
Polarisation der Hintergrundstrahlung durch Gravitationswellen

Bachelor-Thesis von Giovanni Biondo
September 2014



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Physik
Institut für Kernphysik
AG Wambach

Polarisation der Hintergrundstrahlung durch Gravitationswellen

Vorgelegte Bachelor-Thesis von Giovanni Biondo

1. Gutachten: Prof. Dr. Jochen Wambach
2. Gutachten: Prof. Dr. Lorenz von Smekal

Tag der Einreichung:

Erklärung zur Bachelor-Thesis

Hiermit versichere ich, die vorliegende Bachelor-Thesis ohne Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Darmstadt, den 22. September 2014

(Giovanni Biondo)

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
2	Grundlagen	5
2.1	Allgemeine Relativitätstheorie (ART)	5
2.2	Kosmologie	6
2.2.1	Konforme Zeit	8
2.2.2	Inflation	9
2.3	Gravitationswellen	11
2.4	Kosmische Hintergrundstrahlung (CMB)	12
3	Leistungsspektrum primordialer Gravitationswellen	15
4	Polarisation der Hintergrundstrahlung	19
5	Polarisation durch eine ebene Gravitationswelle	22
5.1	Effekt der Gravitationswelle	22
5.2	Stoßfreie Boltzmann-Gleichung in erster Ordnung	24
5.3	Thomson-Streuung	25
5.4	Die Boltzmann-Gleichung mit Streuterm und Polarisationsensor	27
6	Zusammenfassung und Ausblick	29
A	Berechnungen	30
A.1	Christoffelsymbole	30
A.2	Ricci-Tensor	30
B	Boltzmann Gleichung	33
	Literaturverzeichnis	35
	Abbildungsverzeichnis	36

1 Einführung

Die heute allgemein anerkannte Theorie der Gravitation ist die Allgemeine Relativitätstheorie. Sie ist eine klassische Feldtheorie, welche die Gravitation durch die Geometrie der Raumzeit beschreibt. Die Krümmung der Raumzeit beeinflusst die Bewegung von freien Teilchen, welche sich auf Geodäten bewegen. Obwohl die Gravitation die schwächste der vier Grundkräfte ist, dominiert sie auf hinreichend großen Skalen, da die anderen drei kurzreichweitig sind (Starke und Schwache Wechselwirkung) oder abgeschirmt werden (Elektromagnetische Wechselwirkung). Daher kann die Allgemeine Relativitätstheorie auf das gesamte Universum angewendet werden und bildet die Grundlage der modernen Kosmologie.

Basierend auf Beobachtungen wie der Expansionsrate des Universums, der Häufigkeiten von Wasserstoff und Helium und der kosmischen Hintergrundstrahlung, liefert das Friedmann-Robertson-Walker (FRW) Modell, bzw. Urknall Modell die aktuell beste Beschreibung des Universums. Nach diesem Modell ist das Universum in einer ursprünglichen Singularität (dem Urknall) entstanden und expandiert seitdem, wobei es sich immer weiter abkühlt. In der frühen Phase bestand das Universum aus einem sehr heißen, dichten Plasma aus Photonen und Baryonen. Als das Plasma soweit abgekühlt war ($T \sim 4000\text{ K}$), dass sich Elektronen und Protonen zu neutralem Wasserstoff verbinden konnten (~ 380000 Jahre nach dem Urknall), entkoppelten die Photonen von der Materie und bildeten die kosmische Hintergrundstrahlung. Die Entdeckung dieser Hintergrundstrahlung 1964 war der wichtigste experimentelle Durchbruch in der Kosmologie. Das Spektrum der Hintergrundstrahlung ist ein nahezu perfektes Schwarzkörper-Spektrum, was bedeutet, dass die Strahlung zur Zeit der Entkopplung in thermischem Gleichgewicht war. Sie ist annähernd isotrop, d.h. sie weist in jeder Richtung fast die gleiche Temperatur auf, mit kleinen Abweichungen der Größenordnung $\Delta T/T \sim 10^{-5}$. Eine weitere wichtige Eigenschaft der Hintergrundstrahlung ist ihre Polarisation. Diese wurde durch Streuung an freien Elektronen erzeugt. Die Hintergrundstrahlung ist die wichtigste Quelle von Informationen aus dem frühen Universum. Allerdings führte ihre Entdeckung auch zu Problemen mit dem FRW-Modell. Es kann zwar das Schwarzkörperspektrum erklären, aber nicht die Isotropie, und es liefert auch keinen Mechanismus zur Erzeugung kleiner Anisotropien.

Der aktuell aussichtsreichste Kandidat für die Lösung dieser Probleme ist die Inflationstheorie. Diese ergänzt das FRW-Modell um eine Phase der exponentiellen Expansion. In Abb. 1.1 ist die Entwicklung des Universums seit der Inflation dargestellt. Die Inflationstheorie kann die Isotropie der Hintergrundstrahlung erklären und liefert einen Mechanismus, wie aus Quantenfluktuationen makroskopische Fluktuationen entstehen können. Unter diesen sind auch Fluktuationen in der Metrik der Raumzeit. Diese Störungen der Hintergrundmetrik werden klassifiziert nach ihrem Verhalten unter räumlichen Drehungen. Die wichtigsten Störungen sind skalare Störungen (Dichtefluktuationen) und Tensorstörungen (Gravitationswellen). Eine wichtige Größe zur Beschreibung von primordialen Störungen ist das Tensor-zu-Skalar Verhältnis $r = P_T/P_S$. P_T und P_S sind die Amplituden der Tensor- bzw. Skalarstörung. Die Amplitude der skalaren Störungen ist durch die Anisotropien der Hintergrundstrahlung bestimmt worden. Gravitationswellen erzeugen eine bestimmte Signatur in der Polarisation der Hintergrundstrahlung, die sog. B -Moden Polarisation. Diese Art der Polarisation kann nicht durch Dichtefluktuationen erzeugt werden. Im März 2014 wurde die Entdeckung von B -Moden Polarisation durch BICEP2 veröffentlicht [1]. Das ermittelte Tensor-zu-Skalar Verhältnis beträgt $r = 0.20^{+0.07}_{-0.05}$. BICEP2 (Background Imaging of Cosmic Extragalactic Polarization) ist ein Experiment in der Antarktis, das die Polarisation der Hintergrundstrahlung in einem kleinen Bereich des Himmels (Winkelausdehnung $\sim 2^\circ$) vermessen hat. Sollte sich diese Entdeckung bestätigen, wäre sie ein direkter Nachweis von primordialen Gravitationswellen, und dadurch auch ein Nachweis der Inflation, welche diese Wellen vorhersagt. Da das Universum vor der Entkopplung für Licht undurchlässig war, ermöglicht die Detektion von Gravitationswellen einen tieferen Blick in das frühe Universum.

In dieser Arbeit wird die Entstehung von primordialen Gravitationswellen während der Inflationsphase und die Polarisation der kosmischen Hintergrundstrahlung untersucht. Das Polarisationsfeld wird in E - und B -Moden zerlegt. Die E -Mode beschreibt den rotationsfreien („elektrischen“) Anteil der Polarisation und die B -Mode den divergenzfreen („magnetischen“) Anteil. Dann wird mithilfe der Methode von Basko und Polnarev [4, 5, 6] die B -Mode berechnet, die durch eine ebene Gravitationswelle erzeugt wird. Mit dieser Methode wird ein analytischer Ausdruck für die B -Mode hergeleitet. Alternativ können numerische Rechnungen durchgeführt werden, z.B. mit dem Programm CAMB [15]. Die verwendete Konvention für die Signatur der Metrik ist $(-+++)$. Außerdem werden Raumzeit-Indizes durch griechische Buchstaben (μ, ν, σ, \dots) und Raum-Indizes durch lateinische Buchstaben aus der Mitte des Alphabets (i, j, k, \dots) ausgedrückt. Für die Beschreibung des Polarisationsfeldes auf der Himmelskugel werden Indizes durch lateinische Buchstaben vom Anfang des Alphabets (a, b, c, \dots) dargestellt. Stokesvektoren, die der Beschreibung des Polarisationszustandes einer Verteilung von Photonen dienen, werden durch fettgedruckte Buchstaben, ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$) dargestellt. Im Folgenden werden natürliche Einheiten $c = \hbar = k_B = 1$ verwendet.

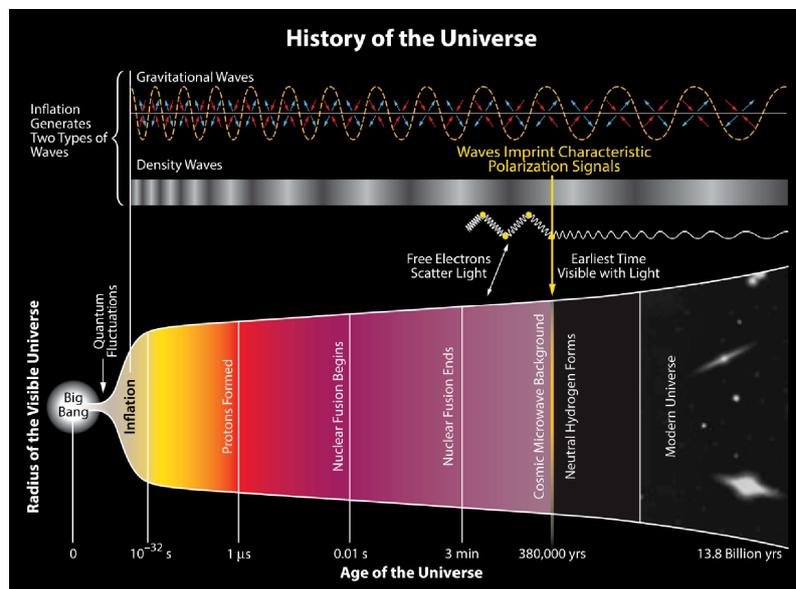


Abbildung 1.1.: Darstellung der Entwicklung des Universums. Während der Inflationsphase wurden Dichtefluktuationen und Gravitationswellen erzeugt. Diese können durch ihren Einfluss auf die kosmische Hintergrundstrahlung nachgewiesen werden. Das Bild stammt aus [1].

2 Grundlagen

Hier werden einige wichtige Grundlagen zusammengefasst, die für diese Arbeit benötigt werden.

2.1 Allgemeine Relativitätstheorie (ART)

Die Beschreibung von Gravitationswellen erfolgt im Rahmen der ART. Die ART ist die Erweiterung der speziellen Relativitätstheorie (SRT) um die Gravitation. In diesem Abschnitt werden kurz die wichtigsten Grundlagen der ART dargestellt. Die Informationen sind im Wesentlichen entnommen aus [2] und [3]. Das Grundprinzip der ART ist das Starke Äquivalenzprinzip, welches besagt, dass in einem frei fallenden Bezugssystem alle physikalischen Vorgänge so ablaufen, als wäre kein Gravitationsfeld vorhanden. D.h. in einem frei fallenden Bezugssystem gelten die Gesetze der SRT. Dies ermöglicht es, die Effekte der Gravitation auf die Krümmung der Raumzeit zurückzuführen.

Der Zusammenhang zwischen der Geometrie der Raumzeit und der Energie-Impuls-Verteilung ist gegeben durch die Einsteinschen Feldgleichungen

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

Die rechte Seite beschreibt die Energie-Impuls-Verteilung in der Raumzeit. Diese wird modelliert durch den Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$. Der Vorfaktor $8\pi G$ ist eine Kopplungskonstante, welche sich durch den newtonschen Grenzfall ergibt. Die linke Seite von Gl. (2.1) beschreibt die Geometrie der Raumzeit. Die $g_{\mu\nu}$ sind die Komponenten des metrischen Tensors. Der metrische Tensor, bzw. das *Linienelement*

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (2.2)$$

beschreibt ein infinitesimales Intervall in der Raumzeit. Die Komponenten $g_{\mu\nu}$ hängen dabei von der Wahl des Koordinatensystems und dem Raumzeitpunkt ab.

Mithilfe des *affinen Zusammenhangs* Γ lässt sich eine *kovariante Ableitung* definieren, die sich unter allgemeinen Koordinatentransformationen tensoriell transformiert und die Tangentialräume der Mannigfaltigkeit verbindet. In Komponenten lautet die kovariante Ableitung eines Vektors

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu V^\rho. \quad (2.3)$$

Aus der Forderung der Metrik-Kompatibilität, $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$, folgen für die Komponenten $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ des Zusammenhangs

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (2.4)$$

Mit dem affinen Zusammenhang kann der *Riemannsche Krümmungstensor*

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \quad (2.5)$$

definiert werden. Er enthält alle Informationen über die lokale Krümmung der Raumzeit. Die nicht-trivialen Kontraktionen des Riemann-Tensors sind der Ricci-Tensor und der Krümmungsskalar

$$R_{\rho\sigma} = R^{\lambda}_{\rho\lambda\sigma}, \quad \text{und} \quad R = R^{\rho}_{\rho}. \quad (2.6)$$

Gl. (2.1) beschreibt die Auswirkung einer Materieverteilung auf die Geometrie der Raumzeit. Die Bewegung eines Testteilchens in der Raumzeit ist gegeben durch die Geodätengleichung

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0. \quad (2.7)$$

Die Einsteinschen Feldgleichungen (2.1) lassen sich auch aus einer Wirkung ableiten. Dazu wird die Einstein-Hilbert-Wirkung verwendet:

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int R \sqrt{|g|} d^4x \quad (2.8)$$

Hierbei ist $|g|$ die Determinante des metrischen Tensors. Variation nach $g^{\mu\nu}$ ergeben die Einsteinschen Feldgleichungen im Vakuum, $R_{\mu\nu} = 0$. In der Anwesenheit von Materiefeldern muss die Wirkung um einen Materieterm ergänzt werden.

$$S = S_{EH} + S_M \quad (2.9)$$

Variationen nach $g^{\mu\nu}$ ergeben die Feldgleichungen Gl. (2.1), wobei der Energie-Impuls Tensor folgendermaßen definiert wird

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.10)$$

Alternativ kann der Energie-Impuls-Tensor auch aus einer Modellannahme gewonnen werden. In der FRW-Kosmologie, die im nächsten Abschnitt vorgestellt wird, werden die Komponenten des Materieinhalts durch ideale Flüssigkeiten beschrieben.

