
Vektorwechselwirkungen im Nambu-Jona-Lasinio-Modell

Vector interactions in the Nambu-Jona-Lasinio model

Bachelor-Thesis von Eduard Alert

Oktober 2013



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Institut für Kernphysik
Theoretische Kernphysik
NHQ

Vektorwechselwirkungen im Nambu-Jona-Lasinio-Modell
Vector interactions in the Nambu-Jona-Lasinio model

Vorgelegte Bachelor-Thesis von Eduard Alert

1. Gutachten: PD Dr. Michael Buballa
2. Gutachten: Prof. Dr. Jochen Wambach

Tag der Einreichung:

Erklärung zur Bachelor-Thesis

Hiermit versichere ich, die vorliegende Bachelor-Thesis ohne Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Darmstadt, den 30. Oktober 2013

(Eduard Alert)

Zusammenfassung

Das Nambu-Jona-Lasinio-Modell wird mit Vektorwechselwirkungen erweitert. Zunächst wird die Gap-Gleichung hergeleitet und daraus die effektive Quarkmasse ermittelt. Anschließend werden kollektive Anregungen in der Quark-Antiquark-Streuung betrachtet, die als Mesonen interpretiert werden. Die Berechnung der Mesonpropagatoren erfolgt mit der Bethe-Salpeter Gleichung in Random-Phase-Approximation. Auch werden die Mesonenmassen und die Pionzerfallskonstante berechnet. Schließlich werden Parametersätze bestimmt und die chiralen Theoreme überprüft.

Abstract

The Nambu-Jona-Lasinio model is extended to include vector interactions. First, the gap equation is derived and used to determine the effective quark mass. Then collective excitations in the quark-antiquark scattering are considered, which are interpreted as mesons. The calculation of the meson propagators occurs with the Bethe-Salpeter equation in random phase approximation. Also the meson masses and the pion decay constant are computed. Finally, parameters sets are determined and the chiral theorems verified.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	4
2	Nambu-Jona-Lasinio-Modell	5
2.1	Die NJL-Lagrangedichte	5
2.2	Symmetrien	6
2.2.1	$U_V(1)$ -Symmetrie	6
2.2.2	$SU_V(2)$ -Symmetrie	6
2.2.3	$SU_A(2)$ -Symmetrie	6
2.3	Regularisierung	7
2.4	Gap-Gleichung	7
3	Mesonen	10
3.1	Polarisationsfunktionen	11
3.2	Mesonenpropagatoren	14
3.2.1	σ - und ρ -Mesonpropagator	14
3.2.2	Pion- und a_1 -Mesonpropagator	14
3.3	Mesonenmassen	17
3.3.1	σ -Mesonmasse	17
3.3.2	Pionmasse	18
3.3.3	ρ -Mesonmasse	18
3.3.4	a_1 -Mesonmasse	19
3.4	Pionzerfallskonstante	20
4	Parameterbestimmung	21
5	Chirale Theoreme	22
5.1	Goldstone-Theorem	22
5.2	Goldberger-Treiman-Relation	22
5.3	Gell-Mann-Oakes-Renner-Relation	24
6	Zusammenfassung und Ausblick	24
	Anhang	25
A	Integrale	25
A.1	Berechnung des Integrals I_1	25
A.2	Berechnung des Integrals $I_2(q)$	26
A.3	Berechnung des Integrals $dI_2(q)/dq^2$	28
B	Diagonalisierung und Polapproximation von $T(q)$	29
C	Berechnung der Pionzerfallskonstante	31

1 Einführung

Die Quantenchromodynamik (QCD) ist die Quantenfeldtheorie der starken Wechselwirkung. Als eine $SU(3)$ -Eichgruppe bezüglich der drei Farbladungen, besitzt sie acht Generatoren, die mit den masselosen Eichbosonen (Gluonen) der starken Wechselwirkung zusammenhängen. Da eine $SU(3)$ -Gruppe nicht abelsch ist, tragen die Gluonen eine Farbladung und können sowohl mit sich selber als auch mit den Quarks wechselwirken. Die Quarks tragen neben der Farbladung auch einen Flavour-Freiheitsgrad. Zur heutigen Zeit sind sechs verschiedene Flavours bekannt: up, down, strange, charm, bottom, top. Die letzten vier werden in dieser Arbeit vernachlässigt, da sie gegenüber Up- und Down-Quarks eine weitaus größere Masse tragen.

Der nicht-abelsche Charakter der $SU(3)$ -Gruppe hat zusätzliche Eigenschaften zur Folge. Eines davon ist das Confinement, das aus der starken Quark-Gluon-Kopplung bei niedrigen Energien oder großen Abständen hervorgeht. Dies besagt, dass nur farbneutrale Teilchen in der Natur existieren oder anders ausgedrückt: Einzelne freie Quarks sind in der Natur nicht beobachtbar. Farbneutrale Teilchen können dabei nur entweder als Quark und Antiquark oder aus drei Quarks aufgebaut sein. Erstere werden als Mesonen und letztere als Baryonen bezeichnet, wobei beide unter dem Begriff Hadronen¹ zusammengefasst werden. Als Beispiel seien für Mesonen das Pion, Kaon und ρ -Meson und für Baryonen das Proton und Neutron genannt.

Bei kleinen Abständen oder hohen Energien hingegen kann die Quark-Gluon-Kopplung so schwach werden, dass Quarks asymptotisch frei sind. Für diese Vorhersage der Asymptotischen Freiheit in der QCD wurden D. Gross, D. Politzer und F. Wilczek im Jahr 2004 mit dem Nobelpreis geehrt [1–3]. Die Behandlung der Dynamik von Quarks und Gluonen bei niedrigen Energien erweist sich aber als schwierig, da die Kopplungskonstante in diesem Bereich sehr groß ist und daher die Störungstheorie wie in der Quantenelektrodynamik (QED) nicht angewendet werden kann. Stattdessen werden effektive Modelle wie zum Beispiel das Bag-Modell [4] und das Nambu-Jona-Lasinio-Modell (NJL-Modell) eingesetzt. In dieser Arbeit wird das NJL-Modell unter Einbeziehung von Vektorwechselwirkungen verwendet. Es hat den Vorteil, dass es gegenüber anderen Modellen mathematisch handbarer ist und sich in der Beschreibung von Hadronen bewährt hat. Der Nachteil ist allerdings, dass es nicht renormierbar ist und kein Confinement enthält, sodass Quarks in diesem Modell als Freiheitsgrade vorkommen. Das NJL-Modell enthält alle globalen Symmetrien der QCD und eignet sich daher um die chirale Symmetrie zu untersuchen. Im Vakuum ist diese durch die effektive Masse spontan gebrochen. Die Berechnung der effektiven Masse in dieser Arbeit erfolgt mit der Dyson-Gleichung in Hartree-Näherung. Weiterhin werden Mesonen als Quark-Anti-Zustände betrachtet, deren Massen mit der Bethe-Salpeter Gleichung in Random-Phase-Approximation bestimmt werden. Zur Berechnung dieser Größen sind Modellparameter nötig, die an die experimentiellen Werte angepasst werden. Da das NJL-Modell auf Symmetrien basiert, müssen die chirale Theoreme wie die Goldberger-Treiman-Relation und die Gell-Mann-Renner-Relation erfüllt werden. Diese werden am Schluss mit den bestimmten Parametern nachgewiesen.

¹ Gruppentheoretisch werden nur Singlettzustände betrachtet, da diese invariant unter einer $SU(3)$ -Farbtransformation sind. Daher sind Hadronen strenggenommen Farbsingletts.

2 Nambu-Jona-Lasinio-Modell

2.1 Die NJL-Lagrangedichte

Das Nambu-Jona-Lasinio-Modell hat ihren Ursprung im Jahr 1961, also noch bevor die QCD entstand. Die Idee von Nambu und Jona-Lasinio war, den Mechanismus der Erzeugung der Energielücke eines BCS-Supraleiters auf die Erzeugung der dynamischen Masse von Dirac-Teilchen zu übertragen [5, 6]. Mit der Anwendung auf Nukleonen konnte damit die große Masse des Nukleons unter Beibehaltung der chiralen Symmetrie geklärt werden. Später wurde die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung im NJL-Modell zur einer lokalen Quark-Antiquark-Wechselwirkung durch eine einfache Ersetzung der Nukleonenfelder durch Quarkfelder in der Lagrangedichte uminterpretiert.

Der Schwerpunkt des NJL-Modells liegt auf den Symmetrien, da alle globalen Symmetrien der QCD übernommen wurden. Insbesondere kann mit dem NJL-Modell die chirale Symmetrie und deren spontanen Brechung im Vakuum und Restaurierung im Medium studiert werden. Der Nachteil dieses Modells ist einerseits, dass es aufgrund der lokalen Wechselwirkungen nicht renormierbar ist und somit ein zusätzlicher Parameter eingeführt werden muss, um die divergenten Integrale zu regularisieren. Andererseits enthält es kein Confinement, da es noch vor der QCD entwickelt wurde. Stattdessen sind die Gluonfreiheitsgrade im niedrigen Energiebereich in der punkttartigen Quark-Antiquark-Wechselwirkung absorbiert [7].

Die Lagrangedichte des NJL-Modells besteht allgemein aus einem freien Anteil \mathcal{L}_0 und aus einem Wechselwirkungsanteil \mathcal{L}_{int} :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} \quad (2.1)$$

Der freie Anteil beschreibt dabei die Dynamik der freien Quarkfelder und setzt sich wie folgt zusammen:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\rlap{\not{d}} - \hat{m})\psi \quad (2.2)$$

Hierbei ist $\rlap{\not{d}} = \gamma^\mu \partial_\mu$ und $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ mit den Gamma-Matrizen γ^μ und \hat{m} die Stromquarkmassenmatrix. Die Quarkfelder ψ und Antiquarkfelder $\bar{\psi}$ sind im Tensorraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{Dirac}} \otimes \mathcal{H}_{\text{Isospin}} \otimes \mathcal{H}_{\text{Color}}$ eingebettet und tragen daher Dirac-, Isospin- und Farbindizes.

Im Wechselwirkungsanteil sind die Wechselwirkungen zwischen Quark und Antiquark in verschiedenen Kanälen Γ_N enthalten. \mathcal{L}_{int} kann daher allgemein als Summe der verschiedenen Wechselwirkungstermen $(\bar{\psi}\Gamma_N\psi)^2$ gewichtet mit den jeweiligen dimensionsbehafteten Kopplungskonstanten g_N ($[\text{Energie}]^{-2}$) geschrieben werden:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \sum_N g_N (\bar{\psi}\Gamma_N\psi)^2 \quad (2.3)$$

In dieser Arbeit werden die skalaren (S), pseudoskalaren (P), vektoriellen (V) und axialen (A) Wechselwirkungen für Up- und Down-Quarks ($N_f = 2$) und 3 Farbladungen ($N_c = 3$) behandelt. Weiterhin werden die Up- und Down-Quarks als entartet angesehen, sodass deren Masse in der Stromquarkmassenmatrix gleichgesetzt wird: $\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d) = \text{diag}(m, m)$ mit $m := m_u = m_d$. Die Lagrangedichte lautet somit:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\rlap{\not{d}} - \hat{m})\psi + g_s [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2] - g_v [(\bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\tau}\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2] \quad (2.4)$$

Hierbei ist $\vec{\tau}$ der Pauli-Vektor im Isospinraum. In der Lagrangedichte wurde das Tensorprodukt zwischen den Gamma- und Pauli-Matrizen übersichtshalber weggelassen. Die Wechselwirkungskanäle sind daher wie folgt zu verstehen:

$$\Gamma_S = \mathbb{1}_{\text{Dirac}} \otimes \mathbb{1}_{\text{Isospin}} \otimes \mathbb{1}_{\text{Colour}} \quad (2.5)$$

$$\Gamma_P^a = i\gamma_5 \otimes \tau^a \otimes \mathbb{1}_{\text{Colour}} \quad (2.6)$$

$$\Gamma_V^{\mu,a} = \gamma^\mu \otimes \tau^a \otimes \mathbb{1}_{\text{Colour}} \quad (2.7)$$

$$\Gamma_A^{\mu,a} = \gamma^\mu \gamma_5 \otimes \tau^a \otimes \mathbb{1}_{\text{Colour}} \quad (2.8)$$

Zu beachten ist, dass in den Wechselwirkungstermen in der Lagrangedichte über Dirac- und Isospinindizes summiert wird (Einsteinsche Summenkonvention):

$$(\bar{\psi}\Gamma_N^{\mu,a}\psi)^2 = (\bar{\psi}\Gamma_N^{\mu,a}\psi)(\bar{\psi}\Gamma_N^a{}_\mu\psi) = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{a=1}^3 (\bar{\psi}\Gamma_N^{\mu,a}\psi)(\bar{\psi}\Gamma_N^a{}_\mu\psi) \quad (2.9)$$

Den Wechselwirkungskanälen werden dabei folgende Mesonenzustände zugeordnet:

$$\bar{\psi}\psi: \sigma\text{-Mesonen} \quad \bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi: \text{Pionen} \quad (2.10)$$

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\tau}\psi: \rho\text{-Mesonen} \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\vec{\tau}\psi: a_1\text{-Mesonen} \quad (2.11)$$

Die skalaren und pseudoskalaren Wechselwirkungen $\bar{\psi}\Gamma_S\psi$ und $\bar{\psi}\Gamma_P^a\psi$ ebenso wie die vektoriellen und axialen Wechselwirkung $\bar{\psi}\Gamma_V^{\mu,a}\psi$ und $\bar{\psi}\Gamma_A^{\mu,a}\psi$ lassen sich durch axiale Transformationen ineinander überführen und haben daher dieselbe Kopplungskonstante g_s bzw. $-g_v$ [8].

2.2 Symmetrien

Die NJL-Lagrangedichte besitzt für den Zwei-Flavour Fall die gleichen globalen Symmetrien wie die QCD, nämlich die Invarianz gegenüber der globalen Phasentransformation $U_V(1)$, der Vektortransformation $SU_V(2)$ - und der Axialvektortransformation $SU_A(2)$ [9]. Letztere gilt nur im chiralen Limes $m = 0$. Mit diesen Symmetrien sind gemäß Noether-Theorem Erhaltungsgrößen verbunden. Diese sind der Noetherstrom J^μ und die daraus erhaltene Ladung Q :

$$J^\mu = \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_j)} \right) \delta \psi_j - K^\mu \quad \text{mit } \delta \mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu \quad (2.12)$$

$$Q = \int J^0 d^3x \quad (2.13)$$

In den folgenden Unterabschnitten werden die einzelnen Symmetrien näher besprochen.

2.2.1 $U_V(1)$ -Symmetrie

Unter einer globalen Phasentransformation $U_V(1)$ transformieren sich die Quarkfelder wie folgt:

$$\psi \rightarrow \exp(-i\alpha)\psi \quad \text{und} \quad \bar{\psi} \rightarrow \exp(i\alpha)\bar{\psi} \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.14)$$

Die Invarianz der Lagrangedichte \mathcal{L} bezüglich dieser Transformation führt zu einem erhaltenen Strom und der daraus erhaltenen Ladung, die der Baryonenanzahl entspricht:

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (2.15)$$

$$Q = \int \psi^\dagger \psi d^3x \quad (2.16)$$

2.2.2 $SU_V(2)$ -Symmetrie

Für $m_u = m_d$ ist die Lagrangedichte unter der $SU_V(2)$ -Transformation invariant:

$$\psi \rightarrow \exp\left(-i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\omega}\right)\psi \quad \text{und} \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} \exp\left(i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\omega}\right) \quad \text{mit } \vec{\omega} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.17)$$

Damit ergibt sich der Vektorstrom und die Ladung zu:

$$J_a^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \tau_a \psi \quad (2.18)$$

$$Q_a = \int \psi^\dagger \tau_a \psi d^3x \quad (2.19)$$

Die Ladung entspricht dabei der Isospinerhaltung. Diese Symmetrie ist in der QCD nicht exakt erfüllt, da die Massen von Up- und Down-Quarks sich geringfügig unterscheiden.

