60, 300.32.60, 200.32.Nf und 300.32.Nf wird der Einfluss von einem Hyperonenanteil in diesen Zustandsgleichungen auf die Struktur von Neutronensternen untersucht. Es handelt sich dabei um Hyperonen mit Strangeness $S=-1$ ($\Lambda, \Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+$).

Zur Konstruktion der Zustandsgleichungen wurde ein Hyperon-Nukleon-Potential V_{low-k} ("low momentum potential") verwendet, welches man durch Anwendung der Renormierungsgruppen-Methode erhielt. Aufgrund einer geringen Anzahl experimenteller Daten für die YN-Wechselwirkung gibt es viele verschiedene mögliche Potentiale; für die hier verwendeten Zustandsgleichungen dienen das Nijmegen-Modell NSC97f (für die Zustandsgleichungen 200.32.Nf und 300.32.Nf) und ein auf der chiralen Störungstheorie basierendes effektives Potential als Input (für 200.32.60 und 300.32.60).

Für den Nukleonen-Teil der Wechselwirkung wurde eine angepasste Parametrisierung genutzt, da V_{low-k} per Konstruktion bei hohen Dichten ungeeignet ist (siehe Kapitel 2.3.2).

Mit Hilfe der Hartree-Fock-Näherung wurde ein Einteilchenpotential, das die NN- und die YN-Wechselwirkung enthält, konstruiert, was zu folgender Energie

pro Teilchen führte:

$$E/A = \frac{2}{\rho_B} \sum_b \int_0^{k_{F_b}} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(M_b + \frac{p^2}{2M_b} + \frac{1}{2} U_b(p) \right). \quad (2.29)$$

Dabei ist ρ_B die Baryondichte (number density), M_b die Baryonenmasse, U_b die potentielle Einteilchen-Energie und k_{F_b} der Baryonen-Fermiimpuls. Die totale Energie pro Teilchen wurde aufgeteilt in einen Term, der nur den nukleonischen Anteil enthält, und einen, der den hyperonischen Anteil enthält und separat berechnet werden kann.

Die Zustandsgleichung konnte schließlich für Materie im Betagleichgewicht aufgestellt werden, indem die Konzentrationen der Hyperonen und Nukleonen betrachtet wurden.

2.3.2 Nukleon-Nukleon-(NN)-Wechselwirkung

Die Zustandsgleichungen 200.32.NN und 300.32.NN basieren auf reinen NN-Wechselwirkungen. Für Dichten oberhalb der Kernmateriedichte ist hier V_{low-k} jedoch nicht geeignet. Daher wurde für die rein nukleonischen Zustandsgleichungen folgende Parametrisierung verwendet:

$$E_{NN}/A_N = M_N - E_0 u \frac{u - 2 - \delta}{1 + u\delta} + S_0 u^\gamma (1 - 2x_p)^2, \quad (2.30)$$

mit dem Verhältnis von Gesamt-Nukleon-Dichte zur Kernmateriedichte $u = \frac{\rho_N}{\rho_0}$, dem Nukleon-Einteilchen-Potential U_N^N , der Nukleon-Masse M_N und (für reine NN-Wechselwirkung ohne Hyperonen) der Symmetrieenergie S_0 . Diese Parametrisierung wurde an die Energie pro Teilchen (aus Variationsrechnungen mit dem Argonne- V_{18} -Potential unter Einbeziehung einer Drei-Teilchen-Wechselwirkung) gefittet, woraus man die Parameter $E_0 = -15,8\text{MeV}$, $S_0 = 32\text{MeV}$, $\gamma = 0,6$ und $\delta = 0,2$ erhielt.

Die Inkompressibilität ist gegeben durch

$$K_0 = 9\rho^2 \left. \frac{\partial^2 E/A}{\partial \rho^2} \right|_{\rho_B = \rho_0}. \quad (2.31)$$

Diese wurde von 200MeV bis 300MeV variiert.

In dieser Arbeit werden weiche Zustandsgleichungen mit $K_0 = 200\text{MeV}$ und steife mit $K_0 = 300\text{MeV}$ verwendet. Die Symmetrieenergie ist durch $a_t = 32\text{MeV}$ gegeben.

2.3.3 FPS-Zustandsgleichung (eosFPS)

Die Zustandsgleichung FPS (von Pethick, Ravenhall und Lorenz konstruiert [14]) bezieht sich auf Studien von Friedman und Pandharipande (1981), die eine Zustandsgleichung für Nukleonen- und Neutronenmaterie bei hoher Dichte berechneten. Sie basiert auf einer Zwei-Nukleonen-Wechselwirkung (V_{14}), wobei auch Drei-Nukleonen-Kräfte berücksichtigt werden. Diese sind phänomenologisch und abhängig von der Dichte.

In FPS wurde die mikroskopische Wechselwirkung, die Friedman und Pandharipande nutzten, an eine Skyrme-Energiedichte-Funktion gefittet (im Rahmen der nicht-relativistischen Vielteilchenphysik).

2.3.4 C-Zustandsgleichung (eosC)

In [15] beschreiben Bethe und Johnson die Zustandsgleichung eosC. Es handelt sich dabei um eine Zustandsgleichung für Materie mit Hyperonenanteil. Sie wurde aus fünf verschiedenen Wechselwirkungen berechnet. Als Potential verwendete man eine Summe aus Yukawafunktionen mit Parametrisierungen aus experimentellen Daten. Im Bereich hoher Dichten wird die Zustandsgleichung durch die starke, kurzreichweitige, abstoßende Kraft dominiert.

2.3.5 Vergleich

Abbildung 2.4 zeigt die oben beschriebenen Zustandsgleichungen. Im oberen linken Bild sind nur die in den Kapiteln 2.3.1 und 2.3.2 beschriebenen NN- und YN-Zustandsgleichungen zu sehen, da diese einen ähnlichen Energiedichtebereich aufweisen; eosC und eosFPS erreichen weit höhere Energiedichten (oben rechts) und sind deshalb in dieses Bild nicht aufgenommen. Anhand dieser Abbildung erkennt man gut den Unterschied in der Steifheit der verschiedenen Zustandsgleichungen. Die reinen NN-Zustandsgleichungen sind wesentlich steifer als die YN-Zustandsgleichungen. In Abbildung 4.2 wird dies in Zusammenhang mit der Maximalmasse der Neutronensterne eine Rolle spielen. Im unteren linken Bild ist zum Vergleich zwischen eosC bzw. eosFPS und den anderen NN- bzw. YN-Zustandsgleichungen der Dichtebereich gewählt, der oben links zu sehen ist. Unten rechts sind alle Zustandsgleichungen in logarithmischer Darstellung abgebildet. Es ist zu sehen, dass sie für geringe Dichten (also im Bereich der Neutronensternkruste) gut übereinstimmen, während sie bei hohen Dichten – im Kern-Bereich des Sterns, dessen Struktur noch ungewiss ist – voneinander abweichen.