2.2 Kosmologie

Die Kosmologie ist eine der wichtigsten Anwendungen der Allgemeinen Relativitätstheorie. Sie beschreibt die raumzeitliche Entwicklung des Universums. Die für diesen Abschnitt verwendete Literatur ist [2, 3, 8]. Das der modernen Kosmologie zugrundeliegende Prinzip ist das *Kosmologische Prinzip*, welches besagt, dass der Raum auf hinreichend großen Skalen überall und in jeder Richtung gleich, d.h. homogen und isotrop ist. Das bedeutet, dass der 3-dimensionale Raum maximal symmetrisch ist. Edwin Hubble beobachtete 1927 durch die Verteilung von Galaxien und deren Rotverschiebung, dass das Universum expandiert. Ein expandierendes Universum mit maximal-symmetrischem Raumanteil kann daher durch die *Friedmann-Robertson-Walker (FRW)*-Metrik

$$(ds)^2 = -(dt)^2 + a^2(t) \left[\frac{(dr)^2}{1-kr} + r^2 (d\Omega)^2 \right] \quad (2.11)$$

beschrieben werden. $a(t)$ ist der *Skalenfaktor* und beschreibt die Expansion des Raums. $(d\Omega)^2$ ist die Standardmetrik der 2-Sphäre. Der Parameter k charakterisiert die Geometrie des 3-dimensionalen Raums. Der Fall $k > 0$ beschreibt einen Raum mit positiver Krümmung, $k = 0$ beschreibt den flachen Raum und $k < 0$ beschreibt einen Raum mit negativer Krümmung. In dieser Arbeit wird nur der Fall $k = 0$ betrachtet. Für diesen Fall kann die Metrik auch alternativ in euklidischen Koordinaten geschrieben werden

$$(ds)^2 = -(dt)^2 + a^2(t) [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2] \quad (2.12)$$

Die Koordinaten x, y, z werden *mitbewegte Koordinaten* genannt. Mitbewegte Längen und physikalische Längen unterscheiden sich um einen Faktor $a(t)$. Das Verhalten des Skalenfaktors wird bestimmt durch den Materieinhalt des Universums. Der Inhalt wird modelliert durch ideale Flüssigkeiten. Für eine ideale

Flüssigkeit verschwinden Volumen- und Scherviskosität sowie Wärmeleitfähigkeit. Sie ist vollständig beschrieben durch ihre Energiedichte ρ im Ruhesystem und den Druck p . Der Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit ist gegeben durch

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu} \quad (2.13)$$

Die Flüssigkeit wird betrachtet als in Ruhe relativ zu den mitbewegten Koordinaten, d.h. ihre Vierergeschwindigkeit ist $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$, und damit wird der Energie-Impuls-Tensor und dessen Spur zu

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p), \quad T = -\rho + 3p. \quad (2.14)$$

Die kosmologischen Flüssigkeiten werden durch eine Zustandsgleichung der Form

$$p = w\rho \quad (2.15)$$

beschrieben, wobei die Konstante w die Eigenschaften der Flüssigkeit beschreibt. Die wichtigsten kosmologischen Flüssigkeiten sind nichtrelativistische Materie ($w = 0$), Strahlung ($w = \frac{1}{3}$) und Vakuumenergie ($w = -1$). Der Zusammenhang zwischen Energiedichte und Skalenfaktor lässt sich über die Energieerhaltungsgleichung $\nabla_\mu T^\mu{}_0 = 0$ bestimmen. Es ergibt sich die Gleichung

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -3(1+w) \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, \quad (2.16)$$

deren Lösung mit Benutzung der Zustandsgleichung Gl. (2.15)

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)} \quad (2.17)$$

lautet. In Tab. 2.1 ist das Verhalten des Skalenfaktors für verschiedene Universen aufgelistet.

Tabelle 2.1.: Verhalten der Dichten und des Skalenfaktors für Materie-, Strahlungs- und Vakuumenergie dominiertes Universum.

Dominante Quelle	$\rho(a)$	$a(t)$
Materie	a^{-3}	$t^{\frac{2}{3}}$
Strahlung	a^{-4}	$t^{\frac{1}{2}}$
Λ	a^0	e^{Ht}

Einsetzen der FRW-Metrik (Gl. 2.11), und des Energie-Impuls-Tensors (Gl. 2.13) in die Einsteinschen Feldgleichungen (Gl. 2.1) führt zur *Friedmann Gleichung*

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}. \quad (2.18)$$

Wobei hier der *Hubbleparameter* $H := \frac{da/dt}{a}$ definiert wurde. Der Hubbleparameter gibt die Expansionsrate des Universums an. Der Wert der heutigen Expansionsrate beträgt $H_0 = 73.8 \pm 2.4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [16]. Das Megaparsec ist eine Längeneinheit, die üblicherweise in der Kosmologie verwendet wird. Es gilt $1 \text{ Mpc} = 3.09 \cdot 10^{24} \text{ cm}$. Die Anteile der verschiedenen Materiesorten sind gegeben durch die *Dichteparameter*

$$\Omega_i = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_i. \quad (2.19)$$

Damit lautet die Friedmann Gleichung

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2}. \quad (2.20)$$

$\Omega = \sum_i \Omega_i$ ist der totale Dichteparameter. Die aktuellen Messwerte sind konsistent mit einem flachen Universum, dh. $\Omega \approx 1$ [16]. In Abb. 2.1 ist der Materieinhalt des Universums mit den Werten von WMAP dargestellt.

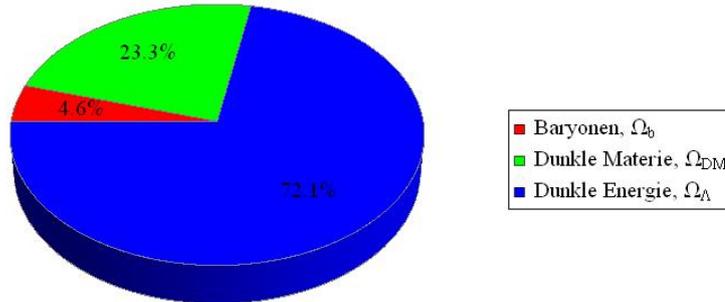


Abbildung 2.1.: Materieinhalt des Universums nach WMAP [16]. Die Anteile Ω_γ von Strahlung und Ω_ν von Neutrinos sind vernachlässigbar.

Eine wichtige Konsequenz des sich ausdehnenden Universums ist die *kosmologische Rotverschiebung*. Die Energie eines Photons, die von einem mitbewegten Beobachter gemessen wird, verhält sich wie $E \propto a^{-1}$. D.h. die Frequenz wird kleiner mit der Ausdehnung des Universums. Licht, das mit einer Wellenlänge λ_1 emittiert wird und mit einer Wellenlänge λ_2 beobachtet wird, weist eine Rotverschiebung

$$z = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \quad (2.21)$$

auf. Wird das Licht heute beobachtet, d.h. bei Skalenfaktor $a_0 = 1$, dann gilt folgender Zusammenhang

$$a = \frac{1}{1+z} \quad (2.22)$$

Ist $a(t)$ eine monoton wachsende Funktion der Zeit, dann kann man ebenso gut den Wert des Skalenfaktors oder die Rotverschiebung verwenden um den Zeitpunkt eines Ereignisses anzugeben. Eine weitere Möglichkeit der Zeitangabe ist die Temperatur/Energie der Strahlung $T \propto a^{-1}$. Zum Beispiel kann der Zeitpunkt der Entkopplung der kosmischen Hintergrundstrahlung durch $z = 1100$, $T = 4000$ K, $E = 0.3$ eV oder $a = 9 \cdot 10^{-4}$ angegeben werden.

2.2.1 Konforme Zeit

Für die Beschreibung von Gravitationswellen ist es nützlich eine neue Zeitkoordinate einzuführen, die *konforme Zeit* τ , die folgendermaßen mit der kosmischen Zeit t zusammenhängt

$$d\tau = \frac{dt}{a(t)} \quad (2.23)$$

Die Einführung der konformen Zeit wird die Gleichungen stark vereinfachen. Die flache FRW-Metrik lautet, ausgedrückt in konformer Zeit

$$(ds)^2 = a^2(\tau) [-(d\tau)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]. \quad (2.24)$$

Der Hubbleparameter H lautet in konformer Zeit

$$H = \frac{a'}{a} = \frac{\dot{a}}{a^2} \quad (2.25)$$

Hier und im Folgenden steht der Punkt für die Ableitung nach konformer Zeit und der Strich für die Ableitung nach kosmischer Zeit. Eine physikalische Interpretation der konformen Zeit ist die mitbewegte Strecke, die Licht seit $t = 0$ zurückgelegt haben konnte. Für lichtartige Trajektorien folgt aus der FRW-Metrik für die infinitesimale mitbewegte Strecke $dx = dt/a$, d.h.

$$\tau = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \quad (2.26)$$

τ beschreibt also den mitbewegten Horizont.

2.2.2 Inflation

Die Grundlage für diesen Abschnitt bilden [3, 10]. Das oben beschriebene FRW Modell weist einige Probleme auf. So liefert es z.B. keine Erklärung für die Anisotropien in der kosmischen Hintergrundstrahlung. Zwei weitere wichtige Probleme sind

- **Das Horizont Problem**

Der mitbewegte Horizont Gl. (2.26) wächst monoton in einem strahlungs- oder materiedominierten Universum.

$$\tau = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^a \frac{da}{Ha^2} \propto \begin{cases} a & \text{Strahlung} \\ a^{\frac{1}{2}} & \text{Materie} \end{cases} \quad (2.27)$$

Mit der Zeit kommen somit immer größere Gebiete in kausalem Kontakt. Die kosmische Hintergrundstrahlung weist in alle Richtungen nahezu die gleiche Temperatur auf, obwohl diese Regionen in der Vergangenheit nicht in kausalem Kontakt stehen konnten. Nach dem FRW-Modell hatten nur Bereiche mit einer Winkelausdehnung von $\sim 2^\circ$ Zeit, ihre Temperatur anzugleichen. [10]

- **Das Flachheitsproblem**

Das heutige Universum ist annähernd flach, d.h. $\Omega \approx 1$. Die Geometrie des Universums wird bestimmt durch die Friedmann Gleichung,

$$|\Omega - 1| = \frac{k}{(Ha)^2} \propto (a')^{-2}. \quad (2.28)$$

In einem materie- oder strahlungsdominierten Universum wächst $(a')^{-2}$ mit der Zeit an, also ist $\Omega = 1$ ein instabiler Fixpunkt dieser Gleichung. Da das Universum heute flach ist, musste Ω sehr fein abgestimmt worden sein, d.h. Ω musste zu Beginn gleich 1 oder sehr nahe bei 1 gewesen sein.

Die Inflationstheorie löst diese Probleme, indem das FRW Modell um eine Phase der beschleunigten Ausdehnung, der Inflation, ergänzt wird. Das ist gleichbedeutend mit einer Phase, in der der mitbewegte Hubbleradius abnimmt,

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{aH} < 0. \quad (2.29)$$

Die Inflation dauerte von $\sim 10^{-34}$ s bis $\sim 10^{-32}$ s nach dem Urknall. Während dieser Phase wuchs der Skalenfaktor um einen Faktor von $e^{100} \approx 3 \cdot 10^{43}$ an [8]. Es gibt verschiedene Möglichkeiten der

Realisierung einer solchen Phase, die hier beschriebene ist die sog. *Ein-Feld Slow Roll Inflation*. In diesem Modell wird die Inflation durch ein einzelnes Skalarfeld ϕ , das *Inflaton Feld* mit geeignetem Potential $V(\phi)$ beschrieben. Wirkung und Energie-Impuls-Tensor (Gl. 2.10) sind gegeben durch

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right]. \quad (2.30)$$

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \left[\frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \phi \nabla_\sigma \phi - V(\phi) \right]. \quad (2.31)$$

Variation von Gl. (2.30) mit den Christoffel Symbolen der FRW Metrik ergibt die Bewegungsgleichung

$$\phi'' + 3H\phi' + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (2.32)$$

und mit dem Energie-Impuls-Tensor folgt die Friedmann Gleichung für ein Universum mit einem Skalarfeld

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2} \phi'^2 + V(\phi) \right). \quad (2.33)$$

Für ein hinreichend flaches Potential wird die kinetische Energie von der potentiellen dominiert, d.h. $\phi'^2 \ll V(\phi)$ und man erhält einen annähernd konstanten Hubbleparameter

$$H^2 \approx \frac{8\pi G}{3} V \approx const. \quad (2.34)$$

In Abb. 2.2 ist ein mögliches Inflationspotential dargestellt. Die Beschleunigung der Expansion, ausgedrückt durch den Hubbleparameter ist

$$\frac{a''}{a} = H' + H^2 = H^2(1 - \epsilon). \quad (2.35)$$

Inflation kann also stattfinden solange für den *Slow Roll Parameter* $\epsilon = -\frac{H'}{H^2} < 1$ gilt. Damit diese Periode für eine ausreichend lange Zeit anhält, muss auch die Beschleunigung des Feldes ϕ'' klein sein. Diese Bedingung führt zu einem zweiten Slow Roll Parameter $\eta = -\frac{\phi''}{H\phi'}$.