2.2.3 $SU_A(2)$ -Symmetrie

Bei einer $SU_A(2)$ -Transformation ändern sich die Quarkfelder gemäß:

$$\psi \rightarrow \exp\left(-i\gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta}\right)\psi \quad \text{und} \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} \exp\left(-i\gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta}\right) \quad \text{mit } \vec{\theta} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.20)$$

mit dem Axialvektorstrom und Ladung

$$J_{5a}^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \tau_a \psi \quad (2.21)$$

$$Q_{5a} = \int \psi^\dagger \gamma_5 \tau_a \psi d^3x \quad (2.22)$$

Die Invarianz bezüglich dieser Transformation ist für den Lagrangian in (2.4) nur im chiralen Limes ($m = 0$) gegeben. Folglich ist die $SU_A(2)$ -Symmetrie aufgrund der nicht verschwindenden Stromquarkmassen explizit gebrochen. Da aber die Stromquarkmassen im Vergleich zur QCD-Energieskala sehr klein sind, ist die chirale Symmetrie $SU_V(2) \times SU_A(2) \cong SU_L(2) \times SU_R(2)$ näherungsweise erfüllt.

Zusätzlich führt im Vakuum auch die effektive Quarkmasse, die im Abschnitt 2.4 behandelt wird, zur spontanen Symmetriebrechung. Das Goldstone-Theorem besagt nun aber, dass zur jeder spontan gebrochenen kontinuierlichen Symmetrie masselose Bosonen (Goldstone-Bosonen) existieren. Die Anzahl der Goldstone-Bosonen entspricht dabei der Anzahl der gebrochenen Generatoren. Da die chirale Symmetrie auf $SU_V(2)$ heruntergebrochen wird, existieren drei Goldstone-Bosonen, die den Pionen entsprechen. Die Pionen werden genauer gesagt als Pseudo-Goldstone-Bosonen interpretiert, weil sie dennoch eine geringe Masse tragen, die sich aus der nichtverschwindenden Stromquarkmasse ergibt.

2.3 Regularisierung

Das NJL-Modell beinhaltet lokale Vierpunktwechselwirkungen, die dazu führen, dass das NJL-Modell nicht renormierbar ist. Um dennoch vernünftige Ergebnisse zu erhalten, müssen die divergenten Integrale regularisiert werden. Es existieren dazu verschiedene Regularisierungs-Verfahren wie z.B. 3er Impuls-Cutoff, 4er Impuls-Cutoff, Pauli-Villars-Regularisierung und proper-time-Regularisierung. Die letzten drei sind dabei kovariante Verfahren. Um das analytische Verhalten von Mesonenpropagatoren zu beschreiben wird in dieser Arbeit die Pauli-Villars-Regularisierung verwendet. Dabei werden im Integranden Zusatzterme dazu addiert, die dafür sorgen, dass das neue Integral konvergiert. Zusätzlich sollten die Terme auch so gewählt werden, dass bei niedrigen Impulsen das Verhalten des neuen Integrals sich nur geringfügig vom ursprünglichen abweicht. Die Anzahl der Zusatzterme (Regulatoren) ist dabei abhängig vom Divergenzgrad des Integrals. Die Integrale, die in dieser Arbeit betrachtet werden, sind höchstens quadratisch divergent und benötigen daher zwei Regulatoren [9]. Insgesamt ergibt sich folgende Ersetzung für die Integrale:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k, M) \rightarrow \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sum_{j=0}^2 c_j f(k, \mu_j) \quad (2.23)$$

mit

$$c_0 = 1, \quad c_1 = -2, \quad c_2 = 1; \quad \mu_j^2 = M^2 + j\Lambda^2 \quad (2.24)$$

Hierbei ist Λ der zusätzlich eingeführte Cutoff-Parameter und M die Konstituentenquarkmasse, die im nächsten Abschnitt 2.4 besprochen wird. Diese Ersetzung entspricht der Standardform der Pauli-Villars-Regularisierung im NJL-Modell.

Parametersätze

Die benötigten Parameter werden in Abschnitt 4 durch Anpassen der Pionmasse, der Pionzerfallskonstante, der ρ -Mesonmasse und des Quarkkondensats an die Literaturwerte bestimmt. Die Ergebnisse in den folgenden Abschnitten beziehen sich daher auf die Parametersätze in Tabelle 1 auf S. 21.

2.4 Gap-Gleichung

In der QCD ist ein Quark immer von Gluonen und anderen Quarks umgeben, die mit dem Quark und untereinander wechselwirken. Durch diese Wechselwirkungen ergibt sich eine effektive Masse auch Konstituentenquarkmasse genannt, die für eine genügend starke Kopplung größer ist als die Stromquarkmasse. Zur Berechnung der Konstituentenquarkmasse im NJL-Modell wird die Hartree-Näherung (auch Molekularfeldnäherung genannt) verwendet. In der Molekularfeldnäherung wird die Wechselwirkung aller Quarkfelder in einem äußeren Feld zusammengefasst, das mit einem einzelnen Quarkfeld wechselwirkt. Das äußere Feld wird dabei durch die Wechselwirkung des Quarkfeldes mit sich selbst hervorgerufen. Anschaulich entspricht dies einer Propagation eines freien Quarks mit der Konstituentenquarkmasse M . Die dazugehörige Dyson-Gleichung in der Hartree-Näherung ist in Abbildung 1 dargestellt:

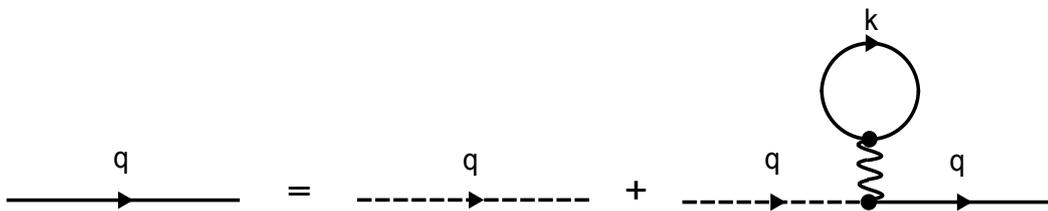


Abbildung 1: Dyson-Gleichung in Hartree-Näherung

Dabei entspricht die durchgezogene Linie dem vollen Propagator $iS(q)$ mit der Konstituentenquarkmasse M und die gestrichelte dem nackten Propagator $iS_0(q)$ mit der Stromquarkmasse m :

$$iS_0(q) = i(\not{q} - m + i\epsilon)^{-1} = i \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (2.25)$$

$$iS(q) = i(\not{q} - M + i\epsilon)^{-1} = i \frac{\not{q} + M}{q^2 - M^2 + i\epsilon} \quad (2.26)$$

Mit der Selbstwechselwirkungsschleife $-i\Sigma$ ergibt sich die Dyson-Gleichung zu

$$iS(q) = iS_0(q) + iS_0(q)(-i\Sigma)iS(q) \quad (2.27)$$

$$= i \left[\mathbb{1} - S_0(q) \Sigma \right]^{-1} S_0(q) \quad (2.28)$$

$$= i \left[S_0(q) (S_0^{-1}(q) - \Sigma) \right]^{-1} S_0(q) \quad (2.29)$$

$$= i \left[S_0^{-1}(q) - \Sigma \right]^{-1} \quad (2.30)$$

und daraus eine selbstkonsistente Gleichung für M :

$$M = m + \Sigma \quad (2.31)$$

Die Selbstwechselwirkungsschleife entsteht durch die Schließung von zwei äußeren Linien der Vierpunktvertizes. Im Lagrangian wird dies durch eine Linearisierung der Wechselwirkungsterme erreicht [7]:

$$(\bar{\psi} \Gamma_N \psi)^2 \approx 2 \bar{\psi} \Gamma_N \psi \langle \bar{\psi} \Gamma_N \psi \rangle - \langle \bar{\psi} \Gamma_N \psi \rangle^2 \quad (2.32)$$

Dabei ist $\langle \bar{\psi} \Gamma_N \psi \rangle$ der Vakuumerwartungswert im jeweiligen Wechselwirkungskanal Γ_N . Der konstante Beitrag $\langle \bar{\psi} \Gamma_N \psi \rangle^2$ bewirkt nur eine Verschiebung der Lagrangedichte und kann daher weggelassen werden. Durch Aufsummieren der Selbstwechselwirkungen über alle Wechselwirkungskanäle und mit Hilfe der Feynman-Regeln [10] kann Σ berechnet werden zu:

$$-i\Sigma = -i \sum_N \Sigma_N = \sum_N -2ig_N \Gamma_N \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\Gamma_N iS(k)] \quad (2.33)$$

Alle Wechselwirkungskanäle in der Lagrangedichte (2.4) mit Ausnahme der skalaren Wechselwirkung Γ_S beinhalten Pauli-Matrizen. Da Pauli-Matrizen spurfrei sind, trägt nur Γ_S zur Selbstwechselwirkungsschleife bei:

$$\Sigma = 2ig_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\Gamma_S S(k)] = 2ig_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\mathbb{1} S(k)] \quad (2.34)$$

$$= 2ig_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{\not{k} + M}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \right] = 2N_c N_f i g_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\frac{\not{k} + M}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \right] \quad (2.35)$$

$$= 8iN_c N_f g_s M I_1(M) \quad (2.36)$$

mit

$$I_1(M) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \quad (2.37)$$

Dabei wurde zuerst die Spur über den Farb- und Isospinraum gebildet, das den Beitrag $N_c N_f$ liefert. Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass die Spur über eine ungerade Anzahl von Gamma-Matrizen null ist und über den Diracraum den Faktor 4 ergibt. Mit Gleichung (2.31) wird daraus die Gap-Gleichung:

$$M = m + 8iN_c N_f g_s M I_1(M) \quad (2.38)$$

Das Integral I_1 ist quadratisch divergent und wird daher im Anhang A.1 mit der Pauli-Villars-Methode regularisiert. Das Ergebnis sieht wie folgt aus:

$$I_1 = \frac{1}{(4\pi)^2 i} \sum_{j=0}^2 c_j \cdot \mu_j^2 \ln(\mu_j^2) \quad (2.39)$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2 i} \left[M^2 \ln(M^2) - 2(M^2 + \Lambda^2) \ln(M^2 + \Lambda^2) + (M^2 + 2\Lambda^2) \ln(M^2 + 2\Lambda^2) \right] \quad (2.40)$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2 i} \left[M^2 \ln \left(\frac{M^2}{M^2 + \Lambda^2} \right) + (M^2 + 2\Lambda^2) \ln \left(\frac{M^2 + 2\Lambda^2}{M^2 + \Lambda^2} \right) \right] \quad (2.41)$$

$$\text{mit } c_0 = 1, \quad c_1 = -2, \quad c_2 = 1; \quad \mu_j^2 = M^2 + j\Lambda^2 \quad (2.42)$$

Der Vakuumerwartungswert im skalaren Wechselwirkungskanal, der in Gleichung (2.33) schon auftauchte, wird auch Quarkkondensat genannt und ist in Hartree-Näherung über

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [iS(k)] \quad (2.43)$$

gegeben. Unter Ausnutzung der Gap-Gleichung (2.38) kann das Quarkkondensat alternativ geschrieben werden als

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{\Sigma}{2g_s} = \frac{m - M}{2g_s} \quad (2.44)$$

Das Quarkkondensat ist aufgrund der Proportionalität zu M für $m = 0$ als Ordnungsparameter für spontane chirale Symmetriebrechung zu sehen. Dazu wurde das Quarkkondensat über die inverse Kopplungskonstante für verschiedene Stromquarkmassen in Abbildung 2 dargestellt. Für $\tilde{m} = 0$ (chiraler Limes) mit $\tilde{m} = m/\Lambda$ bildet $\tilde{g}^{-1} \approx 1.387$ mit $\tilde{g} = 8N_f N_c g_s \Lambda^2 / (4\pi)^2$ die Grenze zwischen der Nambu-Goldstone-Phase ($\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$) und der Wigner-Weyl-Phase ($\langle \bar{\psi}\psi \rangle = 0$).

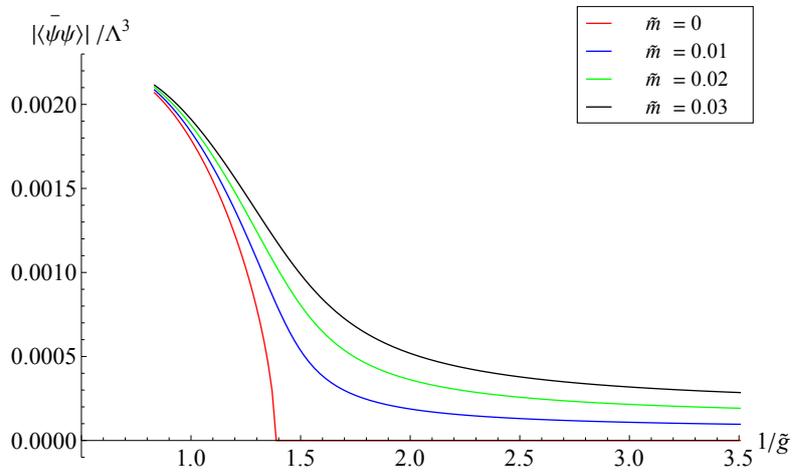


Abbildung 2: Quarkkondensat über die inverse Kopplungskonstante für verschiedene Stromquarkmassen aufgetragen.

3 Mesonen

Mesonen sind gebundene Zustände aus einem Quark und Antiquark. Obwohl das NJL-Modell kein Confinement enthält, können Mesonen dennoch als kollektive Anregungen in der Quark-Antiquark-Streuung aufgefasst werden. Die betrachteten Moden besitzen die Quantenzahlen $J^{PC} = 0^{++}, 0^{-+}, 1^{-+}, 1^{++}$ mit der Parität $P = (-1)^{l+1}$, der Ladungskonjugation $C = (-1)^{l+s}$ und dem Mesonspin J , der durch $|l-s| \leq J \leq |l+s|$ gegeben ist. Diese Quantenzahlen entsprechen denen der σ -, π -, ρ - und a_1 -Mesonen im Quarkmodell. Daher werden die kollektiven Anregungen im NJL-Modell als Mesonen des Quarkmodells interpretiert. Die Beschreibung der Mesonen erfolgt über die Bethe-Salpeter Gleichung in Random-Phase-Approximation (RPA), die in Abbildung 3 diagrammatisch dargestellt ist. Die linke Seite entspricht dabei dem Mesonpropagator, der durch die Quark-Antiquark-Streumatrix $T(q)$ beschrieben wird. In der RPA werden nur Quark-Antiquark-Polarisationsschleifen miteinbezogen. Explizit ergibt sich daher die rechte Seite als Summe des Streukerns K mit einer unendlichen Summe an Quark-Antiquark-Schleifen, die in Abb. 4 dem Mesonpropagator auf der rechten Seite entspricht.

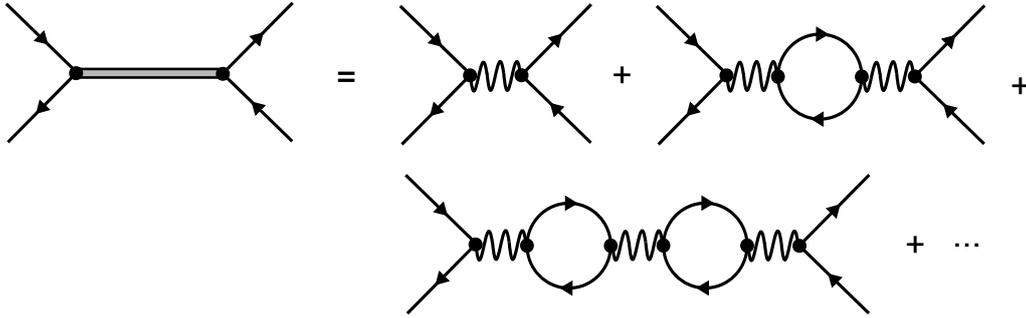


Abbildung 3: Bethe-Salpeter Gleichung in Random-Phase-Approximation als Summe von unendlich vielen Quark-Antiquark-Schleifen. Die Doppellinie entspricht dem Mesonpropagator.