2.3.6 Chemisches Potential

Oft sind Zustandsgleichungen mit Hilfe des chemischen Potentials μ angegeben. Daher soll in diesem Abschnitt der Zusammenhang zwischen Druck, Energiedichte und chemischem Potential hergeleitet werden. Ausgangspunkt hierfür ist die Gibbs-Duhem-Beziehung:

$$0 = SdT - Vdp + \sum_i N_i d\mu_i. \quad (2.32)$$

Für die Betrachtung der Neutronensterne bei verschwindender Temperatur ($T=0$, $dT=0$) ergibt sich:

$$dp = \sum_i \frac{N_i}{V} d\mu_i = \sum_i \rho d\mu_i. \quad (2.33)$$

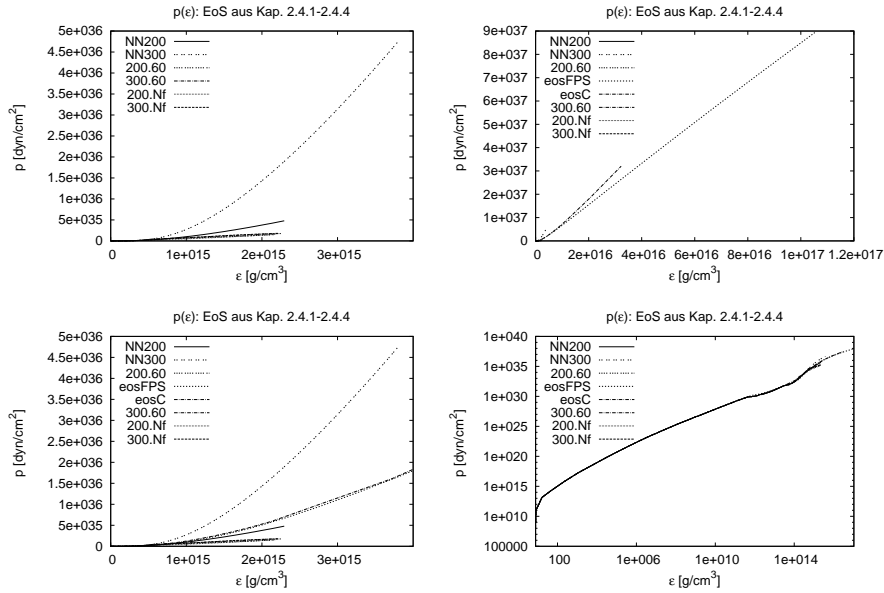


Abb. 2.4: Energiedichte und Druck für die im Text beschriebenen Zustandsgleichungen (EoS); oben links: NN und YN (siehe Kap. 2.3.1 und 2.3.2); oben rechts: alle EoS (Kap. 2.3.1 bis 2.3.4); unten links: alle EoS (eingeschränkter Dichtebereich); unten rechts: alle EoS in logarithmischer Auftragung

Mit Hilfe der Definition des Drucks $p = -\frac{\partial E}{\partial V}$ und des chemischen Potentials $\mu_i = \frac{d\epsilon}{d\rho_i}$ und mit $E = \sum_i E_i$ und $\epsilon = \sum_i \epsilon_i$ erhält man

$$p = -\frac{\partial(\sum_i \frac{E_i}{N})}{\partial(\sum_i \frac{V_i}{N})} = -\sum_i \frac{\partial}{\partial \frac{1}{\rho_i}} \left(\frac{\epsilon_i}{\rho_i} \right) = \sum_i \rho_i^2 \frac{\partial}{\partial \rho_i} \left(\frac{\epsilon_i}{\rho_i} \right) = \sum_i \rho_i \mu_i - \epsilon. \quad (2.34)$$

3 Berechnungen mit RNS

Zur Berechnung der Struktur schnell rotierender Neutronensterne wird in dieser Arbeit das Programm RNS (rapidly rotating neutron stars) benutzt. In [22] und [23] sind Erläuterungen zu numerischen Methoden für die Berechnung der Modelle für rotierende Neutronensterne zu finden.

3.1 Allgemeines

Der RNS-Code wurde von Nikolaos Stergioulas zur Konstruktion schnell rotierender, relativistischer, kompakter Sterne entwickelt. Als Input wird eine Zustandsgleichung benötigt – von welcher Form diese sein muss, wird im nächsten Abschnitt erörtert.

RNS kann verschiedene Modelle berechnen, beispielsweise auch ein statisches Modell für nicht-rotierende Sterne oder das sogenannte Keplermodell, sowie Folgen einzelner physikalischer Größen wie Winkelgeschwindigkeit, Quadrupolmoment, Rotverschiebung und andere. Außerdem können Sequenzen der einzelnen Modelle berechnet werden, wodurch man gut die Abhängigkeit verschiedener Größen voneinander zeigen kann.

Der Code wird unter <http://www.gravity.phys.uwm.edu/rns/> inklusive Manual frei zum Download bereitgestellt.

3.2 Bereitstellung der Zustandsgleichung

Der RNS-Code kann sowohl mit polytropischer Form der Zustandsgleichung rechnen als auch mit einem tabellarischen Input. Da für diese Arbeit nur mit tabellarischer Form gerechnet wird, soll auch nur auf diese näher eingegangen werden.

Die Tabelle muss aus vier Spalten bestehen – Energiedichte, Druck, Enthalpie und Baryonendichte. Zur Erstellung geeigneter Tabellen ist in RNS ein Programm "HnG" integriert, das bereits bestehende Tabellen in die von RNS benötigte Form umformen kann. Diese Tabellen müssen die Energiedichte in der ersten Spalte und den Druck in Spalte zwei enthalten.

Dabei ist darauf zu achten, dass die Einheiten im RNS-Code im CGS-System sind. Der Druck wird beispielsweise in dynes/cm^2 angegeben, die Energiedichte in g/cm^3 . Außerdem gilt $c = 1$ und $\hbar = 1$. Es werden Tabellen zu verschiedenen Zustandsgleichungen zusammen mit dem Code bereitgestellt, die bereits das entsprechende Format haben.

4 Berechnung unterschiedlicher Neutronensternmodelle

4.1 Nicht rotierende Neutronensterne

4.1.1 Vergleich verschiedener Programme zur Berechnung von Neutronensternen (TOV vs. RNS)

Wie bereits oben erwähnt, gibt es im RNS-Code eine Funktion, die statische (also nicht rotierende) Modelle von Neutronensternen berechnen kann. Die Ergebnisse sollen nun mit denen eines anderen Programms, das speziell für nicht rotierende Neutronensterne geschrieben wurde, verglichen werden. Es handelt sich hierbei um das in Fortran geschriebene Programm "TOV". Mit diesem Vergleich lässt sich leicht prüfen, ob die Berechnungen mit RNS richtig sind (übereinstimmen).