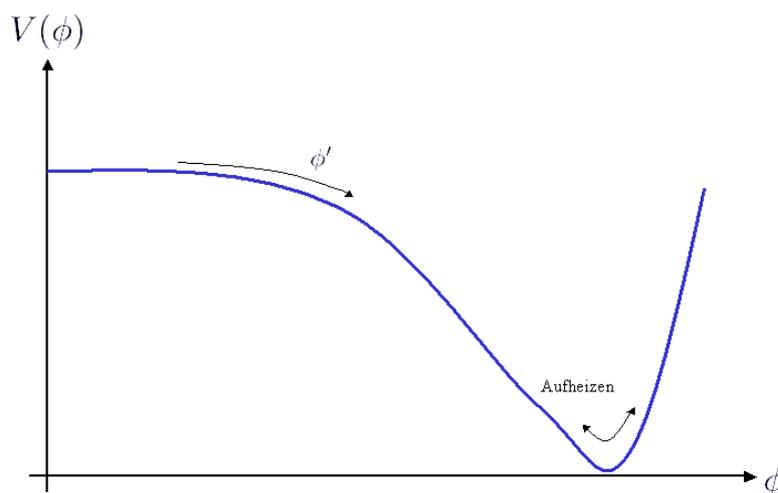


Abbildung 2.2.: Skizze des Inflationspotentials (vgl. [10]). Während der Inflationsphase rollt das Feld ϕ langsam das Potential herunter. Zum Ende der Inflation wird es immer schneller und es beginnt die Phase des Aufheizens, in der das Feld um das Minimum des Potentials oszilliert.

Ein konstanter Hubbleparameter führt zu einem exponentiellen Anwachsen des Skalenparameters

$$a(t) = a_0 e^{Ht} \quad (2.36)$$

Die FRW-Metrik mit diesem Skalenfaktor beschreibt eine maximal-symmetrische Raumzeit mit positiver Krümmung (de-Sitter-Raumzeit). Deshalb wird die inflationäre Phase auch (quasi-)de-Sitter Phase genannt, wobei die Koordinaten unvollständig in der Vergangenheit sind. Für eine ideale de-Sitter Phase wäre $H = \text{const.}$, während der Inflation gilt jedoch nur $H \approx \text{const.}$. Die konforme Zeit ist

$$\tau = \int_0^t dt e^{-Ht} = -\frac{1}{aH}. \quad (2.37)$$

Wobei hier $\tau \in (-\infty, 0)$ gilt. $\tau = 0$ beschreibt das Ende der Inflation bei $t = \infty$. Die Metrik lautet in konformer Zeit

$$ds^2 = a(\tau)^2 [-(d\eta)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2], \quad a(t) = -\frac{1}{H\tau}. \quad (2.38)$$

Gegen Ende der Inflation nähert sich das Inflaton Feld immer schneller dem Minimum des Potentials. Es beginnt dann um dieses Minimum zu oszillieren, wobei die Schwingung gedämpft wird durch den Zerfall von Inflatonen in die Teilchen des Standardmodells. Diese Umwandlung der Energiedichte des Inflaton Feldes in Teilchen wird *Aufheizen* genannt. Ab dieser Phase wird die weitere Entwicklung des Universums durch die FRW Kosmologie bestimmt. Eine genauere Beschreibung des Prozesses des Aufheizens findet sich in [8].

2.3 Gravitationswellen

Die Informationen in diesem Abschnitt sind in Wesentlichen entnommen aus [3]. Gravitationswellen sind propagierende Störungen in der Metrik. Sie entstehen immer dann, wenn ein Quadrupolmoment vorhanden ist, wie z.B. bei sich umkreisenden Massen (Neutronensternen). Aufgrund der Universalität der Gravitation (starkes Äquivalenzprinzip) können GW nicht durch ein sich änderndes Dipolmoment entstehen. Oszillation des Massenschwerpunktes eines isolierten Systems würde die Impulserhaltung verletzen. Daher kommt der führende Beitrag einer Gravitationswelle von dem Quadrupolmoment des Systems. Neben der schwachen Kopplung an Materie ist das ein weiterer Grund, warum die Gravitationsstrahlung viel schwächer ist als elektromagnetische Strahlung. Die Schwäche der Gravitationsstrahlung ermöglicht eine Beschreibung mit linearisierten Einsteingleichungen. Dazu wird eine kleine Störung zu einer FRW-Metrik $g_{\mu\nu}^{(0)}$ addiert.

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (2.39)$$

Die Metrik ist jedoch abhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Da die physikalischen Größen, die mithilfe von Gl. (2.39) berechnet werden, nicht von der Wahl des Koordinatensystems abhängen, muss angegeben werden, wie sich die Störungen unter Koordinatentransformation (*Eichtransformationen*) verändern. Damit die Störung $h_{\mu\nu}$ klein bleibt, werden infinitesimale Koordinatentransformationen entlang eines Vektorfeldes ξ^μ betrachtet. Diese führen zu einer Änderung der Störungen

$$h_{\mu\nu}^{(\xi)} = h_{\mu\nu} + \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu. \quad (2.40)$$

Zerlegt man die Komponenten der Störung $h_{\mu\nu}$ nach ihrem Verhalten unter räumlichen Drehungen, dann lautet eine allgemeine Störung der FRW-Metrik

$$ds^2 = a(\tau)^2 [-(1 + 2\Phi)dt^2 + w_i(dt dx^i + dx^i dt) + ((1 - 2\Psi)\delta_{ij} + 2s_{ij}) dx^i dx^j]. \quad (2.41)$$

Die Eichbedingungen Gl. (2.40) lauten somit

$$\begin{aligned}\Phi &\rightarrow \Phi + \nabla_0 \xi^0 \\ w_i &\rightarrow w_i + \nabla_0 \xi^i - \nabla_i \xi^0\end{aligned}\quad (2.42)$$

$$\Psi \rightarrow \Psi - \frac{1}{3} \nabla_i \xi^i \quad (2.43)$$

$$s_{ij} \rightarrow s_{ij} + \frac{1}{2} (\nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i) - \frac{1}{3} \nabla_k \xi^k \delta_{ij} \quad (2.44)$$

Um fortzufahren kann man entweder eichunabhängige Kombinationen dieser Variablen, oder eine bestimmte Eichung wählen. Die Beschreibung propagierender Gravitationswellen im Vakuum erfolgt üblicherweise in der *transversen, spurfreien Eichung*. In dieser Eichung sind die ξ^μ so gewählt, dass alle Störungen verschwinden, bis auf den spurfreien, transversen Teil von s_{ij} . Dieser Teil beschreibt Gravitationswellen. Die Metrik lautet dann

$$ds^2 = a(\tau)^2 [-d\tau^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j] \quad (2.45)$$

Eine Gravitationswelle mit Wellenvektor k_3 hat die Form

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega\tau - kz)}. \quad (2.46)$$

Die Welle besitzt 2 Freiheitsgrade, h_+ und h_\times . Diese beschreiben die Polarisation der Welle. In Abb. 2.3 ist der Effekt einer + polarisierten Gravitationswelle auf einen Kreis von Testteilchen dargestellt.

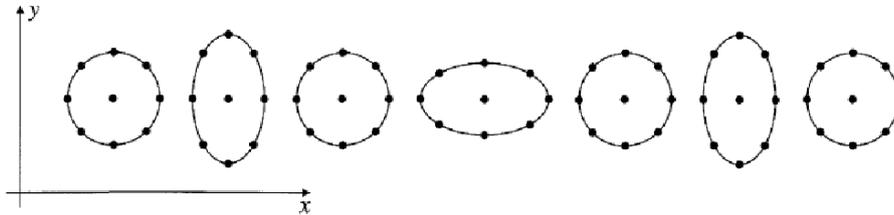


Abbildung 2.3.: Eine Gravitationswelle mit + Polarisation verzerrt einen Kreis aus Testteilchen in ein oszillierendes +. Für eine Welle mit \times Polarisation ist das Muster um 45° gedreht. Das Bild ist entnommen aus [3].

Eine Gravitationswelle ist eine periodische Streckung und Stauchung des Raumes senkrecht zu ihrer Ausbreitungsrichtung.

2.4 Kosmische Hintergrundstrahlung (CMB)

Die Grundlage für diesen Abschnitt bilden [7, 17]. Die Kosmische Hintergrundstrahlung wurde 1965 von Penzias und Wilson entdeckt. Ihre Existenz wurde bereits 1948 von George Gamow im Rahmen des Urknall Modells vorhergesagt. Das frühe Universum nach der Inflationsphase bestand aus einem heißen, dichten Plasma aus Photonen, Nukleonen und Elektronen. Die Photonen konnten sich aufgrund der hohen Dichte und des ständigen Stoßens an Elektronen nicht frei bewegen. Etwa 380000 Jahre nach dem Urknall hat sich das Plasma weit genug abgekühlt, sodass sich die Elektronen mit Protonen zu neutralem Wasserstoff verbinden konnten. Dieses Ereignis wird *Rekombination* genannt. Das führte dazu, dass

die Photonen von der Materie entkoppelten und sich nach einer letzten Streuung frei bewegen konnten. Diese *Entkopplung* fand bei $T \sim 4000$ K statt, und damit aufgrund des niedrigen Baryon-zu-Photon Verhältnisses von $\sim 10^{-10}$ [8] etwas später als die Rekombination. Die Hintergrundstrahlung ist ein Bild des Universums zur Zeit der Entkopplung. Sie weist ein nahezu perfektes Schwarzkörper-Spektrum auf. Da sich die Strahlung vor der Entkopplung durch die häufigen Stöße der Photonen an Elektronen im thermodynamischen Gleichgewicht befand, ist diese Beobachtung eine eindrucksvolle Bestätigung des Urknall Modells. Durch die Expansion des Universums blieb das Schwarzkörper-Spektrum erhalten, lediglich die Temperatur ändert sich wie $T \propto a^{-1}$. Aktuelle Messungen durch den PLANCK Satelliten ergeben eine mittlere Temperatur von $T_0 = 2.725$ K.

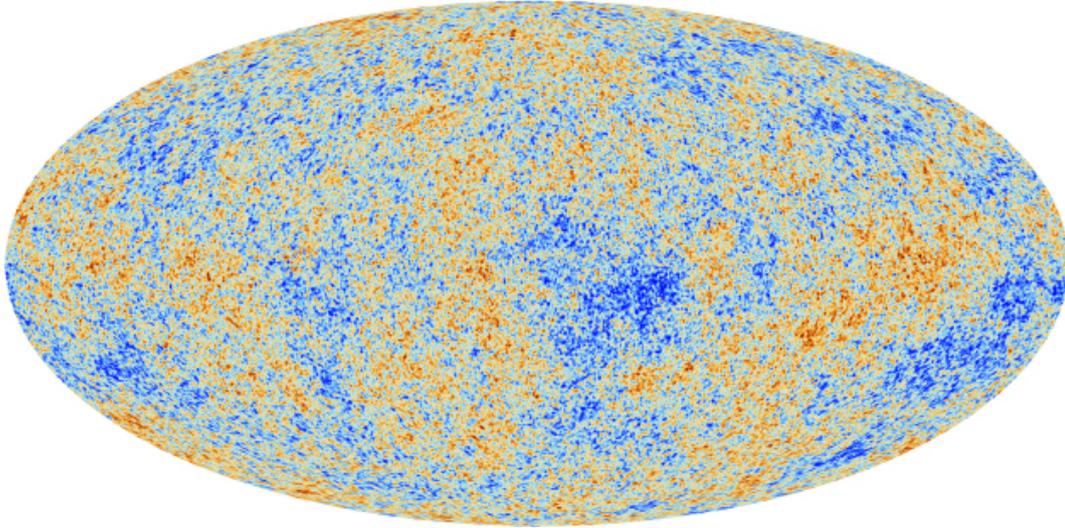


Abbildung 2.4.: Messung der Hintergrundstrahlung von PLANCK 2013. Die vordergründigen Effekte wie z.B. die Dipolanisotropie und der Einfluss unserer Galaxie wurden abgezogen. Diese Daten zeigen ein Bild des Universums als es etwa 380000 Jahre alt war. Die blauen Flecken sind Bereiche geringfügig niedrigerer Temperatur, die roten sind Bereiche geringfügig höherer Temperatur.