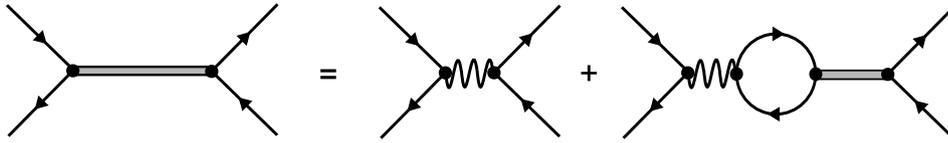


Abbildung 4: Bethe-Salpeter Gleichung in Random-Phase-Approximation

Mit Abbildung 4 lautet die Gleichung für die Streumatrix folglich:

$$iT(q) = iK + iK(-iJ(q))iT(q) \quad (3.1)$$

mit

$$K = \sum_M K_M = \sum_M 2g_M \Gamma_M \otimes \Gamma_M = \sum_{M,N} 2g_M \delta_{MN} \Gamma_M \otimes \Gamma_N \quad (3.2)$$

und der Polarisationsfunktion

$$\Pi_{MN}(q) \equiv \Gamma_M J(q) \Gamma_N \quad (3.3)$$

$$= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\Gamma_M S(k+q) \Gamma_N S(k)] \quad (3.4)$$

Im Allgemeinen können die Kanäle miteinander mischen, sodass sich folgender Ansatz für die Streumatrix als sinnvoll erweist:

$$T(q) = \sum_{M,N} T_{MN}(q) = \sum_{M,N} -D_{MN}(q) \Gamma_M \otimes \Gamma_N \quad (3.5)$$

Hierbei ist D_{MN} eine impulsabhängige Funktion. Durch Einsetzen in Gleichung (3.1) ergibt sich:

$$\sum_{M,N} -D_{MN}(q) \Gamma_M \otimes \Gamma_N = \sum_{M,N} 2g_M \delta_{MN} \Gamma_M \otimes \Gamma_N - \sum_{M,N,K} 2g_M \Pi_{MK}(q) D_{KN}(q) \Gamma_M \otimes \Gamma_N \quad (3.6)$$

und daraus

$$D_{MN}(q) = -2g_M \delta_{MN} + \sum_K 2g_M \Pi_{MK}(q) D_{KN}(q) \quad (3.7)$$

Die Funktionen D_{MN} werden auch als Mesonenpropagatoren bezeichnet [11]. Doch dieser Begriff täuscht darüber hinweg, dass einerseits die Propagatoren miteinander gekoppelt sein können (siehe Abschnitt 3.2) und andererseits selbst wenn die Kanäle nicht miteinander mischen ($M = N$), die Quark-Meson-Kopplung in D_{MM} enthalten ist. Im Folgenden soll zunächst der Fall $\Pi_{MN} \sim \delta_{MN}$ besprochen werden, da dieser später auch auftauchen wird. Der Mesonenpropagator

$$D_{MM}(q) = -2g_M + 2g_M \Pi_{MM}(q) D_{MM}(q) = \frac{-2g_M}{1 - 2g_M \Pi_{MM}(q)} \quad (3.8)$$

kann dabei als ein effektiver Mesonenaustausch aufgefasst werden. In dieser Hinsicht entspricht die Polstelle der Mesonenpropagatoren der Mesonenmasse und der Mesonenpropagator kann um eine Entwicklung um den Pol (Polapproximation) angenähert werden:

$$D_{MM}(q) \approx \frac{g_{Mqq}^2}{q^2 - m_M^2} \quad (3.9)$$

Zur Bestimmung der Mesonenmasse m_M und der Quark-Meson-Kopplung g_{Mqq} wird daher Folgendes gefordert:

$$\text{Re}(D_{MM}^{-1}(q^2 = m_M^2)) \stackrel{!}{=} 0 \iff 1 - 2g_M \text{Re}(\Pi_{MM}(q^2 = m_M^2)) \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.10)$$

Zu beachten ist, dass der Nenner von D_{MM} auch komplex sein kann und deshalb die Mesonenmasse über den Realteil von $D_{MM}^{-1}(q^2 = m_M^2)$ definiert wird. Der Grund hierfür ist, dass die Mesonen als Resonanzen in der Quark-Antiquark Streuung im NJL-Modell betrachtet werden. Da das NJL-Modell kein Confinement enthält, können die Mesonen in diesem Modell auch wieder in ein Quark und Antiquark zerfallen. Dieser Zerfallskanal äußert sich daher in einer Polarisationsfunktion mit einem imaginären Anteil. Letztendlich kann die Quark-Meson-Kopplung über eine Taylorentwicklung des inversen Mesonenpropagators bis zur ersten Ordnung bestimmt werden:

$$D_{MM}^{-1}(q^2) \approx \frac{-1}{2g_M} \left(\underbrace{1 - 2g_M \text{Re}(\Pi_{MM}(q)) \Big|_{q^2=m_M^2}}_{=0} - 2g_M \frac{d\text{Re}(\Pi_{MM}(q))}{dq^2} \Big|_{q^2=m_M^2} (q^2 - m_M^2) \right) \quad (3.11)$$

$$= \frac{d\text{Re}(\Pi_{MM}(q))}{dq^2} \Big|_{q^2=m_M^2} (q^2 - m_M^2) \quad (3.12)$$

Ein Vergleich mit Gleichung (3.9) ergibt:

$$g_{Mqq}^2 = \left(\frac{d\text{Re}(\Pi_{MM}(q))}{dq^2} \Big|_{q^2=m_M^2} \right)^{-1} \quad (3.13)$$

3.1 Polarisationsfunktionen

Um später die Mesonenpropagatoren zu berechnen, werden zuerst die Polarisationsfunktionen benötigt, die über

$$\Pi_{MN}(q) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\Gamma_M S(k+q) \Gamma_N S(k)] \quad (3.14)$$

bestimmt werden. Die skalaren und pseudoskalaren Polarisationsfunktionen lauten im diagonalen Fall:

$$\Pi_{SS}(q) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [S(k+q)S(k)] \quad (3.15)$$

$$= 2iN_c N_f [2I_1 - (q^2 - 4M^2)I_2(q)] \quad (3.16)$$

und

$$\Pi_{PP}^{ab}(q) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [i\gamma_5 \tau^a S(k+q) i\gamma_5 \tau^b S(k)] \quad (3.17)$$

$$\equiv \Pi_{PP}(q) \delta_{ab} \quad (3.18)$$

$$= 2iN_c N_f (2I_1 - q^2 I_2(q)) \delta_{ab} \quad (3.19)$$

mit

$$I_2(q) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M^2 + i\epsilon)((k+q)^2 - M^2 + i\epsilon)} \quad (3.20)$$

Das Integral $I_2(q)$ ist logarithmisch divergent und wurde in A.2 analog zu I_1 mit der Pauli-Villars-Methode regularisiert:

$$I_2(q) = \frac{1}{(4\pi)^2 i} \sum_{j=0}^2 c_j (\ln(\mu_j^2) + 2 \cdot f(x_j)) \quad (3.21)$$

mit

$$f(x_j) = \begin{cases} \sqrt{-x_j} \cdot \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{-x_j}}\right), & \text{für } x_j < 0 \\ \sqrt{x_j} \cdot \text{artanh}\left(\frac{1}{\sqrt{x_j}}\right), & \text{für } x_j > 0 \\ 0, & \text{für } x_j = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

und

$$c_0 = 1, \quad c_1 = -2, \quad c_2 = 1; \quad \mu_j^2 = M^2 + j\Lambda^2 \text{ und } x_j = (q^2 - 4\mu_j^2)/q^2 \quad (3.23)$$

Die vektoriellen und axialen Polarisationsfunktionen weisen zusätzlich zur einer Isospinstruktur auch eine Lorentzstruktur auf. Aufgrund dieser Tensorstruktur können transversale und longitudinale Projektoren eingeführt werden, die die Bestimmung der Polarisationsfunktionen und Mesonenpropagatoren vereinfachen. Die Polarisationsfunktionen können dann in einen transversalen (T) und longitudinalen (L) Anteil zerlegt werden:

$$\Pi_{MM}^{\mu\nu,ab}(q) = (\Pi_{MM}^T(q) T^{\mu\nu}(q) + \Pi_{MM}^L(q) L^{\mu\nu}(q)) \delta_{ab} \quad (3.24)$$

mit

$$T^{\mu\nu}(q) = g^{\mu\nu} - L^{\mu\nu}(q) \quad (3.25)$$

$$L^{\mu\nu}(q) = \hat{q}^\mu \hat{q}^\nu \quad (3.26)$$

$$\hat{q}^\mu = q^\mu / \sqrt{q^2} \quad (3.27)$$

Die longitudinalen und transversalen Anteile können mit den Relationen

$$L^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = T^{\mu\nu} L_{\mu\nu} = 0 \quad (3.28)$$

$$L^{\mu\nu} L_{\mu\nu} = 1 \quad (3.29)$$

$$T^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 3 \quad (3.30)$$

herausprojiziert werden. Die vektoriellen und axialen Polarisationsfunktionen ergeben sich damit zu:

$$\Pi_{VV}^{\mu\nu,ab}(q) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\gamma^\mu \tau^a S(k+q) \gamma^\nu \tau^b S(k)] \quad (3.31)$$

$$= \Pi_{VV}^T(q) T^{\mu\nu} \delta_{ab} \quad (3.32)$$

und

$$\Pi_{AA}^{\mu\nu,ab}(q) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma_5 \tau^a S(k+q) \gamma^\nu \gamma_5 \tau^b S(k)] \quad (3.33)$$

$$= (\Pi_{AA}^T(q) T^{\mu\nu} + \Pi_{AA}^L(q) L^{\mu\nu}) \delta_{ab} \quad (3.34)$$

mit

$$\Pi_{VV}^T(q) = -\frac{4}{3} i N_c N_f [2I_1 - (q^2 + 2M^2) I_2(q)] \quad (3.35)$$

$$\Pi_{AA}^T(q) = -\frac{4}{3} i N_c N_f [2I_1 - (q^2 - 4M^2) I_2(q)] \quad (3.36)$$

$$\Pi_{AA}^L(q) = -8i N_c N_f M^2 I_2(q) \quad (3.37)$$

Die vektorielle Polarisationsfunktion ist rein transversal. Dies kann mit Hilfe der Ward-Identität $q = S^{-1}(k+q) - S^{-1}(k)$ wie folgt gezeigt werden:

$$q_\mu \Pi_{VV}^{\mu\nu,ab}(q) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [q \tau^a S(k+q) \gamma^\nu \tau^b S(k)] \quad (3.38)$$

$$= i N_c N_f \delta_{ab} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (\text{tr} [\gamma^\nu S(k)] - \text{tr} [S^{-1}(k) S(k+q) \gamma^\nu S(k)]) \quad (3.39)$$

$$= i N_c N_f \delta_{ab} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} [\gamma^\nu (S(k) - S(k+q))] \quad (3.40)$$

$$= 0 \quad (3.41)$$

Im letzten Schritt wurde der Propagator $S(k+q)$ mit Hilfe der Substitution $k \rightarrow k-q$ in $S(k)$ überführt. Aus der Transversalität der vektoriellen Polarisationsfunktion folgt, dass der Vektorstrom erhalten ist, d.h. der transversale Anteil $\Pi_{VV}^T(q)$ sollte auch für $q^2 = 0$ verschwinden. Da nur die Integrale regularisiert wurden, ist dies nicht der Fall. Stattdessen würde eine Regularisierung der ganzen Polarisationsfunktion, also auch der effektiven Masse M außerhalb der Integrale, dieses Problem beheben. Dies entspricht der Regularisierung im ursprünglichen Sinne von Pauli und Villars. Doch dadurch wäre einerseits das Goldstone-Theorem verletzt (siehe Abschnitt 5.1) und andererseits wären gleichzeitig vernünftige Werte für M und die Pionzerfallskonstante f_π , wie in [12, 13] beschrieben, nicht möglich. Um aber zugleich die Gültigkeit des Goldstone-Theorems und die Vektorstromerhaltung zu gewährleisten, wurde die effektive Masse nur in den Integralen regularisiert und in der vektoriellen Polarisationsfunktion das Integral I_1 wie folgt ersetzt:

$$I_1 = M^2 I_2(0) \quad (3.42)$$

Der transversale Anteil lautet damit:

$$\Pi_{VV}^T(q) = -\frac{4}{3} i N_c N_f [2M^2 I_2(0) - (q^2 + 2M^2) I_2(q)] \quad (3.43)$$

Aus Konsistenzgründen wird daher auch im transversalen Anteil der axialen Polarisationsfunktion das Integral I_1 substituiert:

$$\Pi_{AA}^T(q) = -\frac{4}{3} i N_c N_f [2M^2 I_2(0) - (q^2 - 4M^2) I_2(q)] \quad (3.44)$$

Für $M \neq N$ sind nur $\Pi_{PA}^{\mu,ab}(q)$ und $\Pi_{AP}^{\mu,ab}(q)$ ungleich null und lauten wie folgt:

$$\Pi_{PA}^{\mu,ab}(q) = \Pi_{PA}(q) \hat{q}^\mu \delta_{ab} \quad (3.45)$$

$$\Pi_{AP}^{\mu,ab}(q) = \Pi_{AP}(q) \hat{q}^\mu \delta_{ab} \quad (3.46)$$

mit

$$\Pi_{PA}(q) = -4N_c N_f M \sqrt{q^2} I_2(q) \quad (3.47)$$

$$\Pi_{AP}(q) = 4N_c N_f M \sqrt{q^2} I_2(q) \quad (3.48)$$

Die Polarisationsfunktionen mit nur einer spurfreien Pauli-Matrix verschwinden:

$$\Pi_{SP}^a(q) = \Pi_{PS}^a(q) = \Pi_{SV}^{\mu,a}(q) = \Pi_{VS}^{\mu,a}(q) = \Pi_{SA}^{\mu,a}(q) = \Pi_{AS}^{\mu,a}(q) = 0 \quad (3.49)$$

Alle anderen Polarisationsfunktionen ergeben sich zu null:

$$\Pi_{PV}^{\mu,ab}(q) = \Pi_{VP}^{\mu,ab}(q) = \Pi_{VA}^{\mu\nu,ab}(q) = \Pi_{AV}^{\mu\nu,ab}(q) = 0 \quad (3.50)$$

3.2 Mesonenpropagatoren

3.2.1 σ - und ρ -Mesonpropagator

Für den skalaren Kanal ist nur die diagonale Polarisationsfunktion $\Pi_{SS}(q)$ ungleich null. Der σ -Mesonpropagator ergibt sich daher aus Gleichung (3.8):

$$D_{SS}(q) = \frac{-2g_s}{1 - 2g_s \Pi_{SS}(q)} \quad (3.51)$$

Ebenso verschwinden beim vektoriellen Kanal die nicht-diagonalen vektoriellen Polarisationsfunktionen, sodass aus (3.7) für den vektoriellen Propagator folgt:

$$D_{VV}^{\mu\nu,ab}(q) = 2g_v g^{\mu\nu} \delta_{ab} - 2g_v \Pi_{VV}^{\mu\rho,ac}(q) D_{VV,\rho}^{\nu,cb}(q) \quad (3.52)$$

Aufgrund der Tensorstruktur bietet sich analog zur der vektoriellen Polarisationsfunktion an, den vektoriellen Propagator in einen transversalen und longitudinalen Anteil aufzuteilen. Mit dem Ansatz

$$D_{VV}^{\mu\nu,ab}(q) = (D_{VV}^T(q) T^{\mu\nu}(q) + D_{VV}^L(q) L^{\mu\nu}(q)) \delta_{ab} \quad (3.53)$$

ergibt sich

$$D_{VV}^T(q) = \frac{2g_v}{1 + 2g_v \Pi_{VV}^T(q)} \quad (3.54)$$

$$D_{VV}^L = 2g_v. \quad (3.55)$$

Der transversale Anteil $D_{VV}^T(q)$ entspricht dabei dem ρ -Mesonpropagator. Die daraus resultierende Streumatrix ist durch

$$T_\rho(q) = -D_{VV}^T(q) T^{\mu\nu} \delta_{ab} \gamma_\mu \tau^a \otimes \gamma_\nu \tau^b \quad (3.56)$$

gegeben. Folglich kann die ρ -Mesonmasse aus den Polstellen des transversalen Anteils bestimmt werden (siehe dazu Abschnitt 3.3.3).