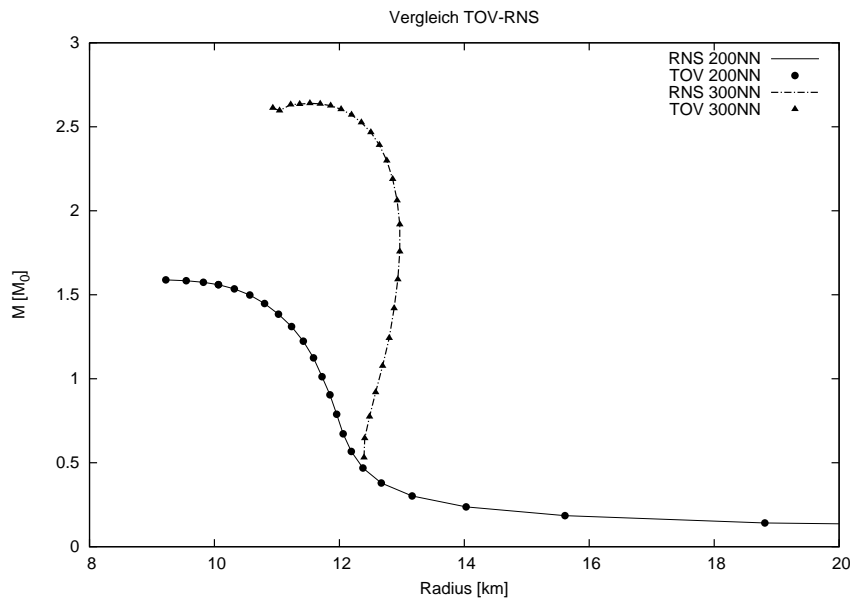


Abb. 4.1: Vergleich der aus TOV und RNS berechneten Werte der Masse-Radius-Abhängigkeit zweier Zustandsgleichungen

Abbildung 4.1 zeigt die Radius-Masse-Abhängigkeiten der zwei Zustandsgleichungen 200.32.NN und 300.32.NN, wobei die aus dem RNS-Code erhaltenen Werte mit Linien, die aus dem TOV-Code erhaltenen mit Punkten dargestellt sind. Man sieht, dass die Punkte genau auf den Linien liegen, die Berechnungen der beiden Programme stimmen also überein. Damit ist die Funktionalität des RNS-Codes geprüft; im Folgenden kann daher ausschließlich RNS verwendet werden.

4.1.2 Struktur nicht rotierender Neutronensterne bei verschiedenen Zustandsgleichungen

Im folgenden Abschnitt sollen die in dieser Arbeit verwendeten Zustandsgleichungen für die Berechnung des statischen Neutronenstern-Modells eingesetzt werden. Anhand der Masse-Radius-Abhängigkeit werden die unterschiedlichen Charakteristika der Zustandsgleichungen aufgezeigt.

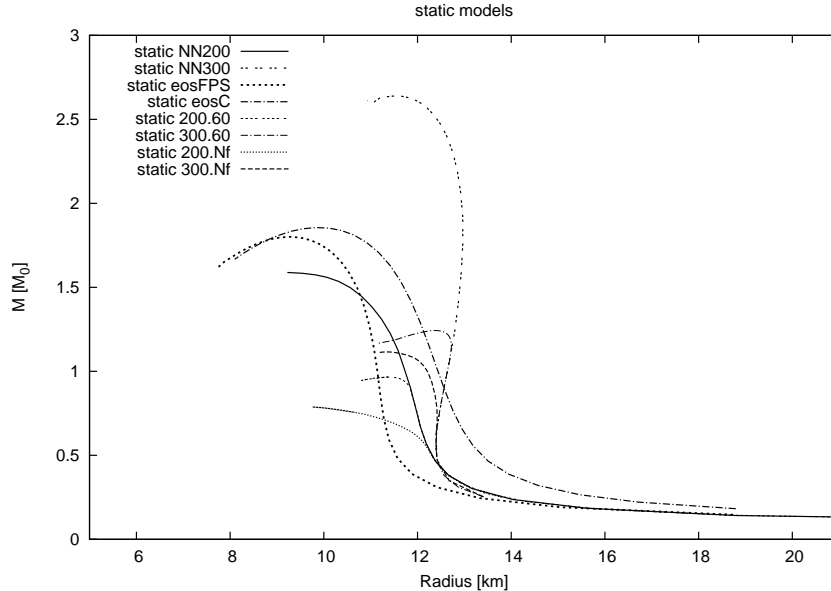


Abb. 4.2: Masse-Radius-Kurven der statischen Konfigurationen für die Zustandsgleichungen *eos200.32.NN*, *eos300.32.NN*, *eosC*, *eosFPS*, *eos200.32.60*, *eos300.32.60*, *eos200.32.Nf* und *eos300.32.Nf* (alle in dieser Arbeit verwendeten Zustandsgleichungen). Man erkennt auffallend unterschiedliche Maximalmassen.

In Abbildung 4.2 sind alle Zustandsgleichungen, die in Kapitel 2.3 vorgestellt wurden, gezeigt.

Man erkennt extreme Unterschiede der Maximalmassen für die verschiedenen Zustandsgleichungen. Generell erreichen steifere Zustandsgleichungen höhere Massen als weiche. Dies ist sehr gut an dem Beispiel *eos200.32.NN* (NN200, weich) bzw. *eos300.32.NN* (NN300, steif) zu sehen. Die Massen der reinen NN-Zustandsgleichungen (NN300, N200, *eosC*, *eosFPS*) liegen weit höher als die der YN-Zustandsgleichungen. Man stellt also fest, dass ein Hyperonenbeitrag die

Zustandsgleichung weicher macht.

Allerdings führt die Verwendung einer steiferen NN-Zustandsgleichung nicht unbedingt zu einer steiferen Gesamt-(YN)-Zustandsgleichung. Bei höherer Inkompressibilität ist nach Gleichung (2.21) die Energie pro Teilchen größer, also auch die Energie des Systems; jedoch nimmt die Maximalmasse dadurch ab, da bei höherer Energie mehr Hyperonen produziert werden können. Bei einer steifen NN-Zustandsgleichung kann es demnach zu einer hohen Hyperonenkonzentration kommen, die die Gesamt-Zustandsgleichung weicher macht.

4.2 Rotierende Neutronensterne

Besonders interessant ist der RNS-Code für Modelle rotierender Neutronensterne. Das Programm kennt verschiedene Funktionen für die Berechnung dieser Modelle; Verwendung in dieser Arbeit finden die Funktionen "Kepler", "Omega" und "rmass".

