Rechenmethoden

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. Schramm

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2016
8. Übungsblatt 1./3. Juni 2016

Aufgabe P23:

Ein Vektor $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ im zweidimensionalen Raum kann allgemein durch die Angabe von zwei Koordinaten u_1 und u_2 beschrieben werden. Neben den kartesischen Koordinaten $(u_1, u_2) = (x, y)$ sind die so genannten zweidimensionalen Polarkoordinaten besonders gebräuchlich. Dabei charakterisiert man den Vektor durch seine Länge r und durch den Winkel φ zur x-Achse, $(u_1, u_2) = (r, \varphi)$.

a) Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen kartesischen und Polarkoordinaten indem Sie r und φ durch x und y ausdrücken und umgekehrt. Machen Sie sich dazu eine Skizze.

b) Hält man bei der Funktion $\vec{r}(u_1, u_2)$ jeweils eine der beiden Koordinaten fest und betrachtet die andere als variabel, erhält man die Koordinatenlinien

$$L_1: \quad \vec{r}_1(u_1) = \vec{r}(u_1, u_2 = c_2), \qquad L_2: \quad \vec{r}_2(u_2) = \vec{r}(u_1 = c_1, u_2)$$

die sich im Punkt $\vec{r}(c_1, c_2)$ schneiden.
Veranschaulichen Sie L_1 und L_2 sowohl für die kartesischen, als auch für die Polarkoordinaten anhand einer Skizze.

c) Um weitere Vektoren, wie z.B. die Geschwindigkeit, zu beschreiben, ist es zweckmäßig jedem Ortsvektor einen Satz von normierten Basisvektoren zuzuordnen, die jeweils tangential zu den Koordinatenlinien gerichtet sind. Wie in der Vorlesung besprochen wurde, sind diese durch

$$\vec{e}_{u_i} = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}\right|^{-1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$$

gegeben.
Berechnen Sie nach dieser Vorschrift die Einheitsvektoren $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$ und zeigen Sie, dass sie orthogonal zueinander sind. Was ist der prinzipielle Unterschied zwischen dieser und der kartesischen Basis? Veranschaulichen Sie die Bedeutung von $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$, indem Sie sie in der Skizze aus Aufgabe b) einzeichnen.

d) Geben Sie einen beliebigen Vektor $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y$ in der Basis $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ an. Was ergibt sich für $\vec{a} = \vec{r}$?

e) Sei nun $\vec{r}(t) \equiv \vec{r}(r(t), \varphi(t))$ der Ortsvektor eines sich in der Ebene bewegenden Teilchens zum Zeitpukt t.
Wie lauten der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ und die Beschleunigung $\ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ in der Basis $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$?

Aufgabe H23: (4 Punkte)

Ein Teilchen bewege sich mit konstanter Winkelgescheindigkeit $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ entlang einer Kreisbahn mit Radius R um den Koordinatenursprung. Zur Zeit $t = 0$ befinde es sich auf der positiven x-Achse. Da die Bewegung in der xy-Ebene stattfindet ($z = 0$), können wir uns auf ein zweidimensionales Koordinatensystem beschränken.

a) Geben Sie den zeitabängigen Ortsvektor des Teilchens in kartesischen Koordinaten an.

b) Wie lauten die zweidimensionalen Polarkoordinaten r und φ sowie die Einheitsvektoren $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$ als Funktion der Zeit (ausgedrückt in der kartesischen Basis)?

c) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(t)$ und die Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}(t)$ bezüglich der Basis $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$. In welchem Winkel stehen sie jeweils zum Ortsvektor $\vec{r}(t)$?

Aufgabe H24: (5 Punkte)

Ein Teilchen bewege sich in einer Ebene entlang einer so genannten Kardioide, deren Bahn durch die Relation

$$r(\varphi) = r_0(1 + \cos\varphi)$$

gegeben ist. Dabei sind r und φ die zweidimensionalen Polarkoordinaten und r_0 eine Konstante.

a) Zeichnen Sie die Bahn des Teilchens.

b) Da sich das Teilchen bewegt, ist $\varphi = \varphi(t)$ eine zeitabhängige Funktion. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ und die Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}$ in Polarkoordinaten als Funktion von φ und dessen Zeitableitungen.

c) Sei nun $\varphi(t) = \omega t$, ω =const. Bei welchem Winkel φ ist dann der Betrag der Geschwindigkeit minimal, bei welchem Winkel der Betrag der Beschleunigung? Wie groß sind diese minimalen Beträge?

Aufgabe H25: (6 Punkte)

Ein Teilchen mit Masse m und elektrischer Ladung q bewege sich entlang einer Schraubenlinie mit konstantem Abstand R zur z-Achse eines kartesischen Koordinatensystems. Dabei beschreibt die Projektion des Ortsvektors auf die xy-Ebene eine Kreisbahn, die entgegen dem Uhrzeigersinn mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in der Umlaufperiode T durchlaufen wird. Gleichzeitig besitzt das Teilchen eine konstante Geschwindigkeitskomponente in z-Richtung, die pro Umlauf einen Höhenzuwachs um h bewirkt. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das Teilchen auf der x-Achse.

a) Welches Koordinatensystem bietet sich zur Beschreibung der Teilchenbahn an? Bestimmen Sie die entsprechenden Koordinaten als Funktionen der Zeit und geben Sie den Ortsvektor $\vec{r}(t)$ in diesem Koordinatensystem an.

b) Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{r}}$ und den Beschleunigungsvektor $\ddot{\vec{r}}$.

c) Das Teilchen bewege sich in einem konstanten Magnetfeld, das durch $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ gegeben ist. Bestimmen Sie die Lorentz-Kraft $\vec{F}_L = q\dot{\vec{r}} \times \vec{B}$, die dabei auf das Teilchen wirkt.
Wenn keine weitere Kraft auf das Teilchen wirkt, muss die in Aufgabenteil b) berechnete Beschleunigung durch die Loretz-Kraft hervorgerugen werden: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_L$. Was ergibt sich daraus für das Verhältnis q/m?