3.2.2 Pion- und a_1 -Mesonpropagator

Aufgrund der Kopplung zwischen dem pseudoskalaren und axialen Kanal führt Gleichung (3.7) zu einem gekoppelten Gleichungssystem:

$$D_{PP}^{ab}(q) = -2g_s \delta_{ab} + 2g_s \Pi_{PP}^{ac}(q) D_{PP}^{cb}(q) + 2g_s \Pi_{PA}^{\rho,ac}(q) D_{AP,\rho}^{cb}(q) \quad (3.57)$$

$$D_{PA}^{\mu,ab}(q) = 2g_s \Pi_{PP}^{ac}(q) D_{PA}^{\mu,cb}(q) + 2g_s \Pi_{PA}^{\rho,ac}(q) D_{AA,\rho}^{\mu,cb}(q) \quad (3.58)$$

$$D_{AP}^{\mu,ab}(q) = -2g_v \Pi_{AP}^{\mu,ac}(q) D_{PP}^{cb}(q) - 2g_v \Pi_{AA}^{\mu\rho,ac}(q) D_{AP,\rho}^{cb}(q) \quad (3.59)$$

$$D_{AA}^{\mu\nu,ab}(q) = 2g_v g^{\mu\nu} \delta_{ab} - 2g_v \Pi_{AP}^{\mu,ac}(q) D_{PA}^{\nu,cb}(q) - 2g_v \Pi_{AA}^{\mu\rho,ac}(q) D_{AA,\rho}^{\nu,cb}(q) \quad (3.60)$$

Da die Propagatoren dieselbe Tensorstruktur wie die Polarisationsfunktionen besitzen, können diese analog dazu vereinfacht geschrieben werden:

$$D_{PP}^{ab}(q) = D_{PP}(q)\delta_{ab} \quad (3.61)$$

$$D_{PA}^{\mu,ab}(q) = D_{PA}(q)\hat{q}^\mu\delta_{ab} \quad (3.62)$$

$$D_{AP}^{\mu,ab}(q) = D_{AP}(q)\hat{q}^\mu\delta_{ab} \quad (3.63)$$

$$D_{AA}^{\mu\nu,ab}(q) = (D_{AA}^T(q)T^{\mu\nu}(q) + D_{AA}^L(q)L^{\mu\nu}(q))\delta_{ab} \quad (3.64)$$

Mit diesem Ansatz und den entsprechenden Polarisationsfunktionen führt dies zu folgenden Gleichungen:

$$D_{PP}(q) = -2g_s + 2g_s\Pi_{PP}(q)D_{PP}(q) + 2g_s\Pi_{PA}(q)D_{AP}(q) \quad (3.65)$$

$$D_{PA}(q) = 2g_s(\Pi_{PP}(q)D_{PA}(q) + \Pi_{PA}(q)D_{AA}^L(q)) \quad (3.66)$$

$$D_{AP}(q) = -2g_v(\Pi_{AP}(q)D_{PP}(q) + \Pi_{AA}^L(q)D_{AP}(q)) \quad (3.67)$$

$$D_{AA}^L(q) = 2g_v - 2g_v\Pi_{AP}(q)D_{PA}(q) - 2g_v\Pi_{AA}^L(q)D_{AA}^L(q) \quad (3.68)$$

$$D_{AA}^T(q) = 2g_v - 2g_v\Pi_{AA}^T(q)D_{AA}^T(q) \quad (3.69)$$

Der longitudinale Anteil von $D_{AA}^{\mu\nu,ab}(q)$ koppelt also mit den pseudoskalaren und axialen Propagatoren, während der transversale Anteil nicht mit den anderen Kanälen mischt. Die Gleichungen (3.65) bis (3.68) können auch in folgender Matrixform geschrieben werden:

$$\mathbf{D} = \mathbf{K} - \mathbf{K}\mathbf{\Pi}\mathbf{D} \quad (3.70)$$

mit

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{PP}(q) & D_{PA}(q) \\ D_{AP}(q) & D_{AA}^L(q) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} -2g_s & 0 \\ 0 & 2g_v \end{pmatrix}; \quad \mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \Pi_{PP}(q) & \Pi_{PA}(q) \\ \Pi_{AP}(q) & \Pi_{AA}^L(q) \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

Die Lösungen der Matrixgleichung ergeben sich damit zu:

$$\mathbf{D} = (\mathbb{1} + \mathbf{K}\mathbf{\Pi})^{-1} \mathbf{K} \quad (3.72)$$

$$= \frac{1}{D(q)} \begin{pmatrix} -2g_s(1 + 2g_v\Pi_{AA}^L(q)) & 4g_s g_v \Pi_{PA}(q) \\ 4g_s g_v \Pi_{AP}(q) & 2g_v(1 - 2g_s\Pi_{PP}(q)) \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

mit der Determinante

$$D(q) = \det(\mathbb{1} + \mathbf{K}\mathbf{\Pi}) = (1 - 2g_s\Pi_{PP}(q))(1 + 2g_v\Pi_{AA}^L(q)) + 4g_s g_v \Pi_{PA}(q)\Pi_{AP}(q) \quad (3.74)$$

Der entkoppelte transversale Anteil

$$D_{AA}^T(q) = \frac{2g_v}{1 + 2g_v\Pi_{AA}^T(q)} \quad (3.75)$$

aus Gleichung (3.69) wird als der a_1 -Mesonpropagator interpretiert. Der Grund hierfür ist, dass der longitudinale Anteil, wie sich im Folgendem herausstellen wird, keinem sinnvollen physikalischen Teilchen zugeordnet werden kann. Die entsprechende Streumatrix lautet demnach:

$$T_{a_1}(q) = -D_{AA}^T(q)T^{\mu\nu}\delta_{ab}\gamma_\mu\gamma_5\tau^a \otimes \gamma_\nu\gamma_5\tau^b \quad (3.76)$$

Der vollständige Pionpropagator setzt sich aus den pseudoskalar-axialen Propagatoren, dem pseudoskalaren Propagator und dem transversalen Anteil des axialen Propagators zusammen. Dessen Beschreibung erfolgt über die Streumatrix aus Gleichung (3.5):

$$T(q) = -\delta_{ab}(D_{PP}(q)i\gamma_5\tau^a \otimes i\gamma_5\tau^b + D_{PA}(q)\hat{q}^\mu i\gamma_5\tau^a \otimes \gamma_\mu\gamma_5\tau^b) \quad (3.77)$$

$$+ D_{AP}(q)\hat{q}^\mu \gamma_\mu\gamma_5\tau^a \otimes i\gamma_5\tau^b + D_{AA}^L(q)\hat{q}^\mu\hat{q}^\nu \gamma_\mu\gamma_5\tau^a \otimes \gamma_\nu\gamma_5\tau^b) \quad (3.78)$$

$$= -\delta_{ab}(i\gamma_5\tau^a, \hat{q}\gamma_5\tau^a) \otimes \begin{pmatrix} D_{PP}(q) & D_{PA}(q) \\ D_{AP}(q) & D_{AA}^L(q) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} i\gamma_5\tau^b \\ \hat{q}\gamma_5\tau^b \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

$$= -\frac{\delta_{ab}}{D(q)}(i\gamma_5\tau^a, \hat{q}\gamma_5\tau^a) \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} A(q) & iB(q) \\ -iB(q) & C(q) \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{M}} \otimes \begin{pmatrix} i\gamma_5\tau^b \\ \hat{q}\gamma_5\tau^b \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

mit

$$A(q) = -2g_s(1 + 2g_v\Pi_{AA}^L(q)) \quad (3.81)$$

$$B(q) = -4ig_s g_v \Pi_{PA}(q) \quad (3.82)$$

$$C(q) = 2g_v(1 - 2g_s\Pi_{PP}(q)) \quad (3.83)$$

Weiterhin kann $T(q)$ durch eine Diagonalisierung der Matrix \mathbf{M} in einen reinen Pionanteil $T_\pi(q)$ und einen longitudinalen axialen Anteil $T_{a_L}(q)$ zerlegt werden (siehe Anhang B):

$$T(q) = T_\pi(q) + T_{a_L}(q) \quad (3.84)$$

mit

$$T_{a_L}^\pi(q) = \frac{-\delta_{ab}\lambda_\pm}{D(q)((\lambda_\pm - C(q))^2 + B^2(q))} [(\lambda_\pm - C(q)) i\gamma_5\tau^a - iB(q)\hat{q}\gamma_5\tau^a] \otimes [(\lambda_\pm - C(q)) i\gamma_5\tau^b + iB(q)\hat{q}\gamma_5\tau^b] \quad (3.85)$$

und den Eigenwerten

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2} \left(A(q) + C(q) \pm \sqrt{(A(q) - C(q))^2 + 4B^2(q)} \right) \quad (3.86)$$

Der longitudinale axiale Anteil kommt dabei als Propagator für ein physikalisches Teilchen nicht in Frage, da der Vorfaktor von $T_{a_L}(q)$ keinen Pol für $q^2 = 0$ aufweist und somit $T_{a_L}(q)$ keinem Goldstone-Teilchen entspricht. Im Gegensatz dazu besitzt der Vorfaktor von $T_\pi(q)$ einen Pol für $q^2 = 0$ und $T_\pi(q)$ kann als Pionpropagator interpretiert werden [14]. Die Pionmasse wird dabei als die Nullstelle der Determinante $D(q)$ definiert: $D(q^2 = m_\pi^2) = 0$. Zu erwähnen ist, dass der Vorfaktor $(\lambda_\pm - C(q))^2 + B^2(q)$ von $T_\pi(q)$ bzw. $T_{a_L}(q)$ nur für $q^2 \leq 4M^2$ reell bleibt. Im Bereich $q^2 > 4M^2$ besitzt der Realteil dieses Vorfaktors weitere Nullstellen (siehe Abb. 5), die aber auf Regulator-Effekte der Pauli-Villars-Regularisierung zurückzuführen sind. Abgesehen davon, wurde schon bei der Diagonalisierung vorausgesetzt, dass die Matrix \mathbf{M} hermitesch und damit der Ausdruck $(\lambda_\pm - C(q))^2 + B^2(q)$ reell ist, d.h. es werden von vornherein nur stabile Zustände betrachtet. Wie in Abbildung 5 zu erkennen, besitzt der Vorfaktor $(\lambda_- - C(q))^2 + B^2(q)$ in der Region $q^2 \leq 4M^2 \approx 0.61 \text{ GeV}^2$ keine Nullstellen und kann daher keinem physikalischen Zustand zugeordnet werden.

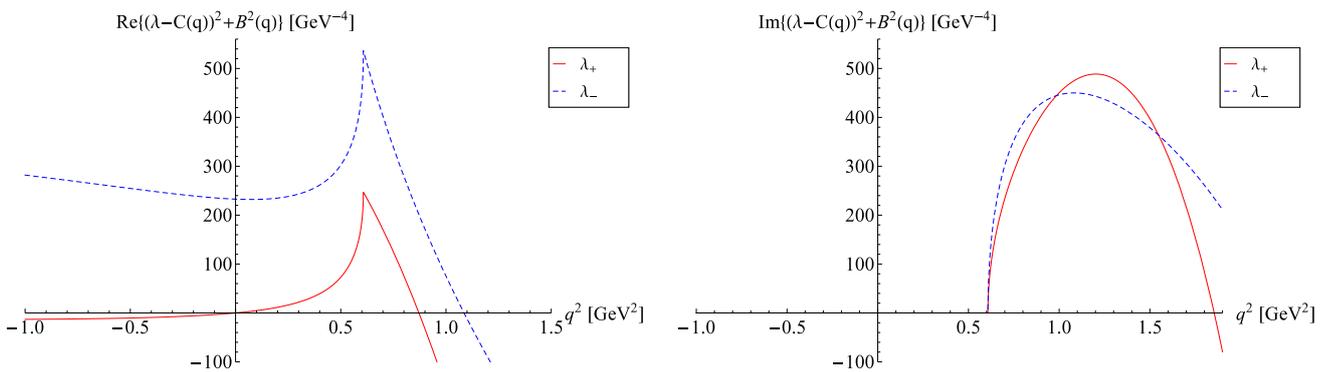


Abbildung 5: Der Realteil (links) und Imaginärteil (rechts) des Vorfaktors $(\lambda_\pm - C(q))^2 + B^2(q)$ von $T_\pi(q)$ und $T_{a_L}(q)$ über q^2 dargestellt. Der dazu verwendete Parametersatz B befindet sich in Tabelle 1 auf S. 21.

Beim Pionpropagator kann eine Polapproximation durchgeführt werden (siehe Anhang B). Dies führt zu:

$$T(q) \approx -\frac{\delta_{ab}}{q^2 - m_\pi^2} [g_{ps} i\gamma_5\tau^a - ig_{pv}\hat{q}\gamma_5\tau^a] \otimes [g_{ps} i\gamma_5\tau^b + ig_{pv}\hat{q}\gamma_5\tau^b] \quad (3.87)$$

mit den Pseudo-Skalar- und Pseudo-Vektor-Kopplungen g_{ps} und g_{pv}

$$g_{ps}^2 = -2g_s \left(1 + 2g_v \Pi_{AA}^L(m_\pi)\right) \left(\frac{dD(q)}{dq^2} \Big|_{q^2=m_\pi^2}\right)^{-1} \quad (3.88)$$

$$g_{pv}^2 = 2g_v \left(1 - 2g_s \Pi_{PP}(m_\pi)\right) \left(\frac{dD(q)}{dq^2} \Big|_{q^2=m_\pi^2}\right)^{-1} \quad (3.89)$$

$$(3.90)$$

und

$$\frac{dD(q)}{dq^2} \Big|_{q^2=m_\pi^2} = 4iN_c N_f \left[g_s I_2(m_\pi) + (g_s m_\pi^2 - 4g_v M m) \frac{dI_2(q)}{dq^2} \Big|_{q^2=m_\pi^2} \right] \quad (3.91)$$

Für $g_v = 0$ verschwindet g_{pv} und g_{ps} geht in die Quark-Pion-Kopplung $g_{\pi qq}$ aus Gleichung (3.13) über. In Abbildung 6 sind die beiden Kopplungen über das Verhältnis der beiden Kopplungskonstanten g_v und g_s dargestellt worden. Die Pseudo-Vektor-Kopplung ist dabei um eine Größenordnung kleiner als die Pseudo-Skalar-Kopplung. Mit wachsendem Verhältnis g_v/g_s steigt sowohl die Pseudo-Vektor- als auch die Pseudo-Skalar-Kopplung.