4.2.1 Neutronensterne bei Keplerfrequenz

Mit der Funktion "Kepler" werden Werte für einen Stern berechnet, der mit Keplerfrequenz rotiert. Die Keplerfrequenz ist die maximale Frequenz, mit der der Neutronestern rotieren kann. Bei höherer Frequenz wird die Zentrifugalkraft an der Oberfläche größer als die Gravitationskraft, die die Materie an der Oberfläche des Sterns hält. Der Neutronestern wird demnach oberhalb der Keplerfrequenz instabil.

Typische Werte für die Keplerfrequenz liegen zwischen 1500Hz und 2000Hz.

Die höchste bisher beobachtete Rotationsfrequenz ist 1122Hz, mit der der Pulsar XTE J1739-285 rotiert.

Abbildung 4.3 zeigt für die verschiedenen Zustandsgleichungen die Masse-Radius-Kurven für das statische (siehe Kapitel 4.1.2) und das Kepler-Limit im Vergleich.

In Tabelle 4.1 werden weiterhin die ermittelten Werte der maximal möglichen Massen (gerundet auf zwei Nachkommastellen) für statisches Limit und Keplerlimit angegeben.

Die Zustandsgleichungen im Keplerlimit ergeben größere Maximalmassen und um etwa ein Drittel größere Radien der Sterne. Man erkennt in Abbildung 4.3 zwei "Zweige", den für das statische Limit und einen verschobenen etwas größeren Zweig für das Keplerlimit.

Diese Verschiebung des Maximums für größer werdende Frequenzen könnte man nutzen, um den Verlauf der Maximalmasse in Abhängigkeit des Radius oder auch der Energiedichte zu untersuchen.

Anhand der Tabelle ist sehr gut zu erkennen, welche Rolle die Zustandsgleichung bzw. deren Eigenschaften für die Struktur der Neutronensterne spielt. Betrachtet man beispielsweise eos300.32.NN (300NN) und eos200.32.Nf (200Nf), so erkennt man bei 300NN eine mehr als dreimal so hohe Masse wie bei 200Nf, was hauptsächlich an dem Hyperonenanteil und an der Kompressibilität liegt.

EoS	$M_{max,stat} [M_0]$	$M_{max,Kepler} [M_0]$
FPS	1,8	2,13
C	1,86	2,17
200.NN	1,59	1,86
300.NN	2,64	3,18
200.Nf	0,97	1,18
300.Nf	1,24	1,58
200.60	0,8	0,9
300.60	1,12	1,36

Tab. 4.1: Werte der maximal möglichen Massen im statischen und im Kepler-Grenzfall für die genutzten Zustandsgleichungen

4.2.2 Winkelgeschwindigkeit bei konstanter Ruhemasse

Mit der "rmass"-Funktion kann für unterschiedliche Energiedichten die Ruhemasse konstant gehalten werden. Eine Konfiguration mit konstanter Ruhemasse nennt man Evolutionssequenz. Evolutionssequenzen werden im nächsten Kapitel ausführlich behandelt. Es werden die Rotationsfrequenzen bei zwei konstanten Ruhemassen betrachtet: $M = 0.8M_0$ (links) und $M = 1.4M_0$ (rechts), und zwar in Abhängigkeit der Masse (Abb. 4.4 oben) und des Radius (Abb. 4.4 unten). Die Masse steigt mit höher werdender Frequenz. Dieses Verhalten wurde schon bei der Betrachtung des Keplerlimits deutlich. Je schneller ein Neutronenstern rotiert, desto größere Massen kann er erreichen. Mit der Keplerfrequenz erreicht der Neutronenstern also seine maximal mögliche Masse. Auch das Ansteigen des Radius konnte man bei der Betrachtung der Neutronensterne bei Keplerfrequenz sehen. Interessant ist hier insbesondere das Verhalten bei Annäherung an die Keplerfrequenz. In Abbildung 4.5 unten erkennt man andeutungsweise ein asymptotisches Annähern an die Keplerfrequenz, der Radius geht gegen unendlich, eine höhere Frequenz kann also nicht erreicht werden.

4.2.3 Sequenzen konstanter Frequenz und Evolutionssequenzen

In diesem Abschnitt soll eine Auswahl der vorgestellten Zustandsgleichungen (eosC, eosFPS, eos200.32.NN, eos300.32.NN, eos200.32.60, eos300.32.60) genauer untersucht werden. Dazu wird die Abhängigkeit der Masse von der Energiedichte betrachtet. Es werden verschiedene Sequenzen dargestellt: Grenzsequenzen (obere Grenze: Keplerlimit, untere Grenze: statisches Limit), Sequenzen konstanter Frequenz und Evolutionssequenzen.

Auf die Grenzsequenzen wurde bereits in den vorigen Abschnitten eingegangen, daher wird nun auf die Sequenz für konstante Frequenz und die Evolutionssequenz eingegangen.

Bei der Funktion "Omega" kann neben der Energiedichte auch eine beliebige Frequenz unterhalb der Keplerfrequenz angegeben werden. Der Energiedichtebereich, in dem dieses Modell für eine bestimmte Frequenz berechnet werden kann, weicht bei größer werdender Frequenz etwas von dem Energiedichtebereich für den statischen Fall ab.

Im Folgenden werden drei konstante Frequenzen verwendet: 294Hz (Frequenz von PSR J17191-2821), 641Hz (Frequenz von PSR B1937+21), 719Hz (Frequenz