Die Strahlung kann aus allen Richtungen beobachtet werden, was durch das Kosmologische Prinzip begründet werden kann. Sie ist auch nahezu isotrop, d.h. sie weist in jeder Richtung dieselbe Temperatur auf, mit Abweichungen von $\Delta T/T \sim 10^{-5}$ K. Abb. 2.4 zeigt die Anisotropien, gemessen von PLANCK. Zur theoretischen Beschreibung der Anisotropien wird die Temperatur nach Kugelflächenfunktionen entwickelt.

$$\frac{T(\theta, \phi)}{T_0} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_l^m(\theta, \phi) \quad (2.47)$$

Die Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen ist das Analogon zur Fourierentwicklung auf einer Kugeloberfläche. Genau wie bei einer Entwicklung in eine Fourierreihe gibt der Parameter l eine typische Größe der betrachteten Mode an. Der Zusammenhang mit dem Winkel θ auf der Sphäre ist $l \sim \frac{180^\circ}{\theta}$. Die dominanteste Anisotropie ist in der Dipolanisotropie $l = 1$.

$$\frac{T(\theta)}{T_0} \approx 1 + v \cos \theta \quad (2.48)$$

Diese wird interpretiert als ein Doppler Effekt, hervorgerufen durch unsere Bewegung relativ zu der Hintergrundstrahlung. Aktuelle Messungen von PLANCK ergeben eine Geschwindigkeit von ~ 384 km/s⁻¹ relativ zum kosmischen Hintergrund [11]. Die höheren Multipole ($l \geq 2$) wurden durch kosmologische Störungen bei der Entkopplung erzeugt.

Die beobachtete Verteilung der Anisotropien ist eine Realisierung der zufälligen Prozesse, die sie erzeugt haben. Daher muss die Analyse mit statistischen Mitteln erfolgen. Die a_{lm} 's enthalten die gesamte Information des Temperaturfeldes. Das Leistungsspektrum ist durch ihre Varianz gegeben

$$\langle a_{lm}^* a_{l'm'} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l \quad (2.49)$$

Das Leistungsspektrum C_l ist unabhängig von m , da die statistischen Eigenschaften des Temperaturfeldes nicht von der Orientierung des Koordinatensystem abhängen können. Diese Annahme wird *statistische Isotropie* genannt. Daher ist das Leistungsspektrum gegeben durch

$$C_l = \frac{1}{2l + 1} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{lm}|^2. \quad (2.50)$$

Wir können nur einen einzigen kosmischen Hintergrund beobachten, daher gibt es nur einen Datensatz der a_{lm} 's. D.h. es gibt nur begrenzte statistische Information zu jedem Multipol l , nämlich $2l + 1$ Werte. Diese intrinsische Unsicherheit heißt *Kosmische Varianz* und ist besonders wichtig bei kleinen l . Abb. 2.5 zeigt das gemessene Leistungsspektrum

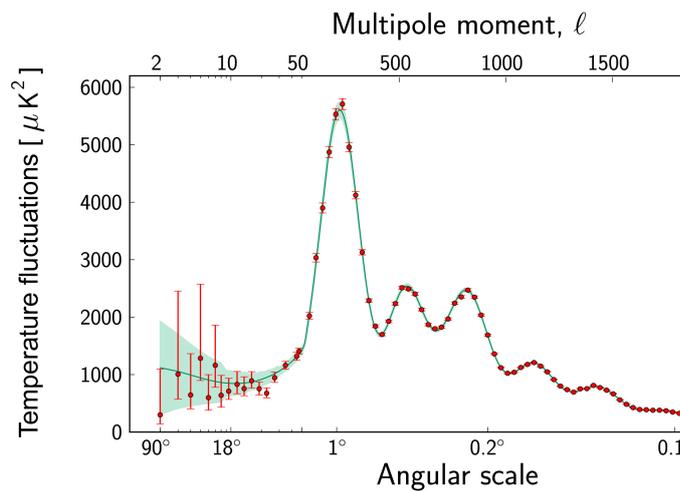


Abbildung 2.5.: Das von PLANCK gemessene Leistungsspektrum. Aufgetragen ist $\frac{l(l+1)}{2\pi} C_l$ gegen l und θ . An den Fehlerbalken ist der Effekt der Kosmischen Varianz deutlich zu erkennen. Die grüne Kurve stellt den besten Fit nach dem Standard Modell der Kosmologie dar.

Eine ähnliche statistische Behandlung lässt sich auch für die Polarisation durchführen, wie in Abschnitt 4 dargestellt ist.

3 Leistungsspektrum primordialer Gravitationswellen

Primordiale Gravitationswellen sind aus Quantenfluktuationen entstanden, welche durch die exponentielle Expansion während der Inflation größer als der Horizont gedehnt wurden. Während der Inflationsphase ist die Raumzeit eine de-Sitter Raumzeit (Gl. 2.38). Die definierende Eigenschaft der Inflation ist die beschleunigte Expansion des Raums. Dadurch schrumpft der mitbewegte Hubble radius, welcher die maximale Entfernung angibt, über die kausale Prozesse stattfinden können. Die mitbewegte Wellenlänge einer Störung bleibt jedoch konstant. Das führt dazu, dass eine Mode irgendwann größer ist als der Horizont. Nach dem Austritt aus dem Horizont friert die Mode ein, da sie durch keinen kausalen Prozess mehr beeinflusst werden kann. Wellenberg und Wellental können nicht mehr miteinander kommunizieren. Nach dem Ende der Inflation wächst der mitbewegte Hubble radius wieder, und die Mode tritt wieder in den Horizont ein. Diese makroskopischen Störungen bilden die Quellen für die Anisotropien in der Hintergrundstrahlung. Im Falle von (skalaren) Dichtefluktuationen bilden sie im späteren Universum die Grundlage zur Entwicklung von Galaxien. In Abb. 3.1 ist die Entwicklung des Horizonts dargestellt. Durch diesen Mechanismus führt die Inflation dazu, dass aus Quantenfluktuationen makroskopische Fluktuationen werden.

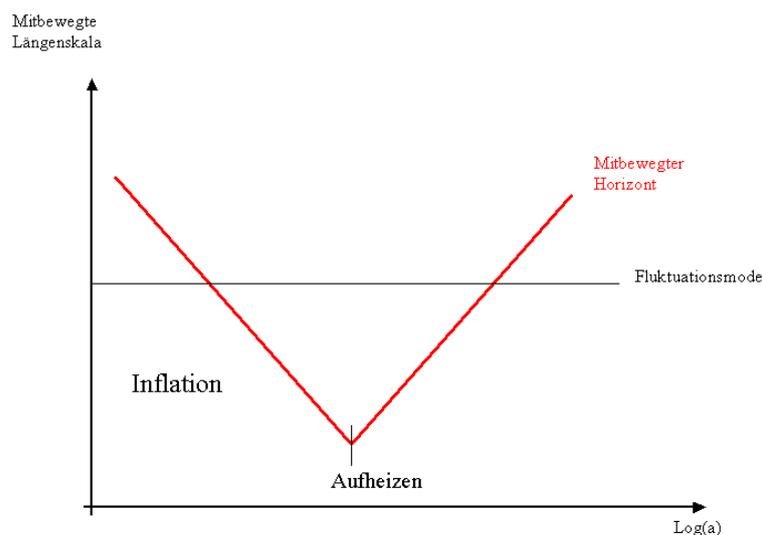


Abbildung 3.1.: Mitbewegte Längenskala logarithmisch aufgetragen über der Zeit. Die rote Linie beschreibt den mitbewegten Hubble radius. Dieser wird kleiner während der Inflationsphase. Das Ende der Inflation, welches durch den Prozess des Aufheizens bestimmt ist, markiert den Umkehrpunkt des Hubble radius. Ab diesem Ereignis beginnt die Entwicklung nach dem FRW Modell.

Um das Leistungsspektrum dieser primordialen Fluktuationen zu bestimmen, wird zunächst eine Bewegungsgleichung für die Amplituden der Gravitationswelle hergeleitet. Anschließend wird der Vakuumerwartungswert des quantisierten Feldes in der de-Sitter Raumzeit berechnet. Es existiert zwar noch keine vollständige Quantentheorie der Gravitation. Für kleine Amplituden können die Gravitationswellen jedoch als Störung eines klassischen Hintergrunds betrachtet werden, und somit mit den Methoden der Quantenfeldtheorie quantisiert werden.

Im Folgenden wird eine Gravitationswelle mit Wellenvektor \vec{k} , die sich in x_3 -Richtung ausbreitet, be-

trachtet. Da sie als kleine Störung der flachen FRW-Metrik betrachtet wird, kann in erster Ordnung gerechnet werden. Die gestörte FRW-Metrik ist gegeben durch $g_{00} = -1$, $g_{0i} = 0$ und

$$g_{ij} = a^2(\delta_{ij} + h_{ij}), \quad g^{ij} = a^{-2}(\delta^{ij} - h^{ij}) + O(h^2) \quad (3.1)$$

Die Störung hat in der transversen, spurfreien Eichung folgende Form

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{ik(z-\tau)} \quad (3.2)$$

Um die Bewegungsgleichungen für die Amplituden zu gewinnen, müssen die Einsteingleichungen im Vakuum, $R_{\mu\nu} = 0$, gelöst werden. Da die Störung als klein angenommen wird, d.h. $|h_{ij}| \ll 1$, kann der Ricci Tensor bis zu erster Ordnung in h_{ij} entwickelt werden. Es müssen also die linearisierten Einsteingleichungen, $\delta R_{\mu\nu} = 0$, gelöst werden. Die in Anhang A.1 berechneten Christoffelsymbole sind in erster Ordnung

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{i0}^0 = 0 \quad (3.3)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \dot{a}a(\delta_{ij} + h_{ij}) + \frac{1}{2}a^2\partial_0 h_{ij} = Hg_{ij} + \frac{a^2}{2}\partial_0 h_{ij} \quad (3.4)$$

$$\Gamma_{0j}^i = H\delta_{ij} + \partial_0 h_{ij} \quad (3.5)$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{i}{2}(k_j h_{ki} + k_k h_{ij} - k_i h_{jk}) \quad (3.6)$$

Daraus lassen sich die Störungen des Ricci-Tensors in erster Ordnung berechnen (siehe Anhang A.2). Die Zeit-Zeit- und Raum-Zeit-Komponenten ändern sich nicht in erster Ordnung. Die Störungen sind

$$\delta R_{00} = 0, \quad \delta R_{0i} = 0, \quad \delta R_{ij} = \frac{3}{2}a^2 H \partial_0 h_{ij} + \frac{a^2}{2} \partial_0^2 h_{ij} + \frac{k^2}{2} h_{ij} \quad (3.7)$$

Die Einstein-Gleichungen für die Tensorstörung sind somit

$$a^2 \partial_0^2 h_\alpha + 3a^2 H \partial_0 h_\alpha + k^2 h_\alpha = 0 \quad (3.8)$$

Dabei steht α für die beiden Polarisierungen $+$, \times . Für die weitere Betrachtung wird die konforme Zeit als Zeitkoordinate verwendet. Mit dem Zusammenhang $dt = a d\tau$ folgt für die Ableitungen der Störungskomponenten

$$\begin{aligned} \partial_0 h &= \frac{\dot{h}}{a} \\ \partial_0 \left(\frac{\dot{h}}{a} \right) &= \frac{\ddot{h}}{a^2} - \frac{\dot{a}\dot{h}}{a^3} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Die Bewegungsgleichung, ausgedrückt in konformer Zeit, lautet somit

$$\ddot{h}_\alpha + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}_\alpha + k^2 h_\alpha = 0. \quad (3.10)$$

Diese Bewegungsgleichung gilt für einen beliebigen Skalenfaktor a . Um das primordiale Spektrum von Gravitationswellen zu berechnen, muss diese Gleichung in der inflationären quasi-de-Sitter Phase ausgewertet werden. Dazu wird die Gleichung zunächst etwas vereinfacht, indem eine neue Feldvariable \tilde{h} über folgende Definition eingeführt wird:

$$h = \sqrt{16\pi G} \frac{\tilde{h}}{a} \quad (3.11)$$

$$\dot{h} = \sqrt{16\pi G} \left(\frac{\dot{\tilde{h}}}{a} - \frac{\dot{a}\tilde{h}}{a^2} \right) \quad (3.12)$$

$$\ddot{h} = \sqrt{16\pi G} \left(\frac{\ddot{\tilde{h}}}{a} - \frac{2\dot{a}\dot{\tilde{h}}}{a^2} - \frac{\ddot{a}\tilde{h}}{a^2} + \frac{2\dot{a}^2\tilde{h}}{a^3} \right) \quad (3.13)$$

Der Vorfaktor $\sqrt{16\pi G}$ lässt sich aus der Wirkung für das Feld h herleiten. Die Herleitung wird hier jedoch nicht durchgeführt, der Faktor ist aus [7] übernommen. Einsetzen in Gl. (3.10) führt zur *Mukhanov-Sasaki-Gleichung*

$$\ddot{\tilde{h}} + \left(k^2 - \frac{\ddot{a}}{a} \right) \tilde{h} = 0 \quad (3.14)$$

Damit ist der Dämpfungsterm in Gl. (3.10) verschwunden und es bleibt die Gleichung eines harmonischen Oszillators. Der Skalenfaktor a wird durch die Hintergrundraumzeit bestimmt. In der quasi-de-Sitter Raumzeit lässt sich der Term \ddot{a}/a in Gl. (3.14) mithilfe von Gl. (2.37) wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} &= \frac{1}{a} \frac{d}{d\tau} (a^2 H) \\ &\approx -\frac{1}{a} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{a}{\tau} \right) \\ &\approx \frac{2}{\tau^2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Durch das Verschwinden des Dämpfungsterms ($\propto \dot{h}$) kann das Feld \tilde{h} analog zu einem harmonischen Oszillator quantisiert werden. Der Feldoperator lautet

$$\tilde{h}(\tau, \vec{k}) = v(\vec{k}, \tau) \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger + v^*(\vec{k}, \tau) \hat{a}_{\vec{k}}, \quad (3.16)$$

wobei die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren den bosonischen Kommutatorrelationen $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ genügen. Für die Modenfunktion $v(\vec{k}, \tau)$ gilt die *Mukhanov-Sasaki-Gleichung* in de-Sitter Raumzeit,

$$\ddot{v}_{\vec{k}} + \omega(\tau)^2 v_{\vec{k}} = 0, \quad \omega(\eta)^2 = k^2 - \frac{2}{\tau^2}. \quad (3.17)$$