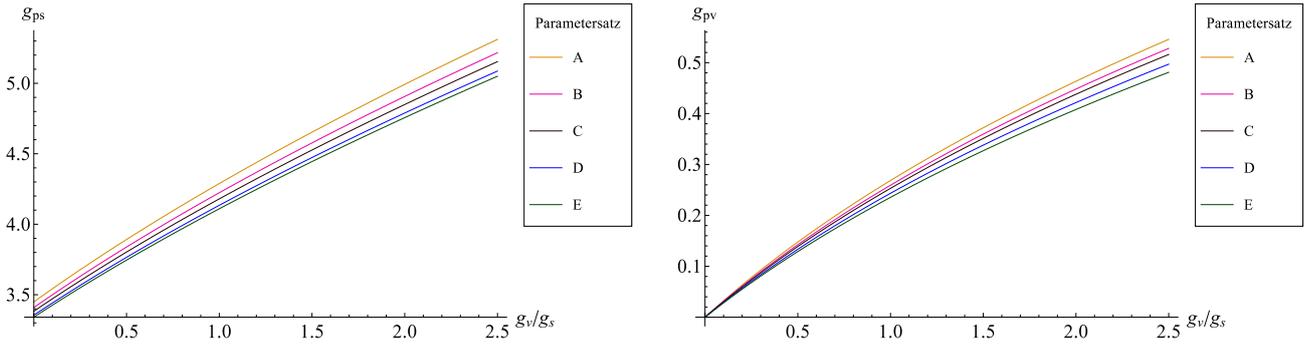


Abbildung 6: Die Pseudo-Skalar- und Pseudo-Vektor-Kopplungen g_{ps} und g_{pv} aufgetragen über das Verhältnis der Kopplungskonstanten g_v und g_s für verschiedene Parametersätze aus Tabelle 1 auf S. 21.

3.3 Mesonenmassen

3.3.1 σ -Mesonmasse

Die σ -Mesonmasse wird aus den Nullstellen des inversen skalaren Propagators bestimmt. Mit Gleichung (3.51) folgt damit:

$$1 - 2g_s \text{Re}(\Pi_{SS}(q^2 = m_\sigma^2)) = 0 \quad (3.92)$$

Aus der Darstellung des inversen σ -Mesonpropagators in Abbildung 7 stellt sich heraus, dass der Realteil zwei Nullstellen für $q^2 > 4M^2$ besitzt, wobei die erste knapp über $q^2 = 4M^2$ liegt. Sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil, der erst für $q^2 > 4M^2$ auftaucht, zeigen ein ähnliches Verhalten auf. Das Gefälle und der anschließende Anstieg der beiden Kurven wird durch die beiden Regulatoren ($c_1 = -2$ und $c_2 = 1$) im Integral $I_2(q)$ verursacht. Die zweite Nullstelle des Realteils resultiert daher aus den Regulator-Effekten und hat demnach keine physikalische Bedeutung. Folglich wird die erste Nullstelle des Realteils als die σ -Mesonmasse betrachtet. Dennoch ist das σ -Meson wegen $m_\sigma > 2M$ kein stabiler Zustand.

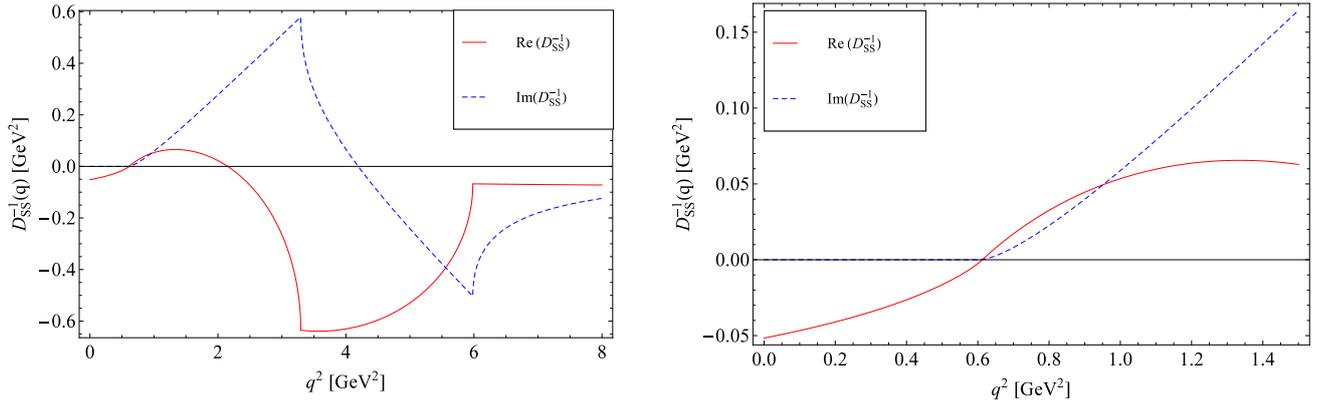


Abbildung 7: Der inverse σ -Mesonpropagator $D_{SS}^{-1}(q)$ über q^2 aufgetragen (rechts in vergrößerter Darstellung). Der dazu verwendete Parametersatz B befindet sich in Tabelle 1 auf S. 21.

3.3.2 Pionmasse

Wie in Abschnitt 3.2.2 beschrieben, lässt sich die Pionmasse durch die Nullstelle der Determinanten $D(q)$ bestimmen. Die Determinante kann mit Hilfe der Gap-Gleichung (2.38) in folgende vereinfachte Form überführt werden:

$$D(q) = (1 - 2g_s \Pi_{PP}(q)) (1 + 2g_v \Pi_{AA}^L(q)) - 4g_s g_v \Pi_{PA}^2(q) \quad (3.93)$$

$$= \frac{m}{M} + 4iN_c N_f I_2(q) (g_s q^2 - 4g_v M m) \quad (3.94)$$

Die daraus resultierende Bestimmungsgleichung für die Pionmasse

$$\frac{m}{M} + 4iN_c N_f I_2(m_\pi) (g_s m_\pi^2 - 4g_v M m) = 0 \quad (3.95)$$

wurde in Abschnitt 4 dazu verwendet um die nötigen Parameter zu erhalten. Wie in Abbildung 8 zu sehen, besitzt die Determinante nur eine Nullstelle, die als Pionmasse identifiziert wird.

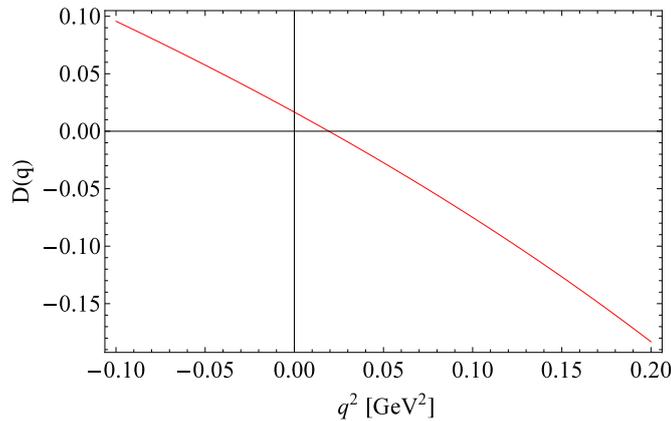


Abbildung 8: Die Determinante $D(q)$ über q^2 aufgetragen. Der dazu verwendete Parametersatz B befindet sich in Tabelle 1 auf S. 21.

3.3.3 ρ -Mesonmasse

Der vektorielle Propagator entkoppelt zu einem longitudinalen und transversalen Anteil:

$$D_{VV}^T(q) = \frac{2g_v}{1 + 2g_v \Pi_{VV}^T(q)} \quad (3.96)$$

$$D_{VV}^L = 2g_v \quad (3.97)$$

Da der longitudinale Anteil offensichtlich keine Polstellen verfügt, wird der transversale Anteil als der ρ -Mesonpropagator definiert. Mit der Gleichung

$$1 + 2g_V \text{Re}(\Pi_{VV}^T(q^2 = m_\rho^2)) = 0 \quad (3.98)$$

lässt sich die ρ -Mesonmasse berechnen. Der Realteil des inversen ρ -Mesonpropagators weist ebenfalls wie der σ -Mesonpropagator zwei Nullstellen auf (siehe Abb. 9). Allerdings liegt hier die erste Nullstelle bei $q^2 < 4M^2$, d.h. es handelt sich um einen gebundenen Zustand. Daher wird die erste Nullstelle als die ρ -Mesonmasse interpretiert.

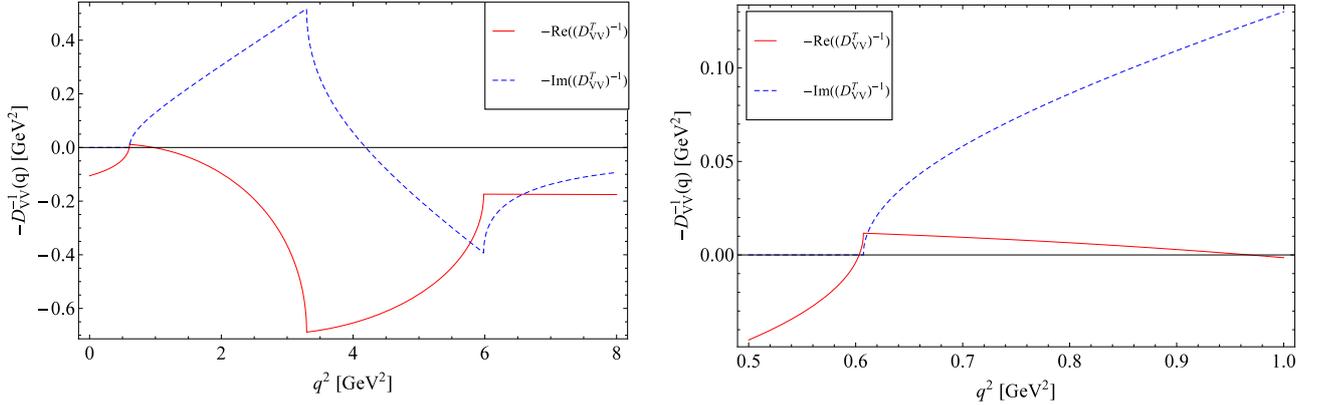


Abbildung 9: Der inverse transversale Anteil $(-D_{VV}^T(q))^{-1}$ des vektoriellen Propagators für Parametersatz B aus Tabelle 1 über q^2 aufgetragen (rechts in vergrößerter Darstellung).

3.3.4 a_1 -Mesonmasse

Der Realteil des transversalen axialen Propagators besitzt für die Parametersätze aus Tabelle 1 keine Polstellen (siehe Abb. 10), sodass keine a_1 -Mesonmasse bestimmt werden konnte. Um eine a_1 -Mesonmasse zu erhalten, müsste der Cutoff-Parameter höher gewählt werden. Doch es stellte sich bei der Parameterbestimmung heraus, dass dann der Wert für das Quarkkondensat zu stark vom Literaturwert abweicht. Andererseits liegt der Literaturwert für die a_1 -Mesonmasse bei (1230 ± 40) MeV [15] und somit innerhalb des Zerfallskanals $q^2 > 4M^2$, d.h. der a_1 -Zustand ist im NJL-Modell immer instabil.

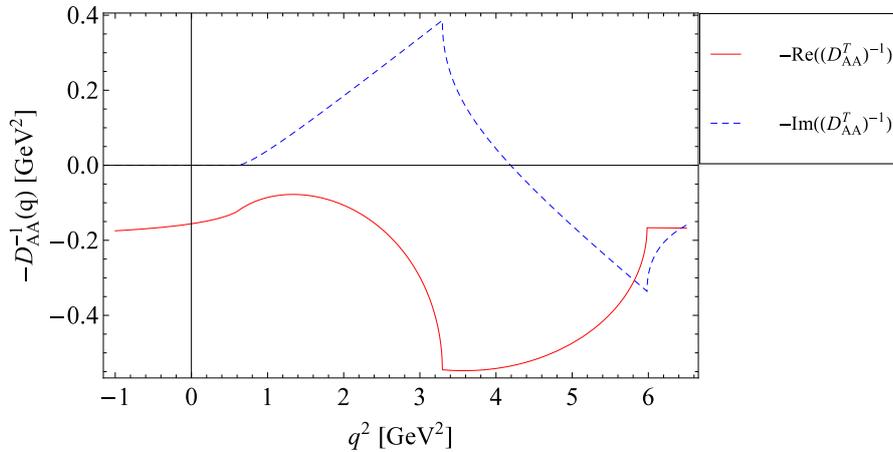


Abbildung 10: Der Real- und Imaginärteil des inversen a_1 -Mesonpropagator $(-D_{AA}^T(q))^{-1}$ für Parametersatz B über q^2 aufgetragen.

3.4 Pionzerfallskonstante

Die geladenen Pionen können über die schwache Wechselwirkung in ein Lepton und Leptonneutrino zerfallen, wobei der myonische Zerfall $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \bar{\nu}^{(-)}$ gegenüber dem elektronischen Zerfall $\pi^\pm \rightarrow e^\pm + \bar{\nu}^{(-)}$ stark dominiert. Die Pionzerfallskonstante taucht dabei in der Streuamplitude als Formfaktor auf [16] und ist über das Matrixelement

$$\langle 0 | A^{\mu,a} | \pi^b(q) \rangle = \langle 0 | \bar{\psi}(0) \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \psi(0) | \pi^b(q) \rangle = i f_\pi q^\mu \delta_{ab} \quad (3.99)$$

des Axialvektorstroms zwischen dem Vakuum- und Pionzustand gegeben [7,8]. Dies ist in Abbildung 11 diagrammatisch dargestellt worden. Die Pionzerfallskonstante gibt dabei an, wie stark die chirale Symmetrie gebrochen ist. Mit dem ersten Vertex des Pionpropagators in Polapproximation aus Gleichung (3.87)

$$g_{ps} i \gamma_5 \tau^b - i g_{pv} \hat{q} \gamma_5 \tau^b \quad (3.100)$$

kann die Pionzerfallskonstante in RPA über

$$f_\pi q^\mu \delta_{ab} = i g_{ps} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} S(k+q) \gamma_5 \tau^b S(k) \right] - i g_{pv} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} S(k+q) \hat{q} \gamma_5 \tau^b S(k) \right] \quad (3.101)$$

bestimmt werden. Die Rechnung dazu befindet sich im Anhang C. Für die Pionzerfallskonstante folgt daraus:

$$f_\pi = -2i N_c N_f M I_2(m_\pi) \left(g_{ps} - \frac{2M}{m_\pi} g_{pv} \right) \quad (3.102)$$

$$= \frac{1}{2m_\pi} \left(i g_{ps} \Pi_{PA}(m_\pi) - g_{pv} \Pi_{AA}^L(m_\pi) \right) \quad (3.103)$$

Der erste Term entspricht dabei dem Fall ohne Vektorwechselwirkungen. Diese Gleichung wurde im nächsten Abschnitt zur Bestimmung der Parameter verwendet.

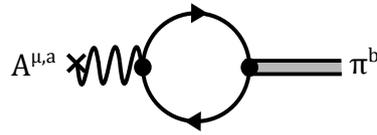


Abbildung 11: Darstellung des Matrixelements $\langle 0 | A^{\mu,a} | \pi^b(q) \rangle$: Der Axialstrom $A^{\mu,a}$ koppelt über eine Polarisationsschleife mit dem Pion.