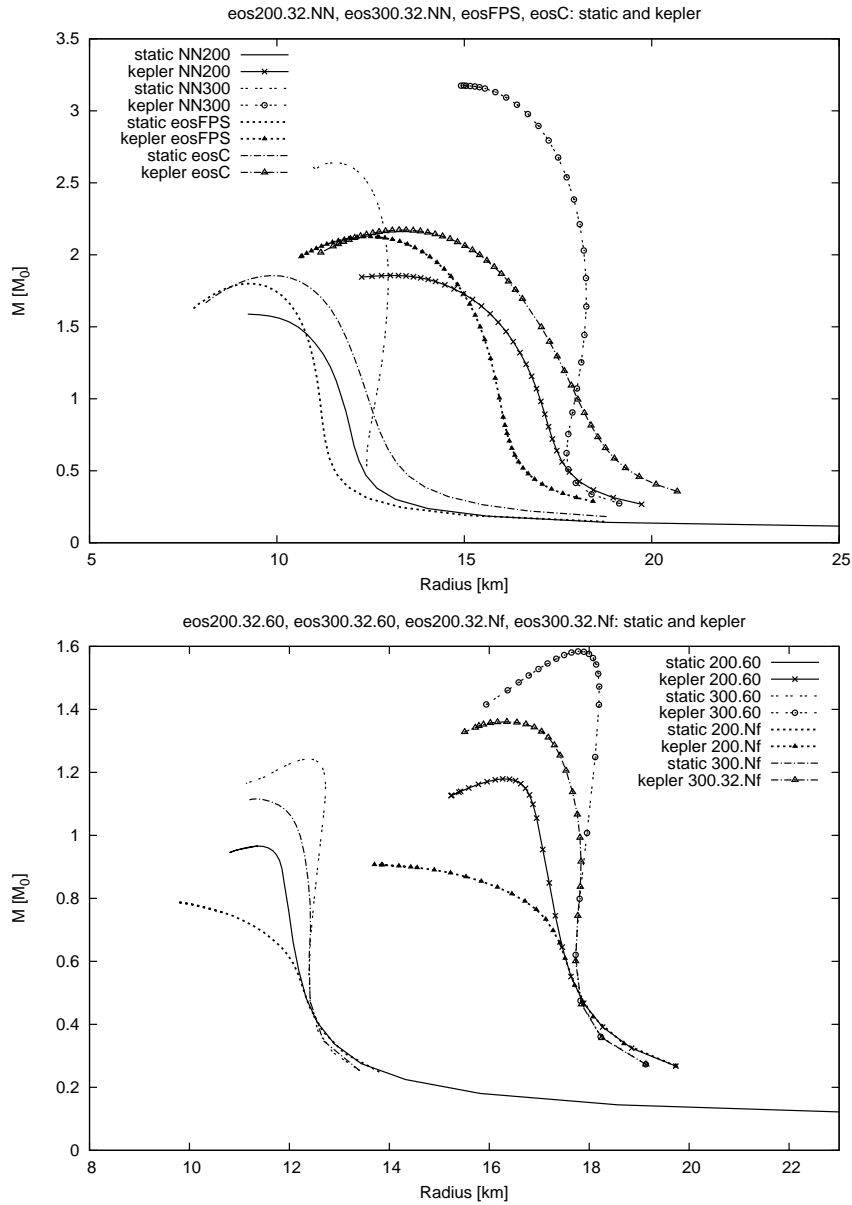


Abb. 4.3: *Masse-Radius-Relation für statisches Limit und Keplerlimit (zwei "Zweige"); oben: eosC, eosFPS, eos200.32.NN, eos300.32.NN; unten: eos200.32.60, eos300.32.60, eos200.32.Nf, eos300.32.Nf*

von PSR J1748-2446ad). Man findet für die benannten Pulsare in der Literatur auch Abweichungen dieser Frequenzen um wenige Hertz, was hier aber nicht weiter stören soll.

Für höhere Frequenzen sind oft nur Berechnungen in eingeschränktem Rahmen möglich, was gut anhand des Modells der Zustandsgleichungen eos200.32.60 und eos300.32.60 (Abbildung 4.7) verdeutlicht wird. Es existiert kein Energiedichte-

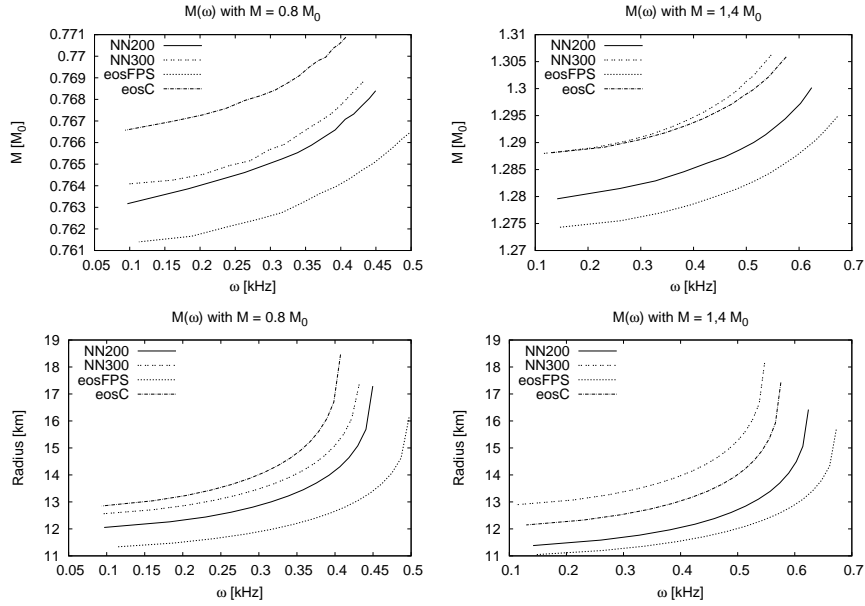


Abb. 4.4: Winkelgeschwindigkeit in Abhängigkeit von Masse (oben) bzw. Radius (unten) für zwei konstante Ruhemassen $0.8M_0$ (links) und $1.4M_0$ (rechts)

bereich, in dem es eine Sequenz mit $\omega=719\text{Hz}$ gibt. Für $\omega=641\text{Hz}$ gibt es einen Bereich, der allerdings nicht mehr im Bereich der Stabilität liegt. Für eos200.32.60 beginnt diese Kurve (wie auch bei den anderen Zustandsgleichungen) auf der Kurve des Keplerlimits (jedoch erst hinter dem Maximum) und endet auch wieder auf ihr. Auch für eos300.32.60 entsteht die Sequenz für $\omega=641\text{Hz}$ (aus der Kurve der Keplersequenz) erst im instabilen Bereich. Daraus und aus der Tatsache, dass inzwischen ein Pulsar mit einer Frequenz von über 1000Hz beobachtet worden sind, ist zu schließen, dass das Keplerlimit, das mit diesen Zustandsgleichungen berechnet wird, zu niedrig ist, um für alle Neutronensterne gelten zu können.

Evolutionsequenzen (Konfigurationen bei konstanter Ruhemasse) beschreiben die zeitliche Entwicklung magnetisierter isolierter Neutronensterne; auch bei der Entwicklung dieser Sterne bleibt die Ruhemasse (Baryonenmasse) des Sterns konstant und ist daher gut für die Beschreibung geeignet. In den Abbildungen dieses Kapitels (Abb. 4.5-4.7) sind solche Evolutionsequenzen für verschiedene Ruhemassen eingezeichnet.