Die Quantenfluktuationen in der Gravitationswelle sind gegeben durch den Vakuumerwartungswert $\langle 0 | \tilde{h}^\dagger \tilde{h} | 0 \rangle$. An dieser Stelle kommt es nun zu einem Problem mit der Wahl des Vakuums. In einer zeitabhängigen Raumzeit wie der de-Sitter Raumzeit lässt sich die Zerlegung eines Feldoperators in positive und negative Frequenzen nicht auf eindeutige Weise durchführen, was insbesondere bedeutet, dass es keine eindeutige Definition des Vakuums gibt. Um mit der Berechnung des Leistungsspektrums fortzufahren muss also ein geeignetes Vakuum gewählt werden. Durch den schrumpfenden Horizont während der Inflation ist es eine physikalisch sinnvolle Annahme, dass sich für $\tau \rightarrow -\infty$ alle Moden weit innerhalb des Horizonts befanden. Dadurch kann in diesem Grenzfall das Vakuum der Minkowski Raumzeit gewählt werden. Die Modenfunktion lautet somit zu frühen Zeiten

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} v_{\vec{k}}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\tau}. \quad (3.18)$$

Diese Festlegung nennt man *Bunch Davies Vakuum*. Mit dieser Anfangsbedingung ist die Lösung von Gl. (3.14) gegeben durch

$$v_k(\tau) = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau} \right). \quad (3.19)$$

Das primordiale Leistungsspektrum gibt die Amplitude der Fluktuationen zu dem Zeitpunkt an an dem sie den Horizont verlassen. Verlässt eine Mode den Horizont, dann friert sie ein bis sie nach Ende der Inflation wieder in den Horizont eintritt. Für Moden, die größer sind als der Horizont, kann folgende Näherung gemacht werden.

$$\lim_{-k\tau \rightarrow 0} v_k(\tau) = -\frac{ie^{-ik\tau}}{\sqrt{2}k^{3/2}\tau} \quad (3.20)$$

Das eine Mode tatsächlich einfriert kann man zeigen, indem man mithilfe dieser Näherung die Amplitude der Störung berechnet. Nach Gl. (3.11) gilt $|h| \propto \left| \frac{v}{a} \right|$. Unter Verwendung von Gl. (2.38) für den Skalenfaktor folgt für die Amplitude außerhalb des Horizonts

$$|h| \propto \frac{H^2}{2k^3}. \quad (3.21)$$

Wie erwartet ist sie zeitunabhängig, also „eingefroren“.

Das *Leistungsspektrum* $P_h(k)$ der Fluktuationen ist definiert als

$$(3.22)$$

$$\langle 0 | \hat{h}^\dagger(\vec{k}, t) \hat{h}(\vec{k}', t) | 0 \rangle = (2\pi)^3 k^3 P_h(k) \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (3.23)$$

$$\langle 0 | \hat{h}^\dagger(\vec{k}, t) \hat{h}(\vec{k}', t) | 0 \rangle = \frac{16\pi G}{a^2} k^3 |v_k(\tau)|^2 (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (3.24)$$

wobei hier wieder die ursprünglichen Amplituden (Gl. 3.11) verwendet wurden. Die Quantenfluktuationen der Gravitationswellen sind gaußverteilt. Daher entwickeln sich die Moden unabhängig voneinander, was durch die Deltafunktion in Gl. (3.23) ausgedrückt wird. Der Faktor $(2\pi)^3$ kommt daher, dass ein Kontinuum an Wellenvektoren betrachtet wird. Durch den Faktor k^3 wird das Leistungsspektrum dimensionslos. Mit den Modenfunktionen (Gl. 3.20) folgt für das Leistungsspektrum

$$P_h(k) = 2 \cdot \frac{8\pi G}{a^2 \tau^2} = 16\pi G H^2 \quad (3.25)$$

Das primordiale Leistungsspektrum gibt die Amplitude einer Mode an, wenn ihre Wellenlänge aus dem Horizont ausgetreten ist. Daher wird der Hubbleparameter zum Zeitpunkt des Austritts aus dem Horizont, d.h. bei $H = ka$, ausgewertet. Der Faktor 2 berücksichtigt die beiden Polarisationen, die eine Gravitationswelle haben kann. Wie erwartet ist das Spektrum konstant, da die Moden außerhalb des Horizont nicht mehr durch kausale Prozesse beeinflusst werden können. Da der Hubble Parameter annähernd konstant ist, sagt die Inflation ein annähernd skaleninvariantes Spektrum voraus, d.h. P_h ist unabhängig von k . Die Rechnung wurde für eine de-Sitter Raumzeit durchgeführt, in der der Hubbleparameter konstant ist, und daher Skaleninvarianz gegeben ist. Während der Slow Roll Inflation gilt das jedoch nur annähernd. Das Spektrum wird durch einen Index n_T parametrisiert, der von dem Slow Roll Parameter ϵ abhängt [3].

$$P_h(k) \propto k^{n_T}, \quad n_T = -2\epsilon \quad (3.26)$$

Da während der Inflationsphase $H^2 \propto V$ ist, kann durch Messen des primordialen Leistungsspektrums auf die Energieskala der Inflation geschlossen werden.

4 Polarisation der Hintergrundstrahlung

Die Polarisation der kosmischen Hintergrundstrahlung wird durch Streuung von Photonen an Elektronen erzeugt. Dies konnte jedoch nur während eines relativ kurzen Intervalls geschehen. Während die Photonen und Baryonen ein dichtes Plasma bildeten, wurden Anisotropien in der Strahlung sofort wieder ausgeglichen. Erst als, während der Rekombination, die mittlere freie Weglänge der Photonen zunahm konnten Anisotropien wachsen. In dieser Phase nahm aber auch die Zahl der freien Elektronen ab. Polarisierte Strahlung konnte deshalb nur in einem relativ kurzen Zeitraum gegen Ende der Rekombination erzeugt werden. Die Photonen wechselwirken mit den Elektronen mittels *Thomson-Streuung*. Das ist der niederenergetische Grenzfall der Compton-Streuung. Die Betrachtung dieses Grenzfalles ist gerechtfertigt, da die Rekombination erst beginnen konnte, als die Energie der Photonen die Ionisierungsenergie von Wasserstoff, 13.6 eV, unterschritten. Zur Zeit der Entkopplung betrug die Energie der Photonen ~ 1 eV. Verglichen damit beträgt die Ruheenergie eines Elektrons 511 keV. Der Thomson-Wirkungsquerschnitt lautet $\sigma_T = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4} \approx 6.65 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2$. An der Massenabhängigkeit sieht man, dass die Streuung an Protonen vernachlässigbar ist.

Im Folgenden wird die Beschreibung der Polarisation der Hintergrundstrahlung erarbeitet. Die Beschreibung des Polarisationszustandes eines Strahlungsfeldes erfolgt mithilfe der sog. Stokes-Parameter [9]. Bewegt sich beispielsweise eine elektromagnetische Welle in z -Richtung,

$$E_x = A_x \cos(\omega t - \phi_x), \quad E_y = A_y \cos(\omega t - \phi_y), \quad (4.1)$$

so lauten die Stokes-Parameter:

$$I = A_x^2 + A_y^2 \quad (4.2)$$

$$Q = A_x^2 - A_y^2 \quad (4.3)$$

$$U = 2A_x A_y \cos(\phi_x - \phi_y) \quad (4.4)$$

$$V = 2A_x A_y \sin(\phi_x - \phi_y) \quad (4.5)$$

I ist hierbei die gesamte Intensität der Welle, die Parameter Q und U beschreiben lineare Polarisation, und sind die für diese Arbeit Wichtigen. Der letzte Parameter V beschreibt zirkuläre Polarisation, wird aber hier nicht weiter verwendet, da Thomson-Streuung keine zirkuläre Polarisation induziert. Die Parameter Q und U transformieren sich unter einer Drehung des Koordinatensystems um den Winkel α um die z -Achse wie

$$\begin{pmatrix} Q' \\ U' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ U \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Sie bilden daher die Komponenten eines symmetrischen, spurfreien 2×2 Polarisationstensors.

Um das Polarisationsfeld auf der Himmelskugel zu beschreiben, werden die üblichen sphärischen Koordinaten verwendet. Der metrische Tensor lautet

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (4.7)$$

und die nicht verschwindenden Christoffelsymbole sind

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \cot \theta. \quad (4.8)$$

In diesen Koordinaten lautet der symmetrische, spurfreie Polarisationstensor:

$$P_{ab} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Q & U \sin \theta \\ U \sin \theta & -Q \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

In 2 Dimensionen kann ein symmetrisches, spurfreies 2×2 Tensorfeld zerlegt werden in den rotationsfreien „Gradienten“ eines Skalarfeldes P_E und in die divergenzfreie „Rotation“ eines weiteren Skalarfeldes P_B .

$$P_{ab} = \left(\nabla_a \nabla_b - \frac{1}{2} g_{ab} \nabla^c \nabla_c \right) P_E + \frac{1}{2} \left(\epsilon_b^c \nabla_a \nabla_c + \epsilon_a^c \nabla_b \nabla_c \right) P_B \quad (4.10)$$

In Abb. 4.1 sind die E - und B Moden dargestellt. Der Gradiententeil ist symmetrisch, da partielle Ableitungen kommutieren und der affine Zusammenhang torsionsfrei ist. Zusätzlich kann jedes Skalarfeld auf der Sphäre nach Kugelfunktionen entwickelt werden. Daraus folgt, dass der Polarisationsstensor entwickelt werden kann nach „Gradienten“ und „Rotationen“ von Kugelflächenfunktionen.

$$P_{ab} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[a_{(lm)}^E Y_{(lm)ab}^E + a_{(lm)}^B Y_{(lm)ab}^B \right] \quad (4.11)$$

Die Tensor-Kugelflächenfunktionen ergeben sich aus den üblichen, skalaren $Y_{lm}(\hat{n})$ durch Anwenden der Differentialoperatoren aus Gl. (4.10). \hat{n} bezeichnet hier den Einheitsvektor in Richtung (θ, ϕ) .

$$Y_{(lm)ab}^E(\hat{n}) = N_l \left(\nabla_a \nabla_b - \frac{1}{2} g_{ab} \nabla^c \nabla_c \right) Y_{lm}(\hat{n}) \quad (4.12)$$

$$Y_{(lm)ab}^B(\hat{n}) = \frac{N_l}{2} \left(\epsilon_b^c \nabla_a \nabla_c + \epsilon_a^c \nabla_b \nabla_c \right) Y_{lm}(\hat{n}) \quad (4.13)$$

Der Faktor $N_l = \sqrt{\frac{2(l-2)!}{(l+2)!}}$ dient der Orthonormierung, sodass

$$\int d\hat{n} Y_{(lm)ab}^{E*} Y_{(l'm')}^E = \int d\hat{n} Y_{(lm)ab}^{B*} Y_{(l'm')}^B = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (4.14)$$

$$\int d\hat{n} Y_{(lm)ab}^{E*} Y_{(l'm')}^B = 0 \quad (4.15)$$

gilt. Die Entwicklungskoeffizienten in Gl. 4.10 sind dann gegeben durch

$$a_{(lm)}^E = N_l \int d\hat{n} Y_{(lm)}^*(\hat{n}) \nabla^a \nabla^b P_{ab}(\hat{n}) \quad (4.16)$$

$$a_{(lm)}^B = N_l \int d\hat{n} Y_{(lm)}^*(\hat{n}) \epsilon_c^b \nabla^a \nabla^c P_{ab}(\hat{n}), \quad (4.17)$$

wobei noch zweimal partiell integriert wurde. Genau wie bei der Beschreibung der Temperaturanisotropien (Abschnitt 2.4) kann auch für die Polarisation ein Leistungsspektrum gewonnen werden.

$$C_l^X = \frac{1}{2l+1} \sum_{l=0}^{\infty} |a_{lm}^X|^2, \quad X \in \{E, B\} \quad (4.18)$$

Das Ziel dieser Arbeit ist es zu zeigen, dass primordiale Gravitationswellen, im Gegensatz zu skalaren Störungen, B -Moden Polarisation erzeugen. Daher wird nur der Koeffizient $a_{(lm)}^B$ der B -Mode betrachtet, und nicht das gesamte Leistungsspektrum. Im folgenden Abschnitt wird dieser Koeffizient für den Fall einer ebenen Gravitationswelle berechnet.