4 Parameterbestimmung

Zur Bestimmung der vier Parameter Λ , m , g_s und g_v wurde die Pionmasse, die Pionzerfallskonstante und die ρ -Mesonmasse an die jeweiligen Literaturwerte aus [15] $m_\pi = 139$ MeV, $f_\pi = 92.21$ MeV und $m_\rho = 775.49$ MeV angepasst. Dazu wurde das gekoppelte System aus den Gleichungen (2.38), (2.44), (3.95), (3.98) und (3.102) numerisch gelöst. Da der empirische Wert für das Quarkkondensat nicht genau bekannt ist, wurde diese als vierte benötigte Größe im Bereich $(328 \text{ MeV})^3 \leq -\langle\bar{\psi}\psi\rangle \leq (360 \text{ MeV})^3$ variiert. Die Gap-Gleichung wurde hinzugenommen um die Konstituentenquarkmasse M , die in jeder der anderen Gleichungen auftaucht, als fünfte Größe zu berechnen. In Tabelle 1 sind alle Parameter und die daraus berechneten Werte zusammengetragen. Allgemein ergeben sich für $-\langle\bar{\psi}\psi\rangle < (320 \text{ MeV})^3$ größere ρ -Mesonmassen bezüglich des Literaturwertes. Dies ist aber nicht problematisch, da die ρ -Mesonmasse, wie in [13, 17] beschrieben, durch Hinzunahme von Selbstenergiekorrekturen der nächsthöheren Ordnung in $1/N_c$ niedriger wird. Der empirische Wert für das Quarkkondensat pro Flavour $-\langle\bar{u}u\rangle$ sollte unter $(260 \text{ MeV})^3$ (bei einer Renormierungsskala von 1 GeV) liegen [13]. Es war somit nicht möglich einen Wert für das Quarkkondensat in diesem Bereich zu wählen ohne dabei größere Abweichung der ρ -Mesonmasse zu erhalten. Die empirischen Werte für die Pionmasse und Pionzerfallskonstante konnten mit den bestimmten Parameter gut reproduziert werden, wobei die Abweichung in den Nachkommastellen sich durch Rundungsfehler der Parameter ergab.

Tabelle 1: Die Modellparameter Λ , m , g_s und g_v und die daraus erhaltenen Werte für die Konstituentenquarkmasse M , die Mesonmassen m_σ , m_π , m_ρ , die Pionzerfallskonstante f_π , das Quarkkondensat $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$, das Quarkkondensat pro Flavour $\langle\bar{u}u\rangle$, die Pseudo-Skalar- und Pseudo-Vektor-Kopplungen g_{ps} und g_{pv} .

	A	B	C	D	E
Λ [MeV]	800.2	819.7	833.5	860	885.5
m [MeV]	4.67	4.38	4.19	3.84	3.53
$g_s\Lambda^2$	3.47	3.44	3.42	3.40	3.39
$g_v\Lambda^2$	2.80	3.19	3.47	4.07	4.69
g_v/g_s	0.81	0.93	1.01	1.20	1.38
M [MeV]	387.26	389.63	391.35	398.35	406.99
m_σ [MeV]	799.79	805.78	810.16	828.95	852.60
m_π [MeV]	139	139	139	139	139
m_ρ [MeV]	774.52	776.70	776.15	776.55	775.67
f_π [MeV]	92.23	92.23	92.23	92.23	92.23
$-\langle\bar{\psi}\psi\rangle^{1/3}$ [MeV]	328	335	340	350	360
$-\langle\bar{u}u\rangle^{1/3}$ [MeV]	260.36	265.96	269.90	277.87	285.74
g_{ps}	4.14	4.17	4.19	4.27	4.37
g_{pv}	0.22	0.24	0.26	0.28	0.31
g_{pv}/g_{ps}	0.054	0.058	0.061	0.066	0.07

5 Chirale Theoreme

Die chirale Symmetrie bildet eine der Schwerpunkte des NJL-Modells. Im NJL-Modell müssen daher die chirale Theoreme unabhängig von der Regularisierung erfüllt sein. In den folgenden Unterabschnitten werden das Goldstone-Theorem, die Goldberger-Treiman-Relation (GTR) und die Gell-Mann-Oakes-Renner-Relation (GMOR-Relation) verifiziert.

5.1 Goldstone-Theorem

Aufgrund der nicht verschwindenden Konstituentenquarkmasse, die durch die Gap-Gleichung erzeugt wird, ist die chirale Symmetrie spontan gebrochen. Das Goldstone-Theorem sagt nun die Existenz von masselosen Goldstone-Bosonen voraus. Im NJL-Modell für $N_f = 2$ sind dies die Pionen, deren Masse sich nach der Umstellung der Gleichung (3.95) ergibt:

$$m_\pi^2 = \frac{m}{g_s} \left(4g_v M - \frac{1}{4iN_c N_f M I_2(m_\pi)} \right) \quad (5.1)$$

Im chiralen Limes ($m = 0$) können die Pionen daher als masselose Goldstone-Bosonen betrachtet werden. Da aber $m \neq 0$ gilt, besitzen die Pionen eine geringe Masse und die chirale Symmetrie ist deswegen nur näherungsweise erfüllt. In Abschnitt 3.1 wurde erwähnt, dass das Goldstone-Theorem nicht erfüllt wird, wenn die originale Pauli-Villars-Regularisierung (Ersetzung der effektiven Masse im gesamten Ausdruck durch Summe aus Regulatoren) durchgeführt wird. Dies kann man für den Fall ohne Vektorwechselwirkungen wie folgt einsehen. Für $g_v = 0$ nimmt die Determinante aus Gleichung (3.74) die Form

$$D(q) = 1 - 2g_s \Pi_{PP}(q) = 1 - 4iN_c N_f g_s (2I_1 - q^2 I_2(q)) \quad (5.2)$$

an. Im Falle masseloser Goldstone-Bosonen ($q^2 = 0$) wird mit der Gap-Gleichung

$$M = m + 8iN_c N_f g_s M I_1(M) \quad (5.3)$$

daraus

$$D(0) = 1 - 8iN_c N_f g_s I_1 = \frac{m}{M} \quad (5.4)$$

Das Goldstone-Theorem ist also mit der Standardform der Pauli-Villars-Regularisierung im NJL-Modell (Regularisierung nur der Integrale) im chiralen Limes verträglich. Wenn aber die vollständig regularisierte Gap-Gleichung

$$\sum_{j=0}^2 c_j \mu_j = m + 8N_c N_f g_s \sum_{j=0}^2 \frac{c_j}{(4\pi)^2} \mu_j^3 \ln(\mu_j^2) \quad (5.5)$$

betrachtet wird, so tauchen auf der rechten Seite von Gleichung (5.4) Terme auf, die auch im chiralen Limes nicht verschwinden. Folglich führt die Regularisierung der gesamten Gap-Gleichung dazu, dass das Goldstone-Theorem nicht mehr gilt. Deswegen wurden in dieser Arbeit von Anfang an nur die Integrale regularisiert.

5.2 Goldberger-Treiman-Relation

Die Goldberger-Treiman-Relation verknüpft die Pseudo-Skalar- und die Pseudo-Vektor-Kopplung g_{ps} und g_{pv} und die Pionzerfallskonstante mit der Konstituentenquarkmasse und Axialvektorkopplung g_A über die Beziehung [7]

$$f_\pi \left(g_{ps} - \frac{2M}{m_\pi} g_{pv} \right) = M g_A \quad (5.6)$$

Dabei ist die Axialvektorkopplung über den axialen Formfaktor

$$G_A(q) = \frac{1}{1 + 2g_v \Pi_{AA}^T(q)} \quad (5.7)$$

durch

$$g_A = G_A(0) \quad (5.8)$$

gegeben [14, 18]. Der axiale Formfaktor ist dabei ein Maß für die Stärke des Axialvektorstroms. Wie in Abbildung 12 zu sehen, besitzt der axiale Formfaktor für $q^2 \approx 1$ GeV ein Maximum. Die Vektorwechselwirkungen bewirken, dass die Axialvektorkopplung von $g_A = 1$ auf $g_A < 1$ reduziert wird. Anschaulich gesprochen, schirmen die a_1 -Mesonenwolken die Konstituentenquarks ab. Dieser Screening-Effekt ist auch im Konstituenten-Quarkmodell vorhanden, der zur Abnahme der Axialvektorkopplung des Nukleons von $g_A^N = 5/3$ auf $g_A^N = 5/3 \cdot 3/4 = 5/4$ durch die Anwesenheit von $J^P = 1^+$ -Anregungen führt. Die Goldberger-Treiman-Relation ist dabei, wie Tabelle 2 zeigt, konsistent mit dem Screening-Effekt.

Tabelle 2: In der Tabelle sind die berechneten Werte für die Axialvektorkopplung g_A aufgezeigt. Weiterhin ist zu erkennen, dass die Goldberger-Treiman-Relation erfüllt ist.

	A	B	C	D	E
M [MeV]	387.26	389.63	391.35	398.35	406.99
m_π [MeV]	139	139	139	139	139
f_π [MeV]	92.23	92.23	92.23	92.23	92.23
g_{ps}	4.14	4.17	4.19	4.27	4.37
g_{pv}	0.22	0.24	0.26	0.28	0.31
g_A	0.70	0.68	0.66	0.62	0.59
$f_\pi (g_{ps} - 2M g_{pv}/m_\pi)/M$	0.69	0.66	0.65	0.61	0.58

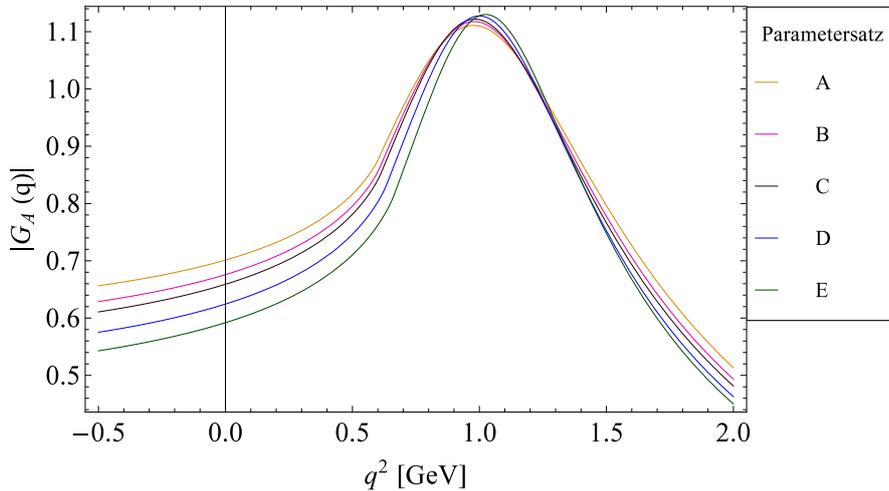


Abbildung 12: Der Betrag des axialen Formfaktor $G_A(q)$ über q^2 dargestellt.

5.3 Gell-Mann-Oakes-Renner-Relation

Die chirale Symmetrie ist sowohl explizit als auch spontan gebrochen. Die Größen, die damit verknüpft sind, stehen dabei zu der Masse der Goldstone-Bosonen über die Gell-Mann-Oakes-Renner (GMOR)-Relation in Beziehung. Speziell für die Pionen lautet die GMOR-Relation wie folgt [7]:

$$m_\pi^2 = -\frac{m}{f_\pi^2} \langle \bar{\psi}\psi \rangle + \mathcal{O}(m^2) \quad (5.9)$$

Wie in Tabelle 3 zu sehen, ist die GMOR-Relation im NJL-Modell erfüllt. Dies ist aber nicht sonderlich überraschend, da die GMOR-Relation auf chiralen Strömen beruht.

Tabelle 3: Tabelle zur Gell-Mann-Oakes-Renner-Relation

	A	B	C	D	E
m [MeV]	4.8	4.38	4.19	3.84	3.53
m_π [MeV]	139.07	139.07	139.05	139.07	139.06
f_π [MeV]	92.23	92.23	92.23	92.23	92.23
$-\langle \bar{\psi}\psi \rangle^{1/3}$ [MeV]	328.04	335.08	340.06	350.09	360.01
$-m \langle \bar{\psi}\psi \rangle / f_\pi^2$ [MeV ²]	$(139.20)^2$	$(139.19)^2$	$(139.17)^2$	$(139.18)^2$	$(139.15)^2$

6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde das Nambu-Jona-Lasinio-Modell mit Vektorwechselwirkungen für zwei Quarkflavour betrachtet. Aus dem NJL-Lagrangian konnte in Hartree-Näherung die Gap-Gleichung hergeleitet werden. Die Lösung dieser Gleichung ergab eine weitaus größere effektive Masse im Vergleich zur Stromquarkmasse und wird daher als Ursache für die spontane Symmetriebrechung betrachtet. Mit der effektiven Masse wurde daraufhin das Quarkkondensat als weiterer Ordnungsparameter für spontane Symmetriebrechung eingeführt.

Weiterhin wurden kollektive Anregungen in der Quark-Antiquark-Streuung behandelt, die aufgrund der übereinstimmten Quantenzahlen im Quarkmodell als Mesonen interpretiert wurden. Die Beschreibung der Streumatrizen erfolgte über die Bethe-Salpeter Gleichung in Random-Phase-Approximation. Als Besonderheit wies der Pionsektor eine Kopplung zwischen dem pseudoskalaren und axialen Kanal auf. Mit einer Diagonalisierung wurde die zugehörige Streumatrix in einen reinen Pionanteil und einen longitudinalen axialen Anteil aufgespalten, wobei letzterer keinem physikalischen Teilchen zugeordnet werden konnte. Desweiteren wurde eine Polapproximation durchgeführt, wodurch der longitudinale axiale Anteil verschwand und der Pionpropagator zusätzlich zu der Pseudo-Skalar-Kopplung noch eine Pseudo-Vektor-Kopplung aufwies. Mit den entsprechenden Mesonenpropagatoren wurde die σ -, π - und die ρ -Mesonmasse bestimmt. Eine a_1 -Mesonmasse konnte nicht berechnet werden, da der Realteil des inversen a_1 -Mesonpropagators keine Nullstelle besitzt. Als letzte Größe für die Parameterbestimmung wurde die Pionzerfallskonstante bestimmt.

Der nächste Schritt war die Berechnung der notwendigen Parameter, die mit den Literaturwerten für die Pionmasse, die Pionzerfallskonstante, die ρ -Mesonmasse und des Quarkkondensats festgesetzt wurden. Es stellte sich heraus, dass eine Wahl des Quarkkondensats im Bereich $-\langle \bar{\psi}\psi \rangle < (320 \text{ MeV})^3$ zu höheren ρ -Mesonmassen führt. Mit den bestimmten Parametern konnte die Gültigkeit der Goldberger-Treiman-Relation und der Gell-Mann-Oakes-Renner-Relation nachgewiesen werden.

Die Parameter könnten verbessert werden, indem höhere Beiträge der Ordnung in $1/N_c$ berücksichtigt werden. Dadurch könnte eine höhere ρ -Mesonmasse in RPA zugelassen werden, die durch Korrekturen in nächsthöherer Ordnung in $1/N_c$ erniedrigt wird. Aber auch eine Erweiterung des Nambu-Jona-Lasinio-Modells auf drei Quarkflavour wäre denkbar.

A Integrale

A.1 Berechnung des Integrals I_1

Zuerst wird das Integral umgeschrieben:

$$I_1 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M^2 + i\epsilon} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{k_0^2 - \vec{k}^2 - M^2 + i\epsilon} \quad (\text{A.1})$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{k_0^2 - E_{\vec{k}}^2 + i\epsilon} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{(k_0 - E_{\vec{k}} + i\epsilon')(k_0 + E_{\vec{k}} - i\epsilon')} \quad (\text{A.2})$$

$$\text{mit } E_{\vec{k}}^2 = \vec{k}^2 + M^2 \text{ und } \epsilon' = \frac{\epsilon}{2E_{\vec{k}}} \quad (\text{A.3})$$

Die k_0 -Integration kann mit Hilfe des Residuensatzes durchgeführt werden. Dabei wird als Integrationscontour ein Halbkreis in der oberen Halbebene gewählt (Abb. 13). Das Integral über den Halbkreis verschwindet für $|k_0| \rightarrow \infty$, sodass nur noch der Pol bei $k_0 = -E_{\vec{k}} + i\epsilon'$ zur Integration beiträgt.