Man erkennt, dass diese Sequenzen während ihres Verlaufs mit zunehmender Energiedichte etwas (an Masse) abnehmen. Dies kann dadurch erklärt werden, dass die kinetische Energie schnell rotierender Sterne ("Startpunkt" der Sequenzen auf Keplerkurve; niedrige Energiedichte) größer ist als die statischer bzw. langsamer rotierender Sterne (für gleiche Ruhemasse). Es fällt weiterhin auf, dass es einen Bereich gibt, in dem die Winkelgeschwindigkeit abnimmt, und einen anderen Bereich, in dem die Frequenz steigt. Die Evolutionsequenz endet im ersten (normalen/ stabilen) Bereich auf der Kurve des statischen Grenzfalls. Dieses Verhalten entspricht auch dem, was man erwarten kann, da es bei der

Entwicklung von isolierten magnetisierten Neutronensternen zu einer Abnahme des Drehimpulses kommt (durch die Abstrahlung elektromagnetischer Wellen) und dies wiederum zu einer Abnahme der Winkelgeschwindigkeit. Allerdings ändert sich dieses Verhalten bei größer werdender Ruhemasse. Ist die Ruhemasse größer als die maximal mögliche Ruhemasse statischer Sterne, kommt es zu einer sogenannten supramassiven Sequenz und es tritt der Effekt des back bending auf (Zunahme der Rotationsfrequenz bei Abnahme des Drehimpulses). Der Stern endet nicht als statischer Neutronenstern, sondern kollabiert zu einem Schwarzen Loch. Dieser zweite Bereich ist bei einigen Zustandsgleichungen (eos300.32.60, eos200.32.NN, eos300.32.NN) mit eingezeichnet. Bei den übrigen Zustandsgleichungen wurden aufgrund möglicher Unübersichtlichkeit nur stabile Evolutionssequenzen eingezeichnet. Es kommen auch supramassive Sequenzen vor, die stabil sind. Dies ist der Fall, wenn eine solche Sequenz, die bei großer Ruhemasse auf der Keplersequenz beginnt, wieder auf dem Keplerlimit endet.

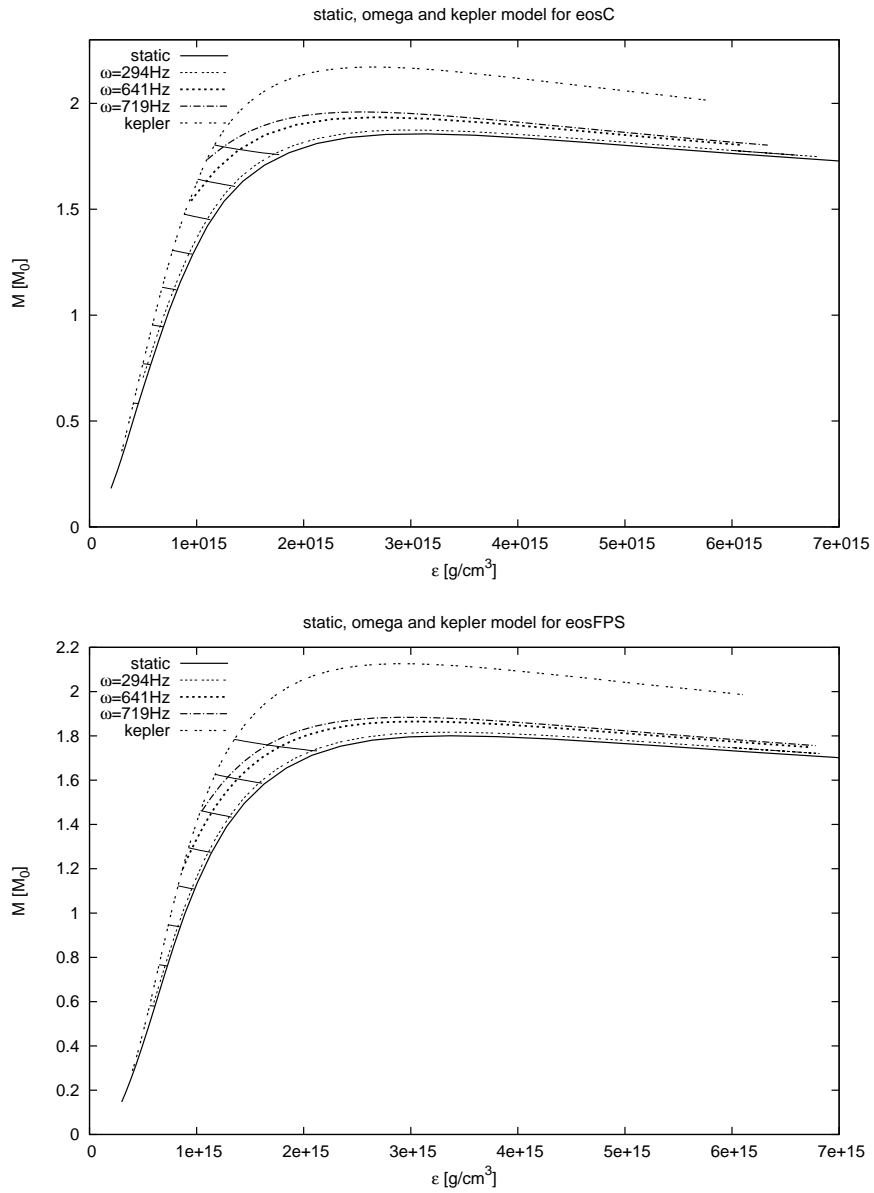


Abb. 4.5: Sequenzen für eosC (oben) und eosFPS (unten) für statisches Limit, Keplerlimit und für die konstanten Rotationsfrequenzen $\omega = 294 \text{ Hz}$, $\omega = 641 \text{ Hz}$ und $\omega = 719 \text{ Hz}$; Evolutionssequenzen für die Ruhemassen $M = 0,6M_0$ bis $M = 2M_0$