E-Mode

B-Mode

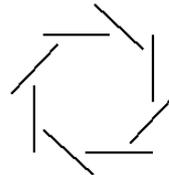
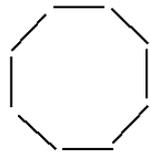
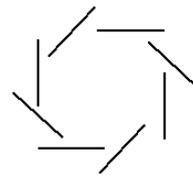
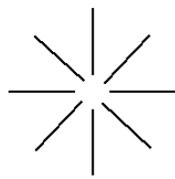


Abbildung 4.1.: Darstellung der reinen *E*- und *B*-Moden. Anhand dieser Abbildungen kann man die unterschiedlichen Symmetrien der beiden Moden erkennen. Unter einer Paritätstransformation ändert sich die *B*-Mode um ein Vorzeichen, die *E*-Mode ändert sich nicht. [4]

5 Polarisierung durch eine ebene Gravitationswelle

Im Folgenden wird die Photonen-Polarisation, die von einer einzigen, ebenen Gravitationswelle mit (+) Polarisation erzeugt wird, betrachtet. Die Rechnung für eine Welle mit \times Polarisation verläuft analog. Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass die z -Achse parallel zu dem Wellenvektor \vec{k} der Gravitationswelle ist. Die Metrik lautet somit

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[-d\tau^2 + (1 + h_+) dx^2 + 1(1 - h_+) dy^2 + dz^2 \right]. \quad (5.1)$$

5.1 Effekt der Gravitationswelle

Eine Gravitationswelle ist eine periodische Streckung und Stauchung des Raumes. Dadurch werden Intensitätsvariationen im elektromagnetischen Feld induziert. Im Folgenden wird die Frequenzänderung eines Photons betrachtet, das sich in der gestörten FRW Metrik (Gl. 5.1) bewegt.

Die Energie eines Photons mit Viererimpuls P^μ , die ein Beobachter mit Vierer-Geschwindigkeit U^μ misst, ist

$$E = -P_\mu U^\mu \quad (5.2)$$

Aus der Normierungsbedingung $g_{\mu\nu} U^\nu U^\mu = -1$ folgt für die Vierer-Geschwindigkeit eines mitbewegten Beobachters

$$U^\mu = (a^{-1}, 0, 0, 0) \quad (5.3)$$

Die Zeitkomponente des Vierer-Impulses hängt dann wie folgt mit der Energie zusammen:

$$\begin{aligned} E &= g_{00} P^0 U^0 \\ &= -a P^0 \\ \Rightarrow P^0 &= -\frac{E}{a} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Um die Frequenzänderung des Photons zu bestimmen, muss die 0-Komponente der Geodätengleichung für eine lichtartige Bewegung betrachtet werden. Die Bedingung, dass die Bewegung lichtartig ist, lautet $P_\mu P^\mu = 0$. Der Bahnparameter λ kann so gewählt werden, dass gilt

$$P^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \text{ und damit, } \frac{d}{d\lambda} = \frac{d\tau}{d\lambda} \frac{d}{d\tau} = P^0 \frac{d}{d\tau} \quad (5.5)$$

Damit lautet die Geodätengleichung für die 0-Komponente

$$P^0 \frac{dP^0}{d\tau} = -\Gamma_{\alpha\beta}^0 P^\alpha P^\beta. \quad (5.6)$$

Die benötigten Christoffel-Symbole für diese Metrik (Gl. 5.1) sind

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{\dot{a}}{a} \quad (5.7)$$

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{\dot{a}}{a} (1 + h_+) + \frac{1}{2} \dot{h}_+ \quad (5.8)$$

$$\Gamma_{22}^0 = \frac{\dot{a}}{a} (1 - h_+) - \frac{1}{2} \dot{h}_+ \quad (5.9)$$

$$\Gamma_{33}^0 = \frac{\dot{a}}{a} \quad (5.10)$$

Einsetzen der Christoffel Symbole in Gl. 5.6 und Ausnutzen der Null-Bedingung ergeben

$$P^0 \dot{P}^0 = -\frac{\dot{a}}{a} \left[(P^0)^2 + \underbrace{(1+h_+)(P^1)^2 + (1-h_+)(P^2)^2 + (P^3)^2}_{=(P^0)^2} \right] - \frac{1}{2} \dot{h}_+ [(P^1)^2 - (P^2)^2]$$

$$\dot{P}^0 = -2\frac{\dot{a}}{a} P^0 - \frac{1}{2P^0} \dot{h}_+ [(P^1)^2 - (P^2)^2]$$

Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt die Energieabnahme durch die Expansion der ungestörten Metrik, der zweite Term beschreibt den Einfluss der Gravitationswelle. Der erste Term verschwindet, wenn man die mitbewegte Energie $P_0 = g_{00}P^0 = aE$ betrachtet, da diese in der ungestörten Metrik konstant ist.

$$\begin{aligned} \frac{dP_0}{d\tau} &= P^0 \frac{dg_{00}}{d\tau} + g_{00} \frac{dP^0}{d\tau} \\ &= -2a\dot{a}P^0 - a^2 \left(-2\frac{\dot{a}}{a}P^0 - \frac{1}{2P^0} \dot{h}_+ [(P^1)^2 - (P^2)^2] \right) \\ &= \frac{a^2}{2P^0} \dot{h}_+ [(P^1)^2 - (P^2)^2] \\ \Rightarrow \frac{1}{P_0} \frac{dP_0}{d\tau} &= -\frac{1}{2} \dot{h}_+ [e_1^2 - e_2^2] \end{aligned}$$

Die Einheitsvektoren sind in sphärischen Koordinaten gegeben durch $e_1 = \sqrt{1-\mu^2} \cos \phi$, $e_2 = \sqrt{1-\mu^2} \sin \phi$. Sie beschreiben die Richtung des Photonimpulses. Dabei wurde die Variable $\mu = \cos \theta$ eingeführt. Es folgt für die Frequenzänderung

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{d\tau} = -\frac{1}{2} (1-\mu^2) \cos 2\phi e^{-ikz} \frac{d}{d\tau} (h e^{i\omega\tau}). \quad (5.11)$$

$p = P_0$ bezeichnet hier die mitbewegte Energie/Frequenz des Photons. In Abb. 5.1 ist die durch diese Gravitationswelle erzeugte Anisotropie dargestellt. Eine Stauchung des Raumes senkrecht zu \vec{k} führt zu einer Erhöhung der Frequenz der Photonen, während eine Streckung zu einer niedrigeren Frequenz führt. Diese Winkelverteilung hat die Form einer Quadrupolanisotropie $\propto Y_{22}$.

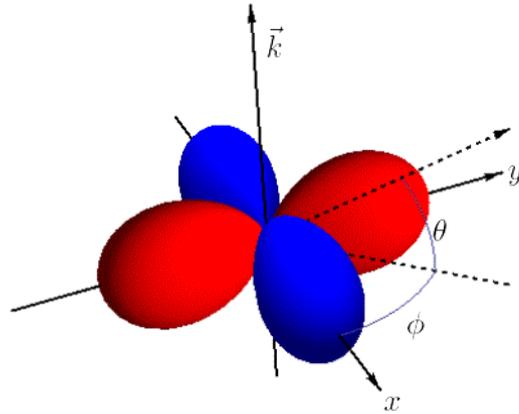


Abbildung 5.1.: Quadrupolanisotropie erzeugt durch eine Gravitationswelle mit Wellenvektor $\vec{k}||z$. Durch die Streckung und Stauchung des Raumes wird die Intensität aus den roten Bereichen verringert und die Intensität aus den blauen Bereichen erhöht.

5.2 Stoßfreie Boltzmann-Gleichung in erster Ordnung

Nachdem im vorigen Abschnitt ein einzelnes Photon betrachtet wurde soll jetzt eine Verteilung von Photonen betrachtet werden. Der Polarisationszustand der Photonen wird beschrieben durch einen Stokes-Vektor (I_θ, I_ϕ, U) . In einem homogenen Universum ist die Strahlung unpolarisiert und folgt einer Bose-Einstein-Verteilung.

$$f(p, \theta, \phi, \tau) = f_0(p) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_0(p) = \frac{1}{e^{p/T} - 1} \quad (5.12)$$

Die Stoßfreie Boltzmann-Gleichung in der Metrik Gl. (5.1) lautet

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial \tau} + n^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \tau} = 0 \quad (5.13)$$

Die Amplitude der Gravitationswelle wird als klein angenommen, daher kann das Problem störungstheoretisch angegangen werden. In einem Universum mit kleiner Inhomogenität wird Gl. (5.12) um eine kleine Korrektur ergänzt.

$$f(p, \theta, \phi, \tau) = f_0(p) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{f}_1(p, \theta, \phi, \tau) \quad (5.14)$$

Dieser Ansatz wird in die stoßfreie Boltzmann-Gleichung eingesetzt. Dabei werden nur Terme erster Ordnung berücksichtigt. Unter Benutzung von Gl. (5.11) ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \tau} &= -\frac{\partial f_0}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \tau} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= p \frac{\partial f_0}{\partial p} \frac{1}{2} (1 - \mu^2) \cos 2\phi e^{-ikz} \frac{d}{d\tau} (h e^{i\omega\tau}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (5.15)$$

Eine Gravitationswelle erzeugt also eine Störung der Verteilung f_0 proportional zu

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 - \mu^2) \cos 2\phi \quad (5.16)$$

Die Gravitationswelle alleine erzeugt noch keine Polarisation; für die beiden Stokesparameter Q und U gilt nach wie vor $Q, U = 0$. Im nächsten Abschnitt wird der Effekt der Thomsonstreuung auf eine Verteilung dieser Form betrachtet.

5.3 Thomson-Streuung

Ausgehend von der Anisotropie, die durch eine Gravitationswelle erzeugt wird (Gl. 5.16), wird durch Streuung an freien Elektronen die Hintergrundstrahlung polarisiert. Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Thomson Streuung lautet:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3\sigma_T}{8\pi} |\epsilon' \cdot \epsilon|^2 \quad (5.17)$$

Die Vektoren ϵ und ϵ' beschreiben die Polarisation der einlaufenden und auslaufenden Welle. Zum Beispiel ergibt sich für eine einlaufende, unpolarisierte Welle (Stokes-Vektor $(I/2, I/2, 0)$), die in z -Richtung gestreut wird, folgender Polarisationszustand:

$$\begin{aligned}I' &= \frac{3\sigma_T}{16\pi} I (1 + \cos^2 \theta) \\ Q' &= \frac{3\sigma_T}{16\pi} I \sin^2 \theta \\ U' &= 0\end{aligned}$$

Lineare Polarisation wird erzeugt, wenn die einfallende Strahlung eine Quadrupolverteilung aufweist. In Abb. 5.2 ist die Streuung einer Quadrupolverteilung skizziert.

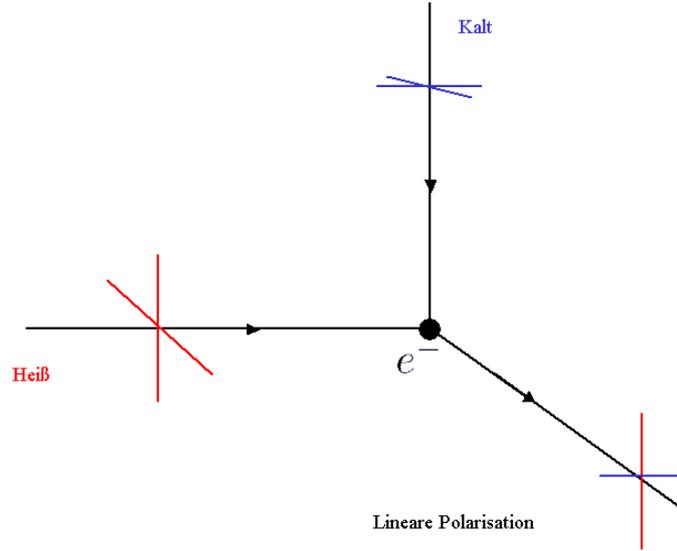


Abbildung 5.2.: Liegt in dem Strahlungsfeld eine Quadrupol Anisotropie vor, kann durch Thomson-Streuung lineare Polarisation erzeugt werden.

Die Transformation eines beliebigen Polarisationszustandes (I_θ, I_ϕ, U) in einen gestreuten Zustand (I'_θ, I'_ϕ, U') erfolgt mithilfe der Streumatrix P . Eine vollständige Herleitung dieser Matrix ist in [9] zu finden. Sie lautet:

$$P = Q(P_0 + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu'^2} P_1 + P_2) \quad (5.18)$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} \mu^2 \mu'^2 + 2(1 - \mu^2)(1 - \mu'^2) & 0 & 0 \\ \mu'^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 4\mu\mu' \cos(\phi' - \phi) & 0 & 2\mu \sin(\phi' - \phi) \\ 0 & 0 & 0 \\ -2\mu' \sin(\phi' - \phi) & 0 & \cos(\phi' - \phi) \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} \mu^2 \mu'^2 \cos 2(\phi' - \phi) & -\mu^2 \cos 2(\phi' - \phi) & \mu^2 \mu' \sin 2(\phi' - \phi) \\ -\mu'^2 \cos 2(\phi' - \phi) & \cos 2(\phi' - \phi) & -\mu' \sin 2(\phi' - \phi) \\ -\mu\mu'^2 \sin 2(\phi' - \phi) & \mu \sin 2(\phi' - \phi) & \mu\mu' \cos(\phi' - \phi) \end{pmatrix}.$$

Die Änderung eines Polarisationszustandes $I'(\mu', \phi')$ durch Streuung ist damit gegeben durch

$$I(\mu, \phi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 d\mu' \int_0^{2\pi} d\phi P(\mu, \phi, \mu', \phi') I'(\mu', \phi'). \quad (5.19)$$

Die Quadrupolverteilung Gl. (5.16), welche durch die Gravitationswelle erzeugt wurde, wird durch Gl. (5.19) in eine Linearkombination von sich selbst und

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \mu^2) \cos 2\phi \\ -(1 + \mu^2) \cos 2\phi \\ 4\mu \sin 2\phi \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

gestreut. Durch Zeitumkehrinvarianz der Thomson-Streuung gilt auch, dass \mathbf{b} ebenfalls in eine Linearkombination von \mathbf{a} und \mathbf{b} gestreut wird. \mathbf{a} und \mathbf{b} bilden somit ein Basissystem für die Störung \mathbf{f}_1 . Die Photonverteilung kann damit allgemein geschrieben werden als

$$\mathbf{f} = f_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{i(kz - \omega\tau)} \mathbf{f}_1 \quad (5.21)$$

mit

$$\mathbf{f}_1 = \alpha(p, \mu, \tau) \mathbf{a} + \beta(p, \mu, \tau) \mathbf{b} \quad (5.22)$$

Die Boltzmann-Gleichung ist damit eine Bestimmungsgleichung für α und β .