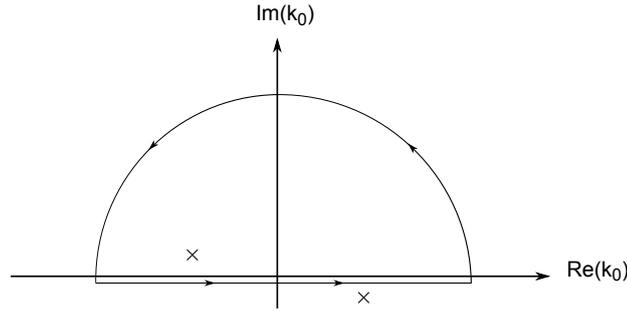


Abbildung 13: Integrationscontour mit den beiden Polen bei $k_0 = \pm E_{\vec{k}} \mp i\epsilon'$

$$I_1 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{2\pi i}{2\pi} \lim_{k_0 \rightarrow -E_{\vec{k}} + i\epsilon'} \frac{k_0 + E_{\vec{k}} - i\epsilon'}{(k_0 - E_{\vec{k}} + i\epsilon')(k_0 + E_{\vec{k}} - i\epsilon')} \quad (\text{A.4})$$

$$= \frac{i}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{-E_{\vec{k}} + i\epsilon'} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{i} \int_0^{\infty} dk \frac{\vec{k}^2}{\sqrt{\vec{k}^2 + M^2}} \quad (\text{A.5})$$

Im letzten Schritt wurde der Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ gebildet und das Integral in Kugelkoordinaten ausgedrückt. Dieses divergiert offensichtlich im Unendlichen und muss daher regularisiert werden. Im Folgendem wurde eine Pauli-Villars-Regularisierung durchgeführt. Mit der Ersetzung

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k, M) \rightarrow \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sum_{j=0}^2 c_j f(k, \mu_j) \quad (\text{A.6})$$

$$\text{mit } c_0 = 1, \quad c_1 = -2, \quad c_2 = 1; \quad \mu_j^2 = M^2 + j\Lambda^2 \quad (\text{A.7})$$

aus Abschnitt 2.3 ergibt sich für das Integral I_1 :

$$I_1 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \sum_{j=0}^2 \frac{c_j}{k^2 - \mu_j^2 + i\epsilon} = \frac{1}{(2\pi)^2 i} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^2 \int_0^\lambda dk \frac{c_j \cdot \vec{k}^2}{\sqrt{\vec{k}^2 + \mu_j^2}} \quad (\text{A.8})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2 i} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^2 c_j \frac{1}{2} \left(|\vec{k}| \sqrt{\vec{k}^2 + \mu_j^2} - \mu_j^2 \ln \left(|\vec{k}| + \sqrt{\vec{k}^2 + \mu_j^2} \right) \right) \Big|_0^\lambda \quad (\text{A.9})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2 i} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^2 \frac{c_j}{2} \left(\lambda \sqrt{\lambda^2 + \mu_j^2} - \mu_j^2 \ln \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \mu_j^2} \right) + \mu_j^2 \ln \mu_j \right) \quad (\text{A.10})$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2 i} \sum_{j=0}^2 c_j \cdot \mu_j^2 \ln(\mu_j^2) \quad (\text{A.11})$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2 i} \left[M^2 \ln(M^2) - 2(M^2 + \Lambda^2) \ln(M^2 + \Lambda^2) + (M^2 + 2\Lambda^2) \ln(M^2 + 2\Lambda^2) \right] \quad (\text{A.12})$$

A.2 Berechnung des Integrals $I_2(q)$

Das Vorgehen verläuft analog wie in Abschnitt A.1. Für die k_0 -Integration wird das Integral $I_2(q)$ zunächst umgeformt:

$$I_2(q) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M^2 + i\epsilon) \left((k+q)^2 - M^2 + i\epsilon \right)} \quad (\text{A.13})$$

$$= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{(k_0^2 - E_{\vec{k}}^2 + i\epsilon) \left((k_0 + q_0)^2 - E_{\vec{k}+\vec{q}}^2 + i\epsilon \right)} \quad (\text{A.14})$$

$$= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{(k_0 - E_{\vec{k}} + i\epsilon') (k_0 + E_{\vec{k}} - i\epsilon') (k_0 + q_0 - E_{\vec{k}+\vec{q}} + i\epsilon'') (k_0 + q_0 + E_{\vec{k}+\vec{q}} - i\epsilon'')} \quad (\text{A.15})$$

$$\text{mit } E_{\vec{k}}^2 = \vec{k}^2 + M^2 \text{ und } E_{\vec{k}+\vec{q}}^2 = (\vec{k} + \vec{q})^2 + M^2 \quad (\text{A.16})$$

Hierbei ist $\epsilon' = \epsilon/(2E_{\vec{k}})$ und $\epsilon'' = \epsilon/(2E_{\vec{k}+\vec{q}})$. Als Integrationscontour eignet sich wieder ein Halbkreis in der oberen Halbebene. Von den vier Polen tragen dann nur noch die zwei $k_0 = -E_{\vec{k}} + i\epsilon'$ und $k_0 = -q_0 - E_{\vec{k}+\vec{q}} + i\epsilon''$ zur k_0 -Integration bei (siehe Abb. 14).

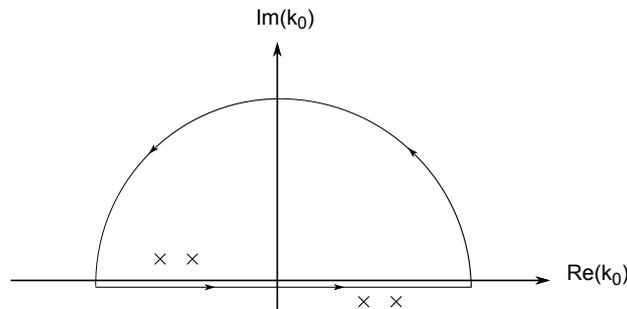


Abbildung 14: Integrationscontour mit den vier Polen bei $k_0 = \pm E_{\vec{k}} \mp i\epsilon'$ und $k_0 = -q_0 \pm E_{\vec{k}+\vec{q}} \mp i\epsilon''$. In der Abbildung sind die beiden Polepaare in der unteren und oberen Halbebene auf der imaginären Achse auf gleicher Höhe skizziert, da die Verschiebung von ϵ' bzgl. ϵ'' infinitesimal ist.

$$I_2(q) = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{-1}{2(q_0 + E_{\vec{k}+\vec{q}} - E_{\vec{k}})} \left(\frac{1}{E_{\vec{k}}(q_0 - E_{\vec{k}} - E_{\vec{k}+\vec{q}})} + \frac{1}{E_{\vec{k}+\vec{q}}(q_0 + E_{\vec{k}} + E_{\vec{k}+\vec{q}})} \right) \right] \quad (\text{A.17})$$

$$= \frac{1}{2i} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{q_0(E_{\vec{k}} + E_{\vec{k}+\vec{q}}) + E_{\vec{k}+\vec{q}}^2 - E_{\vec{k}}^2}{E_{\vec{k}}E_{\vec{k}+\vec{q}}(q_0^2 - (E_{\vec{k}} + E_{\vec{k}+\vec{q}})^2)(q_0 + E_{\vec{k}+\vec{q}} - E_{\vec{k}})} \quad (\text{A.18})$$

$$= \frac{1}{2i} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{E_{\vec{k}} + E_{\vec{k}+\vec{q}}}{E_{\vec{k}}E_{\vec{k}+\vec{q}}(q_0^2 - (E_{\vec{k}} + E_{\vec{k}+\vec{q}})^2)} \quad (\text{A.19})$$

$$= \frac{1}{2i} \left[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\vec{k}+\vec{q}}(q_0^2 - (E_{\vec{k}} + E_{\vec{k}+\vec{q}})^2)} + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\vec{k}}(q_0^2 - (E_{\vec{k}} + E_{\vec{k}+\vec{q}})^2)} \right] \quad (\text{A.20})$$

$$= \frac{1}{i} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\vec{k}} q_0^2 - (E_{\vec{k}} + E_{\vec{k}+\vec{q}})^2} = \frac{1}{i} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\vec{k}} q^2 - 4E_{\vec{k}}^2} \quad (\text{A.21})$$

Im vorletzten Schritt kann das erste Integral durch die Substitution $\vec{k} \rightarrow -\vec{k} - \vec{q}$ in das zweite Integral überführt werden. Da später Mesonmassen im Vakuum bestimmt werden, wird im letzten Schritt ins Ruhesystem übergangen um die Berechnung des Integrals zu vereinfachen: $q_0^2 = q^2$ und $\vec{q} = 0$. Bei Bedarf kann dann das Integral mit der Lorentztransformation ins bewegte Bezugssystem überführt werden. Dieses Integral divergiert logarithmisch und muss daher auch wie I_1 mit der Pauli-Villars-Methode regularisiert werden:

$$I_2(q) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sum_{j=0}^2 \frac{c_j}{(k^2 - \mu_j^2 + i\epsilon)((k+q)^2 - \mu_j^2 + i\epsilon)} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{j=0}^2 \frac{c_j}{\sqrt{\vec{k}^2 + \mu_j^2} (q^2 - 4(\vec{k}^2 + \mu_j^2))} \quad (\text{A.22})$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^2 \frac{c_j}{2\pi^2 i} \int_0^\lambda dk \frac{\vec{k}^2}{\sqrt{\vec{k}^2 + \mu_j^2} (q^2 - 4(\vec{k}^2 + \mu_j^2))} \quad (\text{A.23})$$

Das obige Integral kann mit der Substitution $z^2 = \vec{k}^2 / (\vec{k}^2 + \mu_j^2)$ und anschließender Partialbruchzerlegung auf folgende Form gebracht werden:

$$I_2(q) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^2 \frac{2c_j}{(4\pi)^2 i} \left(\int_0^{\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu_j^2}}} \frac{z^2}{z^2 - 1} dz - \int_0^{\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu_j^2}}} \frac{z^2}{z^2 - 1 + \frac{4\mu_j^2}{q^2}} dz \right) \quad (\text{A.24})$$

Die Lösung zu den beiden Integralen kann in einer Formelsammlung nachgeschaut werden. Insgesamt ergibt sich:

$$I_2(q) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^2 \frac{c_j}{(4\pi)^2 i} \left(-2 \operatorname{artanh} \left(\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu_j^2}} \right) \right) \quad (\text{A.25})$$

$$+ \left(\begin{array}{l} 2\sqrt{\frac{4\mu_j^2 - q^2}{q^2}} \operatorname{arctan} \left(\sqrt{\frac{\lambda^2 q^2}{(4\mu_j^2 - q^2)(\lambda^2 + \mu_j^2)}} \right), \quad \text{für } (q^2 < 4\mu_j^2) \vee (q^2 < 0) \\ 2\sqrt{\frac{q^2 - 4\mu_j^2}{q^2}} \operatorname{artanh} \left(\sqrt{\frac{\lambda^2 q^2}{(q^2 - 4\mu_j^2)(\lambda^2 + \mu_j^2)}} \right), \quad \text{für } q^2 > 4\mu_j^2 \\ 0, \quad \text{für } q^2 = 4\mu_j^2 \end{array} \right) \quad (\text{A.26})$$

Der zweite Term konvergiert für $\lambda \rightarrow \infty$, während beim ersten sich die divergenten Anteile in der Summe wegheben:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^2 -2c_j \operatorname{artanh} \left(\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu_j^2}} \right) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^2 c_j \left(\ln(\mu_j^2) - 2 \ln(\sqrt{\lambda^2 + \mu_j^2} + \lambda) \right) = \sum_{j=0}^2 c_j \ln(\mu_j^2) \quad (\text{A.27})$$

Damit ergibt sich nun:

$$I_2(q) = \frac{1}{(4\pi)^2 i} \sum_{j=0}^2 c_j \left(\ln(\mu_j^2) + \begin{cases} 2 \cdot \sqrt{-x_j} \cdot \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{-x_j}}\right), & \text{für } (q^2 < 4\mu_j^2) \vee (q^2 < 0) \\ 2 \cdot \sqrt{x_j} \cdot \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{\sqrt{x_j}}\right), & \text{für } q^2 > 4\mu_j^2 \\ 0, & \text{für } q^2 = 4\mu_j^2 \end{cases} \right) \quad (\text{A.28})$$

$$\text{mit } c_0 = 1, \quad c_1 = -2, \quad c_2 = 1; \quad \mu_j^2 = M^2 + j\Lambda^2 \text{ und } x_j = (q^2 - 4\mu_j^2)/q^2 \quad (\text{A.29})$$

Weiterhin kann der Fall $q^2 < 0$ mit Hilfe der Beziehung $\arctan(ix) = i \operatorname{artanh}(x)$ in den zweiten Ausdruck absorbiert werden, sodass sich das Integral zusammengefasst wie folgt schreiben lässt:

$$I_2(q) = \frac{1}{(4\pi)^2 i} \sum_{j=0}^2 c_j \left(\ln(\mu_j^2) + 2 \cdot f(x_j) \right) \quad (\text{A.30})$$

mit

$$f(x_j) = \begin{cases} \sqrt{-x_j} \cdot \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{-x_j}}\right), & \text{für } x_j < 0 \\ \sqrt{x_j} \cdot \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{\sqrt{x_j}}\right), & \text{für } x_j > 0 \\ 0, & \text{für } x_j = 0 \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

A.3 Berechnung des Integrals $dI_2(q)/dq^2$

Die Ableitung des Integrals $I_2(q)$ nach q^2 konvergiert zwar, dennoch wird diese aus Konsistenzgründen mit der Pauli-Villars-Methode regularisiert. Die Berechnung erfolgt daher mit dem Ergebnis aus Abschnitt A.2:

$$\frac{dI_2(q)}{dq^2} = \frac{d}{dq^2} \left[\frac{1}{(4\pi)^2 i} \sum_{j=0}^2 c_j \left(\ln(\mu_j^2) + 2 \cdot f(x_j) \right) \right] \quad (\text{A.32})$$

$$= \frac{2}{(4\pi)^2 i} \sum_{j=0}^2 c_j \frac{\partial x_j}{\partial q^2} \cdot \frac{\partial f(x_j)}{\partial x_j} \quad (\text{A.33})$$

$$= \frac{2}{(4\pi)^2 i} \sum_{j=0}^2 c_j \frac{4\mu_j^2}{q^4} \cdot \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-x_j} - \frac{1}{\sqrt{-x_j}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{-x_j}}\right) \right], & \text{für } x_j < 0 \\ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-x_j} + \frac{1}{\sqrt{x_j}} \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{\sqrt{x_j}}\right) \right], & \text{für } x_j > 0 \\ 0, & \text{für } x_j = 0 \end{cases} \quad (\text{A.34})$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2 i} \sum_{j=0}^2 c_j \frac{1-x_j}{4\mu_j^2} \cdot \begin{cases} 1 + \frac{1-x_j}{x_j} \sqrt{-x_j} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{-x_j}}\right), & \text{für } x_j < 0 \\ 1 + \frac{1-x_j}{x_j} \sqrt{x_j} \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{\sqrt{x_j}}\right), & \text{für } x_j > 0 \\ 0, & \text{für } x_j = 0 \end{cases} \quad (\text{A.35})$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2 i} \sum_{j=0}^2 c_j \frac{g(x_j)}{4} \quad (\text{A.36})$$

mit

$$g(x_j) = \frac{1-x_j}{\mu_j^2} \cdot \begin{cases} 1 + \frac{1-x_j}{x_j} \sqrt{-x_j} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{-x_j}}\right), & \text{für } x_j < 0 \\ 1 + \frac{1-x_j}{x_j} \sqrt{x_j} \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{\sqrt{x_j}}\right), & \text{für } x_j > 0 \\ 0, & \text{für } x_j = 0 \end{cases} \quad (\text{A.37})$$

$$(\text{A.38})$$

B Diagonalisierung und Polapproximation von $T(q)$

Im Folgendem soll die Streumatrix $T(q)$ aus Abschnitt 3.2.2 diagonalisiert werden:

$$T(q) = -\delta_{ab} (i\gamma_5 \tau^a, \hat{q}\gamma_5 \tau^a) \begin{pmatrix} D_{PP}(q) & D_{PA}(q) \\ D_{AP}(q) & D_{AA}^L(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\gamma_5 \tau^b \\ \hat{q}\gamma_5 \tau^b \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$$= -\frac{\delta_{ab}}{D(q)} (i\gamma_5 \tau^a, \hat{q}\gamma_5 \tau^a) \underbrace{\begin{pmatrix} A(q) & iB(q) \\ -iB(q) & C(q) \end{pmatrix}}_{=\mathbf{M}} \begin{pmatrix} i\gamma_5 \tau^b \\ \hat{q}\gamma_5 \tau^b \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

mit

$$A(q) = -2g_s (1 + 2g_v \Pi_{AA}^L(q)) \quad (\text{B.3})$$

$$B(q) = -4ig_s g_v \Pi_{PA}(q) \quad (\text{B.4})$$

$$C(q) = 2g_s (1 - 2g_s \Pi_{PP}(q)) \quad (\text{B.5})$$

Die Matrix \mathbf{M} ist hermitesch, d.h. es existiert eine Transformationsmatrix \mathbf{S} , sodass $\mathbf{M}_{\text{Dia}} = \mathbf{S}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{S}$ mit der Diagonalmatrix $\mathbf{M}_{\text{Dia}} = \text{diag}(\lambda_+, \lambda_-)$. Die Eigenwerte λ_+ und λ_- ergeben sich zu:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(A(q) + C(q) \pm \sqrt{(A(q) - C(q))^2 + 4B^2(q)} \right) \quad (\text{B.6})$$