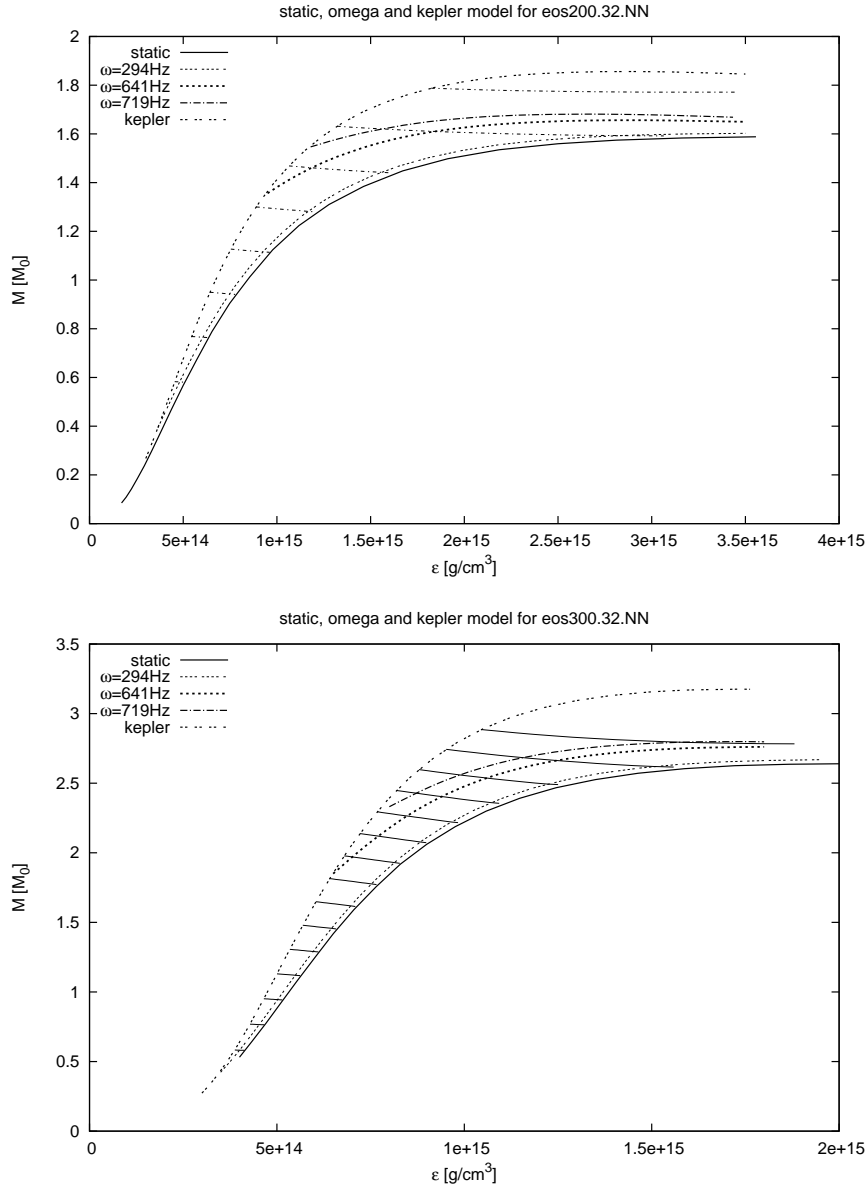


Abb. 4.6: Sequenzen für *eos200.32.NN* (oben) und *eos300.32.NN* (unten): eingezeichnet sind Sequenzen für statisches Limit, Keplerlimit, für Rotationsfrequenzen $\omega = 294\text{Hz}$, $\omega = 641\text{Hz}$ und $\omega = 719\text{Hz}$ sowie Evolutionssequenzen für Ruhmassen $M = 0,6M_0$ bis $M = 2M_0$ (oben) bzw. $M = 3,4M_0$ (unten); $M = 2M_0$ (oben) bzw. $M = 3,4M_0$ (unten) ist eine supramassive Evolutionssequenz

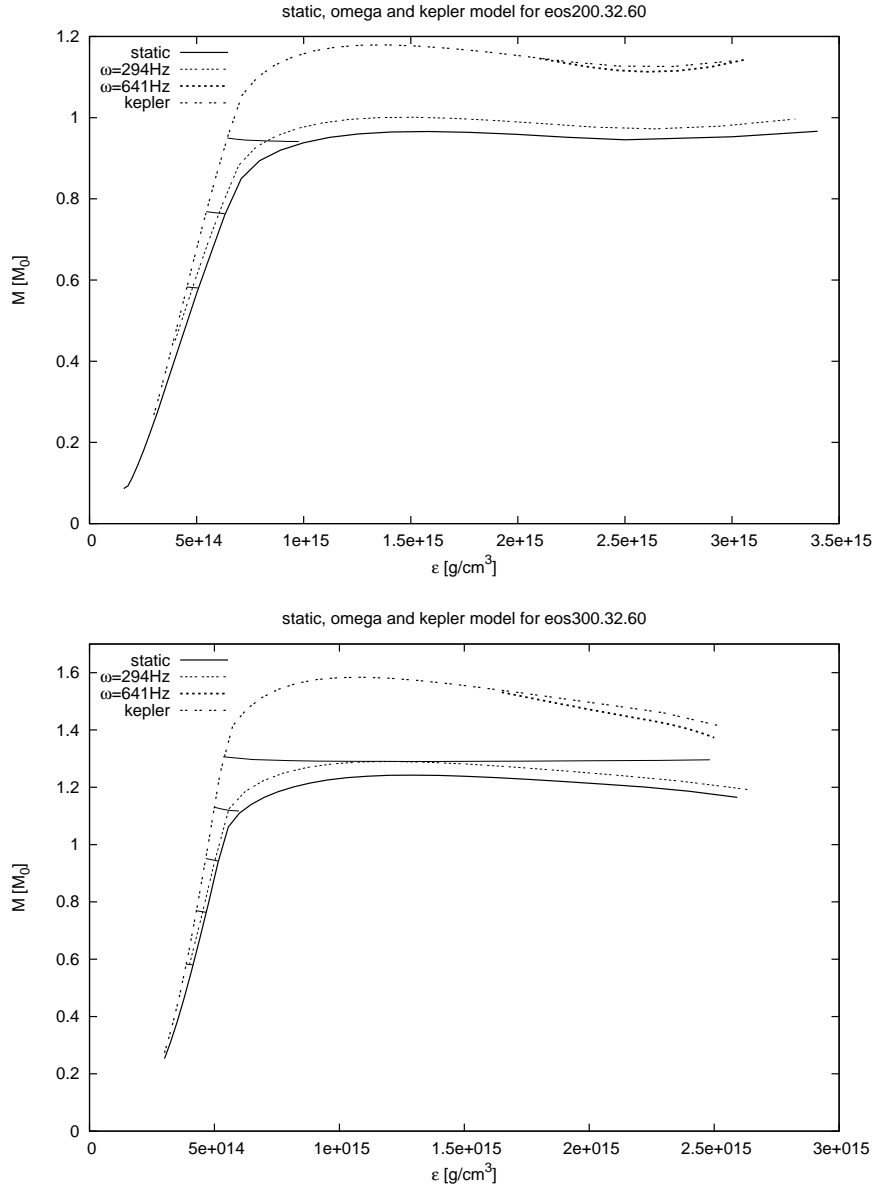


Abb. 4.7: Sequenzen für eos200.32.60 (oben) und eos300.32.60 (unten): eingezeichnet sind Sequenzen für statisches Limit, Keplerlimit, für Rotationsfrequenzen $\omega = 294\text{Hz}$ und $\omega = 641\text{Hz}$ (nicht mehr stabil) sowie Evolutionssequenzen für Ruhemassen $M = 0,6M_0$ bis $M = 1M_0$ (oben) bzw. $M = 1,2M_0$ (unten); stabile Konfigurationen mit diesen Zustandsgleichungen erreichen nur vergleichsweise geringe Rotationsfrequenzen und Energiedichten

5 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden diverse Zustandsgleichungen, die auf der nicht relativistischen Vielteilchenphysik oder der relativistischen Quantenfeldtheorie basieren, zur Beschreibung der dichten Materie eines Neutronensterns untersucht. Dabei wurden zunächst statische Neutronensterne betrachtet. Dabei konnte aufgezeigt werden, inwieweit die Unterschiede in den verwendeten Zustandsgleichungen (wie z.B. Steifheit) die Strukturberechnungen verändern.