5.4 Die Boltzmann-Gleichung mit Streuterm und Polarisationsstensor

Um die Effekte von Gravitationswelle und Thomson Streuung zu berücksichtigen, wird zu Gl. (5.13) ein Stoßterm hinzugefügt. Die volle Boltzmann-Gleichung lautet:

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial \tau} + n^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \tau} = -g(f - I) \quad (5.23)$$

I ist dabei das Streuintegral Gl. (5.19) und $g = \sigma_T n_e a$ ist die Streurrate. Neben der *Polarisation* β , die für unpolarisiertes Licht verschwindet, kann noch eine *Anisotropie* $\xi = \alpha + \beta$ definiert werden, die verschwindet, wenn die Strahlung homogen ist. Nach Einsetzen des Ansatzes Gl. (5.22) in Gl. (5.23) ergeben sich folgende gekoppelte Differentialgleichungen für ξ und β . (vollständige Rechnung in Anhang B)

$$\dot{\xi} + [ik(1 - \mu) + g] \xi = p \frac{\partial f_0}{\partial p} (\dot{h} + ikh), \quad (5.24)$$

$$\dot{\beta} + [ik(1 - \mu) + g] \beta = g \frac{3}{16} \int_{-1}^1 d\mu' \left(\beta(1 + \mu'^2)^2 - \frac{1}{2} \xi(1 - \mu'^2)^2 \right) \quad (5.25)$$

Die erste dieser Gleichungen beschreibt die Erzeugung einer Anisotropie ξ durch die Gravitationswelle. Durch die zweite Gleichung wird daraus eine Polarisation β erzeugt. Die Polarisierungen Q und U lassen sich dann aus der Lösung wie folgt bestimmen.

$$Q(\mu, \phi) = (1 + \mu^2) \cos 2\phi \beta(\mu, \tau) \quad (5.26)$$

$$U(\mu, \phi) = 2\mu \sin 2\phi \beta(\mu, \tau) \quad (5.27)$$

Der Polarisationsstensor mit kontravarianten Indizes lautet damit

$$P^{ab} = \frac{1}{2} \beta(\mu, \tau) \begin{pmatrix} (1 + \cos^2 \theta) \cos 2\phi & -2 \cot \theta \sin 2\phi \\ -2 \cot \theta \sin 2\phi & -\frac{(1 + \cos^2 \theta)}{\sin^2 \theta} \cos 2\phi \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

Der Polarisationsstensor wird deshalb mit kontravarianten Indizes angegeben, um die Berechnung der kovarianten Ableitungen zu erleichtern. Mit Gl. (4.17) folgt für den magnetischen Teil der Polarisation folgender Ausdruck

$$a_{(lm)}^B = N_l \int d\hat{n} Y_{(lm)}^*(\hat{n}) \sin 2\phi \left[6\beta \left(2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} - 3 \cos \theta \right) + \frac{d\beta}{d\theta} \left(\frac{11}{\sin \theta} - 9 \sin \theta \right) + \frac{d^2 \beta}{d\theta^2} \cos \theta \right]. \quad (5.29)$$

Das ist der finale Ausdruck für der B -Mode in dieser Arbeit. Dieser Ausdruck zeigt, dass primordiale Gravitationswellen einen nichtverschwindenden Beitrag zur B -Moden Polarisation liefern. Zum Vergleich werden noch skalare Störungen betrachtet. Eine skalare Störungen mit Wellenvektor \vec{k} ist per Definition unabhängig vom Azimuth ϕ . Eine ähnliche Rechnung wie für die Tensorstörung zeigt, dass durch sie eine Intensitätsvariation proportional zu

$$\mathbf{a}_s = \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.30)$$

erzeugt wird. Diese wird dann durch Thomsonstreuung durch

$$\mathbf{b}_s = (1 - \mu^2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

erweitert. In Abb. 5.3 ist die Verteilung dargestellt.

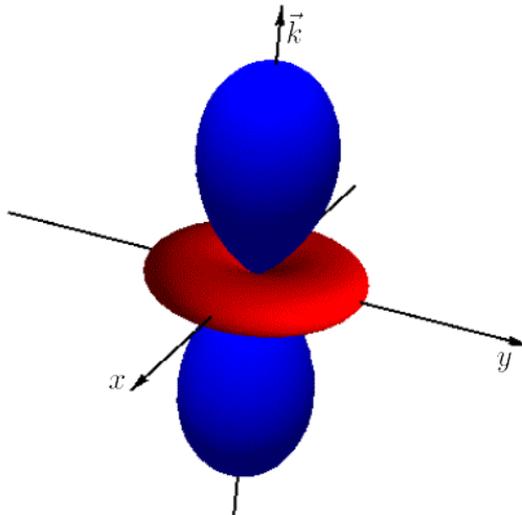


Abbildung 5.3.: Darstellung der Intensitätsvariationen, die durch eine skalare Störung mit Wellenvektor $\vec{k}||z$ erzeugt wird.

Der Polarisationstensor für eine skalare Störung lautet:

$$P_s^{ab} = \frac{1}{2} \beta(\mu, \tau) \sin^2 \theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sin^{-2} \theta \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

Da die Matrix diagonal ist, verschwinden die Koeffizienten der B -Mode

$$a_{(lm)}^B = 0. \quad (5.33)$$

Die Unabhängigkeit der skalaren Störung von ϕ ist bereits ausreichend, um die B -Mode zum Verschwinden zu bringen. Das bedeutet, dass B -Moden nicht durch skalare Störungen erzeugt werden können. Die Entdeckung einer B -Moden Polarisation in der kosmischen Hintergrundstrahlung ist also ein direkter Nachweis für primordiale Gravitationswellen.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde das Leistungsspektrum primordialer Gravitationswellen berechnet. Es wurde gezeigt, dass die Inflation ein annähernd skalenfreies Spektrum an Gravitationswellen erzeugt, d.h. Fluktuationen auf jeder Längenskala gleichermaßen anregt. Zur Berechnung der Polarisation wurde das Polarisationsfeld auf der Himmelskugel in E - und B - Moden zerlegt, und anschließend die B -Mode einer ebenen Gravitationswelle berechnet. Zum Vergleich wurde gezeigt, dass skalare Störungen keine B -Mode erzeugen.

Um das Leistungsspektrum der B -Moden Polarisation zu berechnen muss in einem nächsten Schritt das Gleichungssystem Gl. (5.24) gelöst werden. Dazu existieren numerische (CAMB [15]) und approximative analytische Methoden. Näheres zu analytischen Methoden findet sich bspw. in [12]. Dort werden die Anisotropie ξ und die Polarisation β nach Legendre Polynomen entwickelt, was zu einem unendlich großen Gleichungssystem für die Multipole ξ_l und β_l führt. Durch Näherungen wie der *tight coupling approximation*, in der die Streurate g vor der Entkopplung als groß angenommen wird, und durch Abschneiden bei geeignetem l , kann dieses Gleichungssystem näherungsweise gelöst werden. Zur Berücksichtigung eines stochastischen Hintergrundes von Gravitationswellen muss das resultierende Leistungsspektrum über alle Wellenzahlen integriert werden. Eine weitere Verbesserung der Näherung kann erzielt werden, indem man die endliche Dauer der Rekombination berücksichtigt. Effekte, die nach der Entkopplung auf die Strahlung eingewirkt haben, wie der Gravitationslinseneffekt an größeren Strukturen (Galaxien) müssen ebenfalls berücksichtigt werden.

Wird die Entdeckung bestätigt, so liefert sie tiefe Einblicke in das frühe Universum. Da die Amplitude der Gravitationswellen direkt proportional zu dem Inflationspotential ist, kann durch ihre Messung auf die Energieskala der Inflation geschlossen werden und damit können physikalische Prozesse unmittelbar vor der Inflationsphase (Grand Unification Phase) untersucht werden. Moderne Teilchenbeschleuniger sind nicht in der Lage, Prozesse bei diesen Energien ($\sim 10^{16}$ GeV) zu untersuchen. Mithilfe der Slow Roll Parameter ϵ und η kann die Amplitude auch dazu verwendet werden, die Form des Inflationspotentials zu untersuchen [14]. Wenn neben der Amplitude der Wellen auch ihr spektraler Index bestimmt werden kann, dann bietet die Konsistenzrelation $r = -8n_T$ [8] einen weiteren Test für die Inflation. Die Inflationstheorie erklärt die primordialen Gravitationswellen als verstärkte Quantenfluktuationen des Gravitationsfeldes. Daher liefert diese Entdeckung einen ersten experimentellen Hinweis auf eine Quantentheorie der Gravitation. Weitere Untersuchungen könnten eine Möglichkeit bieten, Theorien der Quantengravitation gegen experimentelle Daten zu testen. Die Detektion primordialer Gravitationswellen wäre somit eine der wichtigsten Entdeckungen der modernen Physik.

Es gibt jedoch auch Zweifel an den Ergebnissen. Am 20 Juni 2014 hat das BICEP2 Team in einer an die ursprüngliche Veröffentlichung zugefügten Notiz eingeräumt, dass der Beitrag polarisierter Synchrotronstrahlung aus der Emission von galaktischem Staub größer sein könnte als zunächst erwartet [13]. Möglicherweise könnte dadurch das Signal erklärt werden. Diese Strahlung entsteht durch die Bewegung geladener Teilchen in galaktischen Magnetfeldern. Um diese Bedenken auszuräumen oder zu bestätigen müssen weitere Messungen durchgeführt werden. Auch hat BICEP2 nur einen kleinen Teil des Himmels beobachtet. Für weitere Informationen muss auf Bestätigung durch den PLANCK Satelliten gewartet werden, der den gesamten Himmel nach B -Moden absucht.

A Berechnungen

Hier werden die Christoffelsymbole und die Komponenten des Ricci Tensors bis zur ersten Ordnung in der Tensorstörung berechnet.

A.1 Christoffelsymbole

Mit den Ableitungen der Metrik-Komponenten nach Zeit und Raum,

$$\begin{aligned}\partial_0 g_{ij} &= \partial [a^2(\delta_{ij} + h_{ij})] \\ &= 2\dot{a}a(\delta_{ij} + h_{ij}) + a^2\partial_0 h_{ij} \\ &= 2Hg_{ij} + a^2\partial_0 h_{ij}\end{aligned}\tag{A.1}$$

$$\partial_k g_{ij} = a^2\partial_k h_{ij}\tag{A.2}$$

lassen sich die nicht-trivialen Christoffel Symbole bis zur ersten Ordnung wie folgt berechnen. Dabei ist $H = \frac{\dot{a}}{a}$ der Hubble-Parameter.

$$\begin{aligned}\Gamma_{0j}^i &= \frac{1}{2}g^{i\lambda}(\partial_0 g_{j\lambda} + \partial_j g_{\lambda 0} - \partial_\lambda g_{0j}) \\ &= \frac{1}{2}g^{ik}\partial_0 g_{jk} \\ &= \frac{1}{2}g^{ik}(2Hg_{jk} + a^2\partial_0 h_{jk}) \\ &= H\delta_{ij} + \frac{1}{2}\partial_0 h_{ij}\end{aligned}\tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2}g^{0\lambda}(\partial_i g_{j\lambda} + \partial_j g_{\lambda i} - \partial_\lambda g_{ij}) \\ &= \frac{1}{2}\partial_0 g_{ij} \\ &= Hg_{ij} + \frac{a^2}{2}\partial_0 h_{ij}\end{aligned}\tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2}g^{i\lambda}(\partial_j g_{k\lambda} + \partial_k g_{\lambda j} - \partial_\lambda g_{jk}) \\ &= \frac{1}{2}\delta^{i\lambda}(\partial_j h_{k\lambda} + \partial_k h_{\lambda j} - \partial_\lambda h_{jk}) \\ &= \frac{i}{2}(k_j h_{ki} + k_k h_{ij} - k_i h_{jk})\end{aligned}\tag{A.5}$$

A.2 Ricci-Tensor

Der Ricci-Tensor ist gegeben durch:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\rho\mu}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\lambda.$$

Die Raum-Raum Komponente reduziert sich auf

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\partial_0 \Gamma_{\rho 0}^\rho - \Gamma_{0\lambda}^\rho \Gamma_{\rho 0}^\lambda \\ &= -\partial_0 \left(3H + \frac{1}{2} \partial_0 h_{ii} \right) - \left(H \delta_\lambda^\rho + \frac{1}{2} \partial_0 h_\lambda^\rho \right) \left(H \delta_\rho^\lambda + \frac{1}{2} \partial_0 h_\rho^\lambda \right). \end{aligned}$$

Der zweite Term in der letzten Zeile verschwindet, da die Störung spurfrei ist. Werden nur die Terme bis zur ersten Ordnung berücksichtigt, folgt

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3(\partial_0 H + H^2) \\ &= -3 \left(\partial_0 \frac{da/dt}{a} + \frac{(da/dt)^2}{a^2} \right) \\ &= -\frac{3}{a} \frac{d^2 a}{dt^2}. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Es gibt also keinen Beitrag erster Ordnung. Daher ist $\delta R_{00} = 0$.

Für die Berechnung der Raum-Zeit-Komponenten von Gl. A.6 werden die Terme im Folgenden einzeln betrachtet.

- Erster Term:

$$\begin{aligned} \partial_k \Gamma_{0j}^k &= \partial_k (H \delta_{jk} + \partial_0 h_{jk}) \\ &= i k_k \partial_0 h_{jk} = 0 \end{aligned}$$

Da die Welle in x_3 -Richtung läuft, aber $h_{j3} = 0$ ist.

- Zweiter Term:

$$\partial_j \Gamma_{k0}^k = \partial_j (H \delta_{kk} + \partial_0 h_{kk}) = 0$$

- Dritter Term:

$$\Gamma_{mk}^m \Gamma_{j0}^k = \frac{i}{2} \underbrace{(k_m h_{km} + k_k h_{mm} - k_m h_{mk})}_{=0} (H \delta_{kj} + \partial_0 h_{kj}) = 0$$

- Vierter Term:

$$\begin{aligned} \Gamma_{jk}^m \Gamma_{m0}^k &= \frac{i}{2} (k_j h_{km} + k_k h_{mj} - k_m h_{jk}) (H \delta_{km} + \partial_0 h_{km}) \\ &= \frac{iH}{2} (k_j h_{mm} + k_m h_{mj} - k_m h_{jm}) + O(h^2) = 0 \end{aligned}$$

Somit verschwinden alle Raum-Zeit Komponenten.

Die Berechnung der Raum-Raum Komponenten ist etwas aufwändiger. Auch hier werden die Terme einzeln betrachtet.

- Im ersten Term werden die Raum- und Zeitkomponenten in der Summe getrennt. Für die Raumkomponenten folgt

$$\begin{aligned}
\partial_\rho \Gamma_{ij}^\rho &= \partial_0 \Gamma_{ij}^0 + \partial_m \Gamma_{ij}^m \\
&= \partial_0 \Gamma_{ij}^0 + \partial_m \left(\frac{i}{2} (k_i h_{jm} + k_j h_{mi} - k_m h_{ij}) \right) \\
&= \partial_0 \Gamma_{ij}^0 - \frac{1}{2} k_i k_m h_{jm} - \frac{1}{2} k_j k_m h_{mi} + \frac{k^2}{2} h_{ij} \\
&= \partial_0 \Gamma_{ij}^0 + \frac{k^2}{2} h_{ij}
\end{aligned}$$

Die Zeitkomponente der Summe ergibt

$$\begin{aligned}
\partial_0 \Gamma_{ij}^0 &= \partial_0 \left(H g_{ij} + \frac{a^2}{2} \partial_0 h_{ij} \right) \\
&= g_{ij} \left(\frac{d^2 a / dt^2}{a} + H^2 \right) + 2a^2 H \partial_0 h_{ij} + \frac{a^2}{2} \partial_0^2 h_{ij}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Dabei wurde für die Ableitung der Metrik Gl. A.4 verwendet.

- Der zweite Term lässt sich ebenfalls aufspalten.

$$\partial_i \Gamma_{\rho j}^\rho = \partial_i \Gamma_{0j}^0 + \partial_i \Gamma_{kj}^k = 0 \tag{A.8}$$

Wegen $\Gamma_{0j}^0 = 0$ und weil die Tensorstörung spurfrei ist verschwindet der zweite Term.

- Der dritte Term lässt sich auch vereinfachen, indem die Summen in Raum- und Zeitkomponenten getrennt werden.

$$\Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{ij}^\lambda = \Gamma_{0\lambda}^0 \Gamma_{ij}^\lambda + \Gamma_{k0}^k \Gamma_{ij}^0 + \Gamma_{km}^k \Gamma_{ij}^m \tag{A.9}$$

Der erste Term verschwindet wegen $\Gamma_{0\lambda}^0 = 0$. Der letzte Term ist ein Term zweiter Ordnung in der Störung. Es bleibt also

$$\begin{aligned}
\Gamma_{k0}^k \Gamma_{ij}^0 &= \frac{3}{2} h \partial_0 g_{ij} \\
&= 3H^2 g_{ij} + \frac{3}{2} H a^2 \partial_0 h_{ij}.
\end{aligned} \tag{A.10}$$

- Auch für den vierten Term werden die Summen aufgespalten.

$$\Gamma_{j\lambda}^\rho \Gamma_{\rho i}^\lambda = \Gamma_{j0}^0 \Gamma_{0i}^0 + \Gamma_{jm}^0 \Gamma_{0i}^m + \Gamma_{j0}^k \Gamma_{ki}^0 + \Gamma_{jm}^k \Gamma_{ki}^m \tag{A.11}$$

Der letzte Term ist ein Term zweiter Ordnung und der erste Term verschwindet wegen $\Gamma_{0i}^0 = 0$. Die mittleren Terme sind identisch.

$$\begin{aligned}
\Gamma_{j\lambda}^\rho \Gamma_{\rho i}^\lambda &= 2\Gamma_{j0}^0 \Gamma_{0i}^0 \\
&= 2 \left(H g_{jm} + \frac{a^2}{2} \partial_0 h_{jm} \right) \left(H \delta_{mi} + \frac{1}{2} \partial_0 h_{mi} \right) \\
&= 2H^2 g_{jm} \delta_{mi} + H a^2 \delta_{jm} \partial_0 h_{mi} + H a^2 \delta_{mi} \partial_0 h_{jm} \\
&= 2H^2 g_{ji} + 2H a^2 \partial_0 h_{ji}
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Zusammenfassend sind die Raum-Raum Komponenten des Ricci-Tensors gegeben durch

$$R_{ij} = g_{ij} \left(\frac{d^2 a / dt^2}{a} + 2H^2 \right) + \frac{a^2}{2} \partial_0^2 h_{ij} + \frac{k^2}{2} h_{ij} + \frac{3}{2} H a^2 \partial_0 h_{ij}. \tag{A.13}$$

B Boltzmann Gleichung

Hier werden die Gleichungen (5.24) hergeleitet. Dazu wird die *Anisotropie* $\xi = \alpha + \beta$ definiert. Die vollständige Verteilungsfunktion lautet:

$$\mathbf{f} = f_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{i(\omega\tau - kz)} \left[\frac{\xi}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 - \mu^2) \cos 2\phi + \frac{\beta}{2} \begin{pmatrix} (1 + \mu^2) \cos 2\phi - (1 - \mu^2) \cos 2\phi \\ -(1 + \mu^2) \cos 2\phi - (1 - \mu^2) \cos 2\phi \\ 4\mu \sin 2\phi \end{pmatrix} \right] \quad (\text{B.1})$$

Zur Vereinfachung der Notation werden folgende Definitionen verwendet:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 - \mu^2) \cos 2\phi, \quad \mathbf{b} - \mathbf{a} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \mu^2) \cos 2\phi - (1 - \mu^2) \cos 2\phi \\ -(1 + \mu^2) \cos 2\phi - (1 - \mu^2) \cos 2\phi \\ 4\mu \sin 2\phi \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Im Folgenden werden die Terme der Boltzmann-Gleichung einzeln berechnet.

•

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau} = e^{i(\omega\tau - kz)} [\dot{\xi} \mathbf{a} + \dot{\beta} (\mathbf{b} - \mathbf{a})] + ike^{i(\omega\tau - kz)} [\xi \mathbf{a} + \beta (\mathbf{b} - \mathbf{a})] \quad (\text{B.3})$$

•

$$\mu \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} = -ik\mu e^{i(\omega\tau - kz)} [\xi \mathbf{a} + \beta (\mathbf{b} - \mathbf{a})] \quad (\text{B.4})$$

•

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial p} \frac{dp}{d\tau} &= -p \frac{\partial f_0}{\partial p} \frac{1}{2} (1 - \mu^2) \cos 2\phi e^{-ikz} \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -p \frac{\partial f_0}{\partial p} (\dot{h} + ikh) e^{i(\omega\tau - kz)} \mathbf{a} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

•

$$\begin{aligned} gI &= g \frac{1}{4\pi} \int_0^1 d\mu' \int_0^{2\pi} d\phi P(\mu, \phi, \mu', \phi') \mathbf{f} \\ &= gf_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + g \frac{3}{16} e^{i(\omega\tau - kz)} \int_{-1}^1 d\mu' \begin{pmatrix} (\beta \mu'^2 (1 + \mu'^2)^2 - \frac{1}{2} \mu'^2 \xi (\mu'^2 - 1)) \cos 2\phi \\ (-\beta (1 + \mu'^2)^2 + \frac{1}{2} \xi (\mu'^2 - 1)) \cos 2\phi \\ (2\beta \mu (1 + \mu'^2)^2 - \mu \xi (\mu'^2 - 1)) \sin 2\phi \end{pmatrix} \\ &= gf_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + g \frac{3}{16} e^{i(\omega\tau - kz)} (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \int_{-1}^1 d\mu' \left(\beta (1 + \mu'^2)^2 - \frac{1}{2} \xi (1 - \mu'^2)^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Damit lautet die vollständige Boltzmann-Gleichung:

$$\begin{aligned}
 [\dot{\xi} \mathbf{a} + \dot{\beta}(\mathbf{b} - \mathbf{a})] &= -ik[\xi \mathbf{a} + \beta(\mathbf{b} - \mathbf{a})] + ik\mu[\xi \mathbf{a} + \beta(\mathbf{b} - \mathbf{a})] \\
 &+ p \frac{\partial f_0}{\partial p} (\dot{h} + ikh) \mathbf{a} - g \mathbf{f} \\
 &+ g f_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + g \frac{3}{16} (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \int_{-1}^1 d\mu' \left(\beta(1 + \mu'^2)^2 - \frac{1}{2} \xi(1 - \mu'^2)^2 \right)
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

Die Stokes-Vektoren \mathbf{a} und $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ sind konstant, daher können ihre Koeffizienten gleichgesetzt werden. Es folgen also zwei gekoppelte Integro-Differentialgleichungen

$$\dot{\xi} + [ik(1 - \mu) + g] \xi = p \frac{\partial f_0}{\partial p} (\dot{h} + ikh), \tag{B.8}$$

$$\dot{\beta} + [ik(1 - \mu) + g] \beta = g \frac{3}{16} \int_{-1}^1 d\mu' \left(\beta(1 + \mu'^2)^2 - \frac{1}{2} \xi(1 - \mu'^2)^2 \right). \tag{B.9}$$

Literaturverzeichnis

- [1] BICEP2 2014 Results Release, <http://bicepkeck.org/>
- [2] Prof. Dr. Jochen Wambach, *Skript zur Allgemeinen Relativitätstheorie*, TU Darmstadt, WS 2013/14
- [3] Sean Carroll, *Spacetime and Geometry*, Addison Wesley, 2004
- [4] Paolo Cabella, Marc Kamionkowski, *Theory of Cosmic Microwave Background Polarization*, arXiv:astro-ph/0403392v2
- [5] A.G. Polnarev, *Polarization and anisotropy induced in the microwave background by cosmological gravitational waves*, *Astron. Zh.* **62** 1041-1052 (November-December 1985)
- [6] M.M. Basko, A.G. Polnarev, *Polarization and anisotropy of the relic radiation in an anisotropic universe*, *Mon. Not. R. astr. Soc.* (1980) **191**, 207-215
- [7] Scott Dodelson, *Modern Cosmology* Elsevier, 2003
- [8] Edward W. Kolb, Michael S. Turner, *The Early Universe*, Addison Wesley, 1990
- [9] S. Chandrasekhar, *Radiative Transfer*, Dover Publications Inc., 1960
- [10] Daniel Baumann, *TASI Lectures on Inflation*
- [11] *Planck 2013 results. XXVII. Doppler boosting of the CMB: Eppure si muove*, arXiv:1303.5087v1
- [12] Wen Zhao, Yang Zhang, *An Analytic Approach to the CMB Polarization Generated by Relic Gravitational Waves*, arXiv:astro-ph/0508345v8
- [13] *BICEP2 I: Detection Of B-mode Polarization at Degree Angular Scales*, arXiv:1403.3985v3
- [14] Yin-Zhe Ma, Yi Wang, *Local Reconstruction of the Inflationary Potential with BICEP2 data*, arXiv:1403.4585v1
- [15] CAMB Web Interface, http://lambda.gsfc.nasa.gov/toolbox/tb_camb_form.cfm
- [16] WMAP Results, *Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Final Maps and Results*, arXiv:1212.5225v3
- [17] Giovanni Montani, Marco Valerio Battisti, Riccardo Benini, Giovanni Imponente, *Primordial Cosmology*, World Scientific Publishing, 2011

Abbildungsverzeichnis

1.1	Entwicklung des Universums. [1]	4
2.1	Materieinhalt des Universums nach WMAP	8
2.2	Skizze des Inflationspotentials.	10
2.3	Darstellung einer Gravitationswelle [3]	12
2.4	Kosmische Hintergrundstrahlung, gemessen von PLANCK 2013.	13
2.5	Temperatur Leistungsspektrum aufgenommen von PLANCK.	14
3.1	Mitbewegter Horizont	15
4.1	Darstellung der reinen E - und B -Moden.	21
5.1	Quadrupolanisotropie einer GW	24
5.2	Erzeugung linearer Polarisation durch Thomson-Streuung.	26
5.3	Skalare Quadrupolverteilung	28