Damit folgt für \mathbf{M} :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_+ - C(q)}{\sqrt{(\lambda_+ - C(q))^2 + B^2(q)}} & \frac{\lambda_- - C(q)}{\sqrt{(\lambda_- - C(q))^2 + B^2(q)}} \\ \frac{-iB(q)}{\sqrt{(\lambda_+ - C(q))^2 + B^2(q)}} & \frac{-iB(q)}{\sqrt{(\lambda_- - C(q))^2 + B^2(q)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_+ - C(q)}{\sqrt{(\lambda_+ - C(q))^2 + B^2(q)}} & \frac{iB(q)}{\sqrt{(\lambda_+ - C(q))^2 + B^2(q)}} \\ \frac{\lambda_- - C(q)}{\sqrt{(\lambda_- - C(q))^2 + B^2(q)}} & \frac{iB(q)}{\sqrt{(\lambda_- - C(q))^2 + B^2(q)}} \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Und schließlich für $T(q)$:

$$T(q) = -\frac{\delta_{ab}}{D(q)} (i\gamma_5 \tau^a, \hat{q}\gamma_5 \tau^a) \mathbf{S} \mathbf{M}_{\text{Dia}} \mathbf{S}^\dagger \begin{pmatrix} i\gamma_5 \tau^b \\ \hat{q}\gamma_5 \tau^b \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

$$= T_\pi(q) + T_{a_L}(q) \quad (\text{B.9})$$

mit

$$T_{a_L}^\pi(q) = \frac{-\delta_{ab} \lambda_{\pm}}{D(q) \left((\lambda_{\pm} - C(q))^2 + B^2(q) \right)} \left[(\lambda_{\pm} - C(q)) i\gamma_5 \tau^a - iB(q) \hat{q}\gamma_5 \tau^a \right] \otimes \left[(\lambda_{\pm} - C(q)) i\gamma_5 \tau^b + iB(q) \hat{q}\gamma_5 \tau^b \right] \quad (\text{B.10})$$

In Polapproximation wird $T(q)$ am Pol $q^2 = m_\pi^2$ ausgewertet. Wegen $\det(\mathbf{M}(m_\pi)) = -4g_s g_v D(m_\pi) = 0$ verschwindet der Eigenwert $\lambda_-(m_\pi)$ und damit auch der longitudinale axiale Anteil T_{a_L} . Übrig bleibt nur der reine Pionanteil:

$$T(q) \approx -\frac{\delta_{ab}}{q^2 - m_\pi^2} \frac{A(m_\pi) + C(m_\pi)}{A^2(m_\pi) + B^2(m_\pi)} \left(\lim_{q^2 \rightarrow m_\pi^2} \frac{D(q)}{q^2 - m_\pi^2} \right)^{-1}. \quad (\text{B.11})$$

$$\left[A(m_\pi) i\gamma_5 \tau^a - iB(m_\pi) \hat{q}\gamma_5 \tau^a \right] \otimes \left[A(m_\pi) i\gamma_5 \tau^b + iB(m_\pi) \hat{q}\gamma_5 \tau^b \right] \quad (\text{B.12})$$

$$= -\frac{\delta_{ab}}{q^2 - m_\pi^2} \left[g_{ps} i\gamma_5 \tau^a - ig_{pv} \hat{q}\gamma_5 \tau^a \right] \otimes \left[g_{ps} i\gamma_5 \tau^b + ig_{pv} \hat{q}\gamma_5 \tau^b \right] \quad (\text{B.13})$$

mit

$$g_{ps}^2 = \frac{(A(m_\pi) + C(m_\pi))A^2(m_\pi)}{A^2(m_\pi) + B^2(m_\pi)} \left(\frac{dD(q)}{dq^2} \Big|_{q^2=m_\pi^2} \right)^{-1} = A(m_\pi) \left(\frac{dD(q)}{dq^2} \Big|_{q^2=m_\pi^2} \right)^{-1} \quad (\text{B.14})$$

$$g_{pv}^2 = \frac{(A(m_\pi) + C(m_\pi))B^2(m_\pi)}{A^2(m_\pi) + B^2(m_\pi)} \left(\frac{dD(q)}{dq^2} \Big|_{q^2=m_\pi^2} \right)^{-1} = C(m_\pi) \left(\frac{dD(q)}{dq^2} \Big|_{q^2=m_\pi^2} \right)^{-1} \quad (\text{B.15})$$

Hierbei ist g_{ps} die Pseudo-Skalar- und g_{pv} die Pseudo-Vektor-Kopplung. Zur Vereinfachung von g_{ps} und g_{pv} wurde die Beziehung $\det(\mathbf{M}) = A(m_\pi)C(m_\pi) - B^2(m_\pi) = 0$ ausgenutzt. Bei der Berechnung der Ableitung der Determinanten wurde zuerst die Determinante mit Hilfe der Gap-Gleichung (2.38) vereinfacht und dann nach q^2 differenziert. Dies ergab:

$$\left. \frac{dD(q)}{dq^2} \right|_{q^2=m_\pi^2} = 4iN_c N_f \left[g_s I_2(m_\pi) + (g_s m_\pi^2 - 4g_v M m) \left. \frac{dI_2(q)}{dq^2} \right|_{q^2=m_\pi^2} \right] \quad (\text{B.16})$$

Die Rechnung zum Integral $dI_2(q)/dq^2$ befindet sich im Anhang A.3.

C Berechnung der Pionzerfallskonstante

$$f_\pi q^\mu \delta_{ab} = \underbrace{ig_{ps} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} S(k+q) \gamma_5 \tau^b S(k) \right]}_{(1)} - \underbrace{ig_{pv} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} S(k+q) \hat{q} \gamma_5 \tau^b S(k) \right]}_{(2)} \quad (C.1)$$

Im Folgendem wird die Rechnung für beide Terme separat durchgeführt. Für den ersten Term ergibt sich:

$$(1) = ig_{ps} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{\tau^a}{2} S(-k-q) \tau^b S(k) \right] \quad (C.2)$$

$$= \frac{1}{2} ig_{ps} N_c N_f \delta_{ab} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\frac{-\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta (k_\alpha + q_\alpha) k_\beta + M (\gamma^\mu \gamma^\beta k_\beta - \gamma^\mu \gamma^\alpha (k_\alpha + q_\alpha)) + M^2 \gamma^\mu}{((k+q)^2 - M^2 + i\epsilon)(k^2 - M^2 + i\epsilon)} \right] \quad (C.3)$$

$$= \frac{1}{2} ig_{ps} N_c N_f \delta_{ab} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-4M g^{\mu\alpha} q_\alpha}{((k+q)^2 - M^2 + i\epsilon)(k^2 - M^2 + i\epsilon)} \quad (C.4)$$

$$= -2ig_{ps} N_c N_f M I_2(q) q^\mu \delta_{ab} \quad (C.5)$$

Und für den zweiten Term:

$$(2) = -ig_{pv} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[-\gamma^\mu \frac{\tau^a}{2} S(-k-q) \hat{q} \tau^b S(k) \right] \quad (C.6)$$

$$= \frac{1}{2} ig_{pv} N_c N_f \delta_{ab} \frac{q_\beta}{\sqrt{q^2}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\frac{-\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta (k_\alpha + q_\alpha) k_\delta + M (\gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\delta k_\delta - \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta (k_\alpha + q_\alpha)) + M^2 \gamma^\mu \gamma^\beta}{((k+q)^2 - M^2 + i\epsilon)(k^2 - M^2 + i\epsilon)} \right] \quad (C.7)$$

$$= \frac{1}{2} ig_{pv} N_c N_f \delta_{ab} \frac{q_\beta}{\sqrt{q^2}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-4(g^{\mu\alpha} g^{\beta\delta} - g^{\mu\beta} g^{\alpha\delta} + g^{\mu\delta} g^{\alpha\beta})(k_\alpha + q_\alpha) k_\delta + 4M^2 g^{\mu\beta}}{((k+q)^2 - M^2 + i\epsilon)(k^2 - M^2 + i\epsilon)} \quad (C.8)$$

$$= -2ig_{pv} N_c N_f \delta_{ab} \frac{1}{\sqrt{q^2}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu (q^2 + 2kq) - q^\mu (k^2 + M^2)}{((k+q)^2 - M^2 + i\epsilon)(k^2 - M^2 + i\epsilon)} \quad (C.9)$$

$$= -2ig_{pv} N_c N_f \delta_{ab} \frac{1}{\sqrt{q^2}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu ((k+q)^2 - M^2) - q^\mu (k^2 + M^2) - k^\mu (k^2 - M^2)}{((k+q)^2 - M^2 + i\epsilon)(k^2 - M^2 + i\epsilon)} \quad (C.10)$$

$$= -2ig_{pv} N_c N_f \delta_{ab} \frac{1}{\sqrt{q^2}} \left(\underbrace{\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{k^2 - M^2 + i\epsilon}}_{=0} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-q^\mu (k^2 + M^2) - k^\mu (k^2 - M^2)}{((k+q)^2 - M^2 + i\epsilon)(k^2 - M^2 + i\epsilon)} \right) \quad (C.11)$$

$$\stackrel{k \rightarrow -k-q}{=} 2ig_{pv} N_c N_f \delta_{ab} \frac{1}{\sqrt{q^2}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{q^\mu ((k+q)^2 + M^2) - (k^\mu + q^\mu)((k+q)^2 - M^2)}{((k+q)^2 - M^2 + i\epsilon)(k^2 - M^2 + i\epsilon)} \quad (C.12)$$

$$= 2ig_{pv} N_c N_f \delta_{ab} \frac{1}{\sqrt{q^2}} \left(\underbrace{\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-k^\mu}{k^2 - M^2 + i\epsilon}}_{=0} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2M^2 q^\mu}{((k+q)^2 - M^2 + i\epsilon)(k^2 - M^2 + i\epsilon)} \right) \quad (C.13)$$

$$= 4ig_{pv} N_c N_f \frac{M^2}{\sqrt{q^2}} I_2(q) q^\mu \delta_{ab} \quad (C.14)$$

Ein Vergleich mit (C.1) und Einsetzen der Pionmasse ergibt:

$$f_\pi = 2iN_c N_f M I_2(m_\pi) \left(\frac{2M}{m_\pi} g_{pv} - g_{ps} \right) \quad (C.15)$$

Literatur

- [1] D. J. Gross and F. Wilczek. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Phys. Rev. Lett.*, 30:1343–1346, 1973.
- [2] D. J. Gross. Twenty five years of asymptotic freedom. *Nucl.Phys.Proc.Suppl.* 74:426-446, 1999. arXiv:hep-th/9809060v1.
- [3] F. Wilczek. Asymptotic freedom: From paradox to paradigm . *Proc.Nat.Acad.Sci.*102:8403-8413; *Int.J.Mod.Phys.A*20:5753-5778; *Rev.Mod.Phys.*77:857-870, 2005. arXiv:hep-ph/0502113v2.
- [4] K. Johnson A. Chodos, L. Jaffe. Baryon structure in the bag theory. *Phys. Rev. D*10, 2599, 1974.
- [5] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. i. *Phys. Rev.* 122, 345-358, 1961.
- [6] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. ii. *Phys. Rev.* 124, 246-254, 1961.
- [7] U. Vogl and W. Weise. The Nambu and Jona-Lasinio model: Its implications for hadrons and nuclei. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 27:195-272, 1991.
- [8] V. Koch. Aspects of chiral symmetry. *Int.J.Mod.Phys. E*6:203-250, 1997. arXiv:nucl-th/9706075v2.
- [9] S. P. Klevansky. The Nambu-Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics. *Rev. Mod. Phys.*, 64(3):649-708, 1992.
- [10] M. E. Peskin and D. V. Schröder. *An Introduction To Quantum Field Theory*. Perseus Books, 1995.
- [11] M. Buballa. NJL-model analysis of dense quark matter. *Phys.Rept.* 407:205-376, 2005. arXiv:hep-ph/0402234v2.
- [12] M. Oertel. *Investigation of meson loop effects in the Nambu-Jona-Lasinio model*. Dissertation, Institut für Kernphysik. Technische Universität Darmstadt, 2000. arXiv:hep-ph/0012224v1.
- [13] M. Oertel, M. Buballa, and J.Wambach. Meson properties in the $1/N_c$ corrected NJL model. *Nucl.Phys. A*676:247-272, 2000. arXiv:hep-ph/0001239v1.
- [14] S. P. Klevansky and R. H. Lemmer. Spectral density functions and their sum rules in an effective chiral field theory. 1997. arXiv:hep-ph/9707206v1.
- [15] J. Beringer et al. Review of particle physics. *Phys. Rev. D* 86, 010001, 2012.
- [16] F. Scheck. *Theoretische Physik 4*. Springer, 2001.
- [17] A. Polleri, R. A. Broglia, P. M. Pizzochero, and N. N. Scoccola. Rho meson properties in the Nambu-Jona-Lasinio model. *Z.Phys. A*357: 325-331, 1997. arXiv:hep-ph/9611300v1.
- [18] S. Klimt, M. Lutz, U. Vogl, and W. Weise. Generalized SU(3) Nambu-Jona-Lasinio model (II). from current to constituent quarks. *Nucl. Phys. A*, 516:469-495, 1990.
- [19] G. Ecker. Quantum chromodynamics. 2006. arXiv:hep-ph/0604165v1.
- [20] D. G. Richards. Lattice gauge theory- QCD from quarks to hadrons. 2000. arXiv:nucl-th/0006020v2.
- [21] S. Klimt, M. Lutz, U. Vogl, and W. Weise. Generalized SU(3) Nambu-Jona-Lasinio model (I). mesonic modes . *Nucl. Phys. A*, 516:429-468, 1990.
- [22] S. Möller. Pion-Pion scattering and shear viscosity in the Nambu-Jona-Lasinio model. Master's thesis, Institut für Kernphysik. Technische Universität Darmstadt, 2012. URL: <http://theorie.ikp.physik.tu-darmstadt.de/nhc/pages/thesis/master.moeller.pdf>.
- [23] K. Heckmann. Die Scherviskosität im Nambu-Jona-Lasinio-Modell. Diplomarbeit, Institut für Kernphysik. Technische Universität Darmstadt, 2007. URL: <http://crunch.ikp.physik.tu-darmstadt.de/nhc/pages/thesis/diplom.heckmann.pdf>.
- [24] Y. B. He, J. Hüfner, S.P. Klevansky, and P. Rehberg. $\pi\pi$ scattering in the ρ -meson channel at finite temperature. *Nucl.Phys. A*630: 719-742, 1998. arXiv:nucl-th/9712051v1.