Anschließend wurde der Fokus auf rotierende Neutronensterne gelegt. Die Zustandsgleichungen wurden nun unter Einfluß der Rotation auf die Strukturberechnungen untersucht. Dabei wurden Sequenzen unterschiedlicher Rotationsfrequenzen sowie das Keplerlimit berechnet. Es fiel auf, dass bei einigen Zustandsgleichungen die ermittelte Keplerfrequenz geringer ist als tatsächlich beobachtete Frequenzen von Pulsaren (1122Hz bei XTE J1739-285, 719Hz bei PSR J1748-2446ad). Eine Forderung an die Zustandsgleichung ist also, dass das Keplerlimit höher als 1122Hz ist und solche Frequenzen noch im Bereich der Stabilität liegen. Gleichzeitig müssen aber auch Radius und Masse mit bisherigen beobachteten Werten in Einklang sein – unter Berücksichtigung der Massenzunahme bei Rotation.

Das Thema der Zustandsgleichung für dichte Materie ist ein interessantes Forschungsgebiet, in dem noch viele Fragen offen sind: wie hoch sind die maximal erlaubte Masse und die maximal mögliche Frequenz eines Neutronensterns, aus welcher Materie ist das Innere aufgebaut und welche Dichten kann diese erreichen...?

Literaturverzeichnis

Astrophysik

- [1] S.L.Shapiro und S.A.Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*, Wiley-Interscience, New York 1983.
- [2] A.Weigert, H.J.Wendker L.Wisotzki, *Astronomie und Astrophysik*, 4. Auflage, Wiley-VCH, Weinheim 2005.
- [3] D.Perkins, *Particle Astrophysics*, 2. Auflage, University Press, New York 2009.
- [4] A.Bauswein, *Diplomarbeit: Struktur schnell rotierender Neutronensterne*, 2006.
- [5] A.Müller, *Lexikon der Astrophysik N1 (Neutronenstern)*, http://www.wissenschaft-online.de/astrowissen/lexdt_n.html.
- [6] S.Popov, *Lecture 1: Structure of Neutron Stars*, (SAI MSU).
- [7] A.Hewish, J.Bell, *Nature* 217: 709–713, 1968.

Allgemeine Relativitätstheorie

- [8] T.Fliessbach, *Allgemeine Relativitätstheorie*, 5. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 2006.
- [9] R.U.Sexl und H.K.Urbantke, *Gravitation und Kosmologie*, 5. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 2002.
- [10] J.Wambach, *Vorlesungsskriptum zur Allgemeinen Relativitätstheorie*.
- [11] V.S.Manko, E.W.Mielke, J.D.Sanabria-Gómez, *Phys.Rev. D*61, 081501, gr-qc/0001081, 2000.
- [12] R.C.Tolman, *Phys.Rev.* 55, 364, 1939.
- [13] J.R.Oppenheimer and G.M.Volkoff, *Phys.Rev.* 55, 374, 1939.

Zustandsgleichungen

- [14] C.J.Pethick, D.G.Ravenhall, C.P.Lorenz, *Phys.Rev.Lett.* 70, 379 - 382, 1993.
- [15] H.A.Bethe, M.B.Johnson, *Nuclear Physics A*230, 1 - 58, 1974.

- [16] H.Đapo, B.-J. Schäfer, J. Wambach, nucl-th/0811.2939, 2008.
- [17] H.Đapo, B.-J. Schäfer, J. Wambach, Eur.Phys.J. A36, 101-110, nucl-th/0802.2646, 2008.
- [18] H.Đapo, *Dissertation: Hyperons in Dense Matter*, 2009.
- [19] V.A. Ambartsumyan, G.S. Saakyan, Soviet Astronomy 4, 187, 1960.
- [20] G.Baym, C.Pethick, and P.Sutherland, Astrophys.J. 170, 299, 1971.
- [21] J.W.Negele and D.Vautherin, Nucl.Phys. A207, 298, 1973.

Sonstiges

- [22] N.Stergioulas, J.L.Friedman, Astrophys.J. 444, 306, astro-ph/9411032, 1995.
- [23] T.Nozawa, N. Stergioulas, E. Gourgoulhon, and Y.Eriguchi, Astron.Astrophys.Suppl.Ser. 132, 431, gr-qc/9804048, 1998.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich einigen Personen danken, die das Schreiben dieser Thesis für mich möglich gemacht haben:

Professor Dr. Jochen Wambach, der mir die Möglichkeit geboten hat, in seine Arbeitsgruppe zu kommen und dort diese Arbeit zu schreiben, sowie Dr. Haris Đapo, der mich dabei betreut hat und mir bei der Einarbeitung in das Thema und bei aufkommenden Problemen immer hilfsbereit zur Seite stand.

Außerdem will ich allen Mitgliedern der Theoriegruppen im Institut für Kernphysik und besonders meinen "Büromitbewohnern" Tobi, Klaus, Christian, Haris und Thorsten danken, für eine sehr nette Atmosphäre, Hilfe bei Computerabsturz, Latex, Fortran etc., ständige Teeversorgung, äußerst spannende X-Moto-Sessions und besonders auch dafür, dass es nie Widerworte gab, wenn Pumbaa dabei war.

Andreas Müller möchte ich hier erwähnen, da er schon vor Studienbeginn mein Interesse an diesem Bereich der Physik geweckt hat, daher ausschlaggebend an meiner Entscheidung, Physik zu studieren, beteiligt war und mich mit seinem Astrollexikon immer mit neuem Wissen versorgt.

Desweiteren möchte ich meinen engsten Freunden und meiner Familie danken: Swen, der mit mir von Beginn an durch Höhen und Tiefen der Physik gegangen ist, meinen Eltern für ihre Unterstützung, Julchen für die langjährige Freundschaft, die – trotz teilweiser Funkstille wegen Studienstress – besteht, und Robs, und schließlich Micha, meiner moralischen Stütze, der mir auch bei dieser Arbeit mit Rat und Tat zur Seite stand und mich bei gelegentlicher Frustration aufgefangen hat.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Bachelorarbeit selbständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und die Arbeit keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt habe.

Alfter, den 15. Juni